

比例粘性減衰を考慮した周波数応答問題における領域最適化解析*

呉 志 強*¹, 曾我部 雄次*¹, 畔上 秀幸*²Domain Optimization Analysis in Frequency Response Problems
Considering Proportional Viscous Damping

Zhiqiang WU, Yoji SOGABE and Hideyuki AZEGAMI

The purpose of this paper is to present a numerical method for shape optimization problems related to frequency response problems of linear elastic continuum. Following the previous report in which no damping was assumed, proportional viscous damping is considered in this paper. Minimization problems of strain energy, kinetic energy and absolute value of mean compliance are treated. A variational form of an equation of motion is obtained with complex number of displacement amplitude. Sensitivity function, that is called shape gradient function, is derived using the Lagrange multiplier method. A technique using modal parameters for calculation of Lagrange multiplier function, that is called adjoint function, is shown. The traction method is applied for numerical analysis. Beamlike plate problems are analyzed to show the validity of this approach.

Key Words: Optimum Design, Computer-Aided Design, Finite-Element Method, Vibration of Continuous System, Modal Analysis, Domain Optimization, Speed Method, Gradient Method, Traction Method

1. はじめに

機械や構造物の振動が問題となった場合、励振力が推定可能であれば構造部材の形状を設計対象にして周波数応答特性を改善することによって解決できる可能性がある。特に、構造部材を線形弾性連続体と仮定して、それが定義されている領域の幾何学的形状を設計対象にした周波数応答特性の最小化問題を解析することができれば、特定の寸法のみを設計変数に選んだ最適化問題の解よりも優れた結果が得られると考えられる。

この観点から、著者ら⁽¹⁾は前報において減衰がない場合の周波数応答特性に関する領域形状の最適化問題に関してその解法を提示した。本論文では、前報に続いて、比例粘性を有する場合の周波数応答問題に対する実用的な形状最適化解析法について検討を加えてみたい。

周波数応答特性の最適化問題に関する研究はいくつか報告されている。しかし、それらのほとんどはばね

質点系、あるいは連続体であっても有限要素法の手続きを経た離散自由度系において最適化問題を定式化して、数値計画法などを利用して解いた例がほとんどである。分布系の最適化理論を適用した研究例はごく限られている。井上⁽²⁾は平板の板厚を設計変数にした運動エネルギー最小化問題に対して感度を計算し、解析例を示した。Chen⁽³⁾は周波数応答関数を制約条件とした形状最適化問題を扱い、トラス構造の各部材の断面積を設計変数にした解析例を示した。この二つの研究は周波数応答関数を固有振動数と固有振動モードの関数として表し、各固有振動数と固有振動モードの感度を求めることにより、周波数応答関数の感度を計算した。この方法は離散系で各固有振動数と固有振動モードの感度を求めるため、そのまま分布系の形状最適化問題に適用した場合、自由度が急激に増加することから計算コストが高くなることが予想される。特に重根問題が存在する場合にさらにその複雑さが増す。また、多田⁽⁴⁾は、特定された周波数領域におけるランダム荷重を受ける構造物の振動を取上げ、ひずみエネルギーの期待値最小化問題に対して疑似感度を利用した近似解法を示した。この研究では、計算コストを抑えるために変位の設計変数に関する導関数を無視した感度が用いられた。

* 原稿受付 1997年4月21日。

¹ 正員、愛媛大学工学部(☎790-0826 松山市文京町3)。² 正員、豊橋技術科学大学(☎441-8122 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)。

本研究では、前報⁽¹⁾と同じように、ひずみエネルギー、運動エネルギーおよび平均コンプライアンスの絶対値を最小化する問題について検討する。まず、単一の周波数で加振された場合において、感度に相当する形状こう配関数を分布系の最適化理論に基づいて導出する。さらに、任意の加振力が作用した場合の応答関数の最小化問題に拡張する。数値解析法には、著者一ら⁽⁵⁾⁽⁶⁾によって提案されている円形境界値問題に対する領域形状最適化問題の解法である力法を適用する。最後に、導出された形状こう配関数を用いた力法が有効に機能することを数値解析例を通して示す。

2. 領域変動と汎関数の導関数

最初に、領域変動の表記法⁽⁵⁾⁽⁷⁾について簡単に説明する。

図1のように、領域 $\Omega \subset R^n, n=2,3$, 境界 Γ の線形弾性連続体の変動して、領域 Ω_s , 境界 Γ_s になることを仮定する。媒介変数 s は変動履歴を表すことにする。なお、本論文では、 R を実数の意味で用いる。

この領域変動は次のような初期領域 Ω を定義域とした一対一写像 $\bar{T}_s(\Omega)$ を用いて表現することができる。

$$\bar{T}_s(\Omega): \Omega \ni \bar{X} \rightarrow \bar{x} \in \Omega_s \dots\dots\dots (1)$$

$$\bar{T}_s^{-1}(\Omega_s): \Omega_s \ni \bar{x} \rightarrow \bar{X} \in \Omega \dots\dots\dots (2)$$

