

固有振動問題における領域最適化解析*
(力法によるアプローチ)呉 志 強*¹, 畔 上 秀 幸*²Domain Optimization Analysis in Natural Vibration Problems
(Approach Using Traction Method)

Zhi Chang WU and Hideyuki AZEGAMI

We present a practical method of numerical analysis for optimization problems of domains in which natural vibration problems of linear elastic bodies are defined. In this paper, we apply the traction method that was proposed as a solution to the domain optimization problems to elliptic boundary value problems. The treated problems are those which determine the domain that maximizes a specified vibration eigen value, which is defined by the squared natural frequency, and that moves several specified vibration eigen values in a specified direction. Using the Lagrange multiplier method, we obtain the shape gradient functions for these domain optimization problems from the optimality criteria. We show the successful resolution of the problems of beamlike plates clamped at one end and at both ends.

Key Words: Optimum Design, Computer-Aided Design, Finite-Element Method, Vibration of Continuous System, Modal Analysis, Domain Optimization, Natural Vibration Problem, Speed Method, Gradient Method, Traction Method

1 はじめに

線形弾性体の領域形状を設計変数にして、固有振動数を目標値に向けて移動する領域最適化問題は、構造物の振動特性を改善しようとする場合に現れる基本的な問題の一つである。本論文では、この問題に対する実用的な数値解析法について検討を加えてみたい。

固有振動数、あるいは2乗された固有振動数(本論文では振動固有値と呼ぶことにする)、を目的関数にした最適構造設計問題は、古くから研究されてきた。Hadamard⁽¹⁾は、1908年に、薄膜の基本振動数を最大化する問題に対して、最適であるための必要条件を変分問題として解いている⁽²⁾。この研究は、境界が法線方向に変動する領域最適化問題に対する解法で用いられる基本的な関係を最初に示した研究としても知られている。

はり、棒あるいは平板などの断面寸法の分布関数を設計関数にした解析的な研究は1950年代後半から盛んに行われた。Beesack⁽³⁾とSchwarz⁽⁴⁾は、弦、棒および平板の固有振動数が極値を持つときの非構造質量の分布についての考察を行った。Niordson⁽⁵⁾は、両端

単純支持はりに対して、そのRayleigh商を変分することによって、振動固有値が最大となる必要条件を導出し、その条件を満たす両端単純支持ばりの断面形状分布を解いた。Turner⁽⁶⁾は、棒の縦振動に関して、固有振動数を制約条件として質量最小化を目指した双対問題に対して、Lagrange乗数法を用いた解法を示した。Taylor⁽⁷⁾は、同じく棒の縦振動に関して、Hamiltonの原理を用いた問題の定式化を示し、そのときの最適性規準と双対問題の解の同一性を示した。その後Olhoff⁽⁸⁾は、Niordson⁽⁵⁾の方法に従って板厚分布を設計関数とした長方形平板の振動固有値最大化問題を定式化して、最適性規準とそれを満たす板厚分布を解いた。また、Olhoff⁽⁹⁾⁽¹¹⁾は、はりに関して、特定した高次の振動固有値最大化問題に対する断面形状分布や、隣接する二つの振動固有値の差を最大化する問題に対する断面形状分布を解いた。さらに、OlhoffとPlaut⁽¹⁰⁾は、アーチに関して、多重モードの同時最適化問題に対する断面形状分布を解いている。

また、有限個の特定された寸法を設計変数にした寸法最適化問題に対する感度解析の研究も1960年代から始められた。Wittrick⁽¹²⁾は、長方形平板のアスペクト比を設計変数に設定した場合の振動固有値感度を解析的に導出した。Zarghamee⁽¹³⁾は、有限要素法を意

* 原稿受付 平成6年6月10日。

¹ 学生員, 豊橋技術科学大学大学院。² 正員, 豊橋技術科学大学(〒441 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)。

識して、トラス構造に対する固有振動数感度の解析法を示し、最適化過程に傾斜投影法を用いた場合の数値解析結果を示した。Fox と Kapoor⁽¹⁴⁾は、有限要素法を利用して、設計変数に対する剛性マトリクスと質量マトリクスの感度と固有振動ベクトルが与えられた場合に、振動固有値と固有振動ベクトルの感度を解析する方法を示した。その後、Nelson⁽¹⁵⁾がそれらの方法を改良している。また、山川と奥村⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾は、大規模な自由度系に適した振動固有値感度の計算方法を示し、はり状構造の振動に関して、最適化過程に傾斜投影法を用いた場合の数値解析結果を示した。

