

類似性に基づく推論を用いた  
知的問題解決支援の検討と実現

小島一晃



## 要 旨

類似性に基づく推論は、人間の強力な問題解決方略の1つである。我々は新奇な問題に遭遇した時、自分自身が過去に経験した問題や既存の例といった「事例」から似たものを参照し、それを問題解決に利用することが多い。そのため、様々な課題を用いて、人間の類似性判断や問題解決における思考メカニズムを理解する認知心理学的研究や、類似性に基づく推論を要素技術として問題解決や問題解決支援を行う計算機システムを構築する知識工学的研究が展開されてきた。

類似性に基づく推論においては、現在直面している問題と類似する過去の事例を利用することから、類似性の判断が問題解決における重要なキーとなる。類似性は、問題と事例との間の同一の要素（共通点）、および、異なる要素（差異）に基づいて評価される。一般に、現在の問題と完全に一致する過去の事例が利用できることは稀であるため、通常は問題と事例との差異に基づき、事例を修正する必要がある。

しかし、差異は単に埋められなければならないだけのものではなく、差異に積極的な意味が生じる場合も存在する。その一例が、数学学習における問題解決である。数学学習には、教示された問題（例題）に基づいて別の問題（類題）を解く類題解決や、学習者自身が新しい問題を作り出す作問といった問題解決がある。数学における作問については、問題を作ることとは問題を解くことと同様に重要な活動であることが、数学者や数学教育者によって指摘されている。学習においては、似たような問題を繰り返し解くことや作ること自体に意義はない。学習者には、学習した例題を適用して差異を持つ類題を解けるようになること、および、既知の問題に差異を与えて多様な問題を作れるようになることが求められるが、学習者にとってそれらのことは困難である。そのため、数学学習における問題解決を支援するためには、共通点と差異という2つの側面に基づいて類似性を扱うための枠組みを考案することが、支援の実現のための重要な課題になる。

上述の動機に従い、本論文では、数学学習における類題解決と作問を対象とし、類似性に基づく推論を用いて知的問題解決支援システムを構築した。ここでは特に、共通点と差異という類似性の2つの側面に注目し、知的支援の検討と実現を行った。

具体的には、人間の類似性に基づく推論の解明に取り組んできた認知心理学の類推研究の知見に基づき、数学学習における困難さを克服するための支援方法を検討することで、システムの設計要件を得た。そして、人工知能の要素技術である CBR（Case-Based Reasoning: 事例に基づく推

論)のモデルに則り、システムを実装した。本論文の構成は、以下の通りである。

第1章「序論」では、認知心理学における類推研究の知見に基づき、数学学習の問題解決において、学習者が示す困難さの原因、および、学習者を支援する方法を検討した。類推研究では、人間の問題解決は、問題が持つ数学的構造(解法)だけでなく、問題文に言い表される文脈設定のような情報(状況)に強く影響されることが示唆されている。また、学習者に状況と解法の類似性を統制して問題を与え、それらの間の比較を行わせることで、学習者が問題解決において重要な情報に注目することを促し、学習者の問題解決を成功に導くことが示されている。そこで、これらの知見に基づき、支援システムを実現するための2つの設計要件を導出した。具体的には、1) 学習者に対し、状況と解法の2つの属性における類似性を統制して、類題の事例を提示する機能、2) 学習者に比較を行わせるために、多数の、かつ、多様な事例を供給する機能を実現しなければならないというものである。

第2章「事例検索システム」では、類題解決学習を支援するシステムを試作した。本システムの試作にあたっては、設計要件1に従い、類題提示手法を設計した。この手法には、1-a) 状況と解法の特徴を区別して理解するための問題表現である「3層リスト形式」、ならびに、1-b) 状況と解法を統制して類題提示の決定基準を変化させる手法である「ランク」の2つが含まれる。第2章で試作したシステムは、これらを実装することで、学習者ユーザが学習した例題に対し、様々な差異を持つ類題を検索して提示することが可能である。そして、本システムの類題提示の妥当性を検証するために、数学教師の類題判断との比較を行う実験的評価を実施した。その結果、本システムの類題提示手法は概ね妥当であること、すなわち、状況と解法を統制して類題を提示するという方法が有効であることを確認した。

第3章「事例自動生成システム」では、類題解決学習で使用する文章題を自動的に生成するシステムを実現した。本システムの実現にあたっては、設計要件2に従い、状況と解法の2つの属性において構造化された問題データベースを生産する手法を提案した。文章題を扱う上で生じる常識知識や自然言語処理に関する問題については、1) システムは作問エピソードを作成して使用することで問題を生成する、2) システムは教師ユーザとのインタラクションを行う、という方法によって克服、あるいは回避するアプローチを採用した。作問エピソードとは、例題に対し、その類題が生成された時、この2つの問題の間で結ぶことができる関係を事例化した知識である。本システムは、システムに登録された問題から作問エピソードを形成し、それを他の問題に適用して新しい問題を生成すること

で、問題の多様性を増やす。そして、本システムの実験的評価により、システムが実際に問題の多様性を増やすことが可能であることが確認されたものの、そのためには十分な数学能力を持つ教師ユーザが必要であることが判明した。

第4章「事例作成支援システム」では、作問学習において、学習者が多様な作問を行うように支援する方法を検討し、その結果に基づいて、学習者ユーザの発散的思考を促進するシステムの実現を行った。ここでは、作問の創造的生成課題としての側面に注目し、そのような課題を支援する主要な方法である、事例提示を採用した。具体的な事例提示の方法には、類題解決学習支援を実現するための設計要件を応用し、状況と解法を統制することを提案した。そして、実験的調査により、そのような事例提示が、人間の作問における発散的思考の促進に利用できることを確認した。この結果に従い、事例提示によって学習者ユーザの作問を支援するシステムを実現した。システムの事例提示機能は、第2章で設計した類題提示の手法、および、第3章で実現したシステムによって生産された問題データベースを使用して実装された。そして、本システムの実験的評価により、システムは学習者ユーザの作問を多様にする支援効果を持つことが確認されたものの、そのためには、適切な事例提示が必要であることが判明した。第4章では同時に、本システムの実装に使用した類題提示手法と問題データベースの応用例が示されたとともに、その有効性が確認された。

第5章「結論」では、本論文の総括を行うとともに、本論文における一連の研究による成果を明らかにした。さらに、今後の研究展開について論じた。

# 目次

<b>第1章</b>	<b>序論</b>	<b>1</b>
1.1	本論文の動機と目的	1
1.1.1	類似性に基づく推論	1
1.1.2	類似性	2
1.1.3	本論文の目的	4
1.2	本論文の背景	5
1.2.1	類推	5
1.2.2	CBR (Case-Based Reasoning)	7
1.2.3	類推と CBR との関係	8
1.3	類推に基づく数学学習支援の検討	9
1.3.1	表層的特徴と構造的特徴	9
1.3.2	スキーマの構成	11
1.3.3	支援システムの設計要件	12
1.4	本論文の構成	12
<b>第2章</b>	<b>事例検索システム</b>	<b>14</b>
2.1	緒言	14
2.2	類題提示手法の設計	15
2.2.1	問題表現	15
2.2.2	類題提示の決定基準	18
2.2.3	類題群の構成と類題提示の決定	19
2.3	事例検索システムの実装	20
2.3.1	システムの構成	22
2.3.2	システムの実行手順	22
2.4	実験的評価	26
2.4.1	方法	27
2.4.2	結果と考察	28
2.5	結言	31
<b>第3章</b>	<b>事例自動生成システム</b>	<b>32</b>
3.1	緒言	32
3.2	事例自動生成システムの実装	33

3.2.1	問題生成の基本コンセプト . . . . .	34
3.2.2	問題表現 . . . . .	36
3.2.3	システムの構成 . . . . .	38
3.2.4	システムの実行手順 . . . . .	39
3.3	実験的評価 . . . . .	47
3.3.1	動作実験 . . . . .	47
3.3.2	運用実験 . . . . .	50
3.4	結言 . . . . .	53
<b>第 4 章</b>	<b>事例作成支援システム</b>	<b>55</b>
4.1	緒言 . . . . .	55
4.2	作問支援の検討 . . . . .	55
4.2.1	創造的生成課題としての作問 . . . . .	56
4.2.2	作問支援のための事例提示 . . . . .	57
4.2.3	課題形式 . . . . .	57
4.3	実験的調査 . . . . .	59
4.3.1	方法 . . . . .	60
4.3.2	条件群 . . . . .	60
4.3.3	結果 . . . . .	61
4.3.4	考察 . . . . .	63
4.4	事例作成支援システムの実装 . . . . .	64
4.4.1	システムの構成 . . . . .	66
4.4.2	システムの実行手順 . . . . .	67
4.5	実験的評価 . . . . .	71
4.5.1	方法 . . . . .	72
4.5.2	条件群 . . . . .	73
4.5.3	結果 . . . . .	74
4.5.4	考察 . . . . .	77
4.6	結言 . . . . .	78
<b>第 5 章</b>	<b>結論</b>	<b>80</b>
5.1	本論文の総括 . . . . .	80
5.2	本論文の成果 . . . . .	81
5.2.1	CBR 研究への貢献 . . . . .	82
5.2.2	類推研究への貢献 . . . . .	83
5.2.3	教育工学・学習科学への貢献 . . . . .	85
5.3	今後の研究展開 . . . . .	85
	謝辞	88

