

## 非定常熱伝導場における形状同定問題の解法\*

片峯英次\*<sup>1</sup>, 畔上秀幸\*<sup>2</sup>, 松浦易広\*<sup>3</sup>Solution to Shape Identification Problem  
of Unsteady Heat-Conduction FieldsEiji KATAMINE\*<sup>4</sup>, Hideyuki AZEGAMI and Yasuhiro MATSUURA\*<sup>1</sup>Gifu National College of Technology, Dept. of Mechanical Engineering,  
Shinsei-cho, Motosu-gun, Gifu, 501-0495 Japan

This paper presents a numerical analysis method for shape determination problems of unsteady heat-conduction fields in which time-histories of temperature distributions on prescribed subboundaries or time-histories of gradient distributions of temperature in prescribed subdomains have prescribed distributions. The square error integrals between the actual distributions and the prescribed distributions on the prescribed subboundaries or in the prescribed subdomains during the specified period of time are used as objective functionals. Reshaping is accomplished by the traction method that was proposed as a solution to shape optimization problems of domains in which boundary value problems are defined. The shape gradient functions of these shape determination problems are derived theoretically using the Lagrange multiplier method and the formulation of material derivative. The time-histories of temperature distributions are evaluated using the finite element method for space integral and the Crank-Nicolson method for time integral. Numerical analyses of nozzle and coolant flow passage in wing are demonstrated to confirm the validity of this presented method.

**Key Words:** Inverse Problem, Optimum Design, Numerical Analysis, Unsteady Heat-Conduction, Finite-Element Method, Domain Optimization, Shape Identification, Traction Method

## 1 はじめに

伝熱現象が機器の性能を左右する事例は多い。相原<sup>(1)</sup>は、伝統的な日本刀の制作過程において刀身に特殊粘土を部位ごとに厚さを違えて塗る技法は、それによって伝熱現象を制御して、適切な部位に適切な金属組織を創り出すために編み出された極めて合理的な方法であることを紹介している。現代工学の中で、この技法における特殊粘土の厚さ分布を決定する問題を数値モデル化すれば、特殊粘土の伝熱場が刀身と接した境界で部位ごとに指定された金属組織が作り出されるような温度履歴を持つように外側境界を決定する非定常熱伝導場の形状決定問題と見なすことができる。また、この問題を逆問題として捉えれば、指定した部分境界で温度分布の時間履歴が指定した分布の時間履歴を持つように境界形状を決定する形状同定問題の一つと位置づけることもできる<sup>(2)</sup>。

非定常熱伝導場を対象とした逆問題の数値解析に関する研究は、部分境界における温度や熱流束の履歴<sup>(3)(4)</sup>

、熱源の強さや位置<sup>(5)(6)</sup>、熱伝導率や熱伝達率などの熱特性値<sup>(7)</sup>を推定することを目指した研究が多かった。しかしながら、部分境界の形状を推定する研究は盛んではなかった。設計変数の数を2, 3個に制限した問題に対する報告がなされている<sup>(8)(9)</sup>。定常問題に限っても報告例は多くない<sup>(10)-(14)</sup>。形状同定問題がこれまで扱われてこなかった主な理由は、次のように考えることができる。これまでの形状決定に関する数値解析の研究では、未知部分境界形状を有限要素法や境界要素法などを用いて離散化し、その節点自由度を設計変数にした離散系最適化問題を解く方法であった。しかしながら、この方法では、境界設計変数の個数を増加させることは、設計空間の次元を増加させることに繋がることから、複雑な問題への拡張は容易でなかった。さらに、部分境界における温度分布の2乗誤差積分を目的汎関数に選んだ境界変動型の最適化問題は感度関数(形状勾配関数)が十分な滑らかさを持たない不正則な問題になっていることから、形状変動を繰り返すたびに境界形状の滑らかさが失われ、波打つという本質的な問題を抱えていることを指摘することもできる<sup>(15)</sup>。

一方、著者らはこれまでに、定常熱伝導場における温度分布<sup>(16)</sup>、ポテンシャル流れ場における流速分布<sup>(17)</sup>や圧力分布<sup>(18)</sup>を規定する形状同定問題を取り上げ、数値解析法を提案してその妥当性を確認してきた。そこ

\* 原稿受付 1999年5月10日。

<sup>1</sup> 正員, 岐阜工業高等専門学校 (☎ 501-0495 岐阜県本巣郡真正町上真桑)。<sup>2</sup> 正員, 豊橋技術科学大学 (☎ 441-8580 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)。<sup>3</sup> 豊橋技術科学大学大学院。

E-mail: katamine@gifu-nct.ac.jp

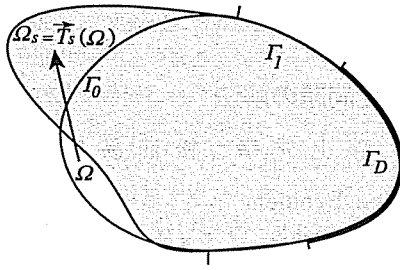


Fig. 1 Determination problem of domain with prescribed temperature on prescribed subboundary  $\Gamma_D \subset \Gamma_1$

