

## 周波数応答問題における領域最適化解析\* (力法によるアプローチ)

呉 志 強\*<sup>1</sup>, 畔 上 秀 幸\*<sup>2</sup>

### Domain Optimization Analysis in Frequency Response Problems (Approach Using Traction Method)

Zhi Chang WU and Hideyuki AZEGAMI

This paper describes a practical method of numerical analyses for domain optimization problems of linear elastic continua excited with a constant frequency. In this paper we deal with the minimization of the strain energy, the kinetic energy and the absolute value of mean compliance. We apply the traction method that was proposed as a solution to the domain optimization problems in elliptic boundary value problems. In this paper we formulate the domain optimization problems using the speed method and derive the shape gradient functions by the Lagrange multiplier method. The validity of basing this approach on the traction method using the derived shape gradient functions is confirmed through the results of numerical analyses of the beamlike plate problems.

**Key Words:** Optimum Design, Computer-Aided Design, Finite-Element Method, Vibration of Continuous System, Modal Analysis, Domain Optimization, Speed Method, Gradient Method, Traction Method

#### 1 はじめに

定常状態で運転される機械構造物の設計においては、振動を防止するために、加振周波数が特定された下での応答特性が最小となるように部品形状を決定することが求められる。この形状決定問題は、線形弾性体の領域形状を設計変数にした単一の周波数に対する周波数応答特性の最適化問題として定式化することができる。本論文では、固有振動数に関する最適化問題を扱った前報<sup>(1)</sup>に続いて、この周波数応答問題に対する実用的な数値解析法について検討を加えてみたい。

周波数応答特性の最適化問題に関するこれまでの研究を振り返ると、目的とする周波数応答特性としてひずみエネルギー、運動エネルギー(あるいは変位の二乗ノルム)および平均コンプライアンスの絶対値などを選んだ場合の数値解析法が研究されてきた。遠藤ら<sup>(2)</sup>は、単一の周波数励振を受ける弦の振動について、変位の二乗ノルム最小化問題に対して Pontryagin の最大原理を用いた数値解析法によって数値解を得ている。山川ら<sup>(3)(4)</sup>は、衝撃的な荷重を受ける有限要素モデルの振動について、荷重点変位の二乗平均値最小化問題に対して直接微分による数値解析法を示し、はり状構造物

に対する数値解を得ている。多田ら<sup>(5)</sup>は、特定された周波数領域におけるランダム荷重を受ける構造物の振動を取り上げ、ひずみエネルギーの期待値最小化問題に対する有限要素モデルの疑似感度を基にした境界の節点移動による数値解析法を示し、はり状構造物に対する数値解を得ている。井上ら<sup>(6)</sup>は、単一の周波数励振を受ける有限要素平面モデルの振動に対して、板厚分布を設計変数にした運動エネルギー最小化問題に対して、感度の計算法を示し、数値解析を行った。また、Maら<sup>(7)</sup>は、マイクロな穴の寸法形状を設計関数にした定式化を使い、単一の周波数励振における平均コンプライアンスの絶対値最小化問題に対する数値解析法を示し、数値解を得ている。

このようなこれまでの研究を背景にして、本研究では、領域の位相を固定したまま境界を変動させる領域最適化問題に限定して、単一の周波数で加振された場合のひずみエネルギー、運動エネルギーおよび平均コンプライアンスの絶対値を最小化する問題に対する実用的な数値解析法について検討を行ってみたい。前報<sup>(1)</sup>に続いて、本論文でも力法 (traction method) を用いることを試みる。力法は著者の一人<sup>(8)</sup>によって提案されている実用的な領域最適化問題の数値解析法である。これまで、線形弾性問題<sup>(9)(10)</sup>や流れ場問題<sup>(11)</sup>への適用が試みられてきた。力法では、領域変動を速度

\* 原稿受付 1994年7月21日。

\*<sup>1</sup> 正員、豊橋技術科学大学大学院 (〒441 豊橋市天伯町蛸雀ヶ丘1-1)。

\*<sup>2</sup> 正員、豊橋技術科学大学。

法<sup>(13)</sup> (speed method) によって記述する。領域変動を与える速度場に対して、目的汎関数の感度を与える形状勾配関数を理論的に導出する。方法はこの形状勾配関数を用いた勾配法によって導出される速度場の支配方程式を線形弾性問題に対する変位場の支配方程式に置き換えて解く方法である。置き換えられた線形弾性問題は有限要素法や境界要素法などを利用して解析することができる。

本論文では、最初に準備として、速度法と力法および周波数応答問題について簡潔にまとめ、その後でそれぞれの問題ごとの定式化と形状勾配関数の導出を行う。最後に、これらの形状勾配関数を用いた方法が有効に機能することを、数値解析例を通して示す。

