

流れ場の形状最適化解析*

(成長ひずみ法による試み)

片峯英次^{*1}, 畔上秀幸^{*2}, 沖津昭慶^{*1}

Shape Optimization Analysis of Flow Field (Approach by the Growth-Strain Method)

Eiji KATAMINE, Hideyuki AZEGAMI and Akiyoshi OKITSU

A new analytical approach to optimize shapes of the flow field is presented. The reshaping is accomplished by the growth-strain method which was developed as a method using finite-element calculation of the deformation of shapes by generating bulk strain of swelling and contracting to the solid problems first. The generation law of the bulk strain is given as a function of a distributed parameter to be uniformized. To the solid problems, the validity of the use of the shear strain energy density to maximize the strength based on the Mises criterion or the strain energy density to maximize the stiffness for the distributed parameter has been confirmed. In the present paper, we propose to use the dissipation energy density for the distributed parameter to minimize the total dissipation energy by viscosity to the fluid problem. Numerical results for abrupt enlargement channel problems in steady state assuming low-Reynolds-number and noncompressible viscous fluid show the validity of the present approach.

Key Words: Optimum Design, Computational Fluid Dynamics, Pipe Line, Numerical Analysis, Finite-Element Method

1. はじめに

本論文では、熱になって散逸するエネルギーが最小になるような粘性流体の定常流れ場形状を解析するための一つの方法を提案する。

ゆるやかに変化する円形断面の拡大管を考えると、減速比一定の拡大管と散逸エネルギー一定の拡大管を、流路全体で失われるエネルギーで比較した場合、後者のほうが前者より少なくなることは古くから知られていた⁽¹⁾。この結果は流路の最適設計に対する基本的な取組み方を示唆しているものと思われる。すなわち、流路全体で失われるエネルギーを最小化するためには、散逸エネルギーの局所的な集中を抑えて、平等化させてやることが有効であることを示している。

粘性流体の流れ場を連続体としてとらえる場合には、その局所で定義された散逸エネルギーは、単位体積当たりで定義された散逸エネルギー密度ということになる。そこでこの散逸エネルギー密度を均一化させ

る方法を検討して、流れ場全体で失われるエネルギーを最小化させることを考えてみる。

一方固体に対しては、これまで Mises 規準に基づく強度を最大化させるためにはせん断ひずみエネルギー密度、剛性を最大化させるためにはポテンシャルエネルギー密度に注目して、それらの分布パラメータを均一化させることによって、目的の最適形状が得られることが確認されている⁽²⁾⁻⁽⁶⁾。そこでは、それぞれの分布パラメータを均一化させる形状改善方法として、成長ひずみ法が用いられた。成長ひずみ法は、均一化を目指す分布パラメータの簡単な増加関数に従って体積ひずみを発生させたときの変形を、有限要素法によって解析していく方法として提案されている⁽²⁾。

そこで本論文では、この成長ひずみ法を用いて散逸エネルギー密度を均一化させることを検討する。流れ場全体で失われるエネルギーの最小化は、その結果として実現されるかどうかを拡大管の解析例を通して調べることにする。

2. 成長ひずみ法

成長ひずみ法は、分布パラメータが局所ごとに均一化するような体積ひずみを発生させることによって形状を改善していく方法として提案されている。したが

* 平成3年10月17日 第69期全国大会講演会において講演、原稿受付 平成3年10月22日。

^{*1} 正員、岐阜工業高等専門学校 (〒501-04 岐阜県本巣郡真正町上真桑)。

^{*2} 正員、豊橋技術科学大学工学部 (〒441 豊橋市天伯町字霞雀ヶ丘1-1)。

って、最適の規準が分布パラメータの均一条件によって与えられている場合には直接適用可能となる。Mises 規準に基づく強度を最大化させる場合、せん断ひずみエネルギー密度の最大値を最小化すること、すなわち体積有限の下ではせん断ひずみエネルギー密度の分布を均一化することが最適の目標になる。この場合には、分布パラメータにせん断ひずみエネルギー密度を設定した成長ひずみ法が適用される。

