

成長の構成則を用いた形状最適化手法の提案\*  
(静的弾性体の場合)畔 上 秀 幸\*<sup>1</sup>A Proposal of Shape Optimization Method  
by Using a Constitutive Equation of Growth  
(In the Case of Static Elastic Body)

Hideyuki AZEGAMI

A simple method for shape optimization of a static elastic body in a sense of uniform strength is newly proposed. The idea from which the method originated came from the growth behavior of living things, such as trees or bones, responding to a stress accompanying a load. On the use of the method, the optimum shape is formed by iterating a usual elastic analysis and incremental growth analysis by using a constitutive equation of growth with the result of the elastic analysis, without a particular technique for mathematical optimization programming or a steep extension of memory for calculation of the sensitivity. The growth law is given as a relation between incremental growth strain and a deviation of objective stress indicating the strength from basic stress. Two examples of a cantilever beam loaded at its tip and a column loaded at its tip under the influence of gravity are analyzed to show the effectiveness of the proposed method.

**Key Words:** Optimum Design, Shape, Uniform Strength, Constitutive Equation of Growth, FEM

## 1. 序 論

本研究は、平等強さ (uniform strength) の形状を解析するための汎用的な形状最適化手法を新たに提案しようとするものである。本論文では最も基礎的な静的弾性体の場合の提案を行う。

本研究の切掛となったものは、Fung と瀬口<sup>(1)</sup>による解説の中で述べられていた“生体システムでは、応力の大きさにより成長 (growth) と吸収 (atrophy) が調整され、それが残留応力を変化させる”という仮説である。著者は、もし応力に感応して膨張と収縮が生ずる成長の構成則 (constitutive equation of growth or growth law) に従う有限要素法を用いた成長増分解析を行うことができれば、生体システムと同様に形状を最適化できるのではないかと考えた。

提案する方法は、これまでの形状最適化手法の中で次のように位置付けられる。従来の方法を最適化の規準で分類すると、目的関数 (object function) の最小化を規準にした“最小化規準”に基づく方法と、分布目的関数 (distributed object function) の均一化を規準に

した“均一化規準”に基づく方法に大別される。ただし、本論文では均一化された状態を、均一化の過程を繰返すことによって得られた停留状態 (stationary state) という意味で用いる。体積一定のもとで荷重点変位を最小にすることを目標にした場合のポテンシャルエネルギー最小化規準に対する方法は前者の例であり、平等強さを目標にして材料の強度の規準としてミーゼス規準 (Mises's criterion) を仮定した場合の相当応力均一化規準に対する方法は後者の例である。これまで提案されている方法は、前者に対しては数理計画法 (mathematical programming) に基礎を置いた方法であり<sup>(2)~(5)</sup>、後者に対しては、均一化させたい応力の大きさに対して表面の有限要素を特殊なパターンで変形させる方法であった<sup>(6)~(8)</sup>。これに対して提案する方法は、後者に分類されるが、上記の方法とは異なり、均一化させたい応力の大きさに対して成長ひずみを発生する成長の構成則を用いた成長増分過程によって全有限要素を変形させる方法である。

提案する方法は、これまでの方法、特に数理計画法を用いた方法と比較して、CAD (computer aided design) システムに組み込みやすい特徴を有している。実際、数理計画法を用いた方法は、形状を決めるすべての変数に対する剛性行列などの感度やそれに代わる

\* 昭和63年8月26日 東北支部米沢地方講演会において講演、原稿受付 昭和63年2月8日。

<sup>1</sup> 正員、豊橋技術科学大学工学部 (〒440 豊橋市天伯町豊雀ヶ丘1-1)。

変動量の計算を必要としているために、大規模な記憶容量を必要とし、さらに最適化のためのプログラムを追加する必要があるが、提案する方法は、非弾性ひずみを含んだ変形解析に用いられてきた初期応力法<sup>6)</sup>を適用するだけでよいことから、通常の弾性解析で必要とする記憶容量を拡大する必要はほとんどなく、さらに最適化のための特別なプログラムを新たに加える必要もない。

本論文の構成は次のようである。最初に材料の強度の規準が与えられた場合に強度を均一させるような成長の構成則を定式化し、それをを用いた形状最適化手法の提案を行い、続いてその構成則に従った変形を解析するための有限要素による解析法を示す。これらの定式化と解析法の有効性は簡単な二つの解析例を通して検討される。

2. 成長の構成則と形状最適化手法

本章では、材料の破壊(fracture)あるいは弾性破損(elastic failure)などの強度の規準(criterion of strength)が与えられた場合、強度を均一化させるような成長の構成則を定式化し、それをを用いた形状最適化手法の提案を行う、