さらに、領域形状そのものを設計対象にした領域最適化問題に対する数値解析法の研究は1980年代に入って始められた。浜田、瀬口と多田⁽¹⁹⁾は、基本振動数の最大化問題に対して、逆変分原理から導出された最適性規準を満たすように、有限要素モデルの境界節点を移動する方法を提案し、はり状構造に対する数値解析結果を示した。また、近年になって、領域に分布したマイクロな穴の寸法分布を設計関数にした領域の位相が変化する最適化問題の数値解法が Bensepe と Kikuchi⁽²⁰⁾によって示され、それを用いた固有振動問題の数値解法が Diaz と Kikuchi⁽²¹⁾および Tenek と Hagiwara⁽²²⁾によって報告されている。周波数応答問題に対する数値解法は Ma, Kikuchi と Hagiwara⁽²³⁾によって報告されている。

このようなこれまでの研究を背景にして、本研究では、領域の位相を固定したまま境界を変動させる領域最適化問題に対する実用的な数値解法について検討を加えてみたい。著者らは、これまで、実用的な領域最適化問題の数値解法として力法 (traction method) を提案し⁽²⁴⁾、線形弾性問題に適用した場合の数値解析結果を通してその解法としての妥当性を示してきた⁽²⁵⁾。また、汎用 FEM コードを利用したシステムを開発し、それによる数値解析結果を通してその実用性を示した⁽²⁶⁾。本論文では、この力法を固有振動数移動問題に適用することを検討する。

方法では、領域変動を Zolésio⁽²⁾⁽²⁷⁾⁻⁽²⁹⁾によってまとめられた速度法 (speed method) によって記述する。領域変動を与える速度場に対して、目的汎関数の感度を与える形状勾配関数を理論的に導出する。力法はこの形状勾配関数を用いた勾配法によって導出される速度場の支配方程式を線形弾性問題に対する変位場の支配方程式に置き換えて解く方法である。置き換えられた線形弾性問題は有限要素法や境界要素法などを利用して解析することができる。

本論文では、まず、単一の振動固有値を最大化する問題に対して形状勾配関数を理論的に導出する。続いて、複数の振動固有値を目標とする方向に移動する問題に対して形状勾配関数を導出する。その後で、力法を簡潔に紹介する。最後に、これらの形状勾配関数を用いた力法が有効に機能することを、数値解析例を通して示す。

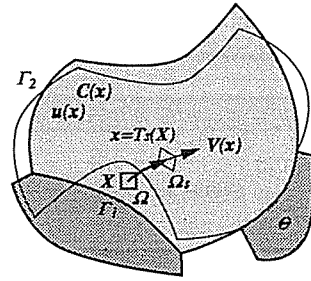


図1 変動する弾性連続体

2 単一の振動固有値最大化問題

最初に、特定した単一の振動固有値を最大化する問題について考えてみよう。速度法⁽²⁾⁽²⁴⁾によって領域変動問題を定式化した後で、Lagrange 乗数法を用いて最適性規準を導出する。領域変動に対する形状勾配関数は最適性規準の結果を用いて定義することができる。

2.1 速度法 図1のように、領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ 、境界 $\Gamma = \partial\Omega$ の線形弾性連続体変動して、領域 Ω_s 、境界 $\Gamma_s = \partial\Omega_s$ になることを仮定する。ただし、変動を拘束する領域あるいは境界は Θ と表すことにする。媒介変数 s は変動履歴を表すことにする。

この領域変動を速度法によって記述すると次のようになる。領域変動は初期領域 Ω を定義域とした1対1写像

$$T_s(X) : \Omega \ni X \mapsto x \in \Omega_s \quad (1)$$

を用いて表現することができる。また、領域の微小変動は次のように表すことができる。

$$T_{s+\Delta s}(X) = T_s(X) + \Delta s V + O(|\Delta s|) \quad (2)$$

ここで、速度場 V は次のような連続関数として定義することができる。

$$V \in C_\Theta = \{V \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \mid V = \mathbf{o} \text{ in } \Theta\} \quad (3)$$

このとき、一般に、分布関数 ϕ_s の汎関数

$$J = \int_{\Omega_s} \phi_s dx \quad (4)$$

の s に対する導関数 \dot{J} は式(2)の関係を用いて次式で与えられる。

$$\dot{J} = \int_{\Omega_s} \phi'_s dx + \int_{\Gamma_s} \phi_s v_n d\Gamma \quad (5)$$