なお、本論文では、ベクトルを $(\bar{\cdot})$ と表す。ただし、 $\bar{T}_s(\Omega)$ は領域の位相を変えないことと領域変動に関する拘束条件の集合 θ を考慮して、次のような集合の要素とする。

$$\bar{T}_s(\Omega) \in D = \{ \bar{T}_s(\Omega) \in (C^0(\Omega))^n \mid \theta \} \dots\dots\dots (3)$$

なお、 $(C^m(\Omega))^n$ は Ω で定義された m 階の導関数まで連続な n 次元連続ベクトル関数空間を表す。領域変動に伴う汎関数の導関数は次のような物質導関数の公式を適用することができる。分布関数 ϕ_s の領域汎関数 J_{Ω_s} と境界汎関数 J_{Γ_s} 。

$$J_{\Omega_s} = \int_{\Omega_s} \phi_s dx \dots\dots\dots (4)$$

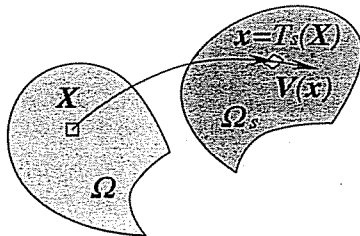


Fig. 1 Domain Variation

$$J_{\Gamma_s} = \int_{\Gamma_s} \phi_s d\Gamma \dots\dots\dots (5)$$

の s に対する導関数 \dot{J}_{Ω_s} と \dot{J}_{Γ_s} はそれぞれ次式で与えられる。

$$\dot{J}_{\Omega_s} = \int_{\Omega_s} \dot{\phi}_s dx + \int_{\Gamma_s} \phi_s v_n d\Gamma \dots\dots\dots (6)$$

$$\dot{J}_{\Gamma_s} = \int_{\Gamma_s} \{ \dot{\phi}_s + (\phi_s, i n_i + \phi_s k) v_n \} d\Gamma \dots\dots\dots (7)$$

ただし、 $v_n = n_i V_i$ を表し、 \bar{n} は外向単位法線ベクトル、 \bar{V} は $\bar{T}_s(\Omega)$ の s に対する導関数で速度場と呼ばれ、次式のように定義される。

$$\bar{V}(\Omega_s) = \frac{\partial \bar{T}_s(\Omega)}{\partial s} (\bar{T}_s^{-1}(\Omega_s)) \dots\dots\dots (8)$$

k は領域が二次元の場合曲率、三次元の場合平均曲率を表している。なお、本論文では、下付添字 i, j, k, l を用いたテンソル表示において総和規約と偏微分表示 $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$ を使用する。また、 $\phi'_s(\Omega_s)$ は空間 (Ω_s) に固定された $\phi_s(\Omega_s)$ の導関数で次式で定義される。

$$\phi'_s(\Omega_s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} (\phi_s + \Delta_s(\Omega_s) - \phi_s(\Omega_s)) \dots\dots\dots (9)$$

3. 周波数応答解析

周波数応答特性に関する領域最適化問題を定式化するための準備として、周波数応答解析の基礎式をまとめておく。本研究では減衰を考慮するが、減衰のメカニズムは複雑で、厳密に定式化することは難しい。多くの場合、数学的扱いの容易さから、比例粘性減衰の仮定が用いられる。本研究でも比例粘性減衰の仮定を用いる。

線形弾性連続体に励振力が作用した場合の運動方程式を定式化する。連続体の境界 Γ_s の部分境界 Γ_{s1} では変位が拘束され、残りの境界 Γ_{s2} に任意の励振力 $\bar{p}(t, \Gamma_{s2})$ が加えられている状態を仮定する。この場合の運動方程式を変分形式で次のように記述できる。

$$a(\bar{u}, \bar{v}) + c(\bar{u}_t, \bar{v}) + b(\bar{u}_u, \bar{v}) = d(\bar{p}, \bar{v})$$

$$\bar{u} \in U \forall \bar{v} \in U \dots\dots\dots (10)$$

ただし、変位 $\bar{u}(t, \bar{x})$, 変分変位 $\bar{v}(t, \bar{x}), t \in R, \bar{x} \in \Omega_s$, および調和力 \bar{p} に対する双一次形式 $a(\bar{u}, \bar{v}), b(\bar{u}, \bar{v}), d(\bar{p}, \bar{v})$ は次のように定義する。

$$a(\bar{u}, \bar{v}) = \int_{\Omega_s} C_{ijkl} u_{i,j} v_{i,j} dx \dots\dots\dots (11)$$

$$b(\bar{u}, \bar{v}) = \int_{\Omega_s} \rho u_i v_i dx \dots\dots\dots (12)$$

$$d(\bar{p}, \bar{v}) = \int_{\Gamma_{s2}} p_i v_i d\Gamma \dots\dots\dots (13)$$

また、比例粘性減衰を仮定すると双一次形式 $c(\bar{u}, \bar{v})$ は次式で与えられる。

$$c(\bar{u}_t, \bar{v}) = \alpha b(\bar{u}_t, \bar{v}) + \beta a(\bar{u}_t, \bar{v}) \dots\dots\dots (14)$$

変位の許容関数空間 U は次式で与える。

$$U = \{ \bar{v} \in (H^1(R, \Omega_s))^n \mid \bar{v}(R, \Gamma_{s1}) = \bar{0} \} \dots\dots (15)$$