強度の規準は、一般に特定の応力を指標として与えられる。脆性材料の破壊に対しては最大主応力(maximum principal stress)を指標にした最大主応力規準が有効とされ、延性材料の弾性破損に対しては相当応力(equivalent stress)を指標にしたせん断ひずみエネルギー規準が有効とされている。前者は、主応力を  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  と表したときに

$$\sigma_{1q} \geq \sigma_c \dots\dots\dots (1)$$

で与えられ、後者は、相当応力  $\sigma_{eq}$  を

$$\sigma_{eq} = \left[ \frac{1}{2} \{ (\sigma_y - \sigma_x)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2) \} \right]^{1/2} \dots\dots\dots (2)$$

のように定義したときに

$$\sigma_{eq} \geq \sigma_c \dots\dots\dots (3)$$

で与えられる。ただし、 $\sigma_c$  は破壊あるいは弾性破損が生ずる限界応力(critical stress)である。

そこで、強度を均一化させるためにはこのような指標になる応力を均一化させればよいことになる。以後、この指標となる応力は序論に記した最適化規準のうちの均一化規準における分布目的関数にあたることから目的応力(object stress)と呼ぶことにする。

この目的応力が均一化された状態は、やはり序論で記したように、与えられた均一化の過程を繰返すこと

によって得られた停留状態と定義して、本論文ではこの均一化の過程として次のような成長の構成則を用いた成長増分過程による平等強さの形状解析法を提案する。その成長の構成則は、目的応力  $\sigma_{obj}$  に対して基準応力(basic stress)  $\sigma_{bns}$  を設定し、目的応力が基準応力に対して上回ったときには膨張の体積ひずみが発生し、下回ったときには収縮の体積ひずみが発生するように与える。すなわち、応力  $\{\sigma\}$  と弾性ひずみ  $\{\epsilon^e\}$  の関係は通常の Hooke 則で与えられるものとして、

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon^e\} \dots\dots\dots (4)$$

で表し、成長ひずみ増分  $\{\Delta\epsilon^e\}$  は、この関係で得られた応力に基づいて次の増分形の構成則に従って発生するものと定式化する。

$$\{\Delta\sigma\} = [D]\{\Delta\epsilon^e\} = [D]\{\{\Delta\epsilon\} - \{\Delta\epsilon^e\}\} = [D]\{\Delta\epsilon\} - [D]\{\Delta\epsilon^e\} \dots\dots\dots (5)$$

ここで、

$$\{\Delta\epsilon^e\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta f(\sigma_{obj} - \sigma_{bns}) = [I'] \Delta f(\sigma_{obj} - \sigma_{bns}) \dots\dots\dots (6)$$

である。ただし、 $\Delta$  は式(4)によって得られた応力が発生した後の増分を表している。なお、応力ベクトル  $\{\sigma\}$  とひずみベクトル  $\{\epsilon\}$  の定義は

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}\}^T \dots\dots\dots (7)$$

$$\{\epsilon\}^T = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}\}^T \dots\dots\dots (8)$$

である。左上付の  $T$  は転置を表す。式(6)における  $\Delta f(\ )$  は  $(\sigma_{obj} - \sigma_{bns})$  に対して成長ひずみ増分の大きさを与える関数であることから成長増分関数(incremental growth function)と呼ぶ。最も簡単な成長増分関数は

$$\Delta f(\sigma_{obj} - \sigma_{bns}) = \frac{\sigma_{obj} - \sigma_{bns}}{\sigma_{bns}} \Delta h \dots\dots\dots (9)$$

で与えられる。ただし、 $\Delta h$  は成長ひずみ増分を与えるための定数で、1回の成長増分過程で成長する寸法と原寸法との比に対応した意味をもつことから、成長増分比(incremental growth rate)と呼ぶことにする。また、基準応力は、初期値として限界応力を安全率(factor of safety)で除した設計応力  $\sigma_{des}$  (desing stress) と等しく置いてもよいが、実際の設計において目的応力の最大値が設計応力を越えないで最大なることを要求されたときには、この要求を満たすように調整するための変数と考える必要がある。

提案する形状最適化手法をまとめると図1のように

なる。ただし、簡単のために上記の基準応力を変数とした調整は省略する。図1に示す方法は、最初に初期形状の入力(1.)に対して通常の弾性解析を行い、目的応力の分布を求める(2.)。その目的応力の均一化の判定を行い(3.)、その目的応力が均一化していればその形状を出力し(4.)、均一化していなければ式(5)と(6)で与えられた構成則を用いた成長増分解析を行う(5.)。ただし、このときに形状修正が許されていない境界は変位を拘束する。形状の修正はその成長増分による節点変位によって行う(6.)。形状修正後は通常の弾性解析に戻る(2.)。なお、目的応力の均一化の判定は、基準応力に対する目的応力の最大値の比が前解析結果のそれと比較してその差が十分小さくなったことなどによって行うことができる。また、この解析は次章で示すような有限要素法を用いて行うが、形状修正によって要素の大きさに極端な違いが生じた場合には、要素の大きさを均一化する処理を加える必要がある。