ただし、 $v_n = n_i V_i$ を表している。 n は外向単位法線ベクトルを表す。また、 ϕ_s の形状導関数 ϕ'_s は次式で定義される。

$$\phi'_s = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} (\phi_{s+\Delta s} - \phi_s) \quad (6)$$

なお、本論文では、 \mathbb{R} は実数を表す。また、ベクトルとテンソルはボルト体表示と添え字によるテンソル表示を併用する。テンソル表示では Einstein 総和規約を使用する。 $C^m(\cdot; \cdot)$ は m 階の導関数まで連続な連続関数空間を表す。

2.2 定式化 一方、連続体の境界 Γ_s の一部 $\Gamma_{s1} = \Gamma_s \setminus \Gamma_{s2}$ では常に弾性変位が拘束されている状態を仮定する。なお、 $(\cdot) \setminus (\cdot)$ は差集合を表す。

このような仮定の下で、ある r 次の固有振動モード $u_{(r)}$ に対する振動固有値 $\lambda_{(r)}$ を最大化する問題は次のように定式化することができる。ただし、モードの特定は固有振動モード $u_{(r)}$ で区別することにして、領域変動によってモード次数 r は変化すると仮定する。また、多重モードの場合におけるモードの特定も固有振動モード $u_{(r)}$ に基づいて区別することにする。

▷ 問題 1: 領域の大きさに対する上限値 $M \in \mathbb{R}_+$ が与えられているとき、特定された r 次の

$$\text{振動固有値 } \lambda_{(r)} \quad (7)$$

が最大となる領域 Ω_s を求めよ。ただし、固有振動方程式

$$a(u_{(r)}, v) = \lambda_{(r)} b(u_{(r)}, v) \quad u_{(r)} \in H_{\Gamma_1} \quad \forall v \in H_{\Gamma_1} \quad (8)$$

と質量制約

$$m - M \leq 0 \quad (9)$$

は満たしていなければならない。◁

ただし、領域 Ω_s で定義された分布関数 u, v に対して、双一次形式 $a(u, v)$ 、 $b(u, v)$ 、領域の大きさ m は次のように定義する。

$$a(u, v) = \int_{\Omega_s} C_{ijkl} u_{k,i} v_{j,l} dx \quad (10)$$

$$b(u, v) = \int_{\Omega_s} \rho u_i v_i dx \quad (11)$$

$$m = \int_{\Omega_s} dx \quad (12)$$

関数空間 H_{Γ_1} は次式で定義する。

$$H_{\Gamma_1} = \{v \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \mid v = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_1\} \quad (13)$$

また、簡単のために、対称性と正定値性を有する Hook 剛性 $C \in C^1(\Omega_s; \mathbb{R}^{n^4})$ と、正定値性を有する密度 $\rho \in C^1(\Omega_s; \mathbb{R})$ は領域と共に変動しない空間固定関数であると仮定する⁽²⁵⁾。

なお、本論文では、 \mathbb{R}_+ は正の実数を表す。また、偏微分表示 $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$ を使用する。 $H^m(\cdot; \cdot)$ は Sobolev 空間を表す。

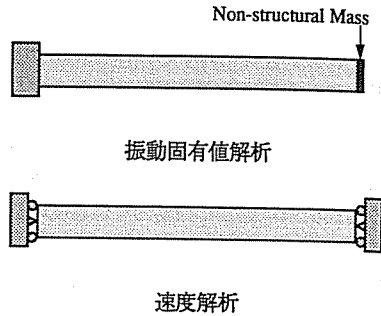


図 2 片側完全固定平板問題

2.3 最適性規準 問題 1 は、 $-\lambda_{(r)}$ の最小化問題とみなして、Lagrange 乗数法によって制約条件のない停留化問題に書き換えることができる。この場合の Lagrange 関数 $L(\lambda_{(r)}, u_{(r)}, v, \Lambda, \Omega_s)$ は次式で与えられる。

$$L = -\lambda_{(r)} - a(u_{(r)}, v) + \lambda_{(r)} b(u_{(r)}, v) + \Lambda(m - M) \quad (14)$$