なお、本論文では時間 t に関する導関数を $(\cdot)_t$ で表す。また、 $H^m(R, \Omega_s)$ は Sobolev 空間を表す。

ここで、任意の励振力は Fourier 変換によって調和力の重ね合せに変換できることから、調和力に対する変位応答に関する運動方程式を考える。すなわち、励振力 $\bar{p}(t, \Gamma_{s2}) = \bar{P}(\Gamma_{s2}) \cos \omega t = \bar{P}(\Gamma_{s2})(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})/2$ を仮定する。ただし、 $j = \sqrt{-1}$ である。ここで、変位の実時間関数 $\bar{u}(t, \Omega_s)$ に対して、次式で定義される複素数振幅 $\bar{u}(\omega, \Omega_s)$:

$$\bar{u} = \frac{\bar{u}(\omega)e^{j\omega t} + \bar{u}^*(\omega)e^{-j\omega t}}{2} \dots\dots (16)$$

を用いれば、運動方程式(10)は次のように記述できる。なお、 $(\cdot)^*$ は共役複素数を表す。

$$\begin{aligned} \{ a(\bar{u}, \bar{v}) + j\omega c(\bar{u}, \bar{v}) - \omega^2 b(\bar{u}, \bar{v}) - d(\bar{P}, \bar{v}) \} e^{j\omega t} \\ + \{ a(\bar{u}^*, \bar{v}) - j\omega c(\bar{u}^*, \bar{v}) - \omega^2 b(\bar{u}^*, \bar{v}) \\ - d(\bar{P}, \bar{v}) \} e^{-j\omega t} = 0 \\ \bar{u} e^{j\omega t} + \bar{u}^* e^{-j\omega t} \in U \forall \bar{v} \in U \dots\dots (17) \end{aligned}$$

さらに、次式で定義される変分変位の複素数表示:

$$\bar{v} = \bar{v} e^{j\omega t} \dots\dots (18)$$

を用いれば、運動方程式(17)は次のように記述できる。

$$\begin{aligned} \{ a(\bar{u}, \bar{v}) + j\omega c(\bar{u}, \bar{v}) - \omega^2 b(\bar{u}, \bar{v}) - d(\bar{P}, \bar{v}) \} \\ + \{ a(\bar{u}^*, \bar{v}^*) - j\omega c(\bar{u}^*, \bar{v}^*) - \omega^2 b(\bar{u}^*, \bar{v}^*) \\ - d(\bar{P}, \bar{v}^*) \} = 0 \\ \bar{u} e^{j\omega t} + \bar{u}^* e^{-j\omega t} \in U \forall \bar{v} + \bar{v}^* \in U \dots\dots (19) \end{aligned}$$

比例粘性減衰の関係式(14)を仮定すれば次の運動方程式を得る。

$$\begin{aligned} \{ (1 + j\omega\beta) a(\bar{u}, \bar{v}) - (\omega^2 - j\omega\alpha) b(\bar{u}, \bar{v}) \\ - d(\bar{P}, \bar{v}) \} + \{ (1 - j\omega\beta) a(\bar{u}^*, \bar{v}^*) \\ - (\omega^2 + j\omega\alpha) b(\bar{u}^*, \bar{v}^*) - d(\bar{P}, \bar{v}^*) \} = 0 \\ \bar{u} e^{j\omega t} + \bar{u}^* e^{-j\omega t} \in U \forall \bar{v} + \bar{v}^* \in U \dots\dots (20) \end{aligned}$$

運動方程式(20)を満たす複素数振幅 \bar{u} は、モード解析の結果を用いて計算することができる。 r 次の正規固有振動モードを $\bar{u}_{(r)}$ 、それに対する振動固有値を $\lambda_{(r)}$ で表すと、固有振動方程式と正規化条件は次式のようになる。

$$\begin{aligned} a(\bar{u}_{(r)}, \bar{v}) = \lambda_{(r)} b(\bar{u}_{(r)}, \bar{v}) \\ \bar{u}_{(r)} \in U \forall \bar{v} \in U \dots\dots (21) \end{aligned}$$

$$b(\bar{u}_{(r)}, \bar{u}_{(r)}) = 1 \dots\dots (22)$$

C_{ijkl} と ρ が実関数であることと $a(\cdot, \cdot)$ と $b(\cdot, \cdot)$ の対称性と正定値性を考慮すると式(21)は実固有値問題となり、適当な数値解法を用いることによって次のような直交性を有した解 $\bar{u}_{(r)}$ を得ることができる。

$$b(\bar{u}_{(m)}, \bar{u}_{(r)}) = \delta_{mr} \dots\dots (23)$$

$$a(\bar{u}_{(m)}, \bar{u}_{(r)}) = \lambda_{(r)} \delta_{mr} \dots\dots (24)$$

ただし、 δ_{mr} は Kronecker デルタである。この直交性に基づけば、式(20)の複素数振幅 \bar{u} はモード座標 $\xi_{(r)}$ を用いて次式のように表すことができる。

$$\bar{u} = \sum_{r=1}^{\infty} \xi_{(r)} \bar{u}_{(r)} \dots\dots (25)$$

$$\begin{aligned} \xi_{(r)} = \frac{l(\bar{u}_{(r)})}{\lambda_{(r)} - \omega^2 + j\omega(\beta\lambda_{(r)} + \alpha)} \\ r \in \{1, 2, \dots, \infty\} \dots\dots (26) \end{aligned}$$