3. 有限要素による解析法

本章では、前章で提案した形状最適化手法を実行するための有限要素による解析法を示す。その内容は、非弾性ひずみを含んだ変形解析に用いられてきた初期

応力法である。

有限要素法の標準の手続きに従えば、要素内変位  $\{u(x)\}$  とひずみ  $\{\epsilon(x)\}$  は要素を構成する節点変位  $\{u\}$  により

$$\{u(x)\} = [N(x)]\{u\} \dots\dots\dots (10)$$

$$\{\epsilon(x)\} = [D(x)]\{u(x)\} = [B(x)]\{u\} \dots\dots\dots (11)$$

で与えられる。ここで、 $[N(x)]$ 、 $[D(x)]$ 、 $[B(x)]$  は形状関数(shape function)、ひずみ-変位を関係づける微分演算子マトリックス、ひずみ-節点変位マトリックスである。なお、 $x$  は要素内座標であり、本章では要素内で分布する変数はすべて  $x$  の関数であることを明示する。

通常の弾性解析のための要素剛性方程式は、式(10)と弾性ひずみ  $\{\epsilon^e(x)\}$  を  $\{\epsilon(x)\}$  に代入した式(11)の関係および式(4)の関係すなわち

$$\{\sigma(x)\} = [D]\{\epsilon^e(x)\} \dots\dots\dots (12)$$

を次の仮想仕事の原理(principle of virtual work)の式：

$$\int_{V_0} \delta\{\epsilon(x)\}^T \{\sigma(x)\} dV - \int_{V_0} \delta\{u(x)\}^T \{b(x)\} dV - \int_{S_0} \delta\{u(x)\}^T \{t(x)\} dS = 0 \dots\dots\dots (13)$$

に代入することによって次のように得られる。

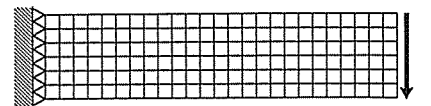
$$[k]\{u\} = \{b\} + \{t\} \dots\dots\dots (14)$$

ここで、

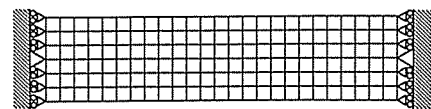
$$[k] = \int_{V_0} [B(x)]^T [D] [B(x)] dV \dots\dots\dots (15)$$

$$\{b\} = \int_{V_0} [N(x)]^T \{b(x)\} dV \dots\dots\dots (16)$$

Width: 1.2 m      Young's modulus: 210 Gpa  
 Length: 5 m      Poisson's ratio: 0.3  
 Load: 6 MN/m