領域変動に対する L の s に対する導関数 \dot{L} は、式 (5) の関係を用いて次のように得ることができる。

$$\begin{aligned} \dot{L} = & -\{a(u_{(r)}, v') - \lambda_{(r)} b(u_{(r)}, v')\} \\ & -\{a(u'_{(r)}, v) - \lambda_{(r)} b(u'_{(r)}, v)\} \\ & + \lambda_{(r)} \{b(u_{(r)}, v) - 1\} \\ & - \int_{\Gamma_s} (C_{ijkl} u_{(r)k,l} v_{i,j} - \lambda_{(r)} \rho u_{(r)i} v_i - \Lambda) v_n d\Gamma \\ & + \dot{\Lambda}(m - M) \end{aligned} \quad (15)$$

したがって、Lagrange 関数 L が停留するための必要条件は、次のように得られることになる。

$$a(u_{(r)}, v') = \lambda_{(r)} b(u_{(r)}, v') \quad \forall v' \in H_{\Gamma_1} \quad (16)$$

$$a(u'_{(r)}, v) = \lambda_{(r)} b(u'_{(r)}, v) \quad \forall u'_{(r)} \in H_{\Gamma_1} \quad (17)$$

$$b(u_{(r)}, v) = 1 \quad (18)$$

$$\int_{\Gamma_s} (C_{ijkl} u_{(r)k,l} v_{i,j} - \lambda_{(r)} \rho u_{(r)i} v_i - \Lambda) v_n d\Gamma = 0 \quad \forall v \in C_\Theta \quad (19)$$

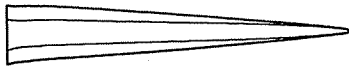
$$\Lambda(m - M) = 0 \quad (20)$$

$$m - M \leq 0 \quad (21)$$

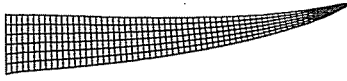
ここで、式 (16) と式 (18) は固有振動モード $u_{(r)}$ を決定するための固有振動方程式 (8) と正規化条件を与え、式 (17) は随伴固有振動モード v を決定することができる随伴固有振動方程式の関係を与えている。これらの式を比較すると、この問題では自己随伴関係

$$u_{(r)} = v \quad (22)$$

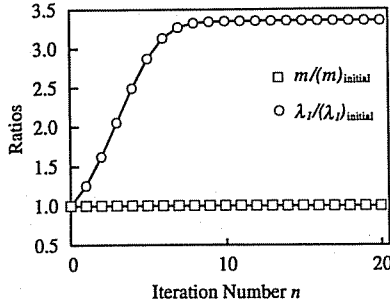
が成立することが解る。一方、式 (20) と (21) は不等式制約式 (9) に対する Kuhn-Tucker 条件式を与え、 Λ を決定するための支配方程式になっている。



形状と G の分布



1次モード



変動履歴

図3 解析結果 (片側完全固定平板の λ_1 最大化)

2.4 形状勾配関数 そこで、式 (16) と (22) を満たす $u(r)$, v と、式 (20) と (21) を満たす A を用いることにすれば、Lagrange 関数の導関数 \dot{L} は次のように表すことができる。

$$\dot{L} = l_G(V) \quad (23)$$

$$l_G(V) = \int_{\Gamma} G^T V \, d\Gamma \quad (24)$$

このとき、形状感度を与える形状勾配ベクトル関数 G は次式で与えられることになる。

$$G = G_n \quad (25)$$

$$G = -C_{ijkl} u_{(r)k,l} u_{(r)i,j} + \lambda_{(r)} \rho u_{(r)i} u_{(r)i} + A \quad (26)$$

ここで、スカラー関数 G は形状勾配密度関数と呼ぶことにする。なお、 $(\cdot)^T$ は転置を表す。

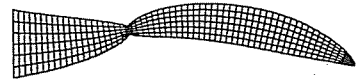
3 複数の振動固有値移動問題

次に、特定した複数の振動固有値を指定された方向に移動する問題を考えてみよう。ここでも、形状勾配関数を導出することを目標とする。

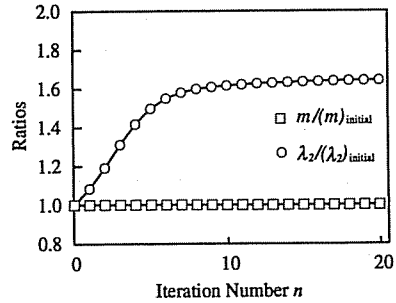
3.1 定式化 変動する線形弾性連続体を2章と同様に仮定する。ただし、ここでは、特定したモード次数



形状と G の分布



2次モード



変動履歴

図4 解析結果 (片側完全固定平板の λ_2 最大化)

