

き裂エネルギー密度による安定成長き裂の破壊抵抗評価*

(第1報, 基本関係の導出と評価方法の提案)

渡辺 勝彦**, 畔上 秀幸**

An Evaluation of the Fracture Resistance of a Stably Growing Crack by Crack Energy Density (1st Report, Derivation of Fundamental Relations and Proposal of Evaluation Method)

by Katsuhiko WATANABE and Hideyuki AZEGAMI

The objective of this study is to propose a practical method to evaluate the fracture resistance of a stably growing crack by crack energy density and to verify it through applications of the method to actual stable crack growth problems. The contents of this report are as follows: (1) More refined investigation of the relationship obtained before between initial crack length, load-displacement curves and the crack energy density which holds until a crack starts to grow is shown by using two crack models. (2) A relationship between initial crack length, present crack length, load-displacement curves and the additional rate of crack energy density caused by crack extension which holds generally to a growing crack is derived by using the same crack models as in (1). (3) A method to evaluate the fracture resistance of a stably growing crack from load-displacement curves which can be easily obtained by experiments is proposed, based on the relations above.

Key Words: Fracture, Stable Crack Growth, Fracture Resistance, Crack Energy Density, Additional Rate of Crack Energy Density

1. 結 言

延性を有するき裂材のき裂安定成長特性の評価は、なんらかの原因で発生したき裂を含む構造物の破壊様式を予測し、さらに危険な破壊様式を回避し得るような設計を可能とする上で重要である。この問題に関連して従来小規模降伏に対するエネルギー解放率(あるいは応力拡大係数)による方法⁽¹⁾、大規模降伏に対するJ積分に基づく⁽²⁾⁽³⁾あるいはき裂先端開口角⁽⁴⁾やき裂端近傍の再結晶塑性域の塑性仕事に基づく方法⁽⁵⁾などがき裂成長特性評価法として提案されているが、それらの方法における材料特性としての破壊抵抗の評価が、比較的容易に求まる荷重、荷重点変位といった全体の挙動を反映する力学量だけで可能な前二者の方法には、その適用範囲に厳しい条件が課されており、一方このような条件は課されないが、後二者の方法には破壊抵抗の評価にあたってき裂端近傍の精密な観察が必要でその評価が必ずしも容易でないといった問題があった。

このような状況にあつて、著者らは先にき裂の安定

成長特性をき裂エネルギー密度⁽⁶⁾⁽⁷⁾により評価することを提案し、き裂エネルギー密度の導入により従来の各方法間の関係が明らかにでき、各方法の統一的把握が可能となることを示した⁽⁸⁾。本研究はこのき裂エネルギー密度によるき裂の安定成長特性評価の提案をさらに一歩進め、き裂エネルギー密度による材料破壊抵抗の具体的評価方法の提案とその有効性の実証を行い、それを通じてそのき裂安定成長特性評価法としての確立を計るものであり、本報においてはまず基本となる荷重、荷重点変位などとき裂エネルギー密度との関係を導出し、それに基づき適用範囲になら制限がなくかつ荷重、荷重点変位といった全体の挙動を反映する力学量だけでその評価を可能とするき裂エネルギー密度による安定成長き裂の破壊抵抗評価法を提案する。

2. き裂エネルギー密度の概念と定義

現実のき裂先端は、完全弾性き裂を除くとすべりや双晶化といった不均一な塑性変形の結果複雑な変形状態にあり、その完全な記述は困難である。き裂パラメータとしては、このき裂先端における変化の細部はともかく、その生じた変化の程度を代表的かつ包括的に表す量である必要があり、き裂先端開口変位がその変化の程度を変位の次元で表したものと考えられるのに

* 昭和60年12月3日 第935回講演会において講演、原稿受付 昭和60年5月1日。

** 正員、東京大学生産技術研究所(〒106 東京都港区六本木7-22-1)。

対し、き裂エネルギー密度はそれを単位面積当たりのエネルギーの次元で表現したパラメータとして位置付けることができ、一般に「き裂前縁を含む面内の各部分が、負荷を受けていない初期の状態から現在まで担ってきたエネルギーをき裂前縁を含む面内の単位面積当たりで表したもの」として与えられる。

き裂エネルギー密度はき裂前縁を含む面において分布するものとなり⁽⁸⁾⁽⁹⁾、この分布も含めた具体的な定義が可能となるという観点から本論文では連続体切欠モデル (以下切欠モデルと呼ぶ) と著者が先に定式化を示したき裂前縁を含む面における変位の非連続性を考慮したき裂モデル⁽¹⁰⁾ (以下非連続モデルと呼ぶ) を取り上げこれ以後の具体的な議論を進めて行く。なお簡単のために以下においてはすべて開口形(モード I) 負荷を受ける板厚 B の二次元き裂材を考える。

2.1 切欠モデルの場合 切欠モデルは曲率半径の十分小さい切欠きを有する連続体によりき裂材を模したモデルであり、図1にその切欠部と座標系を示す。ここで $\Gamma(a_0)$ は時刻 $\tau=0$ の初期状態における切欠底部に沿った径路を表し、 $\Gamma(X_1)$ は切欠端前方の任意の位置における $\Gamma(a_0)$ と同一形状の径路を表す。初期の $\tau=0$ においてき裂長さ a_0 であったき裂材 [図(a)] が負荷を受けて時刻 $\tau=t_0$ よりき裂が進展を始め、現在の時刻 $\tau=t$ においてき裂長さが a となっている状態 [図(b)] を考えており、き裂の進展は切欠底部を切り開き、新生面に働く応力を零とすることによってなされるものとしている。このとき図(b)の状態におけるき裂エネルギー密度 $\mathcal{E}(t, X_1)$ は、その定義より

$$\mathcal{E}(t, X_1) = \int_{\Gamma(X_1)} W dX_2 \dots\dots\dots (1)$$

として与えられる。ただし、 W はひずみエネルギー密度で $\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}$ をそれぞれ応力、ひずみテンソル、 $(\) = \partial(\) / \partial \tau$ とするとき [進展するき裂を考える場合には

時刻 τ に対する $(\)$ は $\tau - d\tau$ から τ の変化に対して定義するものとする。一般にはこのように定義されるものと τ から $\tau + d\tau$ の変化に対して定義されるものは一致し、特に区別の必要性はないが、特に τ におけるき裂端に対する量を意味するものとするためにはこのようにする必要がある]

$$W = \int_0^t \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} d\tau \dots\dots\dots (2)$$