4. ひずみエネルギー最小化問題

ひずみエネルギーを最小化する問題を考えよう。最初に問題の定式化を行ってから、最適性規準を導出する。形状こう配関数はその最適性規準を使って導出する。

4.1 定式化 線形弾性連続体の領域変動は2章の方法に従って定式化する。ただし、簡単のために、調和力が作用する境界は変動を拘束する[式(3)の θ の要素とする]。このとき、系全体のひずみエネルギー

$$W = \frac{1}{2} a(\bar{u}, \bar{u}^*) \dots\dots (27)$$

を目的汎関数にした最小化問題は次のように定式化することができる。

▷問題1: 領域の大きさに対する上限値 $0 < M \in R$ が与えられているとき、系全体のひずみエネルギー W が最小となる領域 Ω_s を求めよ。ただし、運動方程式(20)および質量制約

$$m = \int_{\Omega_s} dx \leq M \dots\dots (28)$$

は満たしていなければならない。◁

4.2 最適性規準 問題1は、次のような Lagrange 汎関数 $L(\bar{u}, \bar{v}, \Lambda, \bar{T}_s)$ を用いた Lagrange 乗数法によって制約条件のない停留化問題に書き換えることができる。

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2} a(\bar{u}, \bar{v}^*) - \{ (1 + j\omega\beta) a(\bar{u}, \bar{v}) \\ - (\omega^2 - j\omega\alpha) b(\bar{u}, \bar{v}) - d(\bar{P}, \bar{v}) \} \\ - \{ (1 - j\omega\beta) a(\bar{u}^*, \bar{v}^*) - (\omega^2 + j\omega\alpha) b(\bar{u}^*, \bar{v}^*) \\ - d(\bar{P}, \bar{v}^*) \} + \Lambda(m - M) \dots\dots (29) \end{aligned}$$

この場合、 \bar{v} は運動方程式に対する Lagrange 乗関数(あるいは随伴変関数)、 Λ は質量制約に対する Lagrange 乗数として用いた。領域変動に対する L の s に対する導関数 \dot{L} は、式(6)と(7)の関係を用いて次のように得ることができる。

$$\begin{aligned} \dot{L} = - \{ (1 + j\omega\beta) a(\bar{u}, \bar{v}') - (\omega^2 - j\omega\alpha) b(\bar{u}, \bar{v}') \\ - d(\bar{P}, \bar{v}') \} - \{ (1 - j\omega\beta) a(\bar{u}^*, \bar{v}'^*) \\ - (\omega^2 + j\omega\alpha) b(\bar{u}^*, \bar{v}'^*) - d(\bar{P}, \bar{v}'^*) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\left\{(1+j\omega\beta)a(\bar{u}', \bar{v}) - (\omega^2 - j\omega\alpha)b(\bar{u}', \bar{v})\right. \\
 & \left. - \frac{1}{2}a(\bar{u}', \bar{v}^*)\right\} - \left\{(1-j\omega\beta)a(\bar{u}^*, \bar{v}^*)\right. \\
 & \left. - (\omega^2 + j\omega\alpha)b(\bar{u}^*, \bar{v}^*) - \frac{1}{2}a(\bar{u}, \bar{u}^*)\right\} \\
 & + \Lambda(m-M) + l_c(\bar{V}) \dots\dots\dots (30)
 \end{aligned}$$

ただし,

$$l_c(\bar{V}) = \int_{r_s} G(\bar{u}, \bar{v}) n_i V_{id} \Gamma \dots\dots\dots (31)$$

$$\begin{aligned}
 G(\bar{u}, \bar{v}) &= \frac{1}{2} C_{ijk} \bar{u}_{k,i} \bar{u}_{i,j}^* \\
 & - 2 \operatorname{Re}[(1+j\omega\beta)C_{ijk} \bar{u}_{k,i} \bar{v}_{i,j} \\
 & - (\omega^2 + j\omega\alpha)\rho \bar{u}_i \bar{v}_i] + \Lambda \dots\dots\dots (32)
 \end{aligned}$$

なお, $\operatorname{Re}[\cdot]$ は複素数の実部を表す。ここで, $\bar{u}, \bar{v}, \Lambda$ に関する次のような停留条件(Kuhn-Tucker 条件の一部)が満たされている場合を考える。

$$\begin{aligned}
 & \left\{(1+j\omega\beta)a(\bar{u}, \bar{v}') - (\omega^2 - j\omega\alpha)b(\bar{u}, \bar{v}')\right. \\
 & \left. - d(\bar{P}, \bar{v}')\right\} + \left\{(1-j\omega\beta)a(\bar{u}^*, \bar{v}^*)\right. \\
 & \left. - (\omega^2 + j\omega\alpha)b(\bar{u}^*, \bar{v}^*) - d(\bar{P}, \bar{v}^*)\right\} = 0 \\
 & \forall \bar{v}' + \bar{v}^* \in U \dots\dots\dots (33)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{(1+j\omega\beta)a(\bar{u}', \bar{v}) - (\omega^2 - j\omega\alpha)b(\bar{u}', \bar{v})\right. \\
 & \left. - \frac{1}{2}a(\bar{u}', \bar{u}^*)\right\} + \left\{(1-j\omega\beta)a(\bar{u}^*, \bar{v}^*)\right. \\
 & \left. - (\omega^2 + j\omega\alpha)b(\bar{u}^*, \bar{v}^*) - \frac{1}{2}a(\bar{u}, \bar{u}^*)\right\} = 0 \\
 & \forall \bar{u}' + \bar{u}^* \in U \dots\dots\dots (34)
 \end{aligned}$$