on elastic deformation



on incremental growth

Boundary conditions

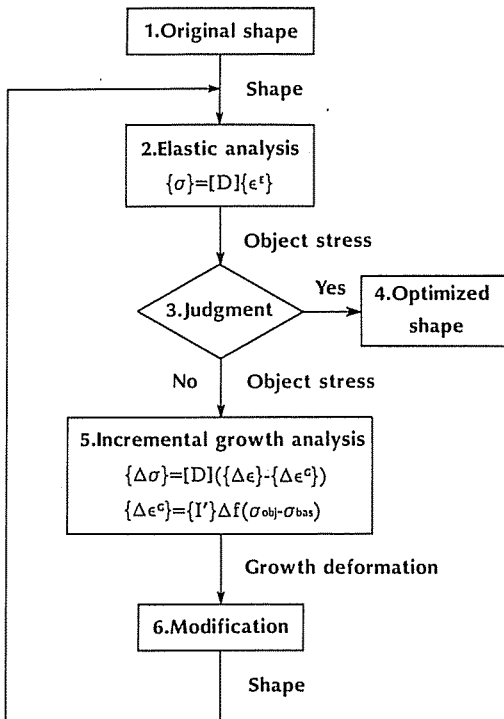
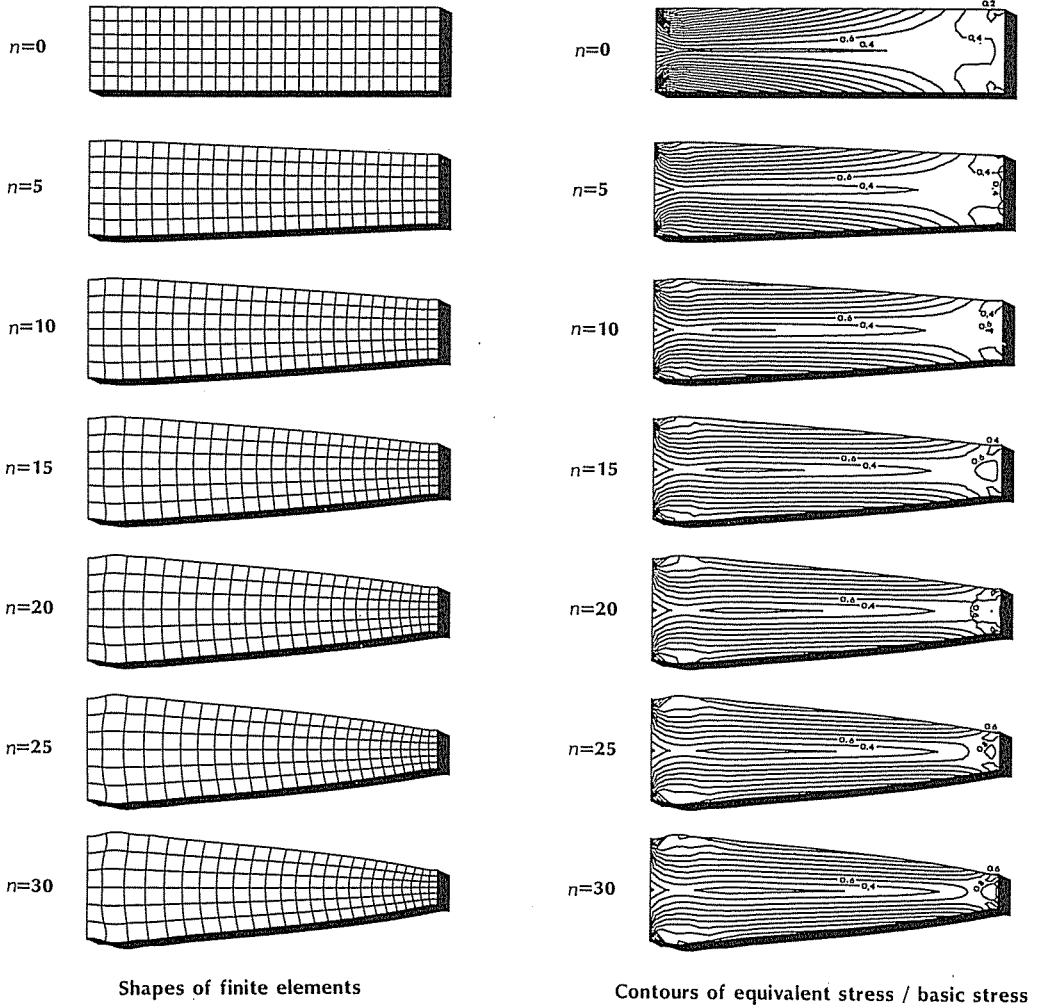


図1 成長の構成則を用いた形状最適化手法

図2 先端にせん断力を受ける片持ばり



Shapes of finite elements

Contours of equivalent stress / basic stress

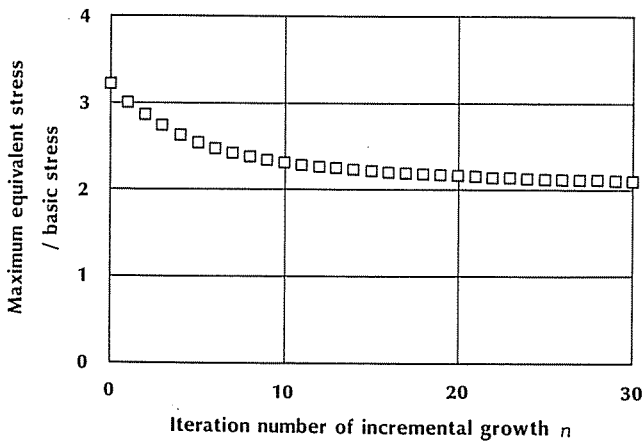


図3 先端にせん断力を受ける片持ばりの形状最適化解析結果

$$\{t\} = \int_{S_g} [N(x)]^T \{t(x)\} dS \dots\dots\dots (17)$$

である。 $\{b(x)\}$ ,  $\{t(x)\}$  はそれぞれ物体力(body force), 表面力(traction force)であり,  $V^e$  は要素の体積,  $S_g$  はその要素に力の境界条件が与えられている場合のその面積である。 $\delta$  は変位の境界条件を満たす仮想変位による増分を表す。また,  $\{k\}$ ,  $\{b\}$ ,  $\{t\}$  は要素剛性マトリックス, 物体力による等価節点力, 表面力による等価節点力と呼ばれる。

成長増分解析のための要素剛性方程式は, 式(10), (11)を増分形で表した関係と式(5), (6)の関係すなわち

$$\{\Delta\sigma(x)\} = [D]\{\Delta\varepsilon(x)\} - [D]\{\Delta\varepsilon^o(x)\} \dots\dots (18)$$

$$\{\Delta\varepsilon^o(x)\} = [I]^T \Delta f(\sigma_{obj}(x) - \sigma_{bas}) \dots\dots\dots (19)$$