## 目次

---

参考文献	89
関連論文	96
付 録 A 研究 1 の実験的評価において使用したランク	99
付 録 B 研究 1 の実験的評価において使用した問題	101
付 録 C 研究 3 の実験的調査における作成問題	103
付 録 D 研究 3 の実験的評価における作成問題	105



# 図 目 次

1.1	類推のプロセス	6
1.2	CBR のプロセス	7
1.3	類題の例	11
1.4	本論文の構成	13
2.1	問題表現の例	16
2.2	本システムの実行画面	21
2.3	本システムの構成図	22
2.4	入力例題の特徴解析	23
2.5	類題提示	25
2.6	各ランクの類似性	26
2.7	類題判断の一致率	29
3.1	本システムのユースケース	34
3.2	作問エピソードを用いた問題生成の概念図	35
3.3	問題の特徴表現の例 1	36
3.4	問題の特徴表現の例 2	37
3.5	本システムの構成図	39
3.6	問題データ登録の実行画面の一部	41
3.7	output の問題データのテーブル	44
3.8	問題データ修正の実行画面の一部	46
3.9	問題パターン増加率	48
3.10	生成された問題の適切さ	49
4.1	作成問題の評価のためのカテゴリ	58
4.2	各カテゴリの問題の例	59
4.3	各カテゴリの作成問題の割合 (1 回目)	62
4.4	各カテゴリの作成問題の割合 (2 回目)	62
4.5	事例を複製した作成問題の割合	64
4.6	事例作成支援システムのユースケース	65
4.7	事例作成支援システムの構成図	66
4.8	作問入力インタフェースの実行画面の一部	68

4.9 フィードバックインタフェースの実行画面の一部 . . . . .	70
4.10 作成問題の認識の結果 . . . . .	74
4.11 各カテゴリの作成問題の割合 . . . . .	75
4.12 作成問題がカテゴリ同状・同解のみの参加者の割合 . . . . .	76
4.13 アンケートの回答の平均値 . . . . .	78

## 表 目 次

1.1	類推と CBR の対応関係 . . . . .	8
2.1	問題タイプ分類の例 . . . . .	17
2.2	ランクの例 . . . . .	18
2.3	ランクの具体例 . . . . .	19
2.4	問題選択のためのランク . . . . .	24
2.5	類題判断の結果 . . . . .	28
2.6	類題判断の追試結果（表 2.5 との差分） . . . . .	30
3.1	図 3.4 の問題データの実装レベル表現 . . . . .	38
3.2	書き換えアクションの例 . . . . .	42
3.3	動作実験で用いた問題の初期セット . . . . .	47
3.4	運用実験で用いた問題の初期セット . . . . .	51
3.5	適切な修正を行った参加者数 . . . . .	52
4.1	状況を判定するためのランク . . . . .	71
4.2	解法を判定するためのランク . . . . .	71
A.1	基本練習モード . . . . .	99
A.2	発展練習モード . . . . .	100
A.3	ひっかけモード . . . . .	100

# 第1章 序論

## 1.1 本論文の動機と目的

### 1.1.1 類似性に基づく推論

人間の柔軟で強力な問題解決を支える能力の1つに、類似性を判断する能力がある [Holyoak 1998, 鈴木 1996]. 我々は新奇な問題に遭遇した時、自分自身が過去に経験した問題や既存の例から似たものを参照し、それを問題解決に利用することが多い. このような問題解決の方略は、「類似性に基づく推論」と呼ばれる. 本論文では、類似性に基づく推論で用いられる知識、すなわち、問題解決者が記憶している経験や他者が作成した既存の例を、「事例」と呼ぶことにする.

類似性に基づく推論は、主に認知心理学の分野で人間の認知メカニズムを理解するという立場の研究が行われてきた. こうした研究では、問題解決者に何らかの課題を解決させるにあたり、類似性を統制して作成した事例を与えることで、どのような事例を利用するのか、ならびに、どのように事例を利用するのかといったことが、心理実験や計算機シミュレーションなどを通じて検討されてきた (たとえば [Forbus 1995, Gentner 1993, Gick 1980, Thagard 1990]). また、人工知能の分野では、類似性に基づく推論を用いて知的に人間の問題解決を支援する、あるいは自動的に問題解決を行う計算機システムを実現するという試みにおいて研究が進められてきた. ここでは、建築や機械などの設計 (たとえば [Domeshek 1994, Maher 1996, 仲谷 1995]), ヘルプデスク<sup>1</sup>や診断 [Simoudis 1992, Göker 2006], プランニング [Aha 2001], ドキュメント検索 [Lenz 1999], 法推論 [新田 1992] など、多岐にわたる領域において、問題解決に役立つ事例を人間に提示したり、事例を用いて問題の解を自動的に生成するシステムが提案されてきた.

類似性に基づく推論を用いた計算機システムを実装する際には、「いかに事例の類似性を定義して判断するか」を設計することが、常に最重要課題の1つとなる. 類似性に基づく推論においては、類似性の判断が問題解決における重要なキーとなるためである. 現在直面している問題の解決に

---

<sup>1</sup>製品の使用方法やトラブル解決法などに関する、顧客からの問い合わせに答える業務を指す.

事例を利用する場合、その問題と事例との類似性は、事例がその問題の解決にどれくらい貢献しそうであるかを評価する役割を果たす。

一般に、2つの事例間の類似性を判断する時は、事例を特徴付ける要素を比較し、同一の要素がどの程度含まれるかを比較する。同一ではない要素は、異なる要素ということになる。ここでは、同一の要素を「共通点」、異なる要素を「差異」と呼ぶことにする。類似性は、共通点と差異とによって評価される。ある要素が「共通点である」と「差異である」とことは排他的な関係にあり、さらに、特殊な場合を除き、2つの事例間には共通点と差異の双方が存在する。そのため、共通点と差異とは、類似性の表裏一体の側面であり、ともに類似性に基づく推論の重要な要因である。次節では、共通点と差異という観点に従い、類似性を考察する。

### 1.1.2 類似性

先述のように、類似性に基づく推論による問題解決では、現在の問題と類似する過去の事例を利用する。解が唯一に定まる問題の解決において、もし、現在の問題と完全に一致する事例が利用可能であるとしたら、事例を複製するだけで解を得られるため、新たに問題解決を行う必要はなくなる。しかし、問題解決場面一般においては、現在の問題と完全に一致する事例が利用できることは稀である。そのため、現在の問題と事例との類似性を判断し、問題解決に利用できる事例を選択する。問題と事例の間には多くの共通点が含まれることになるが、同時に、何らかの差異も必ず存在する。したがって、事例を利用する際には、差異に基づいて事例の修正を行った上で、共通点に基づいて事例を問題に当てはめることになる。

ただし、類似性に基づく推論において、差異は単に埋められなければならないだけのものではない。既知の事例と差異のある問題を特に選択して解決したり、事例に差異を与えて事例とは異なる解を得ることに、積極的な意味が生じる場合も存在する。ここでは、数学学習場面における問題解決を具体例として取り上げ、類似性の考察を行う。

### 問題解決の定義

本論文において「問題解決」という用語は2つの意味を持つため、ここでその区別を定義する。1つは、状態を遷移させる操作によって初期状態から目標状態へと到達する行動一般である。これには、パズルを解く、交通機関を使って目的地へ辿り着く計画を立てる、新しい遊具を設計するなど、様々な活動が含まれる。もう1つは、目標状態が唯一に定まる収束的な問題において、目標状態に到達する、すなわち、解を導き出すことであ

る．ここでは特に、数学の問題を解くことを指す．後者の問題解決は、前者に包含される．

本論文では特に断らない限り、単に問題解決といった場合、前者の意味を指す．後者の場合は、「数学的問題解決」と呼ぶことにする．また、後者の意味において用いる場合には、「問題を解く」といった言葉を使う．

### 数学学習における問題解決

数学では、類似性に基づく推論がよく用いられる．数学的問題解決において、「似た問題を解いたことがあるか」を考えること、すなわち、現在の問題と類似する過去の事例を想起して利用することは、古くから知られている基本的な方略である [Polya 1954]．

一般的な数学学習では、教師が問題の例を用いて解法を教示し、学習者がその解法を用いて別の問題を解く．つまり、数学的問題解決の反復練習によって、学習が進められる．学習者が解く問題は通常、例題と解を導く手続きが同じであるといった共通点を持っている．本論文では以後、教示において例として用いられる問題を「例題」、例題を用いて学習者が解く問題を「類題」と呼ぶことにする．この場合、学習者が例題という事例を用いて、類似性に基づく推論によって類題を解き、それを新しい事例として獲得しているとみなすことができる．そして、類題解決の反復練習を通じ、学習者には解法の習得、ならびに、その背景にある数学概念の理解が求められる．