$r = (r_1, r_2, \dots, r_N)$ の固有振動モード $(u_{(r_1)}, u_{(r_2)}, \dots, u_{(r_N)})$ に対する振動固有値 $\lambda = (\lambda_{(r_1)}, \lambda_{(r_2)}, \dots, \lambda_{(r_N)})$ を方向 $\alpha = (\alpha_{(r_1)}, \alpha_{(r_2)}, \dots, \alpha_{(r_N)})$ に移動する問題を考える。ここでもモードの特定は固有振動モードで区別することにする。このとき、この問題は次のように定式化することができる。

▷ 問題2: 領域の大きさに対する上限値 $M \in \mathbb{R}_+$ が与えられているとき、特定されたモード次数ベクトル r に対する振動固有値ベクトル λ と方向ベクトル α の

$$\text{内積} \quad \sum_{m=1}^N \alpha_{(r_m)} \lambda_{(r_m)} \quad (27)$$

が最大となる領域 Ω_s を求めよ。ただし、固有振動方程式

$$a(u_{(r_m)}, v_{(r_m)}) = \lambda_{(r_m)} b(u_{(r_m)}, v_{(r_m)})$$

$$u_{(r_m)} \in H_{\Gamma_1} \quad \forall v_{(r_m)} \in H_{\Gamma_1} \quad \forall m \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (28)$$

と質量制約

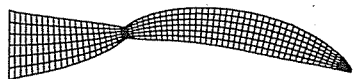
$$m - M \leq 0 \quad (29)$$



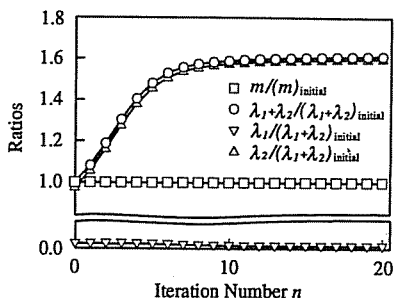
形状と G の分布



1次モード



2次モード



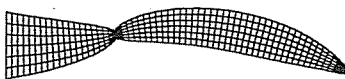
変動履歴



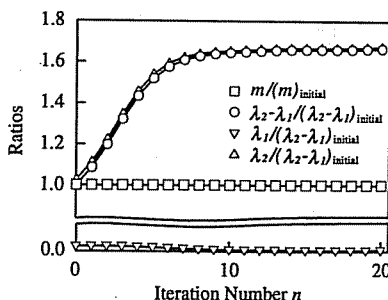
形状と G の分布



1次モード



2次モード



変動履歴

図5 解析結果 (片側完全固定平板の $\lambda_1 + \lambda_2$ 最大化)

図6 解析結果 (片側完全固定平板の $\lambda_2 - \lambda_1$ 最大化)

は満たしていなければならない。◁

ここで簡単な例を挙げてみよう。 $r = (1, 2)$, $\alpha = (-1, 1)$ の場合を考えてみる。目的汎関数は $\lambda_{(2)} - \lambda_{(1)}$ となり、この問題は1次振動固有値と2次の振動固有値の差を最大にする形状決定問題となる。

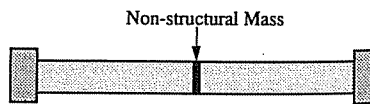
3.2 最適性規準 問題2に対してもLagrange乗数法を適用すると、Lagrange関数が停留するための必要条件として次の関係を得ることができる。

$$a(u_{(r_m)}, v'_{(r_m)}) = \lambda_{(r_m)} b(u_{(r_m)}, v'_{(r_m)}) \quad \forall v'_{(r_m)} \in H_{\Gamma_1} \quad \forall m \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (30)$$

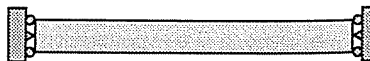
$$a(u'_{(r_m)}, v_{(r_m)}) = \lambda_{(r_m)} b(u'_{(r_m)}, v_{(r_m)}) \quad \forall u'_{(r_m)} \in H_{\Gamma_1} \quad \forall m \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (31)$$

$$b(u_{(r_m)}, v_{(r_m)}) = \alpha_{(r_m)} \quad \forall m \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (32)$$

$$\int_{\Gamma_2} \sum_{m=1}^N (C_{ijkl} u_{(r_m)k,l} v_{(r_m)i,j})$$



振動固有値解析



速度解析

図7 両側完全固定平板問題

$$-\lambda_{(r_m)} \rho u_{(r_m)i} v_{(r_m)i} - \Lambda v_n d\Gamma = 0 \quad \forall v \in C_0 \quad (33)$$