剛性すなわちポテンシャルエネルギーのような非分布の全体パラメータが最大となる条件を最適の条件にする場合には、その条件は等価な分布パラメータの均一条件を導出できたときに、成長ひずみ法が適用可能となる。静的弾性問題では、力の釣合い方程式が Euler の方程式になるようなはん関数がポテンシャルエネルギーとして存在し、そのはん関数の形状変化に対する停留条件がポテンシャルエネルギー密度の均一条件と等価であることを導出することができる。したがってこの場合には、分布パラメータにポテンシャルエネルギー密度を設定した成長ひずみ法が適用可能となる⁽⁶⁾。

それでは粘性流体の定常流れ場の場合にはどのようなかを考えてみる。この場合、流れ場全体で積分した散逸エネルギーあるいはそれに代わる全体パラメータが最小になる条件と等価な均一条件は導出されない。その理由は、Navier-Stokes の運動方程式と連続の方程式が Euler の方程式となるようなはん関数が存在しないためである。

そこで、この場合には便宜的に、単位体積当たり粘性によって失われる力学的エネルギーを与える散逸エネルギー密度に注目し、それを局所ごとに最小化させることを代案として考えることができる。ただし、流れ場 Ω において、散逸エネルギー密度 $D(x)$ は次式で与えられる。

$$D(x) = 2\mu \dot{\epsilon}_{ij}(x) \dot{\epsilon}_{ij}(x) + \lambda \dot{u}_{i,i}(x) \dot{u}_{i,i}(x) \quad (x \in \Omega) \quad \dots\dots\dots (1)$$

ただし、ひずみ速度テンソル $\dot{\epsilon}_{ij}(x)$ は流速 $\dot{u}_i(x)$ と次の関係がある。

$$\dot{\epsilon}_{ij}(x) = \frac{1}{2} \{ \dot{u}_{i,j}(x) + \dot{u}_{j,i}(x) \} \quad (x \in \Omega) \quad \dots\dots\dots (2)$$

μ と λ は粘性係数である。非圧縮性流体の場合は、式(1)右辺第2項は省略されることになる。なおテンソルのインデックスについては Einstein 総和規約と偏微分表記法 $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$ が使用される。また $x \equiv x_i$ と表示する。

この散逸エネルギー密度を分布パラメータに設定し

た成長ひずみ法による形状最適化解析は、図1の手順に従って行われる。上の解析ステップでは、Navier-Stokes の方程式と連続の方程式、それと境界条件に基づいて散逸エネルギー密度分布 $D(x)$ を解析する。本研究では有限要素法⁽⁷⁾を用いた。下の解析ステップでは、次式に基づいて体積ひずみ $\epsilon_{ij}^p(x)$ が発生したときの成長変形を有限要素法を用いて解析する⁽²⁾⁻⁽⁶⁾。

$$\epsilon_{ij}^p(x) = \frac{D(x) - \bar{D}}{\bar{D}} h \delta_{ij} \quad (x \in \Omega) \quad \dots\dots\dots (3)$$

δ_{ij} は Kronecker デルタである。定数 \bar{D} は $D(x)$ の基準値で、 $D(x)$ の体積平均などが設定される。定数 h は成長変形の大きさを微小に抑えるためにあらかじめ設定される成長比である。

3章以下で両解析ステップの基礎式を簡潔に示す。

3. 粘性定常流れ場の有限要素法解析

流速と圧力を独立変数として取扱う方法を用いることにする。

流れ場 Ω において、非圧縮性 Newton 粘性流体の Navier-Stokes 方程式と連続の方程式は、物体力を省略すると、流速 $\dot{u}_i(x)$ と圧力 $p(x)$ に対して次式で与えられる。

$$\rho \dot{u}_{i,j}(x) \dot{u}_{i,j}(x) + p_{,i}(x) - \mu \dot{u}_{i,j,j}(x) = 0 \quad (x \in \Omega) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\dot{u}_{i,i}(x) = 0 \quad (x \in \Omega) \quad \dots\dots\dots (5)$$