である。

2.2 非連続モデルの場合 非連続モデルはき裂前縁を含む面以外は連続体、き裂前縁を含む面は応力が生ずると相対変位を生ずるというモデルであり、図2にそのき裂近傍を示す。このき裂モデルにおいて変形前の $(X_1, 0)$ の位置に時刻 $\tau=t$ の現在生じている相対変位をき裂を含む面に関しての面外相対変位 $\bar{\delta}_n$ 、またそれに対応する応力成分を面外応力 $\bar{\sigma}_n$ として、

$$\bar{\delta}_n = [\delta_{22}, \delta_{23}, \delta_{12}] \dots\dots\dots (3)$$

$$\bar{\sigma}_n = [\sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{12}] \dots\dots\dots (4)$$

とすると [図2(c)参照]、面が担った単位面積当たりのエネルギーとしてのひずみエネルギー密度 W_{plane} が

$$W_{plane} = \int_0^t \bar{\sigma}_n \bar{\delta}_n d\tau \dots\dots\dots (5)$$

と定義され、き裂エネルギー密度はその定義に基づいて、

$$\mathcal{E}(t, X_1) = W_{plane} \dots\dots\dots (6)$$

として与えられる。

3. き裂成長開始前におけるき裂先端き裂エネルギー密度と荷重-変位曲線の関係

本章では前の二つのモデルにより荷重-荷重点変位-初期き裂長さとき裂成長開始前におけるき裂先端のき裂エネルギー密度との間の一般的関係を求める。なお、切欠モデルにおける関係についてはすでに論じている

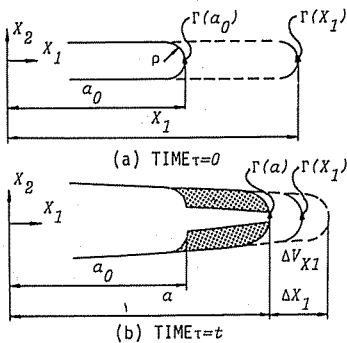


図1 切欠モデル

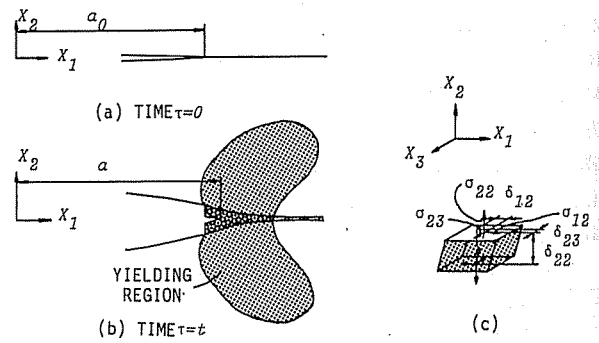


図2 非連続モデル

が⁽⁷⁾、対比の都合上同モデルについても本論文の表記にあわせ、より整理した形で示す。

3・1 切欠モデルにおける関係 図3に示すような切欠モデルが負荷を受けて変形し、き裂成長開始前のある状態 $[t = t_0$ と $t_0 + \Delta t_0$, ただし $t_0 + \Delta t_0$ は図(b)の試験片におけるき裂成長開始時刻を示す] にある場合を考える。図3(a), (b)の切欠モデルは初期き裂長さが $a_0, a_0 + \Delta a_0$ と微小量異なる以外は全く同一の切欠モデルとし、どちらも時刻 τ に対して1対1に定まる荷重点変位 $u(\tau)$ を生ずるよう負荷するものとする。なお、荷重、全ひずみエネルギー、ひずみエネルギー密度、表面力、変位は初期き裂長さ a_0 と時刻 τ の関数として $P(a_0, \tau), U(a_0, \tau), W(a_0, \tau), T_i(a_0, \tau), u_i(a_0, \tau)$ と表すことにする。

このような表示法により図3に示す二つの切欠モデルの時刻 $\tau = t$ における全ひずみエネルギー $U(a_0, t), U(a_0 + \Delta a_0, t)$ を考えると

$$U(a_0, t) = \int_V W(a_0, t) dV = \int_0^t P(a_0, \tau) \dot{u} d\tau \dots\dots\dots (7)$$

$$U(a_0 + \Delta a_0, t) = \int_{V - \Delta V_{a_0}} W(a_0 + \Delta a_0, t) dV = \int_0^t P(a_0 + \Delta a_0, \tau) \dot{u} d\tau \dots\dots\dots (8)$$

が成立する。ただし $V, V - \Delta V_{a_0}$ は初期き裂長さ $a_0, a_0 + \Delta a_0$ の切欠モデルにおける全物質に対応した体積である (図3参照)。

一方、この二つの切欠モデルの $V - \Delta V_{a_0}$ の部分に注目すると、

$$U(a_0, t) - B \int_{\Gamma(X_1)}^{a_0 + \Delta a_0} W(a_0, t) dX_2 dX_1 = U(a_0 + \Delta a_0, t)$$

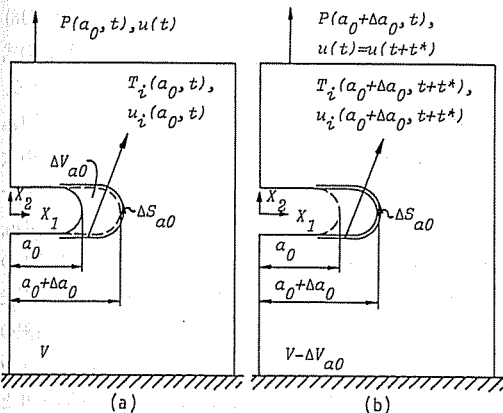


図3 き裂成長開始前における初期き裂長さの異なる二つの切欠モデル

$$+ \int_{\Delta S_{a_0}} \int_t^{t+t^*} T_i(a_0 + \Delta a_0, \tau) \times \dot{u}_i(a_0 + \Delta a_0, \tau) d\tau dS \dots\dots\dots (9)$$

が成立するような時刻 $\tau = t + t^*$ の状態が存在する。ただし、 ΔS_{a_0} は ΔV_{a_0} が無い場合に生ずる表面であり、時刻 $\tau \geq t$ における $T_i(a_0 + \Delta a_0, \tau), u_i(a_0 + \Delta a_0, \tau)$ は初期き裂長さ $a_0 + \Delta a_0$ の切欠モデルの荷重点変位を $u(\tau) = u(t)$ に保った状態で ΔS_{a_0} 上に作用させた表面力と変位である (図3(b)参照)。特に $T_i(a_0 + \Delta a_0, t) = 0$ であり、 $T_i(a_0 + \Delta a_0, t + t^*)$ は作用させた表面力、 $u_i(a_0 + \Delta a_0, t + t^*) - u_i(a_0 + \Delta a_0, t)$ は $T_i(a_0 + \Delta a_0, t + t^*)$ を作用させた結果生じる変位を表す。なお、この連続体が線形弾性体の場合には $T_i(a_0 + \Delta a_0, t + t^*)$ を初期き裂長さ a_0 の切欠モデルの ΔS_{a_0} 上の表面力 $T_i(a_0, t)$ とすることにより式(9)が成立する。