$$m - M \leq 0, \Lambda(m - M) = 0 \text{ and } \Lambda \geq 0 \dots\dots (35)$$

ここで, 式(33)は本来の運動方程式を表し, この関係から \bar{u} を決定することができる。式(34)は \bar{v} を決定するための随伴方程式と呼ばれる。式(35)は Λ の決定条件を与える。

これらの関係によって, $\bar{u}, \bar{v}, \Lambda$ が決定されたならば, Lagrange 汎関数の導関数 $\dot{L}|\bar{u}, \bar{v}, \Lambda$ は目的汎関数の導関数 $\dot{W}|\bar{u}, \bar{v}, \Lambda$ と一致し, 次のような関係に帰着する。

$$\dot{L}|\bar{u}, \bar{v}, \Lambda = \dot{W}|\bar{u}, \bar{v}, \Lambda = l_c(\bar{V}) \dots\dots\dots (36)$$

ここで, 式(31)におけるベクトル関数 $G(\bar{u}, \bar{v})\bar{n}$ は設計変関数の変動を意味する速度場の係数関数になっていることから, $G(\bar{u}, \bar{v})\bar{n}$ をこの問題における形状こう配関数と呼ぶ。特に, 式(32)で与えられたスカラー関数 G はこの問題における形状こう配密度関数と呼ぶ。

形状こう配密度関数 G の計算方法を考えよう。複素数変位振幅 \bar{u} はモード解析の結果を利用して式(25)で計算できる。また, 複素数随伴変位 \bar{v} は次のように解析できる。 \bar{v} は, \bar{u} と同様, 正規固有振動モード $\bar{u}_{(r)}$ の線形結合で次のように記述できる。

$$\bar{v} = \sum_{r=1}^{\infty} \eta_{(r)} \bar{u}_{(r)} \quad r \in \{1, 2, \dots, \infty\} \dots\dots\dots (37)$$

この関係と式(25)を随伴方程式(34)に代入して, $\bar{u}' = \bar{u}_{(m)}$ を仮定して, 固有振動モードの直交性と正規性を考えると次式を得る。

$$\begin{aligned}
 \eta_{(m)} &= \frac{1}{2} \frac{\lambda_{(m)} \xi_{(m)}^*}{\lambda_{(m)} + j\omega(\beta\lambda_{(m)} + \alpha) - \omega^2} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\lambda_{(m)} l(\bar{u}_{(r)})}{(\lambda_{(m)} - \omega^2)^2 + \omega^2(\beta\lambda_{(m)} + \alpha)^2} \dots\dots\dots (38)
 \end{aligned}$$

したがって, この結果を式(37)に代入することによって \bar{v} の計算式を得る。

$$\begin{aligned}
 \bar{v} &= \sum_{r=1}^{\infty} \eta_{(r)} \bar{u}_{(r)} \\
 &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{\lambda_{(r)} l(\bar{u}_{(r)})}{(\lambda_{(r)} - \omega^2)^2 + \omega^2(\beta\lambda_{(r)} + \alpha)^2} \bar{u}_{(r)} \dots\dots\dots (39)
 \end{aligned}$$

5. 運動エネルギー最小化問題

運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2} \omega^2 b(\bar{u}, \bar{u}^*) \dots\dots\dots (40)$$

の最小化問題を4章と同様に定式化し, 形状こう配密度関数を導出すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 G(\bar{u}, \bar{v}) &= \frac{1}{2} \omega^2 \rho \bar{u}_i \bar{v}_i^* \\
 & - 2 \operatorname{Re}[(1+j\omega\beta)C_{ijk} \bar{u}_{k,i} \bar{v}_{i,j} \\
 & - (\omega^2 - j\omega\alpha)\rho \bar{u}_i \bar{v}_i] + \Lambda \dots\dots\dots (41)
 \end{aligned}$$

ただし, この問題の随伴方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 & \left\{(1+j\omega\beta)a(\bar{u}', \bar{v}) - (\omega^2 - j\omega\alpha)b(\bar{u}', \bar{v})\right. \\
 & \left. - \frac{1}{2}\omega^2 b(\bar{u}', \bar{u}^*)\right\} + \left\{(1+j\omega\beta)a(\bar{u}^*, \bar{v}^*)\right. \\
 & \left. - (\omega^2 - j\omega\alpha)b(\bar{u}^*, \bar{v}^*) - \frac{1}{2}\omega^2 b(\bar{u}, \bar{u}^*)\right\} \\
 & = 0 \quad \forall \bar{v} + \bar{v}^* \in U \dots\dots\dots (42)
 \end{aligned}$$