また、数学学習には、数学的問題解決による学習の他に、学習者自身が問題を作り出す「作問学習」という方法も存在する．数学において、問題を作ることは問題を解くことと同様に重要な活動であることが、数学者や数学教育者によって指摘されている [English 1997b, Polya 1954, Silver 1994]．作問は、事例を用いて問題を解くのではなく、既知の事例とは異なる、新しい問題を作り出す課題である．すなわち、作問は新しいものを産出する「創造的生成課題」の側面を持っている．そのため、作問学習においては、学習者の問題解決能力や数学概念理解が改善されるのみならず、学習者が柔軟な発散的思考を育てることが期待されている [English 1997b, Leung 1997b, Silver 1994]．

### 数学学習における共通点と差異

類題解決による学習では、例題と同じような類題を繰り返し解くこと自体に意義はない．先に述べたように、例題と同一の類題では、例題の複製によって解を得ることができるため、問題解決の必要性、さらには、学習自体が生じないことになる．そのため、学習者には通常、既に学習した例

題に対し、何らかの差異を持つ類題が与えられる。差異を持つ類題を解くことは、「学習の転移」と呼ばれ[寺尾 1998]、学習者には転移能力の獲得が積極的に望まれている。このことは、数学のみならず、一般的な教育目標のひとつである。ただし、例題と全く共通点のない問題を類題として与えることには利益がないため、差異がより大きいほうがよいというわけではない。

作問による学習においても、同じような問題だけを繰り返し作ること自体に意義はない。作問は創造的生成課題であり、新しい問題を作り出すことによって成立するものであるため、事例を複製することは、本質的に無意味である。したがって、作問学習では、学習者自身が知っている例題や類題に差異を与えて、新しい問題を作ること、ひいては、多様な問題を作成することが望まれる。もちろん、既知の問題と共通点がある問題を作ってはいけないということではなく、差異が大きいことが必ず望ましいとは限らない。たとえば、指定された問題領域のどの問題とも共通点が一切存在しない問題を作ったとしたら、それは新奇性のある作問ではなく、課題要求を満たさない、無意味な作問となる。

ここで述べたことから、数学学習における問題解決においては、差異が存在することや差異を持たせることに、積極的な意味が生じると言うことができる。しかし、学習者は、学習した例題に対して差異を持つ類題を解くことや、差異を与えて多様な問題を作成することに困難を示すことが知られている。そこで、学習者のこの困難性を解消することを目標として、数学学習における学習者の類題解決や作問を支援するには、問題を扱う上で、共通点と差異という2つの側面に基づいて類似性を統制するための枠組みを考案することが、支援の実現のための重要な課題になる。そして、このような課題に取り組むことは、類似性に基づく推論に関する研究に対して、有効な知見を与えることができると考えられる。

### 1.1.3 本論文の目的

上述の動機に従い、本論文では、数学学習を対象とし、類似性に基づく推論を用いて知的問題解決支援システムを構築することを目的とする。支援の対象となる活動は、数学学習における数学的問題解決（類題解決）と創造的生成（作問）である。システムの実現にあたっては、人間の類似性に基づく推論の解明に取り組んできた認知心理学的研究の知見に基づいて、数学学習における困難さを克服するための支援方法を検討する。本論文では、この目的と方針に従って行われた、以下の3つの研究を報告する。

**研究 1: 事例検索システムの試作** 研究 1 では、類題解決学習を支援するシステムの試作を行う。システムの支援目標は、学習者が転移に成

功するよう導くことにある。そこで、学習で使用する類題を検索して学習者に提示するための問題の表現方法、および、提示する問題を決定する方法を設計する。

**研究 2: 事例自動生成システムの実現** 研究 2 では、類題解決学習において、類題として利用するための文章題を自動的に生成し、問題データベースを供給するシステムを実現する。システムの実現にあたっては、研究 1 で設計した問題表現を採用する。

**研究 3: 事例作成支援システムの実現** 研究 3 では、作問学習を支援する方法の検討、および、システムの実現を行う。ここでは、作問の創造的生成課題としての側面に注目し、問題の事例を提示して学習者の思考を促進することによって、学習者が多様な問題を作成するように支援する。研究 3 のシステムの実現にあたっては、研究 1 で設計した方法、および、研究 2 で実現したシステムを利用する。

## 1.2 本論文の背景

### 1.2.1 類推

類推とは、未知の問題を、既知の類似した経験に当てはめて理解する思考の方法である。類推では、未知の問題は「ターゲット」、既知の経験は「ベース」と呼ばれる。新奇でよく知らないターゲットが与えられると、そのターゲットと最も類似するベースを過去の経験から取り出し、ベースの要素をターゲットの未知の要素に当てはめる。この当てはめを「写像」と呼ぶ。写像により、ターゲットの未知な要素を理解したり、その振る舞いを予測する。

よく使用される類推の 1 つに、中学校理科の授業などにおける、水流を用いた電流の説明がある [Gentner 1983, 鈴木 1996]。この類推では、未知で不可視である電流がターゲットであり、よく知っている水流がベースである。たとえば、「ポンプからパイプを伝って水を送り出す水流システム」を使って、「電池の両端にニクロム線を接続した電気回路」を生徒に理解させる場合、教師は、電池がポンプに、ニクロム線がパイプに、電流が水流に対応することを説明する。ここで、教師が生徒に「ニクロム線の直径が 2 倍になったら電流の量は増えるか?」という質問をしたとする。この時、水流をベースとして用いれば、「パイプが太くなれば流れる水の量も多くなるから、ニクロム線が太くなれば電流も多く流れる」と、自然に推論することができる。ここでは、水流の知識が電流のケースに写像されているのである。実際、物質の抵抗は直径の 2 乗に反比例するため、ニクロム線の直径が 2 倍になれば、その電気抵抗は 4 分の 1 になる。そして、ニ



クロム線の電気抵抗が小さくなれば、ニクロム線を通れる電流の量は増える。しかし、この類推の例では、このような領域知識を用いなくとも、正しい推論を行うことに成功している。このように、類推は新たな知識の獲得や発見などにおいて使われる、強力な推論なのである。

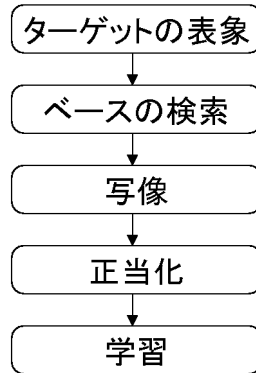


図 1.1: 類推のプロセス

図 1.1 に、類推の一般的なプロセスを示す。各プロセスは、以下の通りである。

**ターゲットの表象** ターゲットの目的や条件、制約など、ターゲットにとって重要な情報を読み取り、特徴を抽出する。

**ベースの検索** ターゲットに写像するベースを長期記憶から検索して取り出す。この時に検索されるのは、ターゲットと何らかの意味で類似しているベースであり、検索においては、類似性が重要なキーとなる。

**写像** 検索されたベースとターゲットの要素の関係を決定し、ベースの要素をターゲットにコピーすることで、ターゲットを理解する。写像される要素は、ターゲットの理解において重要な要素だけである。

**正当化 (justification)** 写像の結果が妥当であるかどうかを判断する。一般に、類推の写像は妥当であるという保証がない。また、写像は一意に決まるわけではなく、複数の写像が可能な場合も多いため、最も適用な写像を判断する必要性が生じることがある。

**学習** 類推を行った結果、何らかの新しい知識が獲得されたり、発見が行われたりすると、知識として長期記憶に保存される。

### 1.2.2 CBR (Case-Based Reasoning)

CBR とは、事例を利用する問題解決方略である。事例は、過去の問題とその解から成り、事例ベースに蓄えられる。新しい問題が与えられると、その問題と類似する事例を事例ベースから検索し、事例の解を利用して、現在の問題の解を得る。類推が人間の問題解決の認知心理学的研究から得られたモデルであるのに対し、CBR は計算機システムに問題解決を行わせることを主な目的として考案された、人工知能のモデルである。

CBR の原理は、次のような経験則から導き出されたものである [Leake 1996]。

- 類似する問題は、類似する解を持つ。そして、過去の類似する問題は、新しい問題解決においても有用である。
- 問題解決を続けると、同じような問題に再度遭遇する傾向がある。また、将来の問題も、現在の問題と類似していることが多い。

現実世界ではこれらの経験則が有効であるために、CBR が効果的な問題解決方略として成立している。また、実際に人間の問題解決行動を観察してみると、過去の事例を参照することが多いことが知られている [Leake 1996, 戸沢 1992, Wills 1994]。

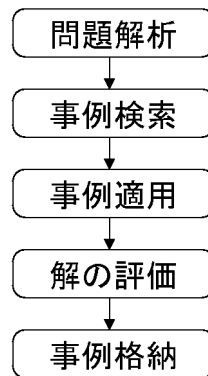


図 1.2: CBR のプロセス

図 1.2 に、CBR の一般的なプロセスを示す。各プロセスは、以下の通りである。

**問題解析** 新しい問題が与えられると、その問題を解析し、問題の特徴（インデックス）を記述する。インデックスは、問題解決に用いる事例を検索するために用いられる。そのため、インデックスは問題解決に貢献する重要な特徴を抽出し、抽象化して表現する必要がある。

**事例検索** 与えられた問題と類似する事例を事例ベースから取り出す。前節で述べたように、問題と完全に一致する事例が存在することは稀であり、問題解決に最も貢献すると予想される事例を検索する必要があるため、問題と事例との間での類似性を定義して判断することが、事例検索におけるキーとなる。