を, 式(13)から得られる増分形で表した仮想仕事の原理の式に代入し, さらに外力は成長のときに一定であると仮定することによって次のように得られる。

$$\{k\}\{\Delta u\} = \{\Delta g\} \dots\dots\dots (20)$$

ここで,

$$\{k\} = \int_{V^e} [B(x)]^T [D][B(x)] dV \dots\dots\dots (21)$$

$$\{\Delta g\} = \int_{V^e} [B(x)]^T [D]\{\Delta\varepsilon^o(x)\} dV \dots\dots\dots (22)$$

である。 $\{k\}$  は式(15)と同じ要素剛性マトリックスであり,  $\{\Delta g\}$  は成長ひずみによる等価節点力である。

したがって, 図1に示した形状最適化手法の中の通常の弾性解析と成長増分解析は, 次のように行うことができる。通常の弾性解析は, いうまでもなく, すべての要素について式(15)~(17)によって求めた $\{k\}$ ,  $\{b\}$ ,  $\{t\}$ を系全体の節点自由度と同じ大きさに拡張した $\{K\}$ ,  $\{B\}$ ,  $\{T\}$ 上で重ね合わせることによって得られた系全体の剛性方程式から系全体の節点変位を解き, 式(11), (12)によってひずみと応力分布を求めるという手順で行うことができる。目的応力分布はこの応力分布によって求められる。成長増分解析は, この目的応力分布を式(19)に代入して成長ひずみ増分分布を求め, それを式(22)に代入することによってすべての要素についての $\{\Delta g\}$ を求め, それらを系全体の節点自由度と同じ大きさに拡張した $\{\Delta G\}$ 上で重ね合わせたものと弾性解析ですでに得られている $\{K\}$ からなる成長増分についての系全体の剛性方程式を節点変位増分について解くという手順で行うことができる。

#### 4. 解析例

本章では, 2, 3章で提案した形状最適化手法とその解析法を用いた簡単な二つの平面ひずみ問題の解析例を示し, 提案した方法の有効性を検討する。

材料の強度の基準はせん断ひずみエネルギー規準を用い, 成長増分関数は式(9)を用いた。ただし, 成長増分比を5% ( $\Delta h=0.05$ )と設定した。目的応力の均一化の指標として基準応力に対する目的応力の最大値の比を求めた。ただし, 基準応力は初期形状の弾性解析のときの目的応力の体積平均で与え, 目的応力の最大値は四点ガウス積分に用いた点で得られた目的応力の分布の中での最大値とした。また, 形状修正のときに要素の大きさに極端な違いが生じないように, 解析対象の幅方向に並んだ節点を幅方向に等間隔となるような処理を加えた。

作成したプログラムは, 8節点アイソパラメトリック要素を使用し, 目的応力の等応力線図も描く機能を備えている。なお, 目的応力の要素間の非連続性を除くための平滑化の方法と作図の方法は付録に示す。また, 解析はすべてマイクロコンピュータ(NEC PC-9801 VM 2, 数値演算プロセッサ8087 附加)によって行われた。

4.1 先端にせん断力を受ける片持ばり 図2に示すような問題を設定する。ただし, 外力は片持ばりの先端に作用させたせん断力だけであり, 端面内で一様に分布しているがその合力は常に6 MN/mであると設定する。図中の格子は要素分割を表す。解析結果を図3に示す。