モード解析結果を利用すると, \bar{v} は次のように計算できる。

$$\bar{v} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{\omega^2 l(\bar{u}_{(r)})}{(\lambda_{(r)} - \omega^2)^2 + \omega^2(\beta\lambda_{(r)} + \alpha)^2} \bar{u}_{(r)} \dots\dots\dots (43)$$

6. 平均コンプライアンス絶対値の最小化問題

平均コンプライアンスの絶対値

$$C = \left| \frac{1}{2} d(\bar{P}, \bar{u} + \bar{u}^*) \right| \dots\dots\dots (44)$$

の最小化問題を前章までと同様に定式化し, 形状こう配密度関数を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 G(\bar{u}, \bar{v}) &= -2 \operatorname{Re}[(1+j\omega\beta)C_{ijk} \bar{u}_{k,i} \bar{v}_{i,j} \\
 & + (\omega^2 - j\omega\alpha)\rho \bar{u}_i \bar{v}_i] + \Lambda \dots\dots\dots (45)
 \end{aligned}$$

ただし、この問題の随伴方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \left\{ (1+j\omega\beta)a(\bar{u}', \bar{v}) - (\omega^2 - j\omega\alpha)b(\bar{u}', \bar{v}) \right. \\ & \quad \left. - \text{sign}(d(\bar{P}, \bar{u}))\frac{1}{2}d(\bar{P}, \bar{u}' + \bar{u}^*) \right\} \\ & + \left\{ (1+j\omega\beta)a(\bar{u}^*, \bar{v}^*) \right. \\ & \quad \left. - (\omega^2 - j\omega\alpha)b(\bar{u}^*, \bar{v}^*) \right. \\ & \quad \left. - \text{sign}(d(\bar{P}, \bar{u} + \bar{u}^*))\frac{1}{2}d(\bar{P}, \bar{u}^*) \right\} \\ & = 0 \quad \forall \bar{v} + \bar{v}^* \in U \dots\dots\dots (46) \end{aligned}$$

ここで、 $\text{sign}(\cdot)$ は符号関数である。この式と運動方程式を比較すると、 \bar{v} は次の準自己随伴関係によって計算できる。

$$\bar{v} = \text{sign}(d(\bar{P}, \bar{u} + \bar{u}^*))\frac{1}{2}\bar{u}^* \dots\dots\dots (47)$$

7. 広帯域加振の場合

6章まで扱ってきた目的汎関数は単一の調和励振力 $\bar{p}(t, \Gamma_{s2}) = \bar{P}(\Gamma_{s2})\cos \omega t$ を想定していた。したがって、これまでの目的汎関数は単一の周波数成分のみ卓越して存在する加振力の場合に有効であった。

励振力が広帯域の周波数成分からなる任意の時間関数で与えられる場合には、単一周波数の場合の目的汎関数を励振力が存在する周波数領域に渡って積分した汎関数を新たな目的汎関数とした問題を設定する必要がある。このような場合には、通常、パワースペクトル密度の概念が用いられる。加振力 $\bar{p}(t, \Gamma_{s2})$ は振幅 $\bar{P}(\Gamma_{s2})$ と時間関数 $p(t)$ の積(変数分離形)で与えられると仮定する。

$$\bar{p}(t, \Gamma_{s2}) = \bar{P}(\Gamma_{s2})p(t) \dots\dots\dots (48)$$

時間関数 $p(t)$ の自己相関関数 $C_{pp}(\tau)$ は次式で定義される。

$$C_{pp}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(t)p(t+\tau) dt \dots\dots\dots (49)$$

そのパワースペクトル密度 $S_{pp}(\omega)$ は Wiener-Khinchin の関係より次のように与えられる。

$$S_{pp}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{pp}(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \dots\dots\dots (50)$$

一方、変位応答 $\bar{u}(t, \Omega_s)$ と随伴変位応答 $\bar{v}(t, \Omega_s)$ およびそれらの Fourier 変換(周波数応答関数) $\bar{u}(\omega, \Omega_s)$, $\bar{v}(\omega, \Omega_s)$ は運動方程式と与えられた目的汎関数に対する随伴方程式から計算される。特に、加振力の時間関数 $p(t)$ の Fourier 変換 $\hat{p}(\omega) = 1$ のときの変位応答、随伴変位応答およびそれらの Fourier 変換(周波数応答関数)を $\bar{h}_u(t, \Omega_s)$, $\bar{h}_v(t, \Omega_s)$, $\bar{h}_u(\omega, \Omega_s)$, $\bar{h}_v(\omega, \Omega_s)$ と表すことにする。

一例として、ひずみエネルギーの時間平均

$$\bar{W} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} a(\bar{u}(t, \Omega_s), \bar{u}(t, \Omega_s)) dt \dots (51)$$

を目的汎関数に選んだ場合の形状こう配密度関数を導出してみよう。 $a(\cdot, \cdot)$ の双線形性に注目して, Parseval の定理を応用すると次の関係を得る。

$$\bar{W} = \int_{-\infty}^{\infty} a(\bar{h}_u(\omega, \Omega_s), \bar{h}_u^*(\omega, \Omega_s)) S_{pp}(\omega) d\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \dots\dots\dots (52)$$