では、形状変動を写像で与え、温度、変位あるいは流速などの実際の状態関数分布と指定された状態関数分布との2乗誤差積分を目的汎関数に選んだ形状最適化問題を考えれば、著者の一人によって提案された力法<sup>(19)</sup>が適用できて、実際に解けることを示した。力法は、偏微分方程式の境界値問題が定義された領域の幾何学的境界形状を設計対象にした形状最適化問題の汎用解法として、Hilbert空間の勾配法を応用した平滑化勾配法として提案されてきた<sup>(15)(19)</sup>。

本研究は、非定常熱伝導場における形状決定問題に対して、力法を適用することを目的とする。最初に指定された部分境界において実際の温度分布と指定された温度分布の2乗誤差積分を最小化する問題(温度分布規定問題)を定式化し、Lagrange乗数法あるいは随伴変数法および物質導関数を利用して形状勾配関数を導出する。また、同様な手順に基づいて、部分領域における温度勾配分布規定問題を定式化し、形状勾配関数を導出する。次に、導出された形状勾配関数に基づいて力法を利用した数値解析法を提示する。最後に、簡単な2次元問題の解析結果を紹介し、本手法の妥当性を示す。

## 2 部分境界において温度分布を規定する問題

**2.1 定式化**  $n$ 次元空間( $n=2,3$ )の領域  $\Omega \in R^n$ 、時間  $[0, T]$ における非定常熱伝導場を考える。空間  $\vec{x} \in \Omega$ 、時間  $t \in [0, T]$ における温度を  $\phi(\vec{x}, t)$ と定義する。領域  $\Omega$ の境界  $\Gamma$ は基本境界  $\Gamma_0$ と自然境界  $\Gamma_1$ によって構成されている。基本境界  $\Gamma_0$ では温度、自然境界  $\Gamma_1$ では熱流束がそれぞれ既知関数  $\hat{\phi}(\Gamma_0, [0, T])$ 、 $q(\Gamma_1, [0, T])$ として与えられている。

境界  $\Gamma_1$ の部分境界  $\Gamma_D \subset \Gamma_1$ において、実温度分布  $\phi(\Gamma_D, [0, T])$ と規定された温度分布  $\phi_D(\Gamma_D, [0, T])$ との2乗誤差を最小化する問題を定式化する。このと

きの領域変動問題を図1に示す。この熱伝導場領域  $\Omega$ の領域変動を  $\vec{T}_s$ ( $s$ は領域変動の履歴)で定義し、領域  $\Omega$ は変動して  $\Omega_s = \vec{T}_s(\Omega)$ になると仮定する。 $\vec{T}_s(\Omega)$ は、領域変動の制約を満たす適当に導関数が連続な許容関数空間  $D$ の要素とする。簡単のために、領域変動の制約に境界  $\Gamma_1$ が含まれると仮定する。このとき、時間  $t=0$ から  $t=T$ における温度2乗誤差最小化問題は次のように定式化される。

Given  $\Omega$  and

$$k, \rho, c, f, q, \hat{\phi}, \phi_0 : \text{fixd in space} \quad (1)$$

$$\text{find } \Omega_s \text{ or } \vec{T}_s(\Omega) \in D \quad (2)$$

$$\text{that minimize } \int_0^T E_{\Gamma_D} dt \quad (3)$$

$$\text{subject to } \int_0^T \left\{ a(\phi, w) + b(\phi, t, w) - c(w) - d(w) \right\} dt = 0 \quad \phi \in \Psi_t \quad \forall w \in W_t \quad (4)$$

ただし、 $E_{\Gamma_D}$ は次のように定義されている。

$$\begin{aligned} E_{\Gamma_D} &= E_{\Gamma_D}(\phi - \phi_D, \phi - \phi_D) \\ &= \int_{\Gamma_D} (\phi - \phi_D)^2 d\Gamma \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、式(4)は非定常熱伝導場における支配方程式の変分形式を表わしている。 $\phi, k, \rho, c, f$ はそれぞれ温度、熱伝導率、密度、比熱、発熱量を表し、 $a(\phi, w)$ 、 $b(\phi, t, w)$ 、 $c(w)$ 、 $d(w)$ は次式で与えられる。

$$a(\phi, w) = \int_{\Omega_s} k \phi_{,j} w_{,j} dx, \quad c(w) = \int_{\Omega_s} f w dx$$

$$b(\phi, t, w) = \int_{\Omega_s} \rho c \phi_{,t} w dx, \quad d(w) = \int_{T_s(\Gamma_1)} q w d\Gamma$$

また、温度  $\phi$ 、随伴温度  $w$ はそれぞれ次の関数空間の要素とする。

$$\begin{aligned} \Psi_t &= \{ \phi(\vec{x}, t) \in H^1(\Omega_s \times [0, T]) \mid \\ &\phi(\vec{x}, t) = \hat{\phi}(\vec{x}, t), t \in [0, T], \vec{x} \in \vec{T}_s(\Gamma_0), \\ &k \phi(\vec{x}, t)_{,j} n_j = q(\vec{x}, t), t \in [0, T], \vec{x} \in \vec{T}_s(\Gamma_1), \\ &\phi(\vec{x}, 0) = \phi_0(\vec{x}), \vec{x} \in \Omega_s \} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} W_t &= \{ w(\vec{x}, t) \in H^1(\Omega_s \times [0, T]) \mid \\ &w(\vec{x}, t) = 0, t \in [0, T], \vec{x} \in \vec{T}_s(\Gamma_0), \\ &w(\vec{x}, T) = w_T(\vec{x}) = 0, \vec{x} \in \Omega_s \} \end{aligned} \quad (7)$$