これらの結果は成長増分を繰り返すごとに目的応力が均一化していることを示しており, この問題に対して本手法が有効であることを裏付けている。

また, これらの解析結果から次のような考察を行う

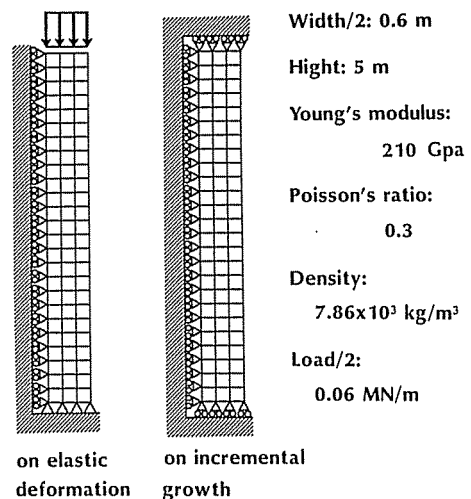
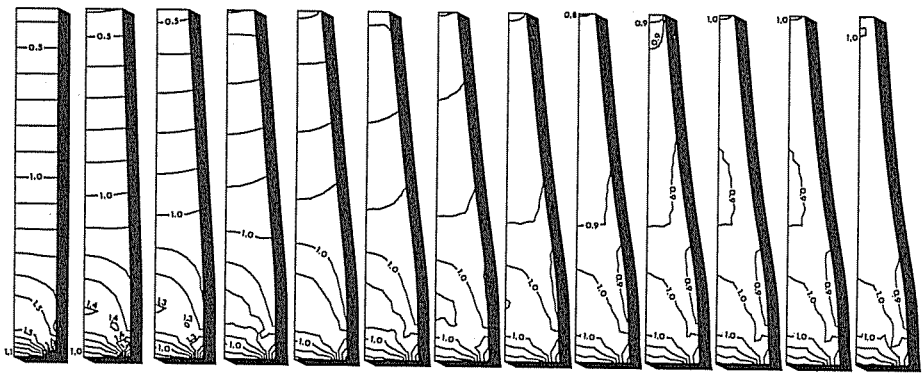
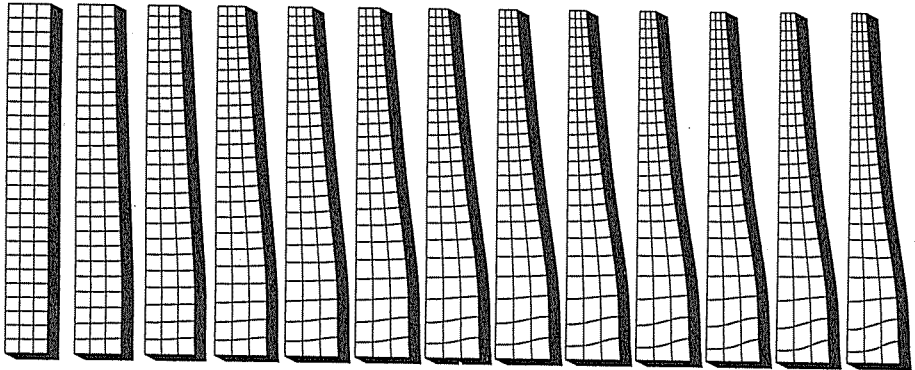


図4 重力を考慮した上端に圧縮力を受ける柱



n=0 n=5 n=10 n=15 n=20 n=25 n=30 n=35 n=40 n=45 n=50 n=55 n=60

Contours of equivalent stress / basic stress



n=0 n=5 n=10 n=15 n=20 n=25 n=30 n=35 n=40 n=45 n=50 n=55 n=60

Shapes of finite elements

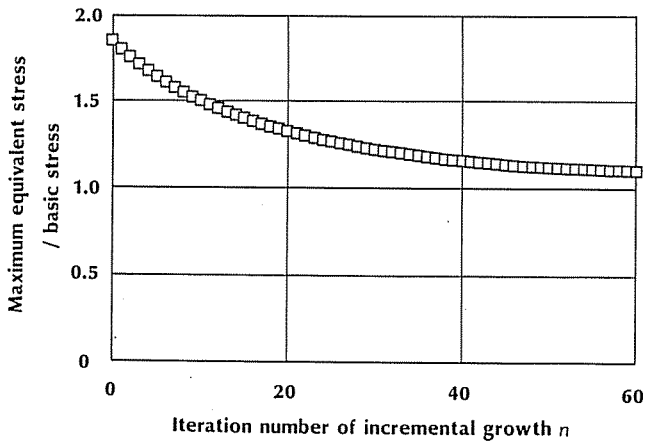


図5 重力を考慮した上端に圧縮力を受ける柱の形状最適化解析結果

ことができる。先端にせん断力を受ける場合の平等強さのオイラーばり (Euler beam) ははりのせん断力方向の幅が放物線状になり、各断面のせん断力を考慮したチモシェンコばり (Timoshenko beam) はさらに先端近傍で有限の幅を持つように補正された形状になることはよく知られているが、本解析結果も境界条件の影響を受ける付根部以外では類似したものになっている。本解析結果では付根部のやや先端側の部分が付根部よりも幅が大きくなっているが、これは図2に示すような境界条件を採用したためと考えられる。実際、付根部ではそれよりやや先端側の部分と比較して高さ方向の変位が拘束されているためにその方向の垂直応力が発生し、応力の静水圧成分は上昇し、偏差成分は低下する結果になっている。目的応力としている相当応力は偏差成分の関数であり、偏差成分の低下に伴って目的応力が低下したためと考えられる。

さらに、成長増分を繰返すごとに基準応力に対する目的応力の最大値の比が指数関数的に減少しているのは、成長関数が式(9)によって与えられたことから理解できる。実際、成長ひずみ増分は目的応力と基準応力の差に比例して発生し、それに基づく形状修正量におよそ比例して目的応力と基準応力の差が減少するためである。