また、初期き裂長さ a_0 の切欠モデルにおける ΔV_{a_0} 部分のひずみエネルギーについて

$$B \int_{a_0}^{a_0 + \Delta a_0} \int_{\Gamma(X_1)} W(a_0, t) dX_2 dX_1 = - \int_{\Delta S_{a_0}} \int_0^t T_i(a_0, \tau) \dot{u}_i(a_0, \tau) d\tau dS \dots (10)$$

が成立する。ただし、 $T_i(a_0, \tau), u_i(a_0, \tau)$ は時刻 $\tau (\leq t)$ において初期き裂長さ a_0 の切欠モデルにおける ΔS_{a_0} 上に作用した表面力と変位である。

ここで初期き裂長さの違い Δa_0 に対する全ひずみエネルギーの差 $\Delta U_{a_0}(a_0, t)$ を考えると、式(9), (10)から

$$\begin{aligned} -\Delta U_{a_0}(a_0, t) &= U(a_0, t) - U(a_0 + \Delta a_0, t) \\ &= - \int_{\Delta S_{a_0}} \int_0^t T_i(a_0, \tau) \dot{u}_i(a_0, \tau) d\tau dS \\ &\quad + \int_{\Delta S_{a_0}} \int_t^{t+t^*} T_i(a_0 + \Delta a_0, \tau) \times \dot{u}_i(a_0 + \Delta a_0, \tau) d\tau dS \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

を得る。この関係において $\Delta a_0 \rightarrow 0$ とする場合を考える。このとき $-\Delta U_{a_0}(a_0, t) \rightarrow 0$ であり、右辺の第1項、第2項ともに正であるのでいずれも零に近づくが、第1項については $\Delta a_0 \rightarrow 0$ のとき ΔS_{a_0} が自由表面 $\Gamma(a_0)$ に近づき $T_i(a_0, t) \rightarrow 0$ となるが $u_i(a_0, t)$ は有限であるので一次の微小量ということになる。一方、第2項については変位 $u_i(a_0 + \Delta a_0, t + t^*) - u_i(a_0 + \Delta a_0, t)$ は表面力 $T_i(a_0 + \Delta a_0, t + t^*)$ に対応して生じるものであり、これが零となるためには変位も表面力もともに零となる必要があり、したがって第2項は二次の微小量ということになる。この結果、全ひずみエネルギーの初期き裂長さに対する変化率 $\partial U / \partial a_0(a_0, t)$ を考える際には右辺第2項は省略でき、式(10)を代入して

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial U}{\partial a_0}(a_0, t) &= \lim_{\Delta a_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta U_{a_0}(a_0, t)}{\Delta a_0} \\
 &= \lim_{\Delta a_0 \rightarrow 0} \left[\left\{ B \int_{a_0}^{a_0+\Delta a_0} \int_{r(x_1)} W(a_0, t) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times dX_2 dX_1 \right\} / \Delta a_0 \right] \\
 &= B \int_{r(a_0)} W(a_0, t) dX_2 \dots\dots\dots(12)
 \end{aligned}$$

の関係が得られることになる。ただし、 $\partial Z/\partial X(X, Y)$ は変数 X, Y の関数 Z の X による偏導関数を表すものとする。式(12)の $\int_{r(a_0)} W(a_0, t) dX_2$ は式(1)よりき裂先端のき裂エネルギー密度 $\mathcal{E}(t, a_0) (= \mathcal{E}(t, X_1)|_{X_1=a_0})$ であるので結局、式(7), (8)も代入して

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(t, a_0) &= -\frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial a_0}(a_0, t) \\
 &= -\frac{1}{B} \int_0^t \frac{\partial P}{\partial a_0}(a_0, \tau) \dot{u} d\tau \dots\dots\dots(13)
 \end{aligned}$$

なる関係が得られる。なお、荷重点変位 u は時刻 τ と1対1対応にあるので式(13)は

$$\mathcal{E}(t, a_0) = -\frac{1}{B} \int_0^{u(t)} \frac{\partial P}{\partial a_0}(a_0, u) du \dots\dots\dots(14)$$

とも表せる。

3.2 非連続モデルにおける関係 図4に示すような初期き裂長さ $a_0, a_0 + \Delta a_0$ のき裂モデルが負荷を受けて時刻 $\tau = t (\leq t_0)$ の状態にある場合を考える。非連続モデルについても、ひずみエネルギー密度を初期き裂長さ a_0 と時刻 τ の関数として $W_{\text{plane}}(a_0, \tau)$ と表すとき、全ひずみエネルギーに対し

$$\begin{aligned}
 U(a_0, t) &= \int_V W(a_0, t) dV + \int_S W_{\text{plane}}(a_0, t) dS \\
 &= \int_0^t P(a_0, \tau) \dot{u} d\tau \dots\dots\dots(15)
 \end{aligned}$$

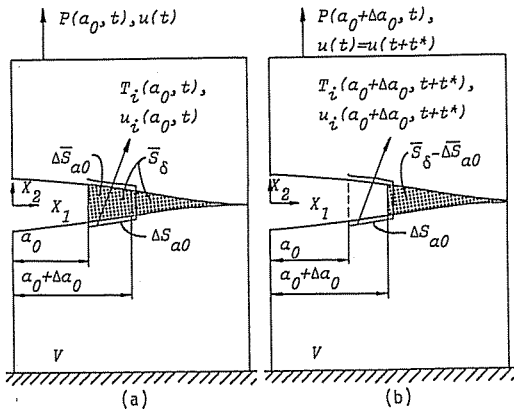


図4 き裂成長開始前における初期き裂長さの異なる二つの非連続モデル

$$\begin{aligned}
 U(a_0 + \Delta a_0, t) &= \int_V W(a_0 + \Delta a_0, t) dV \\
 &\quad + \int_{S_1 - \Delta S_{a_0}} W_{\text{plane}}(a_0 + \Delta a_0, t) dS \\
 &= \int_0^t P(a_0 + \Delta a_0, \tau) \dot{u} d\tau \dots\dots\dots(16)
 \end{aligned}$$

が成立する。ただし、 V は連続体の全物質に対応した体積、 $S_1, S_1 - \Delta S_{a_0}$ は初期き裂長さ $a_0, a_0 + \Delta a_0$ のき裂モデルにおける変位の非連続性を考慮した面である(図4参照)。