2 準備

最初に準備として、領域変動を定式化するときに使われる速度法<sup>(13)(8)</sup>と領域最適化解析の方法を与える方法について簡単にまとめておく。その後で、周波数応答特性に関する領域最適化問題を定式化するときに使用する周波数応答解析に関する基礎式をまとめておく。

2.1 速度法 図1のように、領域  $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 2, 3$ 、境界  $\Gamma = \partial\Omega$  の線形弾性連続体が変動して、領域  $\Omega_s$ 、境界  $\Gamma_s = \partial\Omega_s$  になることを仮定する。ただし、変動を拘束する領域あるいは境界は  $\Theta$  と表すことにする。媒介変数  $s$  は変動履歴を表すことにする。なお、本論文では、 $\mathbb{R}$  は実数を表す。

この領域変動を速度法によって記述すると次のようになる。領域変動は初期領域  $\Omega$  を定義域とした1対1写像

$$T_s(X) : \Omega \ni X \mapsto x \in \Omega_s, \tag{1}$$

を用いて表現することができる。また、領域の微小変動は次のように表すことができる。

$$T_{s+\Delta s}(X) = T_s(X) + \Delta s V + O(|\Delta s|) \quad X \in \Omega \tag{2}$$

ここで、速度場  $V$  は次のような連続関数として定義することができる。

$$V \in C_\Theta = \{V \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \mid V = \mathbf{0} \text{ in } \Theta\} \tag{3}$$

なお、 $C^m(\cdot; \cdot)$  は  $m$  階の導関数まで連続な連続関数空間を表す。このとき、一般に、分布関数  $\phi_s$  の汎関数

$$J_{\Omega_s} = \int_{\Omega_s} \phi_s \, dx \tag{4}$$

$$J_{\Gamma_s} = \int_{\Gamma_s} \phi_s \, d\Gamma \tag{5}$$

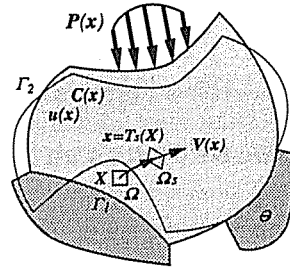


図1 変動する弾性連続体

の  $s$  に対する導関数  $\dot{J}_{\Omega_s}$  と  $\dot{J}_{\Gamma_s}$  は式 (2) の関係を用いてそれぞれ次式で与えられる。

$$\dot{J}_{\Omega_s} = \int_{\Omega_s} \phi'_s \, dx + \int_{\Gamma_s} \phi_s v_n \, d\Gamma \tag{6}$$

$$\dot{J}_{\Gamma_s} = \int_{\Gamma_s} \{ \phi'_s + (\phi_s n_i n_i + \phi_s \kappa) v_n \} \, d\Gamma \tag{7}$$

ただし、 $v_n = n_i V_i$  を表している。 $n$  は外向単位法線ベクトルを表す。 $\kappa$  は領域が2次元の場合曲率、3次元の場合平均曲率を表している。なお、本論文では、ベクトルとテンソルはポルト体表示と添え字によるテンソル表示を併用し、テンソル表示では Einstein 総和規約と偏微分表示  $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$  を使用する。また、 $\phi_s$  の形状導関数  $\phi'_s$  は次式で定義される。

$$\phi'_s = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} (\phi_{s+\Delta s} - \phi_s) \tag{8}$$

2.2 力法 速度法によると領域変動は速度場  $V$  によって表わされることになる。この領域変動に対して、目的汎関数と制約条件から成る Lagrange 関数  $L$  の履歴  $s$  に対する導関数  $\dot{L}$  は、通常、次式のような速度場  $V$  の線形汎関数  $l_G(V)$  によって与えられることになる。

$$\dot{L} = l_G(V) \tag{9}$$

$$l_G(V) = \int_{\Gamma_s} G^T V \, d\Gamma \tag{10}$$

このとき、ベクトル関数  $G$  は形状感度を与える形状勾配関数と呼ばれる。なお、 $(\cdot)^T$  は転置を表す。

力法は、凸性の保証された最適化問題に対して目的汎関数を最小化させることが保証された速度場  $V$  を次の支配方程式に基づいて解く方法として提案されている<sup>(8)(9)</sup>。

$$a(V, w) = -l_G(w) \tag{11}$$

$$V \in C_\Theta \quad \forall w \in C_\Theta$$

ただし、 $a(\mathbf{V}, \mathbf{w})$  は式 (12) で定義されている双 1 次形式である。式 (11) は、速度場  $\mathbf{V}$  が負の形状勾配関数  $-G$  を外力として作用させたときの変位場として解析することを意味している。したがって、式 (11) は有限要素法や境界要素法などを用いた通常の線形弾性問題の数値解法を適用することによって、解析することが可能である。