また、ここには示さないが成長比を1%として解析を続けても基準応力に対する目的応力の最大値の比が別の停留値に向かうことはなかった。

#### 4.2 重力を考慮した上端に圧縮力を受ける柱

図4に示すような問題を設定する。ただし、対称性を考慮して柱の半分について解析を行う。外力は上端に作用させた圧縮力と重力(重力加速度は  $9.8 \text{ m/s}^2$ ) であり、圧縮力は一様に分布しているがその合力は柱の半分において  $0.06 \text{ MN/m}$  であると設定する。解析結果を図5に示す。

これらの結果は成長増分を繰返すごとに目的応力が均一化していることを示しており、この問題に対しても本手法が有効であることを裏付けている。

また、これらの解析結果から次のような考察を行うことができる。断面積が極めて小さく断面内で応力が一様に発生するような場合の平等強さの柱は、断面積が高さ方向に指数関数状に変化することはよく知られているが、本解析結果も境界条件の影響を受ける下端部以外では類似したものになっている。本解析結果では下端部が狭まっているが、これは指数関数状に広がった場合の左右端部は中央部と比較して上部の重量が架かりにくいとためと考えられる。

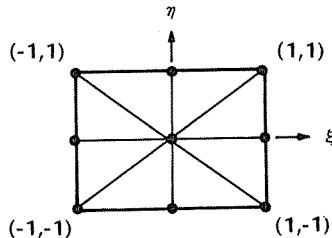


図6 等応力線作図のための8節点アイソパラメトリック要素の三角形分割

### 5. 結 論

本論文では、生体システムに学び、通常の弾性解析とそれによって得られた応力に感応して膨張と収縮が発生する成長の構成則を用いた成長増分解析を繰返すことにより平等強さの形状を解析する図1のような手法を提案し、初期応力法を用いた有限要素解析法を示した。提案した手法と解析法の有効性は平面ひずみの場合の先端にせん断力を受ける片持ばり(図2)の解析結果(図3)および重力を考慮した柱(図4)の解析結果(図5)によって確認された。

なお、本研究は豊橋技術科学大学・沖津昭慶教授のご支援があつて遂行されたこと、および豊橋技術科学大学4年生・高見昭康君の協力があつたことを記して両氏に謝意を表す。

#### 付録 等応力線図の作図法

通常の弾性解析によれば要素間で変位の連続性は保たれるが応力の連続性は保証されない。この非連続性を認めて要素ごとの等応力線図を作図することが最も解析結果を忠実に表すことになるが、読取り難しいことも事実である。そこで本解析のために作成したプログラムでは次に示す形状関数を用いた平滑化処理を行って要素間での連続性を備えた目的応力の分布を求め、それに基づいて等応力線図の作図を行っている。

弾性解析によって得られた目的応力  $\sigma_{obj}(x)$  に対して平滑化された目的応力を  $\sigma_{obj,s}(x)$  と表して

$$\sigma_{obj,s}(x) = \{N(x)\}^T \{\sigma_{obj,s}\} \dots \dots \dots (23)$$

で与えられるものと仮定する。ただし、 $\{N(x)\}^T$  は形状関数であり、 $\{\sigma_{obj,s}\}$  は要素を構成する節点における平滑化された目的応力である。ここで、次式を仮定し

$$\int_{V_e} \{N(x)\} (\sigma_{obj,s}(x) - \sigma_{obj}(x)) dV = \{0\} \dots \dots (24)$$

式(23)を代入することによって次式を得る。

$$(1/\rho) [m] \{\sigma_{obj,s}\} = \{\sigma_{obj}\} \dots \dots \dots (25)$$

ここで、

$$(1/\rho)[m] = \int_{V_c} \{N(x)\} \{N(x)\}^T dV \dots\dots\dots (26)$$

$$\{\sigma_{obj}\} = \int_{V_c} \{N(x)\} \sigma_{obj}(x) dV \dots\dots\dots (27)$$

である。ρは密度であり、[m]は質量マトリックスと呼ばれる。したがって、式(26)、(27)によって求めた(1/ρ)[m]、{σ<sub>obj</sub>}を系全体の節点自由度と同じ大きさに拡張したマトリックスとベクトル上で重ね合わせて得られた系全体の方程式を解くことによって節点における平滑化された目的応力を求めることができる。

等応力線は、8節点アイソパラメトリック要素を用いていることから上の平滑化によって得られた八つの節点における目的応力とその結果を式(23)に代入する

ことによって得られた正規化座標系(ξ, η)の中央における値を用いて、図6に示す八つの三角形ごとに求め、直線で作図した。

文 献

- (1) Fung, Y. C., 瀬口, 機誌, 8 8-796(昭60), 290.
- (2) Gallagher, R. H. and Zienkiewicz, O. C., *Optimum Structural Design-Theory and Applications-*, (1973), John Wiley & Sons.
- (3) 瀬口・多田, 機論, 44-381(昭53); 1469.
- (4) 大河内・宮田, 機論, 49-448, A(昭58), 1532.
- (5) 大河内・鳥居・坂井・福島, 機論, 52-474, A(昭61), 377.
- (6) 尾田, 機誌, 79-691(昭51), 494.
- (7) 尾田・山崎, 機論, 44-380(昭53), 1141.
- (8) 梅谷・平井, 機論, 42-364(昭51), 3754.
- (9) 例えば, 山田, 塑性・粘弾性(昭55), 94, 培風館.