領域 Ω の境界 Γ では、 $\dot{u}_i(x)$ ($x \in \Gamma$) について、 $i=1, 2, 3$ を独立に考えて、式(6)の Dirichlet 形境界条件か、あるいは式(7)の Neumann 形境界条件のどちらかが与えられているものと仮定する。また、 $p(x)$ が既知の境界 Γ^p では、式(8)の境界条件が与えられる。

$$\dot{u}_i(x) = \bar{\dot{u}}_i(x) \quad (x \in \Gamma^p = \Gamma - \Gamma^N) \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\dot{u}_{i,j}(x) n_j(x) = \bar{\dot{u}}_{i,j}(x) n_j(x) \quad (x \in \Gamma^N = \Gamma - \Gamma^p) \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$p(x) = \bar{p}(x) \quad (x \in \Gamma^p \subseteq \Gamma) \quad \dots\dots\dots (8)$$

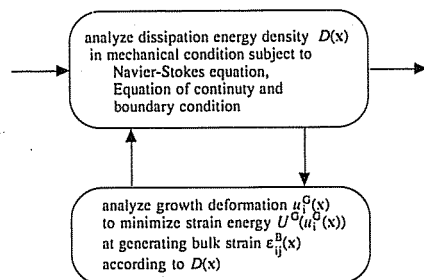


図1 定常流れ場問題における成長ひずみ法

ただし ρ は密度, $n_i(x)$ は外向き法線方向余弦である。() は既知量を表している。

有限要素法の手続きに従うと, 有限要素内 $x^e \in \Omega^e$ の流速 $\dot{u}_i(x^e)$ は, α 節点における流速 $\dot{u}_{\alpha i}$ と形状関数 $\Phi_\alpha(x^e)$ によって与えられる。圧力 $p(x^e)$ は, β 節点における圧力 p_β と, 通常 $\Phi_\alpha(x^e)$ よりも低次の形状関数 $\Psi_\beta(x^e)$ によって与えられる。すなわち,

$$\dot{u}_i(x^e) = \Phi_\alpha(x^e) \dot{u}_{\alpha i} \quad (x^e \in \Omega^e) \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$p(x^e) = \Psi_\beta(x^e) p_\beta \quad (x^e \in \Omega^e) \quad \dots\dots\dots (10)$$

式(4), (5)の領域 $\Omega = \sum_e \Omega^e$ において, Galerkin 法を適用すると次式が成立する。

$$\sum_e \int_{\Omega^e} \Phi_\alpha(x^e) \{ \rho \dot{u}_{j,i}(x^e) \dot{u}_{i,j}(x^e) + p_{,i}(x^e) - \mu \dot{u}_{i,j,i}(x^e) \} dV = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\sum_e \int_{\Omega^e} \Psi_\beta(x^e) \dot{u}_{i,i}(x^e) dV = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

式(11), (12)を部分積分して,

$$\begin{aligned} \sum_e \int_{\Omega^e} [\Phi_\alpha(x^e) \{ \rho \dot{u}_{j,i}(x^e) \dot{u}_{i,j}(x^e) + p_{,i}(x^e) \} \\ + \mu \Phi_{\alpha,j}(x^e) \dot{u}_{i,j}] dV \\ - \sum_e \int_{\Gamma^e} \mu \Phi_\alpha(x^e) \dot{u}_{i,j} n_j dS = 0 \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_e \int_{\Omega^e} \Psi_{\beta,i}(x^e) \dot{u}_{i,i}(x^e) dV \\ - \sum_e \int_{\Gamma^e} \Psi_\beta(x^e) \dot{u}_{i,i} n_i dS = 0 \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

全有限要素についての式(9), (10)を式(13), (14)に代入すると, $\dot{u}_{\alpha i}$ と p_β についての支配方程式を得る。

$$M_{\alpha\beta\gamma j} \dot{u}_{\beta j} + K_{\alpha i \beta j} \dot{u}_{\beta j} + H_{\alpha i \beta} p_\beta = \Omega_{\alpha i} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$H_{\alpha i \beta} \dot{u}_{\alpha i} = \eta_\beta \quad \dots\dots\dots (16)$$