**2.3 周波数応答解析** 一方、周波数応答特性に関する最適化問題を定式化する際に必要となる周波数応答解析に関する基礎式をまとめておこう。

連続体の境界  $\Gamma_s$  の一部  $\Gamma_{s1}$  では常に弾性変位が拘束され、残りの境界  $\Gamma_{s2}$  の一部に振幅  $P$ 、周波数  $\omega$  の調和力が加えられている状態を仮定する。

このような仮定の下で減衰を無視した場合の運動方程式は次のように表すことができる。

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \omega^2 b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \mathbf{u} \in H_{\Gamma_1} \quad \forall \mathbf{v} \in H_{\Gamma_1}$$

ただし、領域  $\Omega_s$  で定義された変位関数  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  に対して、双 1 次形式  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 、 $b(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 、1 次形式  $l(\mathbf{v})$  は次のように定義する。

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_s} C_{ijkl} u_{k,i} v_{l,j} dx \quad (12)$$

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_s} \rho u_i v_i dx \quad (13)$$

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_2} P_i v_i d\Gamma \quad (14)$$

また、関数空間  $H_{\Gamma_1}$  は次式で定義する。

$$H_{\Gamma_1} = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \mid \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_1\} \quad (15)$$

なお、 $H^m(\Omega; \mathbb{R}^n)$  は Sobolev 空間を表す。

この変位関数  $\mathbf{u}$  をモード解析を用いて解く方法は次のように表示することができる。ある  $r$  次の正規固有振動モードを  $\mathbf{u}_{(r)}$ 、それに対する振動固有値を  $\lambda_{(r)}$  で表すと、固有振動方程式と正規化条件は次式のようになる。

$$a(\mathbf{u}_{(r)}, \mathbf{v}) = \lambda_{(r)} b(\mathbf{u}_{(r)}, \mathbf{v}) \quad \mathbf{u}_{(r)} \in H_{\Gamma_1} \quad \forall \mathbf{v} \in H_{\Gamma_1} \quad (16)$$

$$b(\mathbf{u}_{(r)}, \mathbf{u}_{(r)}) = 1 \quad (17)$$

この関係に基づいて解析された  $\mathbf{u}_{(r)}$  は次の直交性を満たしている。

$$b(\mathbf{u}_{(m)}, \mathbf{u}_{(r)}) = \delta_{mr} \quad (18)$$

$$a(\mathbf{u}_{(m)}, \mathbf{u}_{(r)}) = \lambda_{(r)} \delta_{mr} \quad (19)$$

ただし、 $\delta_{mr}$  は Kronecker デルタである。この直交性に基づけば、式 (12) の変位  $\mathbf{u}$  はモード座標  $\xi_{(r)}$  を用いて次式のように表すことができる。

$$\mathbf{u} = \sum_{r=1}^{\infty} \xi_{(r)} \mathbf{u}_{(r)} \quad (20)$$

式 (20) を式 (12) に代入して、 $\mathbf{v} = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{u}_{(m)}$  を仮定し、モードの直交性を用いると、モード座標  $\xi_{(r)}$  は次式で求めることができる。

$$\xi_{(m)} = \frac{l(\mathbf{u}_{(m)})}{\lambda_{(m)} - \omega^2} \quad m \in \{1, 2, \dots, \infty\} \quad (21)$$

### 3 ひずみエネルギー最小化問題

変位振幅時のひずみエネルギーを最小化する問題を考えよう。最初に問題設定を行ってから、最適性規準を導出する。形状勾配関数はその最適性規準を使って導出する。

**3.1 定式化** 線形弾性連続体の領域変動を 2.1 節で示した速度法によって表現する。ただし、簡単のために、Hook 剛性  $C_{ijkl}$  と密度  $\rho$  は空間固定関数であると仮定する<sup>(9)</sup>。また、調和力が作用する境界は変位拘束境界  $\Theta$  に含めるものと仮定する。このとき、ひずみエネルギー最小化問題は次のように定式化することができる。

▷ 問題 1: 領域の大きさに対する上限値  $M \in \mathbb{R}_+$  が与えられているとき、系全体のひずみエネルギー

$$W = \frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad (22)$$

が最小となる領域  $\Omega_s$  を求めよ。ただし、減衰を無視した場合の運動方程式

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \omega^2 b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \mathbf{u} \in H_{\Gamma_1} \quad \forall \mathbf{v} \in H_{\Gamma_1} \quad (23)$$

と質量制約

$$m - M \leq 0 \quad (24)$$

は満たしていなければならない。◁

なお、本論文では、 $\mathbb{R}_+$  は正の実数を表す。

**3.2 最適性規準** 問題 1 は、Lagrange 乗数法によって制約条件のない停留化問題に書き換えることができる。この場合の Lagrange 関数  $L(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \Lambda, \Omega_s)$  は次式で与えられる。

$$L = \frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \omega^2 b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + l(\mathbf{v}) + \Lambda(m - M) \quad (25)$$