**事例適用** 先にも述べた通り、一般に問題と事例との間には何らかの差異が存在するため、検索した事例の解を修正し、現在の問題に適用させる必要がある。そのため、事例適用には相当な領域知識が必要となる。

**解の評価** 事例適用によって導出された解が適当であるかの評価を行う。解の評価においても、事例適用と同様に、領域知識が必要となる。

**事例格納** 問題と解を新しい事例として、事例ベースに格納する。

### 1.2.3 類推と CBR との関係

言葉こそ異なるものの、類推と CBR はどちらも事例を利用する問題解決方略であり、同じプロセスを持つ。表 1.1 に、類推と CBR の対応関係を示す。

表 1.1: 類推と CBR の対応関係

類推	CBR	概要
ターゲットの表象	問題解析	問題の理解
ベースの検索	事例検索	適用する事例を取り出す
写像	事例適用	事例を用いて問題を解決する
正当化	解の評価	解の妥当性を検証する
学習	事例格納	新しい事例を獲得する

類推と CBR との区別は必ずしも明確ではないが、両者の相違点は、研究者の関心の違いにあるという指摘がある [松原 1992]。類推では、認知心理学的な実験を通じて人間の思考メカニズムを探求する、理論指向の研究が多い。一方、CBR では、適用領域に依存した知識工学的なシステムを実現する、応用指向の研究が中心である。しかし、CBR は認知心理学の影響を強く受けており、類推研究の成果を取り込みながら発展してきたモデルである。そのため、類推と CBR の研究における知見は、相互に利益をもたらすはずである。また、関心の異なる両者を繋ぐ研究は、類似性

に基づく推論の分野において、より広範な貢献を行うことができるものと確信する。そこで、本論文では、知的問題解決支援システムの実現にあたり、類推研究の知見に基づいてシステムの設計要件を得るとともに、CBRを用いてシステムを構築する。

### 1.3 類推に基づく数学学習支援の検討

既に論じたように、数学学習では、教師が例題を用いて解法を教示すると、学習者はその解法を用いて類題を解く。この時、同じような類題だけを繰り返し解いても、十分な学習効果を得ることはできない。しかし、実際には暗記的な方略に陥る学習者が多く、たとえば、例題と解法が全く同じであっても、問題文の見た目の特徴が異なる類題を与えると、正答率が下がることが知られている [波多野 1995]。すなわち、類題解決学習において、多くの学習者は、たとえそれが解決において本質的でない要素に関することであっても、差異を持つ類題を解くことに困難を示すのである。

このような問題点の原因、および、支援方法を検討する上では、人間の認知や学習における理論やモデルが有効なヒントとなる。先述の問題点については、初学者の問題解決は問題文の表層的な特徴の影響を強く受けること、また、共通点と差異を統制して問題を与え、比較させる活動が問題解決を促進することが、認知心理学の類推研究において指摘されている [Novick 1988, Gick 1983]。

そこで、数学学習における類題の解決を類推として捉え、困難さの原因と学習支援の方法を、類推研究の知見を用いて検討する。そして、支援システムを実現するための設計要件を導出する。なお、検討対象は類題解決学習であるが、ここで得た設計要件は基本的に、作問学習の支援にも応用可能である。具体的な応用方法については、第 4 章で論じる。

#### 1.3.1 表層的特徴と構造的特徴

一般に、類推によって問題解決を行う場合は、現在の問題と類似した過去の事例を参照することになる。そのため、問題と事例との類似性を適切に判断できるかどうか、問題解決を成功に導く重要なカギになる。ここでの類似性は、問題解決において本質的な要因の共通性である。たとえば、数学的問題解決においては、解法の持つ数学的構造が共通点となっている時、事例を利用して現在の問題を解くことができる。

しかし、問題間の類似性の判断においては、問題文に言い表される文脈設定のような、問題の表層的な特徴がより強く影響することが示唆されている。たとえば [Chi 1981] は、被験者に力学の問題をカテゴリ分けさせる

実験を行った結果、領域知識の豊富な専門家は問題を解く上で重要な性質や法則に注目したのに対し、領域知識の乏しい初学者は問題文に登場するオブジェクトなどに注目したことを報告している。[崎谷 1991] は、小学校算数の授業で使われる文章題の類似性判断を大学生に行わせる調査を行い、問題の解法に熟知しているはずの大学生でも、特に問題文の文脈が類似しない場合、類似性判断を適切に行うことができなかったことを確認している。

また、[Novick 1988] は、被験者に数学文章題の例題とその解法を提示し、類題（ターゲット問題）を解かせるという実験を行った。この実験において、被験者はターゲット問題と同一の解法を持つが問題文が異なる例題を、ターゲット問題の解決にうまく利用することができなかった。また、ターゲット問題と問題文が類似するが数学的には誤った偽物の解法を持つ例題を与えられると、被験者はそれをターゲット問題に適用して失敗することが多かった。その他にも、文章題を解く時には、問題文の特徴の操作が強く影響することが報告されている [Reed 1985, Ross 1987]。

これらの知見に見られるように、特に初学者は問題文の表層的な特徴から強い影響を受け、そのことによって問題解決が阻害されることがある。既に述べたように、問題解決に熟達するためには、転移能力、すなわち、例題で学習したことを新奇な類題に適用する能力の獲得が重要となる [寺尾 1998]。しかし、ここで述べた実験の結果は、多くの学習者にとって、それが困難であることを示している。

なお、類推においては、問題の表層的な特徴と構造的な特徴という2つの属性が、人間の類似性判断や問題解決に関わる重要な要因であると認識されている [Forbus 1995, Gentner 1983, Holyoak 1998, 鈴木 1996]。数学文章題の領域において、これらの属性はそれぞれ、問題文に言い表される文脈設定（たとえば「買い物をする」や「役員を選ぶ」など）と、解法が持つ数学的構造に相当する。本論文では以後、これらの属性を「状況」と「解法」と呼ぶことにする。

問題文の特徴の影響について、具体例を用いて説明する。以下は、数学文章題の例である。

問) 10 人の生徒から 3 人を選ぶ場合の数を求めよ。

解)  ${}_{10}C_3 = (10 \times 9 \times 8) \div (3 \times 2 \times 1) = 120$  通り

これは、高校数学における「順列・組合せ」の領域の問題である。この問題を例題とした場合の類題の例を、図 1.3 に示す。図において、縦軸は状況の特徴、横軸は解法の特徴を表している。例題を学んだ学習者の多くは、図 1.3 における類題 1 を容易に解くことができる。しかし、例題と異なる状況を持つ類題 2 を与えると、例題と同じ解法が適用できることに気付かない学習者が多いことが、教育現場において知られている。

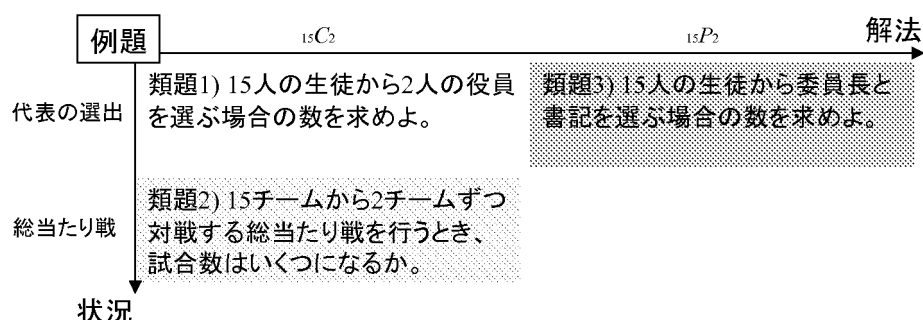


図 1.3: 類題の例

図に示される 3 問は、先の例題に対する類題の例である。例題を学んだ学習者は、類題 1 を容易に解くことができる。しかし、そのような学習者でも、類題 2 が例題と同一の解法であることに気付かないことが多い。

### 1.3.2 スキーマの構成

既に述べた通り、学習においては、これまでに学習した例題や類題などの事例を、新奇な問題に転移できるようになることが求められる。しかし、特に初学者にとっては、そのような学習の転移は困難である。初学者は、問題の解法に関わる重要な特徴を適切に抽出することができないため、Novick の実験のように利用する例題が明確に示されているような状況でも、新しい問題への転移に失敗してしまうのである。この問題は、どのように克服することができるだろうか。

事例を新しい問題に転移できるようになるためには、問題解決において重要な特徴を抽出し、問題間の類似性を適切に判断できるようになることが重要である。[Gick 1983] は、スキーマの構成が転移を促進することを実験的に示している。ここでのスキーマとは、問題の解法の特徴に関する、抽象化された知識である。Gick は実験において、被験者に解かせるターゲット問題に対し、同一の解法と異なる状況を持つ問題を事例として与え、被験者にターゲット問題と事例との共通点を書き出させた。その結果、解法に関わる重要な要素を共通点として挙げた被験者は、全員がターゲット問題を解くことに成功した。ここでは、被験者が抽出した共通点が、被験者のスキーマ構成の源となっている。