なお、本論文のテンソル表示ではEinsteinの総和規約と偏微分表示  $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$ を使用し、 $(\cdot)_{,t}$ は時間の導関数を表わしている。また、 $\vec{n}$ は境界の単位法線ベクトルを表わしている。 $H^m(\Omega_s \times [0, T])$ は  $m$ 階の導関数まで領域  $\Omega_s \times [0, T]$ で2乗可積分な関数空間を表す。

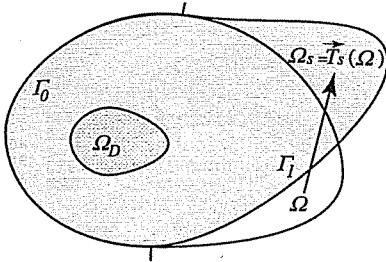


Fig. 2 Determination problem of domain with prescribed temperature gradient on prescribed subdomain  $\Omega_D \subset \Omega$

2.2 形状勾配関数 この問題は Lagrange 乗数法によって制約のない停留化問題に書き換えることができる。この場合の Lagrange 関数  $L(\phi, w, \vec{T}_s)$  は次式で与えられる。

$$L = \int_0^T \{ E_{\Gamma_D}(\phi - \phi_D, \phi - \phi_D) \} dt - \int_0^T \{ a(\phi, w) + b(\phi_{,t}, w) - c(w) - d(w) \} dt \quad (8)$$

領域変動に対する  $L$  の導関数  $\dot{L}$  は速度場  $\vec{V}(\Omega_s) = \partial \vec{T}_s / \partial s(\Omega) = \partial \vec{T}_s / \partial s(\vec{T}_s^{-1}(\Omega_s))$  を用いて、次のように得られる<sup>(19)</sup>。

$$\begin{aligned} \dot{L} = & - \int_0^T \{ a(\phi, w') + b(\phi_{,t}, w') - c(w') - d(w') \} dt \\ & - \int_0^T \{ a(\phi', w) + b(\phi'_{,t}, w) - 2E_{\Gamma_D}(\phi', \phi - \phi_D) \} dt \\ & + l_G(\vec{V}) \end{aligned} \quad (9)$$

ただし、 $(\cdot)'$  は空間座標に固定した分布関数の領域変動に対する導関数を表す。また、

$$l_G(\vec{V}) = \int_{\Gamma_0} G \vec{n} \cdot \vec{V} d\Gamma \quad (10)$$

$$G = \int_0^T \{ -k\phi_{,j}w_{,j} + fw \} dt \quad (11)$$

ここで、 $\phi, w$  が次の条件

$$\int_0^T \{ a(\phi, w') + b(\phi_{,t}, w') - c(w') - d(w') \} dt = 0 \quad \forall w' \in W_t \quad (12)$$

$$\int_0^T \{ a(\phi', w) + b(\phi'_{,t}, w) - 2E_{\Gamma_D}(\phi', \phi - \phi_D) \} dt = 0 \quad \forall \phi' \in \Psi_t \quad (13)$$

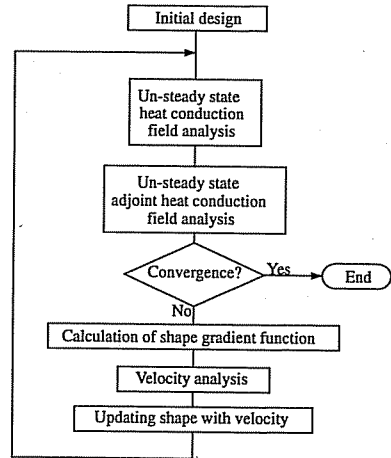


Fig. 3 Numerical procedure

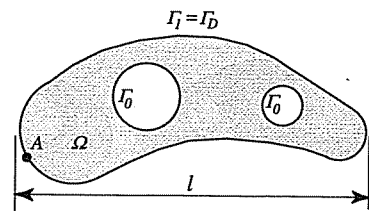


Fig. 4 Shape determination problem of coolant flow passage in wing

によって決定されたとき、Lagrange 汎関数の導関数は評価関数の導関数と一致して、次の関係が成立する。

$$\dot{L}|_{\phi, w} = \dot{E}_{\Gamma_D}|_{\phi, w} = l_G(\vec{V}) \quad (14)$$

式 (10) で与えられる  $G\vec{n}$  は、評価関数の導関数において、領域の微小変動を与える速度場  $\vec{V}$  の係数関数になっていることから、この問題における感度関数あるいは形状勾配関数になっている。また、スカラー関数  $G$  を形状勾配密度関数と呼ぶことにする。式 (12) と (13) はそれぞれ非定常熱伝導場の状態方程式と随伴系方程式の変分形式を表わしている。形状勾配関数が与えられれば、方法を適用することが可能となる。