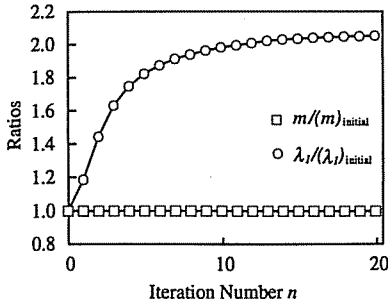
$$A(m - M) = 0 \quad (34)$$



形状と G の分布



1次モード



変動履歴

図8 解析結果 (両側完全固定平板の λ_1 最大化)

$$m - M \leq 0 \quad (35)$$

ここでも、式 (30) と式 (32) は固有振動モード $u_{(r_m)}$ を決定するための固有振動方程式 (28) と正規化条件を与え、式 (31) は随伴固有振動モード $v_{(r_m)}$ を決定することができる随伴固有振動方程式の関係を与えている。これらの式を比較すると、この問題でも自己随伴関係

$$u_{(r_m)} = \alpha_{(r_m)} v_{(r_m)} \quad \forall m \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (36)$$

が成立することが解る。一方、式 (34) と (35) は不等式制約式 (29) に対する Kuhn-Tucker 条件式を与え、 Λ を決定するための支配方程式になっている。

3.3 形状勾配関数 そこで、式 (30) と (36) を満たす $u_{(r_m)}$, $v_{(r_m)}$ と、式 (34) と (35) を満たす Λ を用いることにすれば、Lagrange 関数の導関数 \dot{L} は次のように表すことができる。

$$\dot{L} = l_G(V) \quad (37)$$

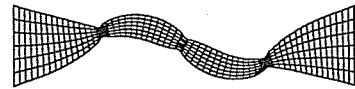
$$l_G(V) = \int_{\Gamma} G^T V \, d\Gamma \quad (38)$$

このとき、形状感度を与える形状勾配ベクトル関数 G は次式で与えられることになる。

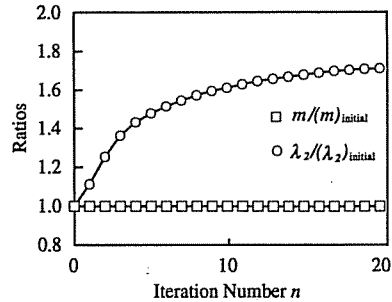
$$G = Gn$$



形状と G の分布



2次モード



変動履歴

図9 解析結果 (両側完全固定平板の λ_2 最大化)

$$G = \sum_{m=1}^N \alpha_{(r_m)} (-C_{ijkl} u_{(r_m)k,l} u_{(r_m)i,j} + \lambda_{(r_m)} \rho u_{(r_m)i} u_{(r_m)i} + \Lambda) \quad (39)$$

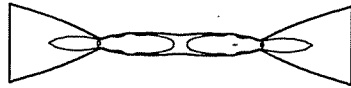
4 方法

凸性の保証された最適化問題に対して形状勾配関数 G が与えられれば、方法を適用することによって、目的汎関数を最適化することが保証された速度場 V を解析することが可能となる。

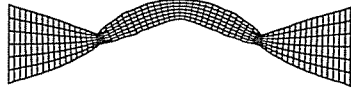
方法は、速度場 V を次の支配方程式に基づいて解く方法として提案されている⁽²⁴⁾⁽²⁵⁾。

$$a(V, w) = -l_G(w) \quad \forall V \in C_0 \quad \forall w \in C_0 \quad (40)$$

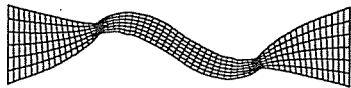
ただし、 $a(V, w)$ は式 (10) で定義されている双一次形式である。式 (40) は、速度場 V が負の形状勾配関数 $-G$ を外力として作用させたときの変位場として解析することを意味している。したがって、式 (40) は有限要素法や境界要素法などを用いた通常の線形弾性問題の数値解法を適用することによって、解析することが可能である。