一方、この二つのき裂モデルの $V + \bar{S}_0 - \Delta \bar{S}_{a_0}$ に注目すると

$$\begin{aligned}
 U(a_0, t) - B \int_{a_0}^{a_0+\Delta a_0} W_{\text{plane}}(a_0, t) dX_1 \\
 &= U(a_0 + \Delta a_0, t) \\
 &\quad + \int_{\Delta S_{a_0}} \int_t^{t+t^*} T_i(a_0 + \Delta a_0, \tau) \\
 &\quad \times \dot{u}_i(a_0 + \Delta a_0, \tau) d\tau dS \dots\dots\dots(17)
 \end{aligned}$$

が成立するような時刻 $\tau = t + t^*$ の状態が存在する。ただし、 ΔS_{a_0} は $\Delta \bar{S}_{a_0}$ に接した連続体の表面であり、時刻 $\tau \geq t$ における $T_i(a_0 + \Delta a_0, \tau), u_i(a_0 + \Delta a_0, \tau)$ は初期き裂長さ $a_0 + \Delta a_0$ のき裂モデルの荷重点変位を $u(\tau) = u(t)$ に保った状態で ΔS_{a_0} 上に作用させた表面力と変位である。なお、この非連続モデルが Dugdale モデルの場合には $T_i(a_0 + \Delta a_0, t + t^*) = \sigma_y$ とすることにより式(17)が成立する。ただし σ_y は降伏応力である。

また、初期き裂長さ a_0 のき裂モデルにおける $\Delta \bar{S}_{a_0}$ 部分のひずみエネルギーについて

$$\begin{aligned}
 B \int_{a_0}^{a_0+\Delta a_0} W_{\text{plane}}(a_0, t) dX_1 \\
 &= - \int_{\Delta S_{a_0}} \int_0^t T_i(a_0, \tau) \dot{u}_i(a_0, \tau) d\tau dS \dots\dots\dots(18)
 \end{aligned}$$

が成立する。

ここで初期き裂長さの違い Δa_0 に対する全ひずみエネルギーの差 $\Delta U_{a_0}(a_0, t)$ を考えると、式(17), (18)から形式的に式(11)と同一の式を得る。この場合の式(11)において Δa_0 を一次の微小量とした時を考える。右辺の第1項、第2項の表面力 $T_i(a_0, t), T_i(a_0 + \Delta a_0, t + t^*)$ は $\Delta a_0 \rightarrow 0$ のとき依然として有限の大きさを持つが、表面力の作用面 ΔS_{a_0} は $\rightarrow 0$ となり一次の微小量となる。また、右辺の第1項の変位 $u_i(a_0, t)$ は $\Delta a_0 \rightarrow 0$ のとき初期き裂長さ a_0 のき裂モデルの時刻 $\tau = t$ までにき裂先端に生じた変位となりき裂先端に生じた相対変位の1/2に相当することから有限の大きさを持つが、右辺の第2項の変位 $u_i(a_0 + \Delta a_0, t + t^*) - u_i(a_0 + \Delta a_0, t)$ は $\Delta a_0 \rightarrow 0$ のとき $\Delta S_{a_0} \rightarrow 0$ となることから $\rightarrow 0$ となり一次の微小量となる。この結

果 Δa_0 を一次の微小量とした時、式(11)の右辺の第1, 第2項は一次, 二次の微小量となり, 全ひずみエネルギーの初期き裂長さに対する変化率 $\partial U/\partial a_0(a_0, t)$ を考える際には右辺第2項は省略でき, 式(18)を代入して

$$\begin{aligned} -\frac{\partial U}{\partial a_0}(a_0, t) &= \lim_{\Delta a_0 \rightarrow 0} -\frac{\Delta U_{a_0}(a_0, t)}{\Delta a_0} \\ &= \lim_{\Delta a_0 \rightarrow 0} \left[\frac{B \int_{a_0}^{a_0+\Delta a_0} W_{\text{plane}}(a_0, t) dX_1}{\Delta a_0} \right] \\ &= B W_{\text{plane}}(a_0, t)|_{X_1=a_0} \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

の関係が得られる。式(19)の $W_{\text{plane}}(a_0, t)|_{X_1=a_0}$ は式(6)よりき裂先端のき裂エネルギー密度 $\mathcal{E}(t, a_0)$ であり, 式(15), (16)も代入して結局式(13), (14)と同一の関係が得られることになる。

4. 成長き裂におけるき裂先端き裂エネルギー密度
上乗せ率と荷重-変位曲線の関係

次に, き裂が安定成長を開始した後のそれぞれのモデルにおける荷重-成長き裂長さ-荷重点変位-初期き裂長さとき裂エネルギー密度との関係について考える。

4.1 切欠モデルにおける関係 図5は図3の切欠モデルがさらに負荷を受けてき裂が安定成長を開始した後の時刻 $\tau = t (> t_0 \text{ and } t_0 + \Delta t_0)$ の状態である。

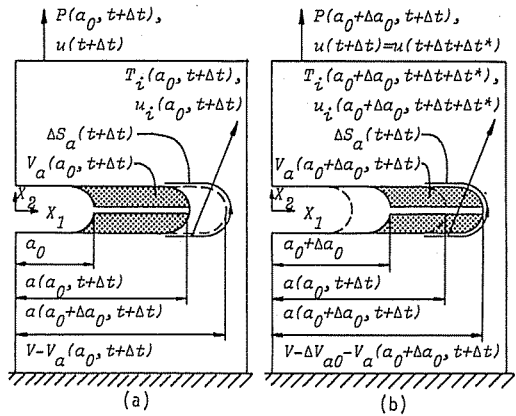


図5 き裂成長開始後における初期き裂長さの異なる二つの切欠モデル

なお, き裂成長は滑らかであると仮定する。また, ここでも前章の表示法を用い, 初期き裂長さとき裂成長長さを加えた成長き裂長さも初期き裂長さ a_0 と時刻 τ の関数として $a(a_0, \tau)$ と表すことにする。

この表示法により図5に示す二つの切欠モデルの時刻 $\tau = t$ から $\tau = t + \Delta t$ までの Δt 時間における全ひずみエネルギーの増加量 $\Delta U_a(a_0, t), \Delta U_a(a_0 + \Delta a_0, t)$ を考えると

$$\Delta U_a(a_0, t) = U(a_0, t + \Delta t) - U(a_0, t) = \int_t^{t+\Delta t} \int_{V-V_a(a_0, \tau)} \dot{W}(a_0, \tau) dV d\tau = \int_t^{t+\Delta t} P(a_0, \tau) \dot{u} d\tau \dots\dots\dots (20)$$

$$\begin{aligned} \Delta U_a(a_0 + \Delta a_0, t) &= U(a_0 + \Delta a_0, t + \Delta t) - U(a_0 + \Delta a_0, t) \\ &= \int_t^{t+\Delta t} \int_{V-\Delta V_{a_0}-V_a(a_0+\Delta a_0, \tau)} \dot{W}(a_0 + \Delta a_0, \tau) dV d\tau = \int_t^{t+\Delta t} P(a_0 + \Delta a_0, \tau) \dot{u} d\tau \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