### 3 部分領域において温度勾配分布を規定する問題

次に同様な手順に基づいて、非定常熱伝導場の部分領域  $\Omega_D \subset \Omega$  において、実温度勾配分布  $\vec{\nabla}\phi(\Omega_D, [0, T])$  と規定された温度勾配分布  $\vec{g}_D(\Omega_D, [0, T])$  との 2 乗誤

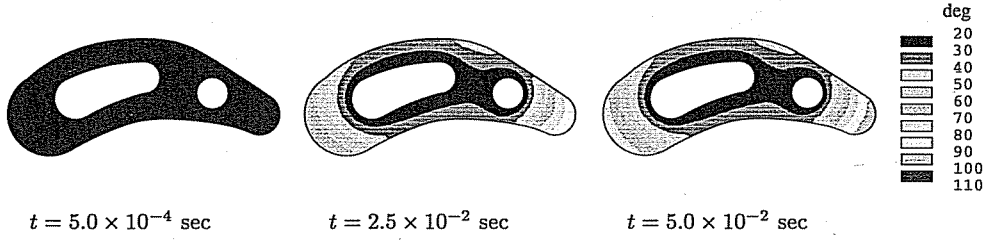


Fig. 5 Objective temperature distributions of coolant flow passage problem

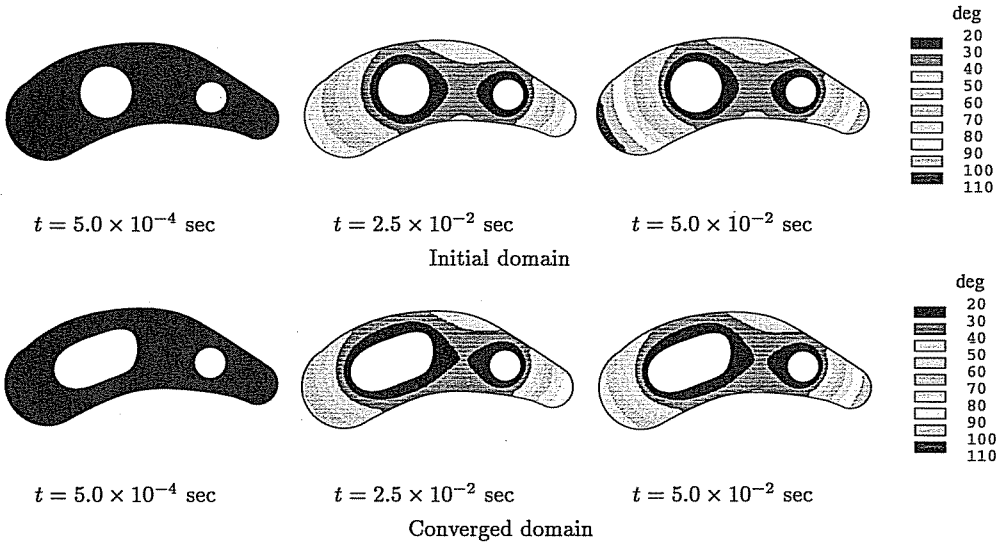


Fig. 6 Results of temperature distributions in the coolant flow passage problem

差を最小化する問題を定式化し、この問題における形状勾配関数を導出する。

3.1 定式化 領域変動問題を図 2 に示す。ここでは簡単のために、領域変動の制約に温度勾配規定領域  $\Omega_D$  と境界  $\Gamma_0$  が含まれると仮定する。このとき、時間  $t = 0$  から  $t = T$  における温度勾配 2 乗誤差最小化問題は次のように定式化される。

Given  $\Omega$  and

$$k, \rho, c, f, q, \hat{\phi}, \phi_0 : \text{fixed in space} \quad (15)$$

$$\text{find } \Omega_s \text{ or } \bar{T}_s(\Omega) \in D \quad (16)$$

$$\text{that minimize } \int_0^T E_{\Omega_D} dt \quad (17)$$

$$\text{subject to } \int_0^T \{ a(\phi, w) + b(\phi, t, w) - c(w) - d(w) \} dt = 0 \quad \phi \in \Psi_t \quad \forall w \in W_t \quad (18)$$

ただし、 $E_{\Omega_D}$  は次のように定義されている。

$$E_{\Omega_D} = E_{\Omega_D}(\bar{\nabla}\phi - \bar{g}_D, \bar{\nabla}\phi - \bar{g}_D) = \int_{\Omega_D} (\bar{\nabla}\phi - \bar{g}_D) \cdot (\bar{\nabla}\phi - \bar{g}_D) dx \quad (19)$$

ここで、 $a(\phi, w)$ 、 $b(\phi, t, w)$ 、 $c(w)$ 、 $d(w)$  の定義、および温度  $\phi$ 、随伴温度  $w$  の属する関数空間は前章の定義と同様である。