ただし, $M_{\alpha\beta\gamma j}$, $K_{\alpha i \beta j}$, $H_{\alpha i \beta}$, $\Omega_{\alpha i}$, η_β は次のように与えられる。

$$M_{\alpha\beta\gamma j} = \sum_e \int_{\Omega^e} \rho \Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_{\gamma,j} dV \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$K_{\alpha i \beta j} = \sum_e \int_{\Omega^e} \mu \Phi_{\alpha,i} \Phi_{\beta,j} \delta_{ij} dV \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$H_{\alpha i \beta} = \sum_e \int_{\Omega^e} \Phi_\alpha \Psi_{\beta,i} dV \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\Omega_{\alpha i} = \sum_e \int_{\Gamma^e} \mu \Phi_\alpha \dot{u}_{i,j} n_j dS \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\eta_\beta = \sum_e \int_{\Gamma^e} \Psi_\beta \dot{u}_{i,i} n_i dS \quad \dots\dots\dots (21)$$

式(6)から式(8)の境界条件を式(15), (16)に代入すると, 式(15), (16)は $\dot{u}_{\alpha i}$ と p_β の未知量についての非線形方程式になる。この非線形方程式は Newton-Raphson 法を用いて解くことができる。ただし, 解の収束を安定化させるために, 与えられた流速 $\bar{u}_{\alpha i}$ が大きい場合には, それを増分に分けて解析を進めていく。すなわち, 増分ごとに Newton-Raphson 法で $\dot{u}_{\alpha i}$ と p_β を解析し, その結果を次の増分の初期条件に代入し

て解析を進めていく。

4. 成長変形解析

成長変形では, ひずみエネルギーが定義される。したがって, ひずみエネルギーの最小条件によって支配方程式を得ることができる。

領域 Ω において, 式(3)に従って体積ひずみ $\varepsilon_{ij}^n(x)$ が発生したときの形状変化を $x_i \in \Omega \mapsto x_i^f = x_i + u_i^f \in \Omega^f$ と表すことにする。このときのひずみエネルギー $U^G\{u^G(x)\}$ は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} U^G\{u^G(x)\} \\ = \frac{1}{2} \int_\Omega \{ \varepsilon_{ij}^G(x) - \varepsilon_{ij}^n(x) \} \\ \times D_{ijkl} \{ \varepsilon_{kl}^n(x) - \varepsilon_{kl}^h(x) \} dV \quad \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

ただし, 成長ひずみ $\varepsilon_{ij}^n(x)$ は次の適合条件を満たしている。

$$\varepsilon_{ij}^n(x) = \frac{1}{2} \{ u_{i,j}^n(x) + u_{j,i}^n(x) \} \quad \dots\dots\dots (23)$$

D_{ijkl} は弾性の剛性テンソルである。

成長変位 $u^G(x)$ は, $U^G\{u^G(x)\}$ が最小となる次の条件で決定される。

$$\begin{aligned} \delta U^G\{u^G(x)\} \\ = \int_\Omega \{ \varepsilon_{ij}^G(x) - \varepsilon_{ij}^n(x) \} D_{ijkl} \delta \varepsilon_{kl}^n(x) dV = 0 \\ \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

ただし, δ は形状の拘束条件を満たした仮想成長変形を表す。

有限要素法の手続きに従って, 表示を簡略にするためにマトリックス表示を採用すると, 有限要素内 $x^e \in \Omega^e$ の成長ひずみベクトル $\{\varepsilon^G(x^e)\}$ は, 節点成長変位ベクトル $\{u^G\}$ を用いて与えられる。

$$\{\varepsilon^G(x^e)\} = [B(x^e)] \{u^G\} \quad (x^e \in \Omega^e) \quad \dots\dots\dots (25)$$

式(24)を領域 $\Omega = \sum_e \Omega^e$ でマトリックス表示して,

$$\begin{aligned} \sum_e \int_{\Omega^e} \delta \{\varepsilon^G(x^e)\}^T [D] \{\varepsilon^G(x^e)\} dV \\ = \sum_e \int_{\Omega^e} \delta \{\varepsilon^G(x^e)\}^T [D] \{\varepsilon^h(x^e)\} dV \quad \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