が成立する。ただし $V_a(a_0, \tau), V_a(a_0 + \Delta a_0, \tau)$ は初期き裂長さ $a_0, a_0 + \Delta a_0$ の切欠モデルの切欠き端が時刻 τ までに通過した切欠底部の物質に対応した体積である (図5参照)。

一方, この二つの切欠モデルにおいて $t \leq \tau \leq t + \Delta t$ における $V - \Delta V_{a_0} - V_a(a_0 + \Delta a_0, \tau)$ の部分に注目すると

$$\begin{aligned} \Delta U_a(a_0, t) - B \int_t^{t+\Delta t} \int_{a(a_0, \tau)}^{a(a_0+\Delta a_0, \tau)} \int_{\Gamma(X_1)} \dot{W}(a_0, \tau) dX_2 dX_1 d\tau \\ = \Delta U_a(a_0 + \Delta a_0, t) + \int_{t+\Delta t}^{t+\Delta t+\Delta t^*} \int_{\Delta S_a(t+\Delta t)} T_i(a_0 + \Delta a_0, \tau) \dot{u}_i(a_0 + \Delta a_0, \tau) dS d\tau \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

が成立するような時刻 $\tau = t + \Delta t + \Delta t^*$ の状態が存在する。ただし, $\Delta S_a(t + \Delta t)$ は $\Delta V_{a_0} + V_a(a_0 + \Delta a_0, t + \Delta t) - V_a(a_0, t + \Delta t)$ がない場合に生ずる表面から $\Gamma\{a(a_0, t + \Delta t)\}$ を除いた表面であり, 時刻 $\tau \geq t + \Delta t$ における $T_i(a_0 + \Delta a_0, \tau), u_i(a_0 + \Delta a_0, \tau)$ はそれぞれ初期き裂長さ $a_0 + \Delta a_0$ の切欠モデルの荷重点変位を $u(\tau) = u(t + \Delta t)$ に保った上で $\Delta S_a(t + \Delta t)$ 上に作用させる表面力と変位である (図5参照)。

また, 初期き裂長さ a_0 の切欠モデルにおいて $t \leq \tau \leq t + \Delta t$ における $\Delta V_{a_0} + V_a(a_0 + \Delta a_0, \tau) - V_a(a_0, \tau)$ 部分に注目すると

$$B \int_t^{t+\Delta t} \int_{a(a_0, \tau)}^{a(a_0+\Delta a_0, \tau)} \int_{\Gamma(X_1)} \dot{W}(a_0, \tau) dX_2 dX_1 d\tau = - \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Delta S_a(\tau)} T_i(a_0, \tau) \dot{u}_i(a_0, \tau) dS d\tau \dots\dots\dots (23)$$

が成立する。ただし、 $\Delta S_a(\tau)$ は $\Delta V_{a_0} + V_a(a_0 + \Delta a_0, \tau) - V_a(a_0, \tau)$ がない場合に生ずる表面から $\Gamma\{a(a_0, \tau)\}$ を除いた表面であり、 $T_i(a_0, \tau)$, $\dot{u}_i(a_0, \tau)$ は $\Delta S_a(\tau)$ 上に作用した表面力と変位増分である。

ここで初期き裂長さの違い Δa_0 に対する時刻 $\tau = t$ からの Δt 時間における全ひずみエネルギーの増加量の差 $\Delta^2 U(a_0, t)$ を考えると、式(22), (23)から

$$\begin{aligned} -\Delta^2 U(a_0, t) &= \Delta U_a(a_0, t) - \Delta U_a(a_0 + \Delta a_0, t) \\ &= -\int_t^{t+\Delta t} \int_{\Delta S_a(\tau)} T_i(a_0, \tau) \dot{u}_i(a_0, \tau) dSd\tau \\ &\quad + \int_{t+\Delta t}^{t+\Delta t+\Delta t^*} \int_{\Delta S_a(t+\Delta t)} T_i(a_0 + \Delta a_0, \tau) \\ &\quad \times \dot{u}_i(a_0 + \Delta a_0, \tau) dSd\tau \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

が得られ、次にこの関係において Δa_0 と Δt を一次の微小量とする場合を考える。まず Δa_0 を一次の微小量とする場合を考えると次のようになる。右辺第1, 第2項の表面力 $T_i(a_0, \tau)$, $T_i(a_0 + \Delta a_0, t + \Delta t + \Delta t^*)$ は $\Delta a_0 \rightarrow 0$ のとき $\Delta S_a(\tau)$, $\Delta S_a(t + \Delta t)$ が自由表面 $\Gamma\{a(a_0, \tau)\}$, $\Gamma\{a(a_0, t + \Delta t)\}$ に近づき $\rightarrow 0$ となることからともに一次の微小量となる。また、右辺第1項の変位 $u_i(a_0, t + \Delta t) - u_i(a_0, t)$ は $\Delta a_0 \rightarrow 0$ のとき初期き裂長さ a_0 の切欠モデルの時刻 $\tau = t$ から Δt 時間

に $\Gamma\{a(a_0, t)\}$ に生じた変位となり有限の大きさを持つが、右辺第2項の変位 $u_i(a_0 + \Delta a_0, t + \Delta t + \Delta t^*) - u_i(a_0 + \Delta a_0, t + \Delta t)$ は $T_i(a_0 + \Delta a_0, t + \Delta t + \Delta t^*) \rightarrow 0$ に対応して $\rightarrow 0$ となることから一次の微小量となる。次に、 Δt を一次の微小量とする場合を考える。右辺第1項の表面力 $T_i(a_0, t + \Delta t)$ は $\Delta t \rightarrow 0$ のとき $T_i(a_0, t)$ となり $\Delta S_a(t)$ が自由表面とならないことから有限の大きさを持つが、右辺第2項の $T_i(a_0 + \Delta a_0, t + \Delta t + \Delta t^*)$ は右辺第2項を定義した式(22)の各項が $\rightarrow 0$ となり式(22)右辺第2項は $T_i(a_0 + \Delta a_0, t + \Delta t + \Delta t^*)$ により決定されることから $\rightarrow 0$ となり一次の微小量となる。また、右辺第1, 第2項の変位 $u_i(a_0, t + \Delta t) - u_i(a_0, t)$, $u_i(a_0 + \Delta a_0, t + \Delta t + \Delta t^*) - u_i(a_0 + \Delta a_0, t + \Delta t)$ は $\Delta t \rightarrow 0$ のとき $u_i(a_0, t + \Delta t) \rightarrow u_i(a_0, t)$, $T_i(a_0 + \Delta a_0, t + \Delta t + \Delta t^*) \rightarrow 0$ となることから $\rightarrow 0$ となりともに一次の微小量となる。これらの結果から Δa_0 を一次の微小量とすると式(24)の右辺第1, 第2項はそれぞれ一次, 二次の微小量となり、 Δt を一次の微小量とするとともに同様であるので、全ひずみエネルギーの初期き裂長さ a_0 と成長き裂長さに対する変化率 $\partial^2 U / (\partial a_0 \partial a)(a_0, t)$ を考える際には右辺第2項は省略でき、式(23)を代入して