3.2 形状勾配関数 この場合の Lagrange 汎関数  $L(\phi, w, \bar{T}_s)$  を与えて、領域変動に対する  $L$  の導関数  $\dot{L}$  を計算すると次のように得られる<sup>(19)</sup>。

$$\begin{aligned} \dot{L} = & - \int_0^T \{ a(\phi, w') + b(\phi, t, w') - c(w') - d(w') \} dt \\ & - \int_0^T \{ a(\phi', w) + b(\phi', t, w) - 2E_{\Omega_D}(\bar{\nabla}\phi', \bar{\nabla}\phi - \bar{g}_D) \} dt \\ & + l_G(\bar{V}) \end{aligned} \quad (20)$$

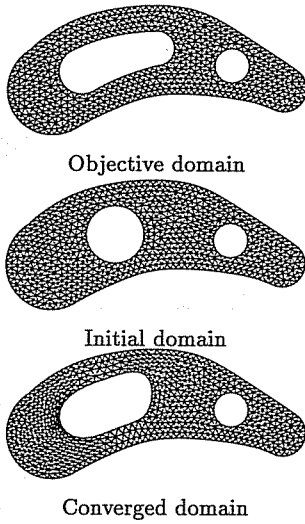


Fig. 7 Finite element meshes in the coolant flow passage problem

ただし、

$$l_G(\vec{V}) = \int_{\Gamma_1} G \vec{n} \cdot \vec{V} d\Gamma \quad (21)$$

$$G = \int_0^T \left\{ -k\phi_{,j}w_{,j} - \rho c\phi_{,t}w + fw + \nabla_n(qw) + (qw)\kappa \right\} dt \quad (22)$$

ここで、 $\nabla_n\{\cdot\} = \vec{\nabla}\{\cdot\} \cdot \vec{n}$ 、 $\kappa$  は 2 次元の場合曲率、3 次元の場合平均曲率を表わしている。 $\phi, w$  が  $s$  次の条件

$$\int_0^T \left\{ a(\phi, w') + b(\phi_{,t}, w') \right.$$

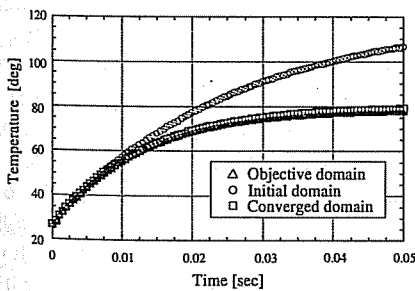


Fig. 8 Time histories of temperature in the coolant flow passage problem at left-side point A in Fig. 4

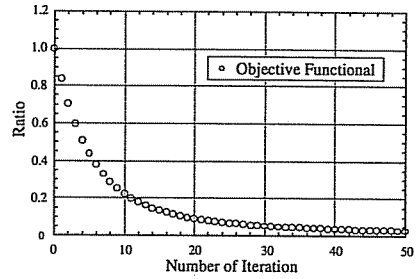


Fig. 9 Iteration history of objective functional in the coolant flow passage problem

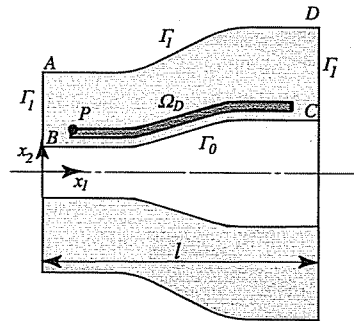


Fig. 10 Shape determination problem of nozzle

$$-c(w') - d(w') \} dt = 0 \quad \forall w' \in W_t \quad (23)$$

$$\int_0^T \left\{ a(\phi', w) + b(\phi'_{,t}, w) - 2E_{\Omega_D}(\vec{\nabla}\phi', \vec{\nabla}\phi - \vec{g}_D) \right\} dt = 0 \quad \forall \phi' \in \Psi_t \quad (24)$$

によって決定されたとき、Lagrange 汎関数の導関数は評価関数の導関数と一致して、次の関係が成立する。

$$\dot{L}|_{\phi, w} = \dot{E}_{\Omega_D}|_{\phi, w} = l_G(\vec{V}) \quad (25)$$

したがって、この部分領域において温度勾配分布を規定する問題に対しての形状勾配関数が導出できた。

#### 4 解法

4.1 方法 方法は速度場  $\vec{V}$  を次の支配方程式に基づいて解く方法として提案されている<sup>(19)</sup>。

$$a^E(\vec{V}, \vec{y}) = -l_G(\vec{y}), \quad \forall \vec{y} \in D \quad (26)$$

ただし、 $a^E(\vec{V}, \vec{y})$  は線形弾性体のひずみエネルギーを与える双一次形式で、分布ベクトル関数  $\vec{u}, \vec{v}$  に対して