問題解決におけるスキーマの役割は多くの研究において強調され、より抽象度が高く汎用的なスキーマを構成することが、問題解決能力の向上において重要であるという指摘がなされている。[English 1997a] はこの知見を用いて、算数文章題の学習において、状況と解法の類似性を統制して問題を提示し、児童に問題間の比較を行わせ、スキーマの構成を促した。

その結果、文章題に対する児童の理解が改善されたことを報告している。この他にも、多くの実験的な知見から、複数の問題間の比較を行う訓練の必要性が示唆されている[寺尾 1998]。

### 1.3.3 支援システムの設計要件

これまでに述べてきた知見から、学習者が転移に成功するように導くためには、学習者に問題間の比較を行わせ、自立的にスキーマを構成させるための支援を行うことが有効であると考ええる。複数の問題に基づいてスキーマを構成することは、一種の帰納的学習プロセスである。事例からの帰納にあたっては、与えられる個々の事例の共通点や差異を認識することが重要である。数学学習においては、状況と解法という2つの属性において、意図した類似性、つまり、共通点と差異を学習者に着目させることが可能でなければならない。そのような支援を行う計算機システムを実現するためには、以下の要件に従ってシステムを設計する必要がある。

**設計要件 1** 学習者に対し、状況と解法の2つの属性における類似性を統制して、類題の事例を提示する。

**設計要件 2** 学習者に比較を行わせるために、多数の、かつ、多様な事例を供給する。

本論文では、これらの設計要件に基づき、数学学習を支援する一連のシステムを構築する。

## 1.4 本論文の構成

本論文では、数学学習を対象とし、類似性に基づく推論を用いて知的問題解決支援システムを実現する。本論文では既に、共通点と差異という類似性の側面に焦点を置き、類推研究の知見に基づいて支援方法を検討し、システムの設計要件を得た。この要件に従い、かつ、CBRのモデルに則ってシステムの構築を行うことが、本論文の目的である。

本論文は、5章から構成される。図1.4に、本論文の構成を示す。第1章では、本論文の動機と目的、および、本論文の背景を明らかにするとともに、本論文で実現するシステムの設計要件を導出した。

第2章では、数学文章題の領域において、例題に対する類題を検索して提示することで、類題解決学習を支援するシステムを試作する。システムの試作にあたっては、設計要件1に基づき、状況と解法の類似性を統制して類題を提示する手法を設計する。これには、問題表現、および、類題提

## 第 1 章

---

示決定の方法が含まれる．そして，本システムにおいて採用された類題提示の手法が妥当であるかを，実験的に評価する．

第 3 章では，類題解決学習で類題として利用するための文章題を自動的に生成するシステムの実現を行う．システムの実現にあたっては，設計要件 2 に基づき，多様性のある問題データベースを生産する手法の設計を行う．そして，本システムが実際に問題を生成することが可能であるかを，実験的に評価する．

第 4 章では，数学文章題における作問学習を支援する方法の検討，ならびに，システムの実現を行う．ここでは，設計要件 1 と 2 を作問支援に対して応用する．具体的には，作問の創作的生成課題としての側面に注目し，問題の事例を提示することによる支援を採用する．そのため，まず最初に，作問における事例提示の効果を，実験的調査を通じて検討する．続いて，調査の結果に基づき，事例提示を用いて学習者の作問を支援するシステムを実現する．そして，本システムの支援効果を確認する実験的評価を行う．

第 5 章では，本論文の総括を行うとともに，本論文における一連の研究による成果を明らかにする．さらに，今後の研究展開について論じる．

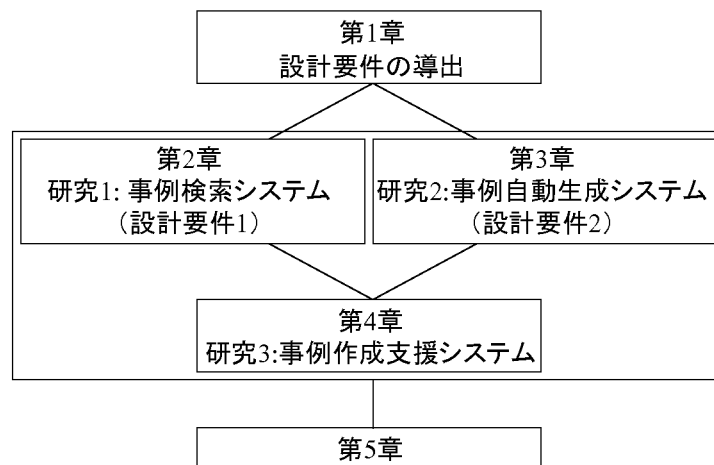


図 1.4: 本論文の構成



## 第2章 事例検索システム

### 2.1 緒言

本章では、数学文章題の領域を対象として、類題解決学習を支援するシステムを試作する。ここでは、類題解決学習において、学習者に自立的にスキーマを構成させる支援の実現を目的とし、第1章で導出した設計要件1に従って、システムを試作する。そのシステムの目標は、学習者に対し、状況と解法の2つの属性における類似性を統制して類題を提示する機能を実現することである。

例題や類題からの学習における問題の与え方として、[Hirashima 1994, 平嶋 1995]は、力学の領域において、表層構造、解法構造、制約構造に基づく問題の特徴記述を定義し、各構造における問題間の特徴の差異による問題の整列や、副問題のような単純な構造を持つ補助問題の使用を提案している。また、[川上 2001]は、電気回路の領域において解を導出するプランを立てる学習環境を提供し、サブプランを共有する問題を検索して提示する支援システムを実装している。これらの研究では、問題領域において本質的で重要な情報のみを扱っているが、既に述べたように、学習者に問題を与える上では、問題文の文脈設定のような問題解決自体には本質的でない情報も、重要な影響要因として扱う必要がある。

そこで、本章では、状況と解法の特徴に基づいて類題を定義することを目標として、システムを試作する。このような機能を有するシステムは、様々な共通点と差異を持つ類題を与えることができる。このシステムは特に、状況は類似するが解法は異なる問題を提示するといったように、いわば初学者の誤った類似性判断に基づく提示も行う。つまり、類推研究において問題を与える際に行われた、問題間の類似性の統制を模倣することができる。このことにより、類推研究の知見を学習の支援に直接利用することができると考えられる。なお、学習者の自律的な発見の支援を意図するため、説明などを直接与える機能は含まれない。

また、システムの実装にあたっては1つの問題領域を選択し、その領域内の学習に適用することを想定している。したがって、同時に複数の問題領域を扱ったり、本システムによる学習を他の問題領域に転移させるといったことは、本章のスコープに含まれない。ただし、本章で設計する類題提示手法は、他の問題領域にも応用可能であると考えられる。

## 2.2 類題提示手法の設計

ここで試作する事例検索システムは、問題を事例とみなして蓄積し、CBR のモデルに則って検索を行う。具体的には、例題が入力されると、類題解決学習で使用するための類題を検索して提示する。本システムの問題領域には、高校数学における「順列・組合せ」の文章題を採用する。順列・組合せとは、べき乗や階乗を使って数え上げを行うことで解を導く問題領域である。

また、設計要件 1 を満たすため、システムの試作にあたっては、以下の 2 つの設計要件を追加的に設定する。

**設計要件 1-a** 状況と解法の特徴を区別して理解するための問題表現を持つ。

**設計要件 1-b** 例題に対して様々な差異を持つ類題を提示するため、状況と解法を統制して、類題提示の決定基準を変化させることができる。

これらに従い、類題提示を実現するための手法を設計する。

### 2.2.1 問題表現

本システムでは問題の特徴を、「インデックス=値」のリスト形式で表現する。特徴のインデックスには、「object (生徒, 玉, トランプなど)」「slot (列, 部屋, 箱など)」「operation (並べる, 分ける, 入れるなど)」「constraint (含まれる, 隣り合うなど)」の 4 種類がある。これらは順列・組合せの問題において注目される情報であり、数学教師へのインタビューなどから得たものである。順列・組合せの問題領域では、多くの教科書的问题が、「object を slot に operation するとき, constraint となる場合の数を求めよ」という問題文を持つ。

上記に加え、設計要件 1-a を満たすために、システムは状況と解法とを区別して問題の特徴を表現する必要がある。そのため、各インデックスに対し、以下のような 3 層のレイヤーを規定する。

**instance レイヤー** 問題文の文字列のレベルである。このレイヤーでは、問題文のパラメータの類似性が判断される。

**class レイヤー** 問題文が表す文脈設定のレベルである。このレイヤーでは、状況の類似性が判断される。

**domain-property レイヤー** 問題領域において注目される情報のレベルである。このレイヤーでは、解法の類似性が判断される。(以後、d-prop レイヤーと表記する)

数学的問題解決では、1) 問題文を読み取る、2) 問題文の意味を解釈する、3) 問題解決に必要な情報を取り出す、といった手順で問題を解析していると考えることができる。ここで規定する3層のレイヤーは、この手順に対応するものである。また、問題文、その状況、解法という3層を規定するモデルは、関連研究においても使用されている [Nathan 1992, English 1997a]。そのため、この3層レイヤーに基づく問題表現（「3層リスト形式」と呼ぶことにする）は、今回問題領域として選択した順列・組合せだけでなく、他の問題領域にも適用可能な、一般性の高い設計仕様であると考えられる。これに対し、object, slot, operation, constraint という4つのインデックスは、順列・組合せに固有のもので、試行錯誤的に決定されたものである。3層リスト形式では、領域知識や問題構造をインデックスの命名によって表現し、レイヤーとは分離する。