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 U}{\partial a_0 \partial a}(a_0, t) &= -\frac{1}{\dot{a}(a_0, t)} \frac{\partial^2 U}{\partial a_0 \partial t}(a_0, t) = \frac{1}{\dot{a}(a_0, t)} \lim_{\Delta a_0, \Delta t \rightarrow 0} -\frac{\Delta^2 U(a_0, t)}{\Delta a_0 \Delta t} \\ &= \frac{1}{\dot{a}(a_0, t)} \lim_{\Delta a_0, \Delta t \rightarrow 0} \frac{B}{\Delta a_0 \Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \int_{a(a_0, \tau)}^{a(a_0 + \Delta a_0, \tau)} \int_{\Gamma(X_1)} \dot{W}(a_0, \tau) dX_2 dX_1 d\tau \\ &= \frac{B}{\dot{a}(a_0, t)} \frac{\partial a}{\partial a_0}(a_0, \tau) \int_{\Gamma\{a(a_0, t)\}} \dot{W}(a_0, t) dX_2 \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

なる関係が得られる。式(25)の $\int_{\Gamma\{a(a_0, t)\}} \dot{W}(a_0, t) dX_2$ は、き裂エネルギー密度上乘せ率(以下上乘せ率と表す) $\partial \mathcal{E} / \partial a(t, X_1)$ を $X_1 \geq a$ の領域に対し

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a}(t, X_1) = \frac{1}{\dot{a}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau}(t, X_1) \dots\dots\dots (26)$$

と定義するとき、式(1)よりき裂先端の上乗せ率 $\partial \mathcal{E} / \partial a(t, a) (= \partial \mathcal{E} / \partial a(t, X_1)|_{X_1=a})$ であり、したがって式(20), (21)の関係も用いると

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a}(t, a) = -\frac{1}{B} \frac{\partial P}{\partial a_0}(a_0, t) \frac{\dot{u}(t)}{\dot{a}(a_0, t)} / \frac{\partial a}{\partial a_0}(a_0, t) \dots\dots\dots (27)$$

が得られる。荷重点変位 u は時刻 τ と1対1対応としたので式(27)は

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a}(t, a) = -\frac{1}{B} \frac{\partial P}{\partial a_0}(a_0, u) / \left\{ \frac{\partial a}{\partial u}(a_0, u) \cdot \frac{\partial a}{\partial a_0}(a_0, u) \right\} \dots\dots\dots (28)$$

とも表せる。

4.2 非連続モデルにおける関係 図6は図4の非連続モデルがさらに負荷を受けてき裂が安定成長を開始した後の時刻 $\tau = t (> t_0 \text{ and } t_0 + \Delta t_0)$ における状態である。

非連続モデルについても時刻 $\tau = t$ から $t + \Delta t$ の間の全ひずみエネルギーの増加量 $\Delta U_a(a_0, t)$, $\Delta U_a(a_0 + \Delta a_0, t)$ を考えると

$$\Delta U_a(a_0, t) = U(a_0, t + \Delta t) - U(a_0, t) = \int_t^{t+\Delta t} \int_V \dot{W}(a_0, \tau) dV d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \int_{S_1 - S_a(a_0, \tau)} \dot{W}_{\text{plano}}(a_0, \tau) dSd\tau$$

$$= \int_t^{t+\Delta t} P(a_0, \tau) \dot{u} d\tau \dots\dots\dots (29)$$

$$\begin{aligned} \Delta U_a(a_0 + \Delta a_0, t) &= U(a_0 + \Delta a_0, t + \Delta t) - U(a_0 + \Delta a_0, t) \\ &= \int_t^{t+\Delta t} \int_V \dot{W}(a_0 + \Delta a_0, \tau) dV d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \int_{\bar{S}_s - \Delta \bar{S}_{a_0} - \bar{S}_a(a_0 + \Delta a_0, \tau)} \dot{W}_{\text{plane}}(a_0 + \Delta a_0, \tau) dS d\tau \\ &= \int_t^{t+\Delta t} P(a_0 + \Delta a_0, \tau) \dot{u} d\tau \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

が成立する。ただし $\bar{S}_a(a_0, \tau)$, $\bar{S}_a(a_0 + \Delta a_0, \tau)$ は初期き裂長さ a_0 , $a_0 + \Delta a_0$ の非連続モデルにおけるき裂先端が時刻 τ までに通過した変位の非連続性を考慮した面である (図6参照)。

一方、この二つの非連続モデルにおいて時刻 $\tau = t$ から $t + \Delta t$ の間の $V + \bar{S}_s - \Delta \bar{S}_{a_0} - \bar{S}_a(a_0 + \Delta a_0, \tau)$ に注目すると

$$\begin{aligned} \Delta U_a(a_0, t) - B \int_t^{t+\Delta t} \int_{a(a_0, \tau)}^{a(a_0 + \Delta a_0, \tau)} \dot{W}_{\text{plane}}(a_0, \tau) dX_1 d\tau \\ = \Delta U_a(a_0 + \Delta a_0, t) + \int_{t+\Delta t}^{t+\Delta t + \Delta t^*} \int_{\Delta S_a(t+\Delta t)} T_i(a_0 + \Delta a_0, \tau) \dot{u}_i(a_0 + \Delta a_0, \tau) dS d\tau \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

が成立するような時刻 $\tau = t + \Delta t + \Delta t^*$ の状態が存在する。ただし、 $\Delta S_a(t + \Delta t)$ は $\Delta \bar{S}_{a_0} + \bar{S}_a(a_0 + \Delta a_0, t + \Delta t) - \bar{S}_a(a_0, t + \Delta t)$ に接する部分の連続体の表面であり、時刻 $\tau \geq t + \Delta t$ における $T_i(a_0 + \Delta a_0, \tau)$, $u_i(a_0 + \Delta a_0, \tau)$ はそれぞれ初期き裂長さ $a_0 + \Delta a_0$ の非連続モデルの荷重点変位を $u(\tau) = u(t + \Delta t)$ に保った上で $\Delta S_a(t + \Delta t)$ 上に作用させた表面力と変位である (図6参照)。なお、この非連続モデルが Dugdale モデルの場合には $T_i(a_0 + \Delta a_0, t + \Delta t + \Delta t^*) = \sigma_y$ とすることにより式(31)が成立する。