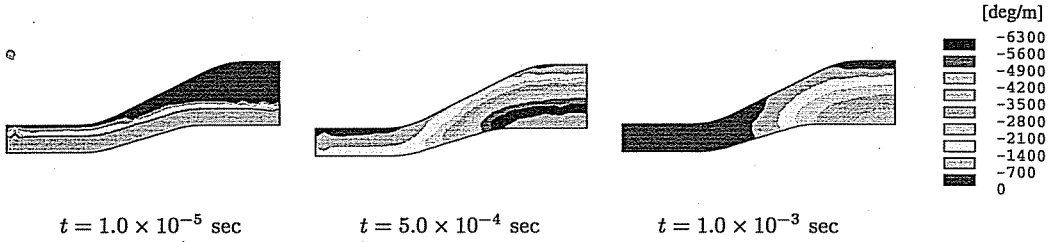


Fig. 11 Objective temperature gradient distributions of nozzle problem

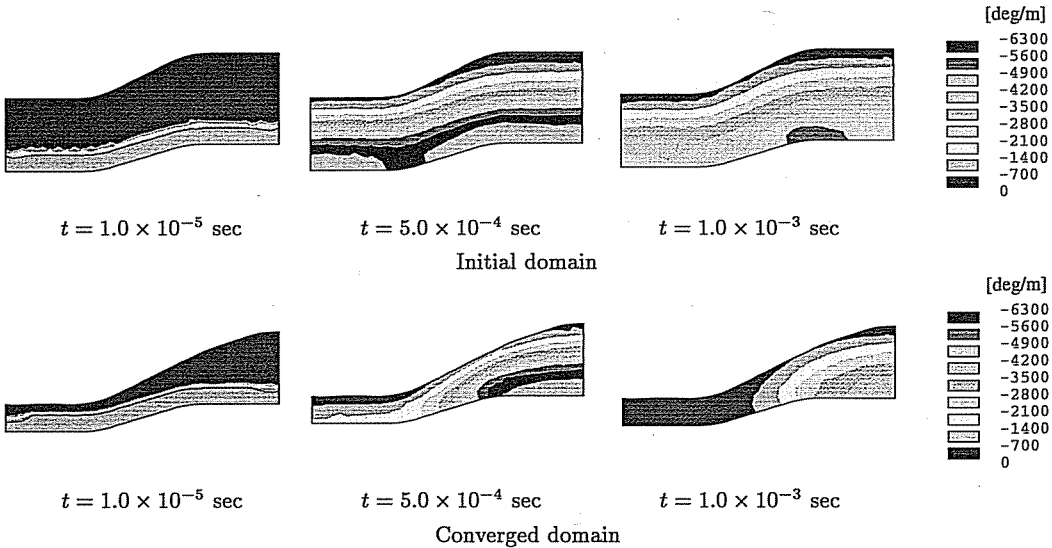


Fig. 12 Results of temperature gradient distributions in the nozzle problem

次式で定義されている。

$$a^E(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega_s} A_{ijkl} u_{k,t} v_{i,j} dx \quad (27)$$

$A_{ijkl}$  は正定値性を有する剛性テンソルである。式 (26) は、速度場  $\vec{v}$  が負の形状勾配関数  $-G\vec{n}$  を外力として作用させたときの変位場として解析されることを示している。法に基づく領域変動は、形状勾配関数を疑似弾性問題の外力として作用させたときの変位場として求められる。したがって、式 (26) の解法には通常の線形弾性問題の解法を用いて解くことが可能であり、汎用性のある方法である。本研究では有限要素法を用いた。また、本研究では簡単のために、剛性テンソルを次式で与えることにする。

$$A_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (28)$$

4.2 解析手順 解析手順を図 3 に示す。まず初期形状を与え、温度  $\phi(\vec{x}, t)$ 、随伴温度  $w(\vec{x}, t)$  を解析する。具体的には、式 (12), (23) と式 (13) あるいは (24) の方程式を空間的には有限要素法、時間的には差分法 (Crank-Nicolson 法) を用いて離散化された温度  $\phi(\vec{x}, t)$ 、随伴温度  $w(\vec{x}, t)$  を解析する。式 (12), (23) の状態方程式の解法では、初期条件  $\phi(\vec{x}, 0) = \phi_0(\vec{x})$  を用いて  $t=0$  から  $t=T$  の方向への温度  $\phi(\vec{x}, t)$  を解析する。式 (13) あるいは (24) の随伴系方程式の解法では、 $w(\vec{x}, T) = w_T(\vec{x}) = 0$  を初期条件として  $t=T$  から  $t=0$  の方向への随伴温度  $w(\vec{x}, t)$  を解析する。その結果から式 (11) あるいは (22) を用いて形状勾配密度関数  $G$  を計算する。さらに、有限要素法を用いて式 (26) から速度場  $\vec{v}(\vec{x})$  を計算し、 $\Delta_s \vec{v}(\vec{x})$  により形状を更新する。形状が更新されれば最初に戻って解析が繰り返され、目的汎関数が停留したと判断されたときに解析は終了する。