したがって、この問題における形状こう配密度関数 $\bar{G}(\bar{u}, \bar{v})$ は、目的汎関数が $a(\bar{u}(\omega, \Omega_s), \bar{u}^*(\omega, \Omega_s))$ のときの形状こう配密度関数を $G(\bar{u}(\omega, \Gamma_s), \bar{v}(\omega, \Gamma_s))$ と表すことにすると、次式で計算できることになる。

$$\begin{aligned} & \bar{G}(\bar{u}(\omega, \Gamma_s), \bar{v}(\omega, \Gamma_s)) \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} G(\bar{h}_u(\omega, \Gamma_s), \bar{h}_v(\omega, \Gamma_s)) S_{pp}(\omega) d\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \dots\dots\dots (53) \end{aligned}$$

8. 力 法

力法は、形状こう配密度関数 G が与えられた問題に対して、式(11)で定義されている双一次形式 $a(\cdot, \cdot)$ を利用して、次式によって速度場 \bar{V} を解く方法として提案されている⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾。

$$a(\bar{V}, \bar{y}) = -l(\bar{y}) \quad \forall \bar{y} \in D \dots\dots\dots (54)$$

この変分方程式は、速度場 \bar{V} を式(3)で与えられた D における拘束の下で $-G(\bar{u}, \bar{v})\bar{n}$ を外力として作用させたときの変位場として決定することを意味している。したがって、式(54)は有限要素法や境界要素法などを用いた通常の線形弾性問題の数値解法を適用することによって、解析することが可能である。実際には、式(54)から得られる速度場に微小刻み ds を掛けた $ds\bar{V}$ だけ領域を変動させながら、収束するまで繰返すことになる。

9. 数 値 解 析

4章から7章において導出された形状こう配関数を用いた力法を基本的な二次元はり状連続体の周波数応答問題に適用した解析例を示す。本論文では加振周波数を一次と二次固有周波数の前後に設定することにして、周波数応答解析では、加振周波数より十分大きな固有振動数を有する10次以上のモードを打ち切った。また、固有振動方程式(21)と速度場方程式(54)は八節点アイソパラメトリック要素を用いた有限要素法を使用した。いずれの問題においても平面応力状態を仮定した。

9・1 単一周波数加振の場合 問題設定を図2に示す。周波数応答解析では、長方形の左辺を完全拘束

し、右辺に加振力を与えた。速度場解析では、加振力の位置を固定するために左右両辺の滑り拘束と左右両辺中央の点の完全拘束を仮定した。平板の長さ、幅、厚さはそれぞれ0.6 m、0.06 m、0.01 mとした。また、弾性係数 $E=214.1$ GPa、密度 $\rho=7860$ kg/m³ と設定し、 $\beta=10^{-5}$ 、 $\alpha=1.0$ と設定した。加振力の振幅 P は36 N、初期形状の一次と二次固有周波数がそれぞれ140 Hzと848 Hzに対して、加振周波数は一次固有周波数より小さい周波数として50 Hzを採用し、一次固有周波数より大きい周波数として400 Hzを採用した。

加振周波数が50 Hzと400 Hzの場合の各目的汎関数の最小化問題に対する解析結果を図3と4に示す。なお、記号 $\Omega_{(k)}$ は k 回の領域変動を繰返した後の領域、 W はひずみエネルギー、 K は運動エネルギー、 C は平均コンプライアンスの絶対値を表している。加振周波数が50 Hzと400 Hzの両方の場合において、それぞれの変動履歴から、目的汎関数は単調に減少し、収束のようすを確認できる。特に、加振周波数が400 Hzの場合の平均コンプライアンス絶対値の最小化解析では、目的汎関数がほぼ零となったことが確認できる。これは、前報⁽¹⁾の結果同様、加振点における自己伝達関数の反共振点に落ちたものと考えられる。

9・2 広帯域加振の場合 図2に示した平板を用いて解析を行った。ただし、周波数応答解析では、長方形の両辺を完全拘束し、長さ方向の2/5のところに加振力を与えた。加振力は一次固有周波数843 Hzと二次固有周波数2156 Hzをカバーするように0 Hzから2500 Hzまでのような周波数成分からなるものと仮定した。すなわち、 $S_{pp}(\omega)=1(|\omega|<\omega_0)$ 、 $0(|\omega|>\omega_0)$ 、 $\omega_0/(2\pi)=2500$ Hz。平均ひずみエネルギーを目的汎関数とした場合の解析結果を図5に示す。なお、 W は平均ひずみエネルギー、 m は質量を表している。変動履歴において目的汎関数は単調に減少し、約40%

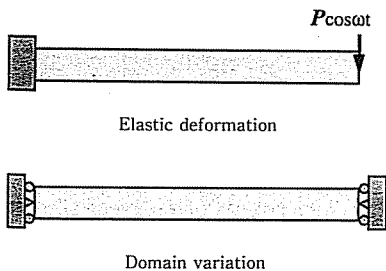
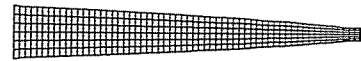
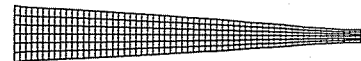


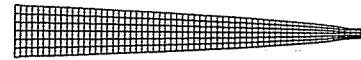
Fig. 2 Boundary conditions for shape optimization problem of a beamlike 2D continuum clamped at left end