また、初期き裂長さ a_0 の非連続モデルにおいて $t \leq \tau \leq t + \Delta t$ における $\Delta \bar{S}_{a_0} + \bar{S}_a(a_0 + \Delta a_0, \tau) - \bar{S}_a(a_0, \tau)$ に注目すると

$$B \int_t^{t+\Delta t} \int_{a(a_0, \tau)}^{a(a_0 + \Delta a_0, \tau)} \dot{W}_{\text{plane}}(a_0, \tau) dX_1 d\tau = - \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Delta S_a(\tau)} T_i(a_0, \tau) \dot{u}_i(a_0, \tau) dS d\tau \dots\dots\dots (32)$$

が成立する。ただし、 $\Delta S_a(\tau)$ は $\Delta \bar{S}_{a_0} + \bar{S}_a(a_0 + \Delta a_0, \tau) - \bar{S}_a(a_0, \tau)$ がない場合に生ずる連続体の表面である。

ここで初期き裂長さの違い Δa_0 に対する時刻 $\tau = t$ からの Δt 時間における全ひずみエネルギーの増加量の差 $\Delta^2 U(a_0, t)$ を考えると、式(31), (32)から形式的に式(24)と同一の関係が得られ、この関係において Δa_0 と Δt を一次の微小量とした場合を考える。まず Δa_0 を一次の微小量とする場合を考えると次のように

なる。右辺の第1項、第2項の表面力 $T_i(a_0, t + \Delta t)$, $T_i(a_0 + \Delta a_0, t + \Delta t + \Delta t^*)$ は $\Delta a_0 \rightarrow 0$ のとき依然として有限の大きさを持つが、表面力の作用面 $\Delta S_a(\tau)$, $\Delta S_a(t + \Delta t)$ は $\rightarrow 0$ となりともに一次の微小量となる。また、右辺の第1項の変位 $u_i(a_0, t + \Delta t) - u_i(a_0, t)$ は $\Delta a_0 \rightarrow 0$ のとき初期き裂長さ a_0 の非連続モデルの時刻 $\tau = t$ からの Δt 時間にき裂先端に生じた変位となりその Δt 時間にき裂先端に生じた相対変位の1/2に相当することから有限の大きさを持つが、右辺第2項の変位 $u_i(a_0 + \Delta a_0, t + \Delta t + \Delta t^*) - u_i(a_0 + \Delta a_0, t + \Delta t)$ は $\Delta a_0 \rightarrow 0$ のとき $\Delta S_a(t + \Delta t) \rightarrow 0$ となることから $\rightarrow 0$ となり一次の微小量となる。次に、 Δt を一次の微小量とする場合を考える。右辺第1項の表面力 $T_i(a_0, t + \Delta t)$ は $\Delta t \rightarrow 0$ のとき $\rightarrow T_i(a_0, t)$ となり有限の大きさを持つが、右辺第2項の $T_i(a_0 + \Delta a_0, t + \Delta t + \Delta t^*)$ は右辺第2項を定義した式(31)の各項が $\rightarrow 0$ となり式(31)右辺第2項は $T_i(a_0 + \Delta a_0, t + \Delta t + \Delta t^*)$ により決定されることから $\rightarrow 0$ となり一次の微小量となる。また、右辺第1, 第2項の変位 $u_i(a_0, t + \Delta t) - u_i(a_0, t)$, $u_i(a_0 + \Delta a_0, t + \Delta t + \Delta t^*) - u_i(a_0 + \Delta a_0, t + \Delta t)$ は $\Delta t \rightarrow 0$ のとき $u_i(a_0, t + \Delta t) \rightarrow u_i(a_0, t)$, $T_i(a_0 + \Delta a_0, t + \Delta t + \Delta t^*) \rightarrow 0$ となることから $\rightarrow 0$ となりともに一次の微小量となる。これらの結果から Δa_0 を一次の微小量とすると式(24)の右

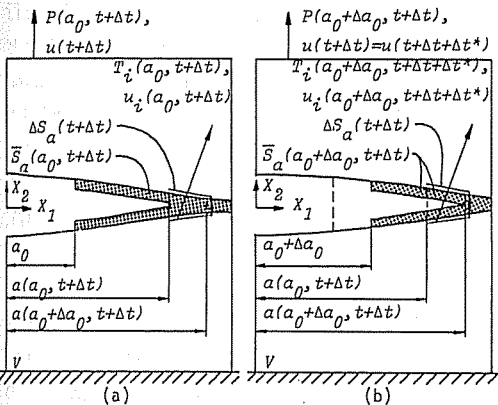


図6 き裂成長開始後における初期き裂長さの異なる二つの非連続モデル

辺第1, 第2項はそれぞれ一次, 二次の微小量となり, Δt を一次の微小量とするときにも同様であるので, 全ひずみエネルギーの初期き裂長さ a_0 と成長き裂長さ a に対する変化率 $\partial^2 U / (\partial a_0 \partial a)(a_0, t)$ を考える際には右辺第2項は省略でき, 式(32)を代入して

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial^2 U}{\partial a_0 \partial a}(a_0, t) &= -\frac{1}{\dot{a}(a_0, t)} \frac{\partial^2 U}{\partial a_0 \partial t}(a_0, t) \\
 &= \frac{1}{\dot{a}(a_0, t)} \lim_{\Delta a_0, \Delta t \rightarrow 0} -\frac{\Delta^2 U(a_0, t)}{\Delta a_0 \Delta t} \\
 &= \frac{1}{\dot{a}(a_0, t)} \lim_{\Delta a_0, \Delta t \rightarrow 0} \frac{B}{\Delta a_0 \Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \\
 &\times \int_{a(a_0, \tau)}^{a(a_0+\Delta a_0, \tau)} W_{\text{plane}}(a_0, \tau) dX_1 d\tau \\
 &= \frac{1}{\dot{a}(a_0, t)} \frac{\partial a}{\partial a_0}(a_0, t) \dot{W}_{\text{plane}}(a_0, t)|_{X_1=a(a_0, t)} \\
 &\dots\dots\dots(33)
 \end{aligned}$$

が得られる。式(33)の $\dot{W}_{\text{plane}}(a_0, t)|_{X_1=a(a_0, t)}$ は, 式(6), (26)よりき裂先端の上乗せ率 $\partial \mathcal{E} / \partial a(t, a)$ であり, 式(29), (30)も代入して切欠モデルに対する式(27), (28)と全く同一の関係が得られる。