全有限要素の式(25)を式(26)に代入すると, $\{u^G\}$ についての支配方程式を得る。

$$[K] \{u^G\} = \{g\} \quad \dots\dots\dots (27)$$

ただし, 剛性マトリックス $[K]$ と等価節点力ベクトル $\{g\}$ は次のように計算される。

$$[K] = \sum_e \int_{\Omega^e} [B(x^e)]^T [D] [B(x^e)] dV \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$\{g\} = \sum_e \int_{\Omega^e} [B(x^e)]^T [D] \{\varepsilon^h(x^e)\} dV \quad \dots\dots\dots (29)$$

()^T は転置を表す。

5. 解析結果

提案した方法を二次元の対称拡大管に適用した場合の結果を紹介する。その結果と Gibson が提案した散逸エネルギー一定の拡大管とを比較する。

拡大管の初期形状を図 2 に示す。Reynolds 数 $Re=50$ の非圧縮性粘性流体が、図 2 中左側から流入して、右側に流出する問題を設定する。入口では Poiseuille 流れを仮定し、出口では自然境界条件を仮定した。すなわち、対称性を考慮して、次のような境界条件が設定され、下側半分について解析した。

$$\begin{aligned} \dot{u}_1(x) &= \frac{3}{2} \bar{u} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{L} \right)^2 x_2^2 \right\} \\ \text{and } \dot{u}_2(x) &= 0 \quad (x \in [A-B]) \quad \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

$$\dot{u}_1(x) = 0 \text{ and } \dot{u}_2(x) = 0 \quad (x \in [B-E]) \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_{1,1}(x) &= 0 \text{ and } \dot{u}_{2,1}(x) = 0 \quad (x \in [E-F]) \\ &\dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

$$\dot{u}_{1,2}(x) = 0 \text{ and } \dot{u}_{2,2}(x) = 0 \quad (x \in [F-A]) \quad \dots\dots\dots (33)$$

$$p(x) = 0 \quad (x \in [E-F]) \quad \dots\dots\dots (34)$$

ただし Reynolds 数 Re は次式で定義されている。

$$Re = \frac{\rho \bar{u} L}{\mu} \quad \dots\dots\dots (35)$$

成長変形解析では、境界 [C-D] で形状変化が許されている。境界 [B-C], [D-E], [F-A] ではすべり面拘束を仮定した。境界 [A-B], [E-F] では、境界条件の入力を簡単にするために、完全拘束を仮定した。

流れ場解析では、流速に対しては二次の形状関数を用いた⁽⁷⁾。また初期状態を $Re=0$ と仮定して、 $\dot{u}_i(x)$ と $p(x)$ ($x \in \Omega$) が収束したことを確認しながら、 Re を増加させていく方法を用いた。増分 $\Delta Re=5.0$ と設定した。増分ごとの収束判定は、Newton-Raphson 法における解の変化の和が 1% 以内に収まったことを基準とした。

成長変形解析では、変位について一次の形状関数を用いた。式(3)の \bar{D} には $D(x)$ ($x \in \Omega$) の体積平均を用いた。成長比は $h=0.03$ と設定した。また、式(22)の D_{ijhl} には、簡単のために、 $D_{ijhl} = \delta_{ik} \delta_{jl}$ を仮定した。成長変形による有限要素分割のゆがみは修正不要であった。

成長ひずみ法による二次元対称拡大管の解析結果を図 3～5 に示す。

図 3 は、有限要素分割、流速分布、散逸エネルギー密度分布について、初期状態と成長変形を 20 回繰返した後の結果を比較して示している。なお、分布の等高線は体積平均によって無次元化された値を示してい

る。

両者の形状について詳細に比較した結果が図 4 である。屈折点の近傍が滑らかに変化している様子が観察される。

図 5 は、散逸エネルギー密度の最大値 D_{\max} と平均値 D_{ave} 、体積 V 、全散逸エネルギー D_{total} について、成長変形の繰返し数 n に対する変化を示している。いずれも初期値で規格化している。なお D_{\max} が $n=4$ と 5 の間で屈折しているのは、 D_{\max} の発生点、繰返し数 $n=4$ までは C-D 間の屈折点であったのに対して、 $n=5$ からはそれよりも点 B に近い点に移ったためである。これらのパラメータの変化の様子から判断して、成長変形は繰返し数 $n=20$ でほぼ収束の領域に達していると考えられる。その結果、全散逸エネルギー D_{total} で約 3%、散逸エネルギー密度の最大値 D_{\max} で約 11% の改善が得られたことになる。