ただし、ここでは  $\mathbf{v}$  を Lagrange 乗数として用いている。領域変動に対する  $L$  の  $s$  に対する導関数  $\dot{L}$  は、式 (6) と (7) の関係を用いて次のように得ることができる。

$$\begin{aligned} \dot{L} = & -\{a(\mathbf{u}, \mathbf{v}') - \omega^2 b(\mathbf{u}, \mathbf{v}') - l(\mathbf{v}')\} \\ & -\{a(\mathbf{u}', \mathbf{v}) - \omega^2 b(\mathbf{u}', \mathbf{v}) - a(\mathbf{u}', \mathbf{u})\} \\ & + \int_{\Gamma_s} \left( \frac{1}{2} C_{ijkl} u_{k,i} u_{l,j} - C_{ijkl} u_{k,i} v_{l,j} \right. \\ & \left. + \omega^2 \rho u_i v_i + \Lambda\right) v_n d\Gamma \\ & + \dot{\Lambda}(m - M) \end{aligned} \quad (26)$$

したがって、Lagrange 関数  $L$  が停留するための必要条件は、次のように得られることになる。

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}') - \omega^2 b(\mathbf{u}, \mathbf{v}') = l(\mathbf{v}') \quad \forall \mathbf{v}' \in H_{\Gamma_1} \quad (27)$$

$$a(\mathbf{u}', \mathbf{v}) - \omega^2 b(\mathbf{u}', \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}', \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u}' \in H_{\Gamma_1} \quad (28)$$

$$\int_{\Gamma_1} \left( \frac{1}{2} C_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} - C_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} + \omega^2 \rho u_i v_i + \Lambda \right) v_n d\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{V} \in C_{\Theta} \quad (29)$$

$$\Lambda(m - M) = 0 \quad (30)$$

$$m - M \leq 0 \quad (31)$$

ここで、式 (27) は変位  $\mathbf{u}$  を決定するための運動方程式 (23) を与え、式 (28) は随伴関数  $\mathbf{v}$  を決定するための随伴方程式を与えている。この問題は、運動方程式と随伴方程式が異なることから、非自己随伴問題になっていることがわかる。一方、式 (30) と (31) は不等式制約式 (24) に対する Kuhn-Tucker 条件式を与え、 $\Lambda$  を決定するための支配方程式になっている。

随伴方程式 (28) の  $\mathbf{v}$  はモード解析法を用いると次のように解くことができる。随伴関数  $\mathbf{v}$  は次のように随伴モード座標  $\eta_{(r)}$  に変換することができる。

$$\mathbf{v} = \sum_{r=1}^{\infty} \eta_{(r)} \mathbf{u}_{(r)} \quad (32)$$

式 (20) と式 (32) を式 (28) に代入し、 $\mathbf{u}' = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{u}_{(m)}$  のときのモードの直交性を用いると、随伴モード座標  $\eta_{(r)}$  を求めるための次式を得ることができる。

$$\eta_{(m)} = \frac{\lambda_{(m)} l(\mathbf{u}_{(m)})}{(\lambda_{(m)} - \omega^2)^2} \quad m \in \{1, 2, \dots, \infty\} \quad (33)$$

3.3 形状勾配関数 そこで、式 (27) と (28) を満たす  $\mathbf{u}$ 、 $\mathbf{v}$  と、式 (30) と (31) を満たす  $\Lambda$  を用いることにすれば、Lagrange 関数の導関数  $\dot{L}$  は次のように表すことができる。

$$\dot{L} = l_G(\mathbf{V}) = \int_{\Gamma_1} \mathbf{G}^T \mathbf{V} d\Gamma \quad (34)$$

このとき、この問題における形状勾配関数  $\mathbf{G}$  は次式で与えられることになる。

$$\mathbf{G} = \mathbf{G} \mathbf{n} \quad (35)$$

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2} C_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} - C_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} + \omega^2 \rho u_i v_i + \Lambda \quad (36)$$

ここで、スカラー関数  $G$  は形状勾配密度関数と呼ぶことにする。法はこの形状勾配関数が導出できたことを受けて適用可能となる。

#### 4 運動エネルギー最小化問題

速度振幅時の運動エネルギーを最小化する問題を考えよう。

4.1 定式化 領域変動を 2.1 節で示した速度法によって表現する。また、3.1 節と同様の  $C_{ijkl}$ 、 $\rho$  および  $\Theta$  に関する仮定を設ける。このとき、運動エネルギー最小化問題は次のように定式化することができる。

▷ 問題 2: 領域の大きさに対する上限値  $M \in \mathbb{R}_+$  が与えられているとき、系全体の運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2} \omega^2 b(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad (37)$$