図 2.1 に、本システムにおける問題表現の具体例を示す。図に示す問題は、順列・組合せの領域において典型的な例題として用いられるものの1つで、「役員選出問題」と呼ばれている。図 2.1 に示すように、d-prop レイヤーのみは他のレイヤーと構成が異なり、また d-prop レイヤーの値は instance レイヤー、および、class レイヤーの値から一意には決定されない。

問) 男子5人・女子5人から3人の役員を選ぶとき、少なくとも女子1人が含まれる場合の数を求めよ。

解) 全ての場合の数は、 ${}_{10}C_3$

女子が1人も含まれないのは、全員が男子である場合だから、 ${}_5C_3$

よって、女子が1人以上含まれるのは、 ${}_{10}C_3 - {}_5C_3 = 110$  通り

	object	operation	slot	constraint
instance	男子女子	選ぶ	役員	含まれる
class	人	選出	代表	含まれる
d-prop	-	組合せ	-	-
.isIdentifiable	true	-	false	-
.hasAttribute	true	-	false	-
.target	-	-	-	object
.strategy	-	-	-	余事象

図 2.1: 問題表現の例

本システムでは、上の問題を下のテーブルのように表現する。テーブルにおいて、縦方向の列はレイヤー、横方向の列はインデックスである。

この例のように、instance レイヤーには問題文から抜き出されたキーワードが、class レイヤーには「代表の選出」という問題文の文脈設定、すなわち状況の特徴が表現されている。そして d-prop レイヤーには、問題

を解く上で必要となる情報，すなわち，解法の特徴が表現されている．3 層リスト形式により，たとえば例題に対して状況が異なるが解法が同じ問題を類題として与えたい時は，instance レイヤーと class レイヤーの値は類似しないが，d-prop レイヤーの値は類似する問題を検索すればよいということになる．

表 2.1: 問題タイプ分類の例

問題タイプ	object		slot	
	区別	属性	区別	属性
人の並び替え ${}_nP_r$	あり	なし	あり	なし
男女の並び替え ${}_nP_a \times {}_{n-a}P_{r-a}$	あり	あり	あり	あり
赤玉・青玉の並び替え ${}_nP_{a+b} \div (a! \times b!)$	なし	あり	あり	なし
役員選出 ${}_nC_r$	あり	なし	なし	なし
複数種類の役員選出 ${}_nC_a \times {}_{n-a}C_b$	あり	なし	なし	あり

「問題タイプ」は，代表的な問題の名称とその解法構造を表している．「object」と「slot」は，番号札スキーマにおいて表現される特徴である．表に示されるように，番号札スキーマの特徴値により，問題の解法構造を分類することができる．

d-prop レイヤーにおいて表現される問題構造は，順列・組合せの教示に使用されるスキーマの 1 つである，「番号札」スキーマを参考に設計した．番号札スキーマは，たとえば，順列の問題「 $n$  人から  $r$  人を選んで並べる場合の数」を，「 $n$  人 (object) に  $1 \sim r$  までの番号が書かれた  $r$  枚の札 (slot) を渡す場合の数」と置き換えて，問題の特徴を分かりやすく表現するもので，順列と組合せの基本的な差異を区別することができる．同様に，「 $n$  人から  $r$  人を選ぶ場合の数」という組合せの問題は，「 $n$  人に区別のない  $r$  枚の札を渡す場合の数」と表すことができ，「 $n$  人から  $r$  人を A 組に， $s$  人を B 組に選ぶ場合の数」は「 $n$  人に A と書かれた区別のない  $r$  枚の札，B と書かれた区別のない  $s$  枚の札を渡す場合の数」と表すことができる．このように，順列・組合せの問題は，主に object と slot に，個々の名前や ID のような区別があるか，組や色のような属性があるか，といった情報によって問題のタイプを分類することができる．表 2.1 に，番号札スキーマに基づく問題タイプ分類の例を示す．なお，順列・組合せの一部

の問題には、上述のスキーマに加え、特殊な追加情報が必要となるものが存在する。その詳細は後述する。

### 2.2.2 類題提示の決定基準

蓄積されている問題から類題として提示するものを選ぶためには、例題と各問題との間の類似性を判定し、類題として提示するかどうかを決定する必要がある。さらに、設計要件 1-b を満たすためには、類題提示の決定基準を変化させることが可能でなければならない。

そこで、類題提示の決定基準には、Optimality Theory: OT [Prince 1997] のモデルを適用する。OT は、候補から出力を決定する際、制約を優先度によって順序づけしたランクを用いる方法である。OT には、上位の制約は下位の制約に対して絶対的に優先される Strict Domination という規則がある。このため、ランクにおける制約の順序を変更することで、出力の決定も変更される。

表 2.2: ランクの例

優先度	制約
1	Index0:layer0
2	!Index1:layer1
3	Index2:layer0

ランクには、制約が優先度に基づいて列挙される。制約は、「インデックス:レイヤー」の形式で記述される。これは、2つの問題間の比較を行った際、該当するレイヤーのインデックスの値がマッチする時に充足される。「!」は論理否定演算子であり、これが付加された制約は、該当する値がマッチしない時に充足される。

表 2.2 に、単純なランクの例を示す。表中の「Index0:layer0」は、2つの問題間の比較を行った際に、レイヤー layer0 のインデックス Index0 の値がマッチするとき充足される制約である。「!Index1:layer1」の「!」は論理否定演算子であり、レイヤー layer1 のインデックス Index1 の値がマッチしないとき充足される制約である。このランクに基づいて例題と各問題の間のインデックスを比較し、類題としての適切さ  $APRP$  を算出する。 $APRP$  は次式で与えられる。

$$APRP = \left( \sum_{i=1}^N s_i 2^{N-i} \right) \div \left( \sum_{i=1}^N 2^{N-i} \right)$$

$N$  は制約数であり、 $s_i$  は  $i$  番目の制約が満たされた時には 1、満たされない時には 0 の値を取る。この算出方法では、 $2^M > \sum_{m=0}^{M-1} 2^m$  ( $M > 1$ ) に

より, Strict Domination が実現されている. すなわち, 上位の制約が充足されると, それより下位の全ての制約が充足された場合より, *APRP* の値が高くなる.

### 2.2.3 類題群の構成と類題提示の決定

本システムでは, 3 層リスト形式による問題表現とランクを用いて, 与えられた例題に対し, 類題の提示を行う. この時, 類題として提示する問題の決定は, 1) 例題が属する類題群を検索する, 2) 選択された類題群中の問題と例題との間で *APRP* を算出する, という手順で行われる. 以降では, 「解法は同一であるが, 状況が異なる類題を提示する」というケースを例に, 具体的な説明を行う. 表 2.3 に, そのような類題提示を行うためのランクの具体例を示す. このランクは, 例題とは instance レイヤーと class レイヤーの値が異なるが, d-prop レイヤーの値が全て等しい問題に対して, *APRP* が最大値の 1 となる.

表 2.3: ランクの具体例

制約	
類題群 条件	operation:d-prop
	slot.isIdentifiable:d-prop
	object.isIdentifiable:d-prop
	constraint.strategy:d-prop
	constraint.target:d-prop
	object.hasAttribute:d-prop
最適化 ランク	slot.hasAttribute:d-prop
	!object:class
	!slot:class
	!operation:class
	!object:instance
	!slot:instance
	!operation:instance
	constraint:class
	constraint:instance

例題に対し, 解法は同一であるが状況が異なる類題を提示するためのランクである. このランクには, 例題と d-prop レイヤーの値がマッチする時に充足される制約と, instance レイヤーと class レイヤーの値がマッチしない時に充足される制約が含まれている.