これらの結果に基づいて、提案した方法は全散逸エネルギーを減少させる目的に対して有効であることが確認された。

提案した方法によって得られた形状を、Gibson が提案した散逸エネルギー一定の拡大管と比較すると次のようになる。平行部の端から距離 x において高さ $h(x)$ となる図 6 のような二次元拡大管を考える。流速は $\dot{u}(x)$ と表される。散逸エネルギー一定の条件は、Gibson⁽¹⁾ によって次式で与えられている。

$$\frac{d\dot{u}(x)^2}{dx} = \text{const.} \quad \dots\dots\dots (36)$$

連続の方程式を適用すると次のようになる。

$$\frac{1}{h(x)^2} = \frac{1}{h(0)^2} - \frac{x}{l} \left\{ \frac{1}{h(0)^2} - \frac{1}{h(l)^2} \right\} \quad \dots\dots\dots (37)$$

図 2 の点 C と点 D における高さを一致させたときの拡大管について、流れ場を解析した結果を図 7 に示す。なお、図 5 のパラメータについて比較すると次のようになる。

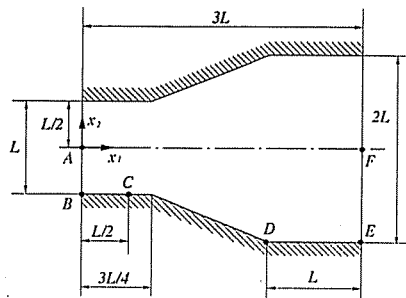


図 2 二次元対称拡大管の初期形状

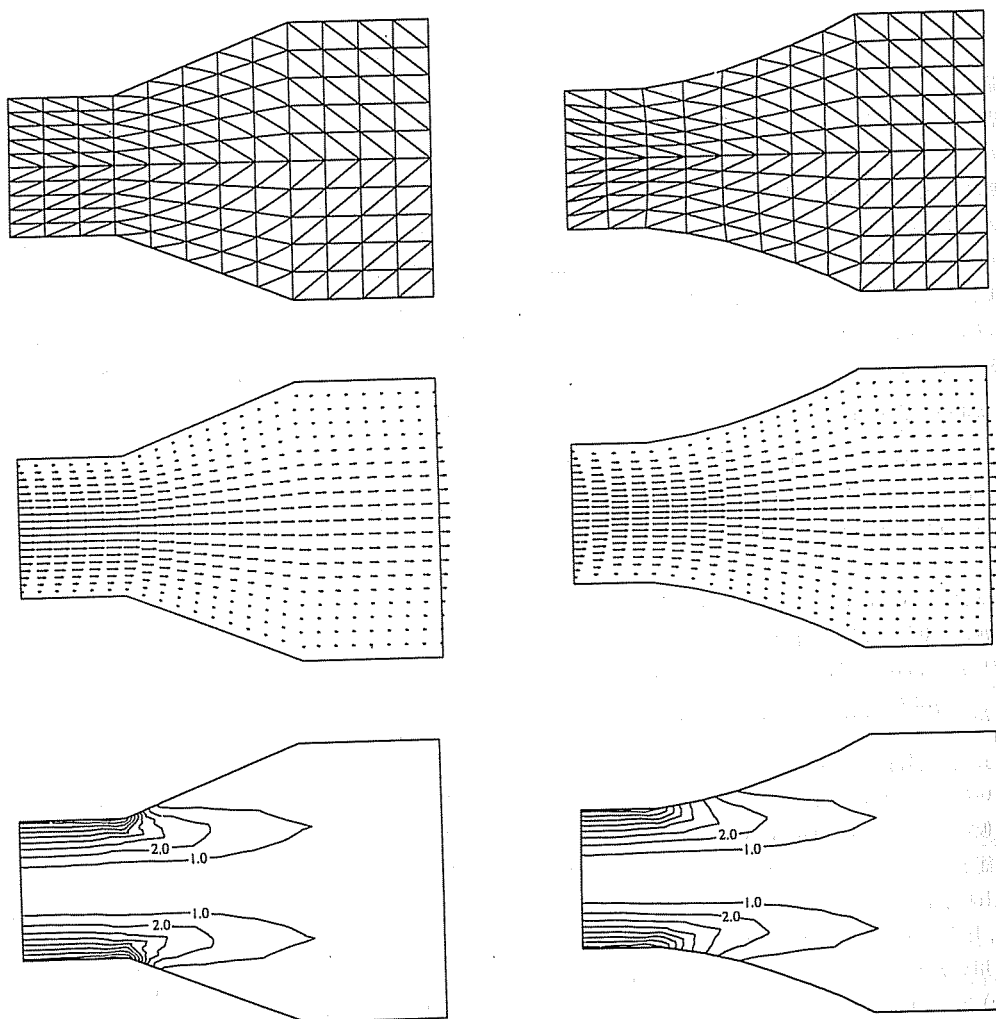


図 3 成長ひずみ法による二次元対称拡大管の解析：初期状態(左)と成長変形 20 回後の状態(右)における有限要素分割(上), 流速分布(中), 散逸エネルギー密度分布(下)

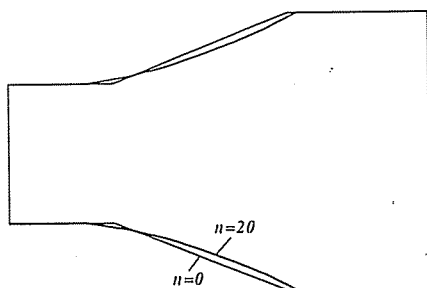


図 4 初期状態と成長変形 20 回後の状態の形状比較

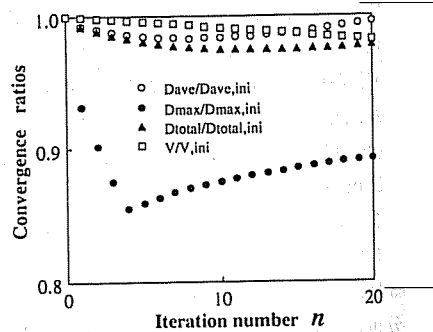


図 5 成長変形に対するパラメータの収束比：散逸エネルギー密度の最大値 D_{max} , 体積平均値 D_{ave} , 体積 V , 全散逸エネルギー D_{total}