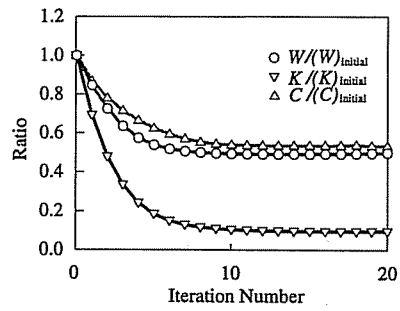
Strain energy minimization (Ω_{20})



Kinetic energy minimization (Ω_{20})

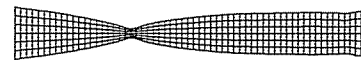


Absolute mean compliance minimization (Ω_{20})

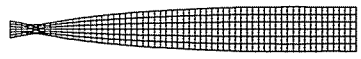


Iteration history

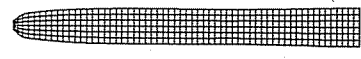
Fig. 3 Numerical results at 50 Hz excitation



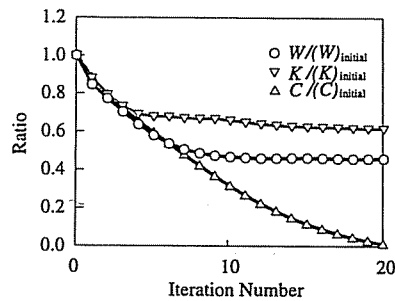
Strain energy minimization (Ω_{20})



Kinetic energy minimization (Ω_{20})



Absolute mean compliance minimization (Ω_{20})



Iteration history

Fig. 4 Numerical results at 400 Hz excitation

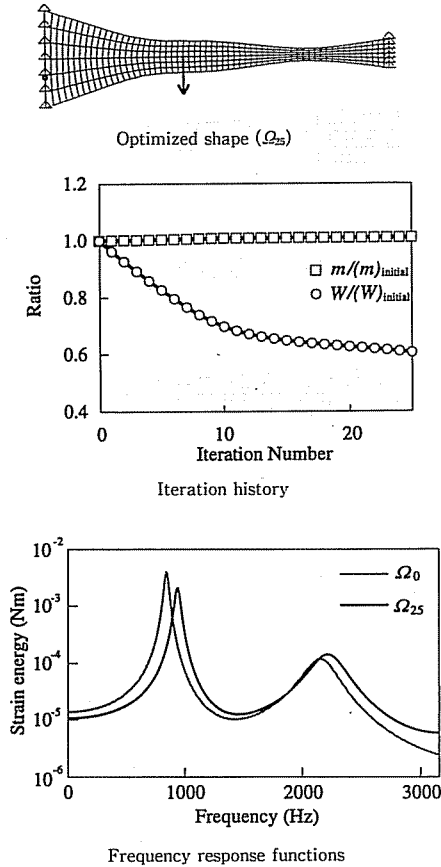


Fig. 5 Numerical result for strain energy minimization problem of a beamlike 2D continuum clamped at both ends and excited at point of $2/5$ from left end between 0 and 2500 Hz

まで減少した。その減少分は、周波数応答が卓越した一次の共振周波数のピーク値において48%の減少として現われた。多田ら⁽⁴⁾の疑似感度を用いた解析では、加振力が真中でなくても形状の左右対称性が見ら

れたが、今回の解析では非対称となった。

これらの数値解析結果における目的汎関数の収束履歴から、4章から7章において導出された形状こう配関数を用いた方法の有効性が確認された。

10. 終わりに

本論文では、比例粘性減衰を有する線形弾性連続体の周波数応答特性に関する形状最適化問題の解法を示した。ひずみエネルギー、運動エネルギーおよび平均コンプライアンスの絶対値の最小化問題を取上げ、運動方程式を実数表示で与えることを基礎にすることによって形状こう配関数の導出に成功した。さらに広帯域加振における応答関数の最小化問題についても検討した。数値解析法には方法を適用した。本論文で提示した方法の有効性は基本的なはり状連続体問題に対する数値解析を通して確認した。

文 献

- (1) 吳志強・畔上秀幸, 周波数応答問題における領域最適化解析(法法によるアプローチ), 機論, 61-590, C(1995), 3968-3975.
- (2) 井上克己・加藤正名・大貫憲一, 振動エネルギー最小化に基づく薄板の最適設計, 機論, 56-529, C(1990), 2361-2366.
- (3) Chen, T. Y., Optimum design of structures with both natural frequency and frequency response constraints, *Int. J. Numerical Methods Eng.*, Vol. 33 (1992), 1927-1940.
- (4) 多田幸生・草場康裕, ランダム荷重を受ける構造物の最適設計(疑似感度を用いる最適化), 機論, 54-498, C(1988), 490-496.
- (5) 畔上秀幸, 領域最適化問題の一解法, 機論, 60-574, A(1994), 1479-1486.
- (6) 畔上秀幸・吳志強, 線形弾性問題における領域最適化解析(法法によるアプローチ), 機論, 60-578, A(1994), 2312-2318.
- (7) Sokolowski, J. and Zolésio, J. P., *Introduction to Shape Optimization, Shape Sensitivity Analysis*, (1991), 42-116, Springer-Verlag.