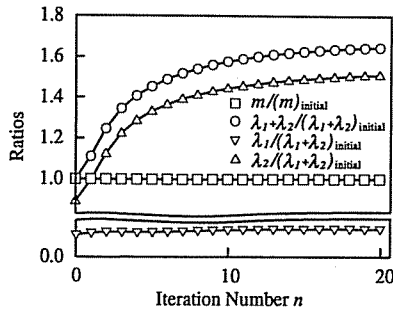
形状と G の分布



1次モード



2次モード



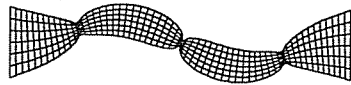
変動履歴



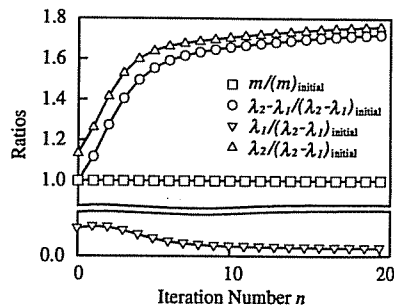
形状と G の分布



1次モード



2次モード



変動履歴

図 10 解析結果 (両側完全固定平板の $\lambda_1 + \lambda_2$ 最大化)

図 11 解析結果 (両側完全固定平板の $\lambda_2 - \lambda_1$ 最大化)

5 数値解析

基本的な2次元問題に対して、2章と3章で導出された形状勾配関数を用いた方法が有効に機能することを示す。式(8)あるいは(28)の振動固有値解析や式(40)の速度解析には8節点アイソパラメトリック要素を用いた有限要素法を使用した。いずれの問題においても平面応力状態を仮定し、初期領域 Ω には横長でアスペクト比10の長方形を仮定することにした。

5.1 片側完全固定平板 問題設定を図2に示す。振動固有値解析では、長方形の左辺を完全拘束し、右辺に長方形構造質量の10%に相当する非構造質量を一様に分布させた。速度解析では、左右両辺の滑り拘束と左右両辺中央の点の完全拘束を仮定した。

この片側完全固定平板の1次の振動固有値最大化問題に対する解析結果を図3に示す。なお、最上図の等

高線は式(25)で定義された G の分布を表す。2次の振動固有値最大化問題に対する解析結果を図4に示す。また、1次の振動固有値と2次の振動固有値の和を最大化する問題に対する解析結果を図5に、2次の振動固有値から1次の振動固有値を差し引いた差を最大化する問題に対する解析結果を図6に示す。

いずれの解析結果においても、変動履歴の結果から、領域変動を繰り返すに従って目的の振動固有値が最大化に向かって収束している様子を確認することができる。

5.2 両側完全固定平板 問題設定を図7に示す。振動固有値解析では、長方形の左右両辺を完全拘束し、左右の中央断面に長方形構造質量の10%に相当する非構造質量を一様に分布させた。速度解析では、左右両辺の滑り拘束と左右両辺中央の点の完全拘束を仮定した。

この両側完全固定平板の1次の振動固有値最大化問題に対する解析結果を図8に、2次の振動固有値最大

化問題に対する解析結果を図9に示す。また、1次の振動固有値と2次の振動固有値の和を最大化する問題に対する解析結果を図10に、2次の振動固有値から1次の振動固有値を差し引いた差を最大化する問題に対する解析結果を図11に示す。

この平板問題の解析結果においても、変動履歴の結果から、領域変動を繰り返すに従って目的の振動固有値が最大化に向かって収束している様子を確認することができる。

6 おわりに

本論文では、連続体の領域形状を設計対象とする場合の、単一の振動固有値を最大化する問題と、複数の振動固有値を特定された方向に移動する問題に対して、形状勾配関数を理論的に導出した。それらの形状勾配関数を用いた力法が有効に機能することを、基本的なはり状構造問題に対する数値解析結果を通して示した。