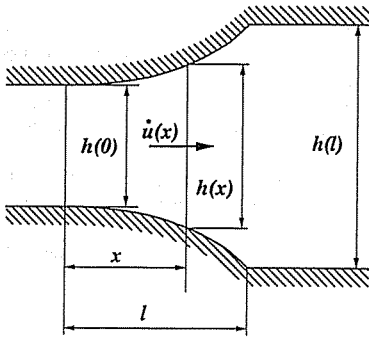


図 6 二次元対称拡大管の表示方法

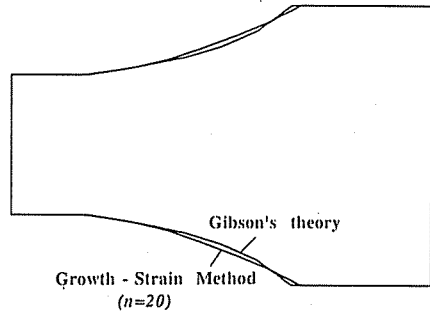


図 8 成長ひずみ法によって得られた成長変形 20 回後の状態と Gibson の条件から得られた拡大管の形状比較

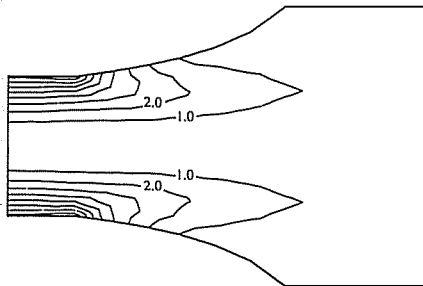
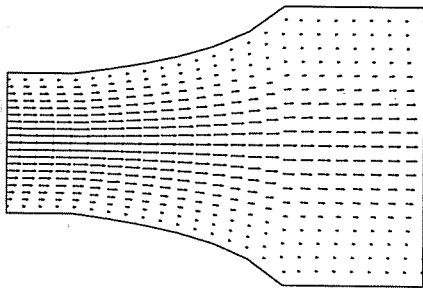
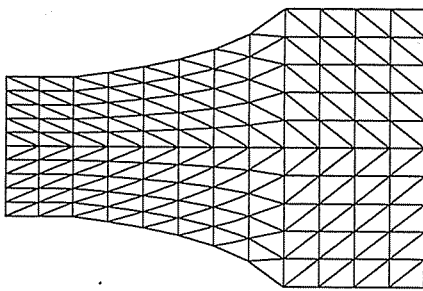


図 7 Gibson の条件から得られた拡大管の流れ場解析: 有限要素分割(上), 流速分布(中), 散逸エネルギー密度分布(下)

$$\frac{D_{\max}^{(n=20)}}{D_{\max}^G} = 1.007, \quad \frac{D_{\text{ave}}^{(n=20)}}{D_{\text{ave}}^G} = 0.983$$

$$\frac{V^{(n=20)}}{V^G} = 1.007, \quad \frac{D_{\text{total}}^{(n=20)}}{D_{\text{total}}^G} = 0.990$$

ただし、 $()^{(n=20)}$ は $n=20$ のときの図 5 の結果、 $()^G$ は Gibson の条件から得られた拡大管の結果である。図 8 はこの形状と成長ひずみ法によって解析された形状とを詳細に比較した結果である。これらの結果から、成長ひずみ法によって得られた流路形状は、散逸エネルギー密度が高い値を示す拡大開始部においては、Gibson の条件から得られた形状と良く一致していることが確認された。

6. ま と め

本論文では、散逸エネルギー密度の大きさに応じて体積ひずみを発生させることによって、流れ場の形状を改善していく成長ひずみ法を提案した。その方法を二次元対称拡大管に適用した結果、散逸エネルギー密度分布は均一化され、全散逸エネルギーは最小化した滑らかな流路形状が得られた。また、その形状と Gibson の条件から得られた散逸エネルギー一定の形状を比較した結果、散逸エネルギー密度が高い値を示す拡大開始部で両者は良く一致していることが確認された。

なお本研究は、財団法人遠藤育治朗記念科学技術振興財団の援助を受けて行われた。流れ場の解析に関しては、豊橋技術科学大学助教授 北村健三先生、ならびに岐阜工業高等専門学校教授 木下祥次先生から助言を受けた。また数値解析では豊橋技術科学大学大学院 大山勝矢君の協力を受けた。記して謝意を表する。

文 献

- (1) Gibson, A. H., The conversion of kinetic to pressure energy in the flow of water through passages having divergent boundaries, *Engineering*, Feb. 16(1912), 205-206.
- (2) 畔上, 成長の構成則を用いた形状最適化手法の提案(静的弾性体の場合), 機論, 54-508, A(1988), 2167-2175.
- (3) Azegami, H., Okitsu, A., Ogihara, T. and Takami, A., An Adaptive Growth Method for Shape Refinement, *Proc. Current Topics Struct. Mech.* 1989, *Proc. ASME 1989 Pressure Vessels Piping Conf.*, Honolulu, Hawaii, (1989-7), 199-205.
- (4) 畔上・荻原・高見, 成長ひずみ法による平等強さ形状の解析(定常振動問題への適用), 機論, 56-523, C(1990), 589-594.
- (5) 畔上・高見, 逆変分原理に基礎をおく成長ひずみ法(最大剛性形状解析へのアプローチ), 機論, 56-530, A(1990), 2162-2168.
- (6) 畔上・片峯・今泉・沖津, 成長ひずみ法による円筒コイルばねの索線断面形状最適化解析, 機論, 56-531, A(1990), 2339-2346.
- (7) 矢川, 流れと熱伝導の有限要素法入門, (1983), 141, 培風館.