討 論

〔質問〕 瀬口 靖 幸〔大阪大学基礎工学部〕

たいへん明解な形状決定法を提案されたことに敬意を表す。この方法は一つのスタンダードになりうるものと注目している。

この種の問題ではいつも議論されることとして、得られる形状が波うつなど不規則になることがある。この原因としては、要素の性質に依存するものと、そうではなく、本質的にそうなるものに分けられると思うが、どのときにどうなるかは不明と考えてもよいようである。例題ではその点がうまく避けられているようであるが、もしこのことを考察されていたら、ご教示願いたい。

〔回答〕 形状の波うち現象は、本論文に示した8節点アイソパラメトリック要素を使用しているときには皆無であった。

しかし、その後三角形定ひずみ要素を使用して片持ばりの振動モードについて成長増分解析を行ったときに波うち現象が現れた。いくつかの解析を通して、その形状は要素配列の向きに大きく依存すること、また要素の細分化によってその発生を防げることがわかった。振動モードの場合は慣性力が分布外力として作用しているだけで静的な片持ばりの問題と問題設定において本質的な違いはないと考えられる。したがってその時は、三角形定ひずみ要素は応力こう配の激しいところでは補間誤差が大きくなるために解析結果に不安定さを生じたことによるのではないかと考えた。しかし、その考察は推測の域をでていない。

〔質問〕 尾田 十 八〔金沢大学工学部〕

成長の構成則を採用した最適化手法を興味深く拝見した。次の点についておたずねしたい。

(1) 生体から学ぶ最適化手法については質問者もかねてより関心をもっているが、生体の形態形成機構は対象によって種々異なり複雑である。ただいかなるものについても、それは単に形状だけでなく、材料組織の再編を伴うことは明確なようである。この点について、式(6)、(9)の有効性はいかがか。

(2) 提案の方法は特別な数理的手法を用いない点、計算手続きは簡単であるが、逆に目的関数や制約条件が明確に規定できず、したがって例えば、体積一定の条件を満たすことや、最大剛性設計の形状を求めることなどが困難で、その点工学的な実用問題への適用には疑問があると思うがいかがか。

〔回答〕 (1) 生体の形態形成機構の多様性はご指摘のとおりであり、提示した方法のままで生体の挙動を解析することには無理があると思う。

しかし、形状だけでなく材料特性も変化する形態解析を行うためには次のような扱いが必要になると考えられる。

材料を異方性や非線形性を含めた均質材料とみなす場合は、基本的に成長の構成則〔式(6)、(9)〕の与え方よりも、目的応力の解析や成長増分解析の際に材料の特性を考慮した解析を行うことのほうが重要になってくると考えられる。材料の構成則を成長ひずみの大きさや応力の関数と考える必要がある場合には微小成長増分解析を繰返すことによって材料の構成則を繰返



し更新していくことが必要になる。

また、材料を構造形態を有した複合材料とみなす場合は、複合材料のモデル化に対して成長の構成則をどのように組み込むかが問題になると思う。山崎、尾田(付1)のトラス連続体の構造形態決定手法は複合材料のモデル化に成功した好例であるが、このような手法に成長の構成則による形態変更を組み込めるかが課題になると考えている。

いずれにしましても、これらはすべて今後の検討課題である。

(2) 提案した方法の目的応力均一化規準と数理的な方法を用いた場合のポテンシャルエネルギー最小化規準はそれぞれ物理的意味が異なり、それらの選択は設

計者に任されるべきものと考えられる。実際、ポテンシャルエネルギー最小化規準は体積一定のもとで剛性を最大にすることを目指しているのに対して、目的応力均一化規準は強度が均一化することを目指しており、両者とも工学的意味を有するものになっている。

なお、体積一定の制約条件は、ポテンシャルエネルギー最小化規準を適用する場合に必要に迫られた制約条件であり、工学的重要性は別に論ずる必要があると思うが、本手法を適用するにあたり基準応力を常に目的応力の体積平均値と等しく設定することによってほぼ満たされることが予想され、解析結果もそれを裏付けるものになっている。

---

(付1) 山崎・尾田, 機論, 49-444, A(昭58), 944.