なお、本研究は文部省科学研究費の援助を受けて実施されたことを記して感謝する。

文 献

- (1) Hadamard, J., Mémoire sur un problème d'analyse relatif a l'équilibre des plaques élastiques encastrees, Mémoire des savants etrangers, Oeuvres de J. Hadamard, CNRS, Paris, 1908.
- (2) Sokolowski, J. and Zolésio, J. P., *Introduction to Shape Optimization, Shape Sensitivity Analysis*, (1991), Springer-Verlag.
- (3) Beesack, P. R. : Isoperimetric inequalities for the nonhomogenous clamped rod and plate, *Journal Math. Mech.*, Vol. 8 (1959), 471-482.
- (4) Schwarz, B. : On the extrema of frequencies of nonhomogenous strings with equimeasurable density, *Journal Math. Mech.*, Vol. 10 (1961), 401-422.
- (5) Niordson, F. : On the optimal design of a vibrating beam, *Quart. Appl. Math.*, Vol. 23 (1965), 47-54.
- (6) Turner, M. J. : Design of minimum mass structures with specified natural frequencies, *AIAA Journal*, Vol. 5 (1967), 406-412.
- (7) Taylor, J. E. : Minimum mass bar for axial vibration at specified natural frequency, *AIAA Journal*, Vol. 5 (1967), 1911-1913.
- (8) Olhoff, N. : Optimal design of vibrating rectangular plates, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 10 (1974), 93-109.
- (9) Olhoff, N. : Optimization of vibrating beams with respect to higher order natural frequencies, *J. Struct. Mech.*, Vol. 4 (1976), 87-122.
- (10) Olhoff, N. and Plaut, R. H. : Bimode optimization of vibrating shallow arches, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 19 (1983), 553-569.
- (11) Olhoff, N. : Designing vibrating beams and rotating shafts for maximum difference between adjacent natural frequencies, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 20 (1984), 63-75.
- (12) Wittrick, W. H. : Rates of change of eigenvalues with reference to buckling and vibration problems, *Journal of the Royal Aeronautical Society*, Vol.66 (1962), 590-591.
- (13) Zarghamee, M. S. : Optimum frequency of structures, *AIAA Journal*, Vol. 6 (1968), 749-750.
- (14) Fox, R. L and Kapoor, M. P. : Rates of change of eigenvalues and eigenvectors, *AIAA Journal*, Vol. 6 (1968), 2426-2427.
- (15) Nelson, R. B. : Simplified calculation of eigenvector derivatives, *AIAA Journal*, Vol. 14 (1976), 1201-1205.
- (16) 山川宏, 奥村敦史 : 振動を考慮した構造物の最適設計について (第1報, 最適設計の一般的な方法), *日本機械学論文集*, 42巻, 第1部 (1976), 1109-1118.
- (17) 山川宏, 奥村敦史 : 振動を考慮した構造物の最適設計について (第2報, 断面自由度が1と2の構造単位形における形式-1の問題), *日本機械学論文集*, 42巻, 第1部 (1976), 2051-2059.
- (18) 山川宏, 奥村敦史 : 振動を考慮した構造物の最適設計について (第3報, つり棒と片持りの形式-2の問題と二つの形式の基本問題間の相反性の関係), *日本機械学論文集*, 42巻, 第1部 (1976), 2060-2068.
- (19) 浜田実, 瀬口靖幸, 多田幸生 : 逆変分法による構造物の形状決定問題 (第2報, 座屈問題と振動問題), *日本機械学論文集*, 46巻, A編 (1980), 187-196.
- (20) Bense, M. P. and Kikuchi, N. : Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 71 (1988), 197-224.
- (21) Diaz, A. R and Kikuchi, N. : Solutions to shape and topology eigenvalue optimization problems using a homogenization method, *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 35 (1992), 1487-1502.
- (22) Tenek, L. H. and Hagiwara I. : Static and vibrational shape and topology optimization using homogenization and mathematical programming, *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 109 (1993), 143-154.
- (23) Ma, Z. D. , Kikuchi, N. and Hagiwara, I. : Structural topology and shape optimization for a frequency response problem, *Computational Mechanics*, Vol. 13 (1993), 157-174.
- (24) 畔上秀幸 : 領域最適化問題の一解法, *日本機械学会論文集*, 60巻, A編 (1994), 1479-1486.
- (25) 畔上秀幸, 呉志強 : 線形弾性問題における領域最適化解析 (力法によるアプローチ), *日本機械学会論文集*, 掲載予定 (No. 93-1798).
- (26) 下田昌利, 呉志強, 畔上秀幸, 桜井俊明 : 汎用 FEM コードを利用した領域最適化問題の数値解析法 (力法によるアプローチ), *日本機械学会論文集*, 掲載予定 (No. 94-0060).
- (27) Zolésio, J. P. : The material derivative (or speed) method for shape optimization, *Optimization of Distributed Parameter Structures*, edited by Haug, E. J. and Cea, J., Vol.2, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn (1981), 1089-1151.
- (28) Zolésio, J. P. : Domain variational formulation for free boundary problems, *Optimization of Distributed Parameter Structures*, edited by Haug, E. J. and Cea, J., Vol.2, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn (1981), 1152-1194.
- (29) Haug, E. J., Choi, K. K. and Komkov, V. : *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Academic Press (1986).