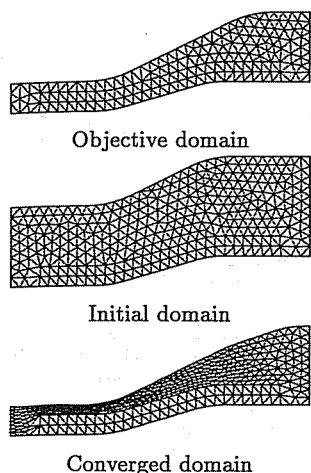


Fig. 13 Finite element meshes in the nozzle problem

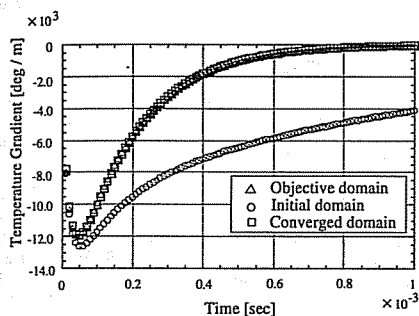


Fig. 14 Time histories in the nozzle problem of temperature gradient in  $x_2$  direction at the left-side point P in Fig. 10

### 5 解析例

部分境界において温度分布を規定する問題としては翼の冷却孔形状を、部分領域における温度勾配分布を規定する問題としてはノズル管の肉厚形状を同定する二つの解析例を設定した。

**5.1 翼の冷却孔形状決定問題** 図4に示すような2次元問題を設定した。翼の外側境界を自然境界  $\Gamma_1$  と仮定し、その境界を温度分布規定境界  $\Gamma_D$  に設定した。目標とする温度分布  $\phi_D(\Gamma_D, [0, T])$  には図5に示す温度履歴を与えた。翼の全長  $l = 0.25$  m とした。二つの冷却孔境界を基本境界  $\Gamma_0$  とし、 $\hat{\phi} = 20$  deg を設定した。材質をアルミニウムと仮定して、熱伝導率

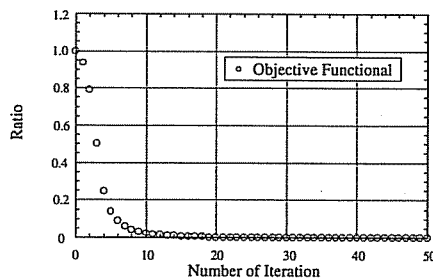


Fig. 15 Iteration history of objective functional in the nozzle problem

$k = 204$  W / m deg、熱流束  $q = 150000$  W / m<sup>2</sup>、密度  $\rho = 2710$  kg/m<sup>3</sup>、比熱  $c = 0.896$  kJ / kg deg とした。初期温度を一定値  $\phi_0 = 20$  deg に設定し、観測時間  $T = 0.05$  sec とした。発熱量  $f$  は無視した。温度  $\phi$ 、随伴温度  $w$  および速度場  $\vec{v}$  を解析するための有限要素法解析では三角形一次要素を用いた。時間積分では  $t = 0$  から  $T = 0.05$  sec までを 100 ステップに分けて Crank-Nicolson 法を適用した。翼外側境界  $\Gamma_1$  と右側の冷却孔境界は境界変動を完全拘束し、左側の冷却孔境界で境界変動を許した。

解析結果を図6, 7, 8, 9に示す。図6は、初期形状と収束形状に対して3つの時刻における空間的な温度分布の様子を比較している。図7は有限要素分割の様子を目標形状も含めて比較した結果である。図8は温度規定境界  $\Gamma_D$  上の左端点 A に注目して、その点における時間的な変化の様子を目標形状も含めて比較した結果である。図9は形状変動に対する目的汎関数の推移を示している。これらの結果から、詳細に観察すれば、目標形状と収束形状のわずかな違いが見られる。この主な原因については次の点が考えられる。設定した形状同定問題そのものが多峰性の影響が強い問題であり、収束形状は初期形状の設定に依存した結果となっており、得られた収束形状は一つの局所解となっていると考えることができる。しかしながら、図8から温度規定境界内の温度履歴が目標形状と収束形状でよく一致し、目的汎関数が単調に減少し、ほぼ零に近づいて収束していることから、本手法の妥当性は確認できた。

**5.2 ノズル管の肉厚形状決定問題** 図10に示す2次元問題を設定した。ノズル内壁側近傍に温度勾配分布規定領域  $\Omega_D$  を設定した。問題の対称性から上部半分の解析を行った。目標とする温度勾配分布  $\vec{g}_D(\Omega_D, [0, T])$  には図11に示す温度勾配履歴を与えた。ノズルの全長  $l = 0.06$  m とした。解析領域は境界 A-B-C-D で

ある。下側の境界 B-C を温度既知の基本境界  $\Gamma_0$  とし、一定温度分布  $\hat{\phi}(\Gamma_0) = 100 \text{ deg}$  を設定した。観測時間  $T = 0.001 \text{ sec}$  とした。上側境界 A-D と左右両側の境界 A-B および C-D を自然境界  $\Gamma_1$  として断熱条件を仮定した。熱伝導率、密度、比熱、初期温度は翼の冷却孔問題の場合と同じ値を用いた。発熱量  $f$  は無視した。時間積分では  $t = 0$  から  $T = 0.001 \text{ sec}$  までを 100 ステップに分けて Crank-Nicolson 法を適用した。形状変動は下側境界 B-C を完全拘束、左右両側の境界 A-B および C-D を滑り拘束し、上側境界 A-D の変動を許した。