が最小となる領域  $\Omega$  を求めよ。ただし、運動方程式 (23) と質量制約条件 (24) は満たしていなければならない。◁

この問題も次のような Lagrange 関数  $L$  を用いることによって制約条件のない停留化問題に書き換えることができる。

$$L = \frac{1}{2} \omega^2 b(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \omega^2 b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + l(\mathbf{v}) + \Lambda(m - M) \quad (38)$$

4.2 最適性規準 Lagrange 関数  $L$  が停留するための必要条件は、次のように得ることができる。

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}') - \omega^2 b(\mathbf{u}, \mathbf{v}') = l(\mathbf{v}') \quad \forall \mathbf{v}' \in H_{\Gamma_1} \quad (39)$$

$$a(\mathbf{u}', \mathbf{v}) - \omega^2 b(\mathbf{u}', \mathbf{v}) = \omega^2 b(\mathbf{u}', \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u}' \in H_{\Gamma_1} \quad (40)$$

$$\int_{\Gamma_1} \left( \frac{1}{2} \omega^2 \rho u_i v_i - C_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} + \omega^2 \rho u_i v_i + \Lambda \right) v_n d\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{V} \in C_{\Theta} \quad (41)$$

$$\Lambda(m - M) = 0 \quad (42)$$

$$m - M \leq 0 \quad (43)$$

この問題も、運動方程式 (39) と随伴方程式 (40) が異なる非自己随伴問題になっている。

この問題の随伴方程式 (40) の  $\mathbf{v}$  もモード解析法を用いて次のように解くことができる。随伴関数  $\mathbf{v}$  は式 (32) のように随伴モード座標  $\eta_{(r)}$  に変換する。式 (20) と式 (32) を式 (40) に代入し、 $\mathbf{u}' = \mathbf{u}_{(m)}$  を仮定して、モードの直交性を用いると、次式のような随伴モード座標  $\eta_{(r)}$  を求めるための関係を得ることができる。

$$\eta_{(m)} = \frac{\omega^2 l(\mathbf{u}_{(m)})}{(\lambda_{(m)} - \omega^2)^2} \quad m \in \{1, 2, \dots, \infty\} \quad (44)$$

4.3 形状勾配関数 そこで、式 (39) を満たす  $\mathbf{u}$  と式 (40) を満たす  $\mathbf{v}$  および式 (42) と (43) を満たす  $\Lambda$  を用いることにすれば、Lagrange 関数の導関数  $\dot{L}$  は式 (34) と (35) のように表すことができる。ただし、このときの形状勾配密度関数  $\mathbf{G}$  は次式で与えられることになる。

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2} \omega^2 \rho u_i v_i - C_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} + \omega^2 \rho u_i v_i + \Lambda \quad (45)$$

これを用いた形状勾配関数に対して法は適用される。

## 5 平均コンプライアンスの絶対値の最小化問題

変位振幅時の平均コンプライアンスの絶対値を最小化する問題を考えよう。

5.1 定式化 領域変動を 2.1 節で示した速度法によって表現する。ここでも 3.1 節と同様の  $C_{ijkl}$ ,  $\rho$  および  $\Theta$  に関する仮定を設ける。このとき、平均コンプライアンスの絶対値最小化問題は次のように定式化することができる。

▷ 問題 3: 領域の大きさに対する上限値  $M \in \mathbb{R}_+$  が与えられているとき、系全体の平均コンプライアンスの絶対値

$$C = |l(\mathbf{u})| \quad (46)$$

が最小となる領域  $\Omega_s$  を求めよ。ただし、支配方程式 (23) と質量制約条件 (24) は満たしていなければならない。◁

この問題も次のような Lagrange 関数  $L$  を用いることによって制約条件のない停留化問題に書き換えることができる。

$$L = |l(\mathbf{u})| - a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \omega^2 b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + l(\mathbf{v}) + \Lambda(m - M) \quad (47)$$

5.2 最適性規準 Lagrange 関数  $L$  が停留するための必要条件は、次のように得ることができる。

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}') - \omega^2 b(\mathbf{u}, \mathbf{v}') = l(\mathbf{v}') \quad \forall \mathbf{v}' \in H_{\Gamma_1} \quad (48)$$

$$a(\mathbf{u}', \mathbf{v}) - \omega^2 b(\mathbf{u}', \mathbf{v}) = |l(\mathbf{u}')| \quad \forall \mathbf{u}' \in H_{\Gamma_1} \quad (49)$$

$$\int_{\Gamma_n} (-C_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} + \omega^2 \rho u_i v_i + \Lambda) v_n d\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in C_\Theta \quad (50)$$

$$\Lambda(m - M) = 0 \quad (51)$$

$$m - M \leq 0 \quad (52)$$

この問題においては、運動方程式 (48) と随伴方程式 (49) を比較して、次のような自己随伴関係が成立していることが分かる。ただし、

$$\mathbf{v} = \begin{cases} \mathbf{u} & (l(\mathbf{u}) \geq 0) \\ -\mathbf{u} & (l(\mathbf{u}) < 0) \end{cases} \quad (53)$$