### 類題群

ランクの制約は、問題を類題群に分類するために使用する類題群条件と、類題としての適切さ  $APRP$  を算出する最適化ランクの2つに分割される。本システムはまず、類題群条件に基づいて、システムが蓄積している問題を類題群に分類する。類題群条件は、そのインデックスを共有することが類題の必要条件となる制約の集合である。類題群は、類題群条件に示される制約のインデックスを共有する問題で構成され、類題として提示する問題を決定する時はまず、元となる例題が属すべき類題群の検索が行われる。表 2.3 のランクの例では、d-prop レイヤーの全てのインデックスの値がマッチする問題が、類題群としてグループ化されることになる。

### 類題提示の決定

本システムに例題が入力されると、その例題が属すべき類題群が検索され、その類題群に属する全ての問題と入力例題との間で、最適化ランクに基づいて  $APRP$  の算出が行われる。最適化ランクは、類題群条件の制約を除いた残りの制約の集合である。最適化ランクにより、例題と検索された類題群に含まれる全ての問題との間で  $APRP$  を算出し、その値が最適化ランクに設定される閾値を越える問題は全て、類題として提示される。つまり、類題は基本的に複数提示されることになる。閾値は、提示する問題を絞り込む目的のために、0 から 1 の間で自由に設定することが可能である。

本システムは、ランクを自由に作成して組み込むことが可能であり、使用するランクを切り替えることで、類題提示の決定基準を変化させることができる。ランクは、制約の順序付けと閾値の決定によって作成される。これは、類題が共有すべき特徴を決めて、問題の分類を行うような作業となる。本システムの類題提示手法の特徴の1つは、ランクの編集により、様々なタイプの類題提示を実現することが可能なことにある。

本システムでは、ランクの作成、すなわち、システムに行わせる類題提示の基準の決定を、「制約の順序付け」によって行うこととした。この基準については、制約に重み付けを与えるといった他の方法も考えられるが、今回は1つの可能性として、OTに基づく手法を設計した。

## 2.3 事例検索システムの実装

本システムは高校数学の学習者を対象ユーザとし、授業で学習を行った後の復習などに使用されることを想定している。以後、本論文では、シ

システムの支援対象であり、システムを用いて学習を行う学習者を「学習者ユーザ」と呼ぶ。以下、本システムの使用手順を簡単に説明する。

### 手順 1 類題提示モードの設定

学習者ユーザは、使用する類題提示モードの設定を行う。モードはシステムに登録されているランクに相当し、モードの設定により、類題提示に使用するランクの切り替えが行われる。

### 手順 2 教科書で学習した例題の入力

ユーザは、既に学習した例題の問題文をプレーンテキスト形式で入力する。

### 手順 3 提示される類題の解決

ユーザが入力した例題に対し、システムは類題を検索して提示する。ユーザは、類題を選択して解き、解を入力する。システムは、その類題の解とユーザの入力した解が一致するかを判定して正答／誤答のフィードバックを行い、模範解答データを表示する。問題の解と模範解答のデータは、システムに問題を登録する際にあらかじめ入力されたものである。

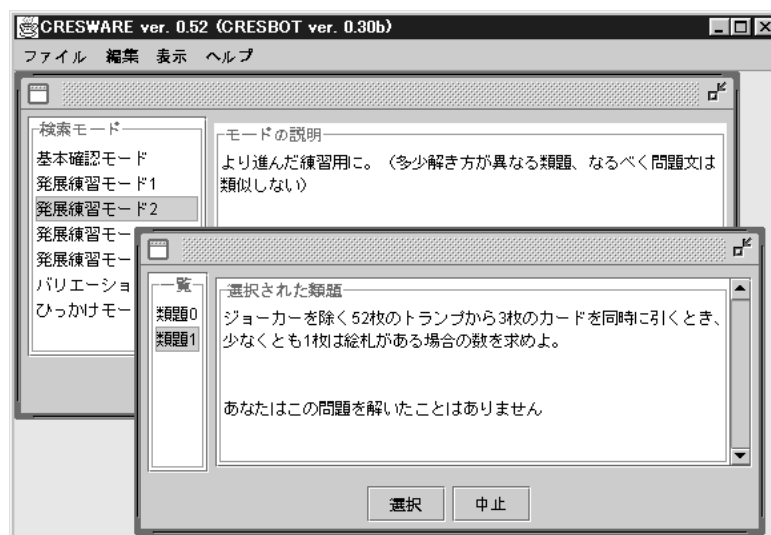


図 2.2: 本システムの実行画面

図は、ユーザが入力した例題に対し、システムが類題を提示したところである。

図 2.2 に、本システムの実行画面を示す。図は、手順 1 の類題提示モードの設定を行った後（図左奥のウインドウ）、ユーザが入力した例題に対して類題が提示された（図右手前のウインドウ）直後の画面である。



### 2.3.1 システムの構成

本システムは主に、学習者ユーザから入力される例題の特徴を解析する問題解析機構、事例として問題を蓄積し、類題となる問題を検索してユーザに提示する事例検索機構によって構成される。問題解析機構は、入力される例題の問題文の解析に使用する特徴抽出ルールを蓄積する特徴抽出ルールベースを持つ。事例検索機構は、システムに登録されている問題データを蓄積する問題データベースと、登録されているランクを蓄積するランクベースを持つ。図 2.3 に、本システムの構成図を示す。コントローラは、ユーザインタフェースを備え、各機構とユーザへの入出力の受け渡しを統括するコンポーネントである。

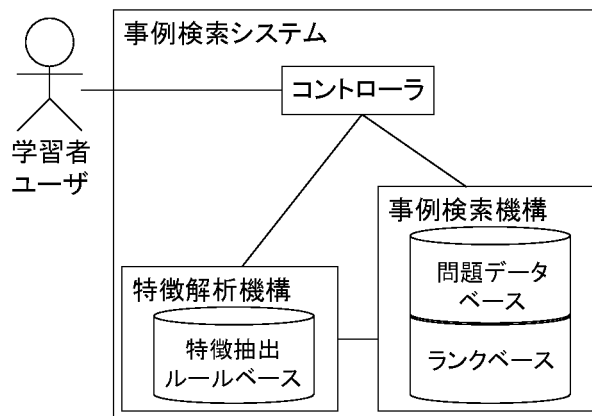


図 2.3: 本システムの構成図

### 2.3.2 システムの実行手順

本システムが実行する主な処理は、1) 学習者ユーザが入力する例題の解析と、2) 入力された例題に対する類題提示の 2 つである。これら 2 つの処理について、具体的に説明する。

#### 入力例題の解析

図 2.4 に、入力された例題の特徴を解析する処理の概要を示す。本システムの使用にあたっては、学習者ユーザはまず、教科書で学習した例題の問題文をテキスト形式で入力する（図 2.4 の 1）。システムは入力された問題文から、問題の特徴を表すキーワードを抽出する。数学の教科書に記載される代表的な例題には、典型パターンと呼ばれるような特定の状況

がよく使用され、問題文は決まった言い回し持つことが多い。そのため、典型パターンの例題に限って、問題文をそのまま入力することのみを想定し、本システムでは典型的な問題文のテンプレートパターンを記述した特徴抽出ルールによるキーワード抽出を行っている (2)。

システムは入力された例題から例題オブジェクトを生成すると、抽出されたキーワードを例題の instance レイヤーのインデックスの値として例題オブジェクトに格納し、この特徴に基づいて class レイヤーの特徴の記述を行う (3)。class レイヤーの特徴の値は、instance レイヤーの特徴の値によって一意に決めることができるため、問題文に登場する instance レイヤーの値と class レイヤーの対応に関する知識も、特徴抽出ルールベースに埋め込まれている。

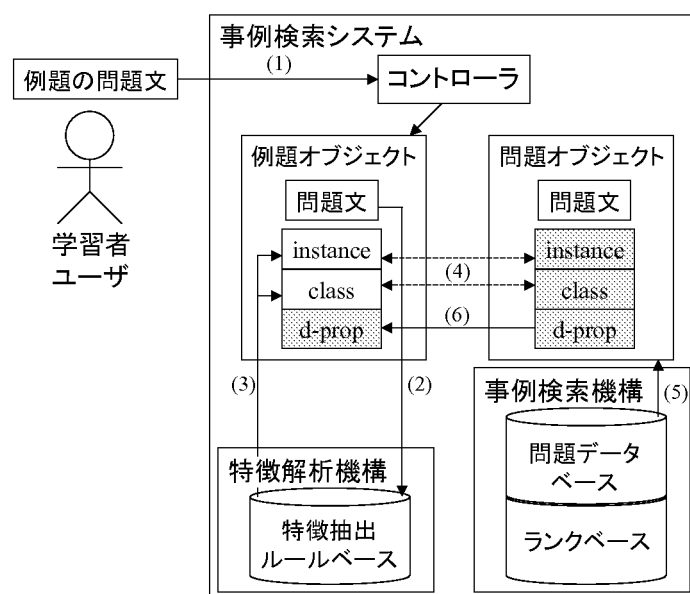


図 2.4: 入力例題の特徴解析

学習者ユーザが例題の問題文を入力した後 (1)、システムは問題文から instance レイヤーの値を抽出 (2)、instance レイヤーの値から class レイヤーの値を記述 (3)、instance レイヤーと class レイヤーの値が最も例題と照合する (4) 問題の検索 (5)、検索された問題から d-prop レイヤーのインデックスを取得 (6)、という処理を行うことで、入力例題を理解する。

しかし、このようにして取得できるのは表層的な特徴のみであり、問題を解く上で注目する情報は問題文には表れないのが普通である。そこで、入力された例題の解法に関わる特徴を理解するため、問題データベースに蓄えられている問題から instance レイヤーと class レイヤーの特徴が十分

に照合する (4) 問題を検索して取り出し (5) , この問題から d-prop レイヤーのインデックスの取得を行う (6) . この際には, 表 2.4 に示すランクを用いて *APRP* が最大値を示す問題が選択される. 具体的には, class レイヤーのインデックスの値が完全一致する問題の中から, instance レイヤーの値が最も類似するものが選択され, 選択された問題の d-prop レイヤーのインデックスが, 例題オブジェクトにそのままコピーされる. 例題と class レイヤーが完全一致する問題が見つからなければ, 入力例題の解析は失敗となる.