解析結果を翼の冷却孔形状同定の問題と同様に 図 12, 13, 14, 15 に示す。図 12 は、初期形状と収束形状に対して 3 つの時刻における空間的な温度勾配分布の様子を比較している。図 13 は有限要素分割の様子を目標形状も含めて比較した結果である。図 14 は、温度勾配分布規定領域  $\Omega_D$  の左端点 P に注目して、その点における時間的な変化の様子を目標形状を含めて比較した結果である。図 15 は形状変動に対する目的汎関数の推移を示している。

これらの結果から、この問題においても詳細に観察すれば、初期形状の設定に依存した目標形状と収束形状のわずかな違いが見られるが、温度規定境界内の温度履歴が目標形状と収束形状でよく一致し、目的汎関数が単調に減少し、零に収束していることから、本手法の妥当性は確認できた。

なお、解析例の計算時間は Alpha21164A/500MHz の 1CPU の計算機を用いて、翼の冷却孔の解析で約 1 時間、ノズル管の解析で約 20 分間を要した。

## 6 まとめ

本論文では、非定常熱伝導場を対象にして、指定した部分境界で温度履歴が指定した温度履歴を持つように境界形状を決定する問題と、指定した部分領域で温度勾配履歴が指定した温度勾配履歴を持つように境界形状を決定する問題に対する形状勾配関数を理論的に導出し、方法を適用することによって、これらの問題が解析できることを示した。

## 文 献

- (1) 相原利雄：伝熱制御の現状と将来 (1), 機械の研究, 43 巻, 6 号, (1991), 641-647.
- (2) 久保司郎：逆問題, 培風館 (1992), 143-207.
- (3) 中村正行, 田中正隆, 石川尚男：非定常熱伝導場問題における未知境界値推定のための境界要素逆解析, 日本機械学会論文集, A 編, 58 巻, 555 号, (1992), 2206-2221.
- (4) 白強, 藤田恭伸：熱伝導場逆問題に対する有限要素解析法, 日本機械学会論文集, B 編, 63 巻, 608 号, (1997), 1320-1326.
- (5) 久保司郎, 大中幸三郎, 大路清詞：境界積分に基づく物体内の発熱源および荷重の同定, 日本機械学会論文集, A 編, 54 巻, 503 号, (1988), 1329-1334.
- (6) 桃瀬一成, 木本日 outcomes: グリーン関数を利用した熱伝導場の最適熱源配置, 日本機械学会論文集, B 編, 61 巻, 585 号, (1995), 1762-1767.
- (7) 田中正隆, 中村正行, 塩崎明：非定常熱伝導場における熱特性値推定のための境界要素逆解析手法, 材料, Vol. 42, No. 477, (1993), 708-713.
- (8) 松崎元甫, 中村浩之, 久保司郎, 大路清詞：非定常温度観測情報を用いたき裂の同定, 日本機械学会講演論文集, No.940-54, (1994), 370-371.
- (9) 中村浩之, 久保司郎, 阪上隆英, 大路清詞：非定常な温度場を観測情報として用いたき裂同定に関する検討, 日本機械学会講演論文集, No.95-5, (1995), 343-344.
- (10) Barone M. R. and Caulk D. A.: Optimal Arrangement of Hole in a Two-Dimensional Heat Conductor by a Special Boundary Integral Method, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 18, (1982), 675-685.
- (11) Kennon S. R. and Dulikravich G.S.: Inverse Design of Multiholed Internally Cooled Turbine Blades, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 22, (1986), 363-375.
- (12) 吉川文明, 児子精祐, 清原庄三, 田口整司, 高橋洋光, 一言正俊：高炉炉底部の耐火物侵食と凝固層分布の推定および操業への応用, 鉄と鋼, 第 73 年, 第 15 号, (1987), 2068-2075.
- (13) Shau R., Batista J. and Carey G. F.: An Improved Algorithm for Inverse Design of Thermal Problems With Multiple Materials, *Tran. ASME J. Heat Transfer*, Vol. 112, (1990), 274-279.
- (14) Meric, R. A.: Differential and Integral Sensitivity Formulations and Shape Optimization by BEM, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 15, (1995), 181-188.
- (15) H. Azegami, S. Kaizu, M. Shimoda and E. Katamine: Irregularity of Shape Optimization Problems and an Improvement Technique, *Computer Aided Optimum Design of Structures V*, edited by S. Hernandez and C.A. Brebbia, Computational Mechanics Publications, Southampton, (1997), 309-326.
- (16) 片峯英次, 畔上秀幸, 小嶋雅美：定常熱伝導場における境界形状決定, 日本機械学会論文集, B 編, 65 巻, 629 号, (1999), 275-281.
- (17) 片峯英次, 畔上秀幸：ポテンシャル流れ場の領域最適化解析, 日本機械学会論文集, B 編, 61 巻, 581 号, (1995), 103-108.
- (18) 片峯英次, 畔上秀幸, 山口正太郎：ポテンシャル流れ場の形状同定解析 (圧力分布規定問題と力法による解法), 日本機械学会論文集, B 編, 64 巻, 620 号, (1998), 1063-1070.
- (19) 畔上秀幸：領域最適化問題の一解法, 日本機械学会論文集, A 編, 60 巻, 574 号, (1994), 1479-1486.