5.3 形状勾配関数 そこで、式 (48) を満たす  $\mathbf{u}$  と式 (53) の関係を満たす  $\mathbf{v}$  および式 (51) と式 (52) を満たす  $\Lambda$  を用いることにすれば、Lagrange 関数の導関数  $\dot{L}$  は式 (34) と (35) のように表すことができる。ただし、このときの形状勾配密度関数  $G$  は次式で与えられることになる。

$$G = -C_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} + \omega^2 \rho u_i v_i + \Lambda \quad (54)$$

方法はこれを用いた形状勾配関数に対して適用される。

## 6 数値解析

第 3 章から 5 章において導出された形状勾配関数を用いた方法が有効に機能することを基本的な 2 次元はり状連続体の周波数応答問題に対して検証する。本論文では加振周波数を 1 次固有周波数の前後に設定することにして、周波数応答解析では 1 次よりも十分大きな 1 次から 9 次までのモードに注目した。また、固有振動方程式 (16) と速度方程式 (11) は 8 節点アイソパラメトリック要素を用いた有限要素法を使用した。いずれの問題においても平面応力状態を仮定した。

問題設定を図 2 に示す。振動解析では、長方形の左辺を完全拘束し、右辺に加振力を与えた。速度解析では、加振力の位置を固定するために左右両辺の滑り拘束と左右両辺中央の点の完全拘束を仮定した。平板の長さ、幅、厚さはそれぞれ 0.6 m, 0.06 m, 0.01 m とした。また、弾性係数  $E = 214.1$  GPa, 密度  $\rho = 7860$  Kg/m<sup>3</sup> と設定した。加振力の振幅  $P$  は 36 N, 加振周波数は 1 次固有周波数より小さい周波数として 5 Hz を採用し、1 次固有周波数より大きい周波数として 40 Hz を採用した。

6.1 ひずみエネルギー最小化 加振周波数が 5 Hz と 40 Hz の場合のひずみエネルギー最小化問題に対する解析結果を図 3 と図 4 に示す。両図における形状勾配密度関数  $G$  の分布は式 (36) で与えられた。なお、記号  $\Omega_{(k)}$  は  $k$  回の領域変動を繰り返した後の領域を表している。変位モードは変位の最大値で規準化した。また、周波数応答曲線上の ● 印は初期領域の場合の目的汎関数の値を示している。加振周波数が 5 Hz と 40 Hz の両方の場合において、 $G$  の分布から、形状勾配密度関数が均一化したことを確認することができる。また、それぞれの変動履歴から、目的のひずみエネルギー  $W$  は単調に減少収束している様子を確認することができる。その際、運動エネルギー  $K$  と平均コンプライアンスの絶対値  $C$  も単調に減少収束する結果になった。

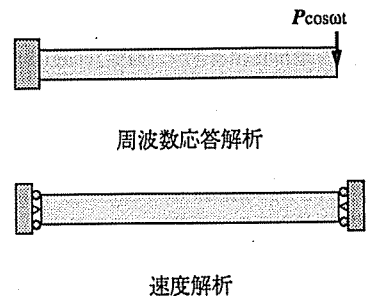
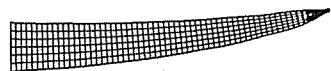


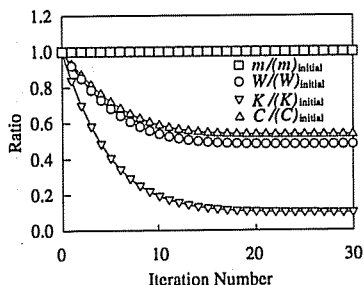
図 2 片側完全固定 2 次元はり状連続体問題



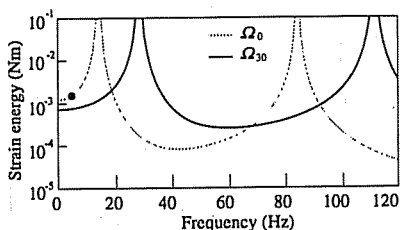
形状と  $G$  の分布 ( $\Omega_0$ )



変位モード ( $\Omega_0$ )



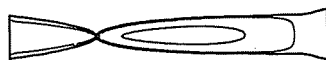
変動履歴



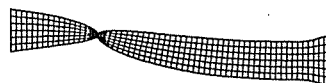
周波数応答曲線

図 3 解析結果 (ひずみエネルギー最小化;5Hz)