5. 破壊抵抗評価法の提案

成長するき裂における分布も含めたき裂エネルギー密度の変化は定性的に図7のように示すことができる。図中実線はき裂成長開始時である $\tau = t_0$ における分布, 一点鎖線はその後き裂が安定成長して長さが $a - da$ となる時刻 $\tau = t - dt$ までの先端の値の変化, 破線は $\tau = t$ における分布, 二点鎖線は時刻 $\tau = t - dt$ における分布を表す。著者らは先にこのようにき裂エネルギー密度がその分布も含めて刻々の状態に対し定義できることに基づき, き裂の安定成長を進展条件として

$$\mathcal{E}(t, a) = \mathcal{E}_c(t, a) \quad (\text{成長}) \quad \dots\dots\dots(34)$$

その進展の時刻 τ での不安定化の条件として

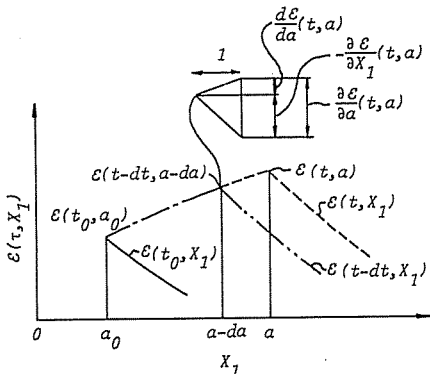


図7 き裂成長とき裂エネルギー密度

$$\frac{d\mathcal{E}}{da}(t, a) > \frac{d\mathcal{E}_c}{da}(t, a) \quad (\text{不安定}) \quad \dots\dots(35)$$

あるいはこれと等価なものとして

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a}(t, a) > \frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial a}(t, a) \quad (\text{不安定}) \quad \dots\dots(36)$$

の形で表示し, 評価することを提案した⁽⁹⁾。ここで上の三式の左辺は力学的条件により定まる量を, また下付き c を付した右辺は実際の安定成長過程において定まる量すなわち破壊抵抗を表し, 式(35)における $d\mathcal{E}/da(t, a)$ は $\tau = t$ における

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathcal{E}}{da}(\tau, a) &= \frac{1}{\dot{a}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau}(\tau, a) \\
 &= \frac{1}{\dot{a}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau}(\tau, a) + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial X_1}(\tau, a) \\
 &= \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a}(\tau, a) + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial X_1}(\tau, a) \quad \dots\dots\dots(37)
 \end{aligned}$$

として定義され(図7参照), き裂が安定成長してきた時刻 $\tau = t - dt$ に対応するき裂端の位置 $X_1 = a - da$ においては $\partial \mathcal{E} / \partial X_1(t, a) = \partial \mathcal{E}_c / \partial X_1(t, a)$ であることから式(35), (36)が等価であることがわかる。

ところで式(34)で与えられるき裂の進展条件についてであるが, 安定成長過程においては式(35), (36)において大小関係の代わりに等号が成り立つこと, また

$$\mathcal{E}(t, a) = \mathcal{E}(t_0, a_0) + \int_{t_0}^t \frac{d\mathcal{E}}{da}(\tau, a) \dot{a} d\tau \quad \dots\dots(38)$$

であることを考えるとき, 式(34)の条件は全く等価な条件を与えるものとして $\mathcal{E}(t_0, a_0) = \mathcal{E}_c(t_0, a_0)$ と式(35)あるいは(36)において等号が成り立つとした関係, 例えば

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a}(t, a) = \frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial a}(t, a) \quad (\text{成長}) \quad \dots\dots(39)$$

との組合せによって与えられることとなる。前章までに導いた結果は, 初期き裂長さの異なる何本かの試験片を用意し, それらに対するき裂安定成長実験を行い, 試験片全体の挙動を反映する荷重-変位曲線など必要な諸量の測定を行えば, 式(14)により $\mathcal{E}_c(t_0, a_0)$ のまた式(28)により $\partial \mathcal{E}_c / \partial a(t, a)$ の直接的評価が可能となることを示している。したがってこのようにして求められた $\mathcal{E}_c(t_0, a_0)$, $\partial \mathcal{E}_c / \partial a(t, a)$ を用い, さらに $\partial \mathcal{E}_c / \partial X_1(\tau, a)$ に適当な値を設定すれば, 式(37), (38)により $\mathcal{E}_c(t, a)$ の評価も可能となるので, 本論文においては $\mathcal{E}_c(t_0, a_0)$ と $\partial \mathcal{E}_c / \partial a(t, a)$ の組合せ, あるいは $\mathcal{E}_c(t, a)$ により表される破壊抵抗の評価を上記のように行うことを提案する。なお, $\partial \mathcal{E}_c / \partial X_1(t, a)$ の最も簡単な与え方としては, 破壊様式が一定のもとのき裂進展においては $d\mathcal{E}_c / da(\tau, a) = 0$, また $\partial \mathcal{E}_c / \partial a(\tau, a)$ は一定値 $(\partial \mathcal{E}_c / \partial a)_{uni}$ となることが予

想されるので、式(37)より

$$\frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial X_1}(\tau, a) = - \left(\frac{\partial \mathcal{E}_c}{\partial a} \right)_{uni} \dots \dots \dots (40)$$

として与えることが考えられる。

6. 結 言

き裂エネルギー密度の立場よりき裂の安定成長挙動を考察し、き裂エネルギー密度と荷重-変位曲線などの関係を導くとともにそれに基づく安定成長き裂の破壊抵抗評価法を提案した。次報以下で提案した手法の実際問題への適用、検討などを行う。

文 献

- (1) Irwin, G. R., *J. Appl. Mech.*, 24-3 (1957), 361.
- (2) Paris, P. C., ほか3名, *ASTM STP*, 668 (1979), 5.
- (3) Hutchison, J. W., Paris, P. C., *ASTM STP*, 668 (1979), 37.
- (4) de Koning, A. U., *The Netherlands National Aerospace Laboratory Report NLR MP75035U*, (1975).
- (5) 坂・ほか3名, 機論, 47-427, A (昭56), 1301.
- (6) 渡辺, 機論, 47-416, A (昭55), 406.
- (7) 渡辺, 機論, 48-433, A (昭57), 1226.
- (8) 渡辺・畔上, 機論, 51-464, A (昭60), 1122.
- (9) 渡辺, 機論, 51-463, A (昭60), 873.
- (10) 渡辺・畔上, 機論, 51-469, A (昭60), 2154.

討 論

〔質問〕 坂 真澄

(東北大学工学部機械工学科)

詳細なご検討に対し敬意を表します。以下の点についてご教示下さい。

Riceら(付1)による J 積分の評価式と式(14)はどのような点が違うのでしょうか。

〔回答〕 Riceらによる J 積分評価式(付1)が径路

積分によって定義されている J 積分と一致するのは、全ひずみ塑性体の場合に限られますが、式(14)は、任意の構成則に対して成立する関係として導出されています。

-
- (付1) Rice, J. R., Paris, P. C. and Merkle, J. G., *ASTM STP* 536, 1973, 231.