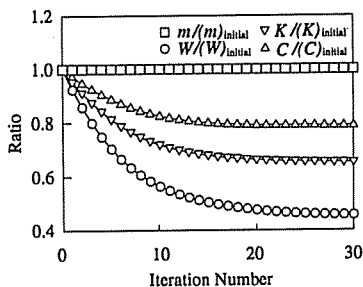
6.2 運動エネルギーの最小化 加振周波数が 5 Hz と 40 Hz の場合の運動エネルギー最小化問題に対する解析結果を図 5 と図 6 に示す。なお、形状勾配密度関数  $G$  は式 (45) で与えられた。この場合、それぞれの変動履歴から、領域変動を繰り返すに従って目的の運動エネルギー  $K$  が単調に減少収束している様子を確認することができる。しかし、加振周波数が 5 Hz の場合、目的にしているひずみエネルギー  $W$  と平均コンプライアンスの絶対値  $C$  は著しく増加する結果になった。この結果は、変位モードから判断して、加振点近傍が局所的に激しく振動することによって、連続体全体の運動エネルギーを抑えていることが考えられる。



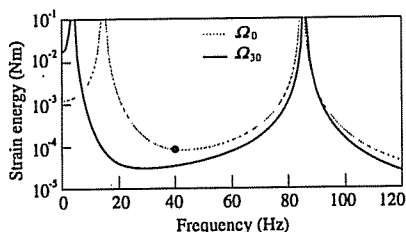
形状と  $G$  の分布 ( $\Omega_0$ )



変位モード ( $\Omega_0$ )



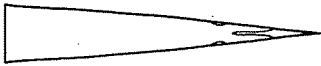
変動履歴



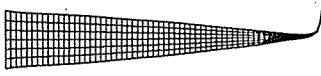
周波数応答曲線

図 4 解析結果 (ひずみエネルギー最小化;40Hz)

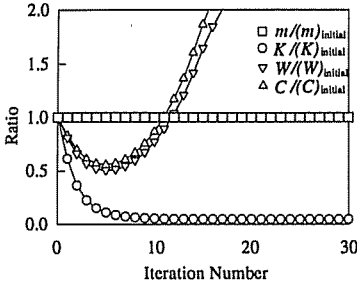
6.3 平均コンプライアンス絶対値の最小化 加振周波数が 5 Hz と 40 Hz の場合の平均コンプライアンス絶対値の最小化問題に対する解析結果を図 7 と図 8 に示す。形状勾配密度関数  $G$  は式 (54) で与えられた。この場合も、目的の平均コンプライアンスの絶対値は単調に減少収束している様子を確認することができる。特に、加振周波数が 40 Hz の場合、変位モードと平均コンプライアンス絶対値の周波数応答曲線から判断して、加振点における自己伝達関数の反共振点に落ちていると考えられる。一方、目的にしているひずみエネルギー  $W$  と運動エネルギー  $K$  は単調に減少しない結果になった。この結果は、変位モードから



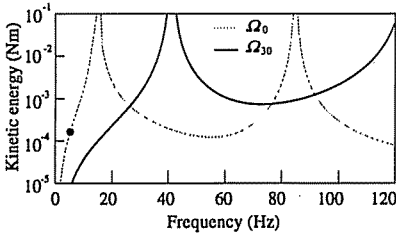
形状と  $G$  の分布 ( $\Omega_{30}$ )



変位モード ( $\Omega_{30}$ )



変動履歴



周波数応答曲線

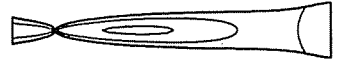
図 5 解析結果 (運動エネルギー最小化;5Hz)

判断して、加振点を節としたモードで振動しようとするために、連続体全体のひずみエネルギーや運動エネルギーは犠牲になったものと考えられる。

これらの数値解析結果から、どの目的汎関数を採用するかは設計者に委ねることにして、3章から5章において導出された形状勾配関数を用いた方法は有効に機能したことを確認することができた。

7 おわりに

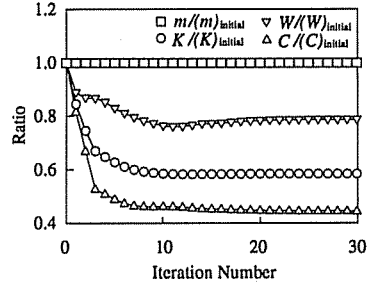
本論文では、ある一定周波数の荷重を受ける連続体の領域形状を設計対象とするひずみエネルギー最小化問題、運動エネルギー最小化問題および平均コンプラ



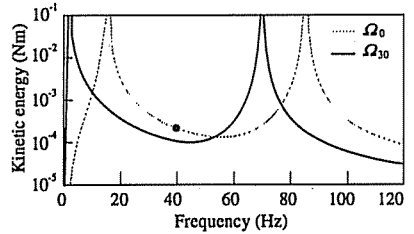
形状と  $G$  の分布 ( $\Omega_{30}$ )



変位モード ( $\Omega_{30}$ )



変動履歴



周波数応答曲線

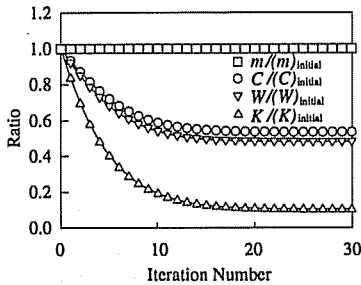
図 6 解析結果 (運動エネルギー最小化;40Hz)

イアンスの絶対値最小化問題に対する形状勾配関数を理論的に導出した。それらの形状勾配関数を用いた方法が有効に機能することを、基本的なはり状連続体問題に対する数値解析を通して示した。

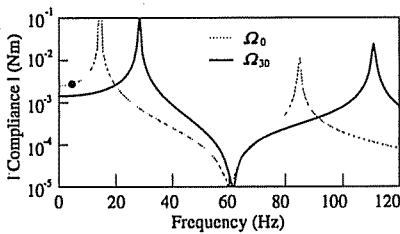
なお、本研究は文部省科学研究費の援助を受けて実施されたことを記して感謝する。

文 献

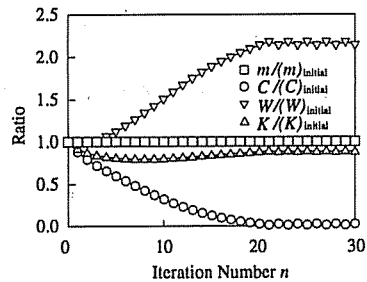
- (1) 呉志強, 畔上秀幸: 固有振動問題における領域最適化解析(力法によるアプローチ), 機論, 61 巻, C 編 (1995), 掲載予定.
- (2) 遠藤満, 金子良一, 小川正純, 坂田勝: 一次元構造物の防振に関する最適化の一手法, 機論, 44 巻, 第一部 (1978), 3015-3023.

形状と  $G$  の分布 ( $\Omega_{30}$ )変位モード ( $\Omega_{30}$ )

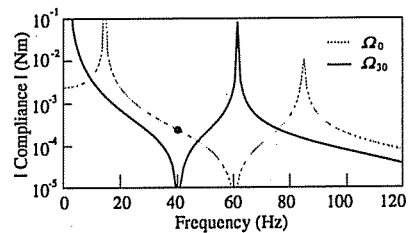
変動履歴



周波数応答曲線

形状と  $G$  の分布 ( $\Omega_{30}$ )変位モード ( $\Omega_{30}$ )

変動履歴



周波数応答曲線

図7 解析結果 (コンプライアンス絶対値最小化; 5Hz)

図8 解析結果 (コンプライアンス絶対値最小化; 40Hz)

- (3) 山川宏, 若林秀次: 構造物の動的応答における最適設計 (第1報, 最適設計方法1—逐次積分法と傾斜を用いた最適化手法を併用した最適設計方法—), 機論, 48, C編 (1983), 1738-1749.
- (4) 山川宏, 一文字正幸, 大橋淳, 浜田薫: 構造物の動的応答における最適設計 (第2報, 最適設計方法2—モーダルアナリシスと傾斜を用いた最適化手法を併用した最適設計方法—), 機論, 48, C編 (1983), 1750-1757.
- (5) 多田幸生, 草場康裕: ランダム荷重を受ける構造物の最適設計 (疑似感度を用いる最適化), 機論, 54巻, C編 (1988), 490-496.
- (6) 井上克己, 加藤正名, 大貫憲一: 振動エネルギー最小化に基づく薄版の最適設計, 機論, 56巻, C編 (1990), 2361-2366.
- (7) Ma, Z. D., Kikuchi, N. and Hagiwara, I.: Structural topology and shape optimization for a frequency response problem, *Computational Mechanics*, Vol. 13 (1993), 157-174.
- (8) 畔上秀幸: 領域最適化問題の一解法, 機論, 60巻, A編 (1994), 1479-1486.
- (9) 畔上秀幸, 呉志強: 線形弾性問題における領域最適化解析 (力法によるアプローチ), 機論, 60巻, A編 (1994), 2312-2318.
- (10) 下田昌利, 呉志強, 畔上秀幸, 桜井俊明: 汎用 FEM コードを利用した領域最適化問題の数値解析法 (力法によるアプローチ), 機論, 60巻, A編 (1994), 2418-2425.
- (11) 片峯英次, 畔上秀幸: 粘性流れ場の領域最適化問題の解法 (力法によるアプローチ), 機論, 60巻, B編 (1994), 3859-3866.
- (12) 片峯英次, 畔上秀幸: ポテンシャル流れ場における領域最適化解析 (力法によるアプローチ), 機論, 61巻, B編 (1995), 103-108.
- (13) Sokolowski, J. and Zolésio, J. P., *Introduction to Shape Optimization, Shape Sensitivity Analysis*, (1991), Springer-Verlag.