表 2.4: 問題選択のためのランク

制約	
類題群 条件	object:class
	operation:class
	slot:class
	constraint:class
最適化 ランク	object:instance
	slot:instance
	operation:instance
	constraint:instance

入力例題の特徴解析において, 例題と最も instance レイヤーと class レイヤーの値が照合する問題を検索する (図 2.4 の 5) ためのランクである. このランクは, 例題と class レイヤーの値が完全一致する問題の中から, instance レイヤーの値が最も類似するものを選択するために設計されている.

入力例題の解析で, 特徴抽出ルールによるキーワードの抽出に失敗した場合や, 先述の d-prop レイヤーの特徴の取得に失敗した場合は, 類題提示を行うことができない. このような場合を想定し, 本システムは解析可能な典型例題のリストを用意している. ユーザは, リストから自分が入力した例題に近いと考えられるものを選んで入力することができる. リストには, ユーザ自身が例題を登録することもできる.

### 類題提示

入力例題の解析を行った後, この例題に基づき, 類題として提示する問題を問題データベースから検索し, 学習者ユーザに提示する. 先述のように, 提示する類題はランクを用いて決定される. ここで使用するランクは, ユーザが設定する類題提示モードによって決められる. 類題提示の処理方法の概要を図 2.5 に示す.

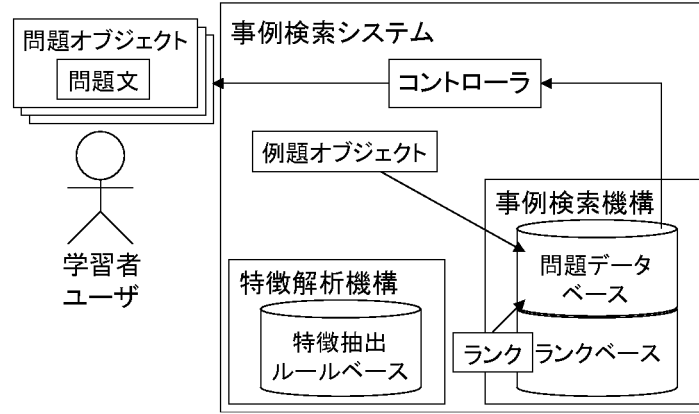


図 2.5: 類題提示

学習者ユーザに提示する類題は、ユーザが設定したモードに相当するランクを使って、ユーザが入力した例題と問題データベースの問題を比較することで、決定される。

本システムは複数のランクを組み込み、使用するランクを切り替えることで、類題提示の決定基準を変化させることが可能である。ランクの作成とシステムへの登録は、数学における専門知識を持つ教師が行うことを想定している。以後、本論文では、システムが必要とする知識を入力したり、システムの調整を行うユーザを、「教師ユーザ」と呼ぶことにする。学習者ユーザはシステムから支援を受ける立場にあるのに対し、教師ユーザはシステムを支援する立場にあるとみなすことができる。本システムにおいてどのようなランクが設計可能であるかを、以下のような4つの具体例を用いて説明する。

#### ランク a 基本練習モード

入力した例題と同一の状況と解法を持つ類題の提示を行うランクである。この場合、d-prop レイヤーのインデックスが一致することを類題群条件に設定し、その他の instance レイヤーおよび class レイヤーのインデックスが一致することを最適化ランクに設定する。付録 A の表 A.1 に、基本練習モードの設定データを示す。

#### ランク b 発展練習モード

入力した例題と解法が類似するが、解を導くための方略は異なる類題の提示を行うランクである。発展問題や応用問題と呼ばれる問題が提示される。d-prop レイヤーの特徴のうち、 $_nP_r$  と  $_nC_r$  のどちらを用いるかを定めるインデックスを類題群条件に設定し、その他のインデックスが異なることを最適化ランクに設定する。付録 A の表

A.2に、発展練習モードの設定データを示す。

#### ランク c ひっかけモード

入力した例題と状況は同一だが、解法は異なる類題を提示するランクである。class レイヤーのインデックスが一致することを類題群条件に設定し、d-prop レイヤーのインデックスが異なることを最適化ランクに設定する。表付録 A の A.3 に、ひっかけモードの設定データを示す。

#### ランク d バリエーションモード

入力した例題と状況は異なるが、解法が同一の類題を提示するランクである。これは、表 2.3 に示したランクと同一である。

以上のランクは、状況と解法の 2 つの属性における類似性に基づき、図 2.6 のように位置付けることができる。また、図 2.6 において表現されないランク b は、実在する多くの問題集において使用される、発展問題と呼ばれる類題の提示を模倣する目的で作成したものである。発展問題とは、例題の解法に異なるステップを加えるなどの方法で作成されるもので、例題と同じ方法では解くことができない、例題より複雑な問題である。

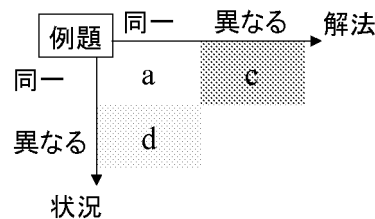


図 2.6: 各ランクの類似性

図において、縦軸は状況の特徴、横軸は解法の特徴を表している。図は、先述のランクの具体例を使ってシステムに類題提示を行わせた場合、例題と提示される類題との類似性がどのようなになるかを表している。

## 2.4 実験的評価

本システムの評価にあたっては、適切に類題を提示しているかどうかを検証する必要がある。そこで、数学教師の類題判断を調査し、本システムと数学教師を比較、評価した。

### 2.4.1 方法

評価にあたっては、市販の問題集 [5] より 28 問、問題数の不足を補うために高校数学の問題を扱った Web サイトから 42 問を収拾し、さらに著者が 2 問を作成<sup>1</sup>して、72 問をシステムに登録した。これらの問題を登録する際には、著者が手動で特徴付けを行った。また、評価のための入力例題には、代表的な教科書例題 6 問を使用した。類題判断に使用する問題は、これら 6 問の例題を入力し、前節で示した 4 つのランクを用いて  $6 \times 4$  の 24 条件でシステムに類題提示を行わせ、システムが提示した類題から 22 問を選択することで作成した<sup>2</sup>。この際、1 つの例題に対して 1 つのランクにより複数の類題が提示された場合は、APRP が最も高い問題と最も低い問題の 2 問のみを選択した。なお、入力する例題とランクによっては、提示される類題が存在しない場合もある。以下、システムに例題 1 を入力し、ランク a を用いて類題提示を実行させた結果得られた類題は、「1a」と表記する。また、複数の類題が提示された際、選択された 2 つの類題は、それぞれ「1a(1)」「1a(2)」と表記する。

そして、高校の現場で実際に数学を教育している数学教師 2 名を対象に、類題判断の調査を行った。2 名の教師には、上述の例題 6 問と、各例題に対してシステムが類題として提示した問題を提示し、例題に対してこれらの問題がどのような類題に相当するかを判断して、a～e のラベルを付けるよう依頼した。調査課題は 2 題で、課題毎に異なるラベルの教示を与えた。課題 1 では、現場で使われる言葉を用いて、各ラベルに相当するランクの設計意図を説明した。課題 2 では、相当するランクの設計意図を直接説明した。以下に、各課題において教師への教示に用いたラベルの説明を挙げる。

#### 課題 1

- a 基本練習問題：基本を確認する練習に最適な問題
- b 発展練習問題：より進んだ学習に最適な、例題より少し難しい問題
- c ひっかけ問題：一見類題に見えて実は解き方が異なる、ひっかけ問題
- d バリエーション問題：例題と解法は同じだが、異なるタイプの問題を知るのに最適な問題
- e 類題として利用できない

#### 課題 2

- a 完全一致問題：例題とほぼ同一の問題

---

<sup>1</sup>典型的な教科書例題によく用いられる状況を持つが、解法は異なる問題のような、通常の問題集には最も稀なタイプの問題である。

<sup>2</sup>使用した問題の一部を付録 B に示した。

- b 発展問題：例題と同じタイプの問題だが、例題より解法が複雑な問題
- c 問題文のみ一致問題：例題と問題文は一見似ているが、解法は異なる問題
- d 解法一致問題：例題と問題文は一見異なるが、解法は同じ問題
- e 類題として利用できない

### 2.4.2 結果と考察

表 2.5 に、本システムと 2 名の数学教師の類題判断の結果を示す。また、図 2.7 に 3 者の類題判断の一致率を示す。

表 2.5: 類題判断の結果

問題	課題 1		課題 2		システム
	教師 1	教師 2	教師 1	教師 2	
1a	a	a	a	a	a
1b(1)	b	b	b	b	b
1b(2)	b	b	b	b	b
1c	b	c	b	c	c
1d(1)	d	d	d	d	d
1d(2)	d	d	d	d	d
2a	c	d	c	b	a
2b	b	d	b	b	b
3a	a	a	a	a	a
3b(1)	b	b	b	c	b
3b(2)	b	b	b	b	b
3d	d	d	d	d	d
4a	a	a	a	a	a
4c	b	c	b	c	c
4d(1)	d	d	d	b	d
4d(2)	d	b	d	d	d
5a(1)	c	d	c	d	a
5a(2)	c	c	c	c	a
5c	b	c	b	c	c
6a	d	a	d	a	a
6b(1)	b	d	b	b	b
6b(2)	b	d	b	b	b

表中の問題のラベル「1a」は、例題 1 に対してランク a を使用してシステムが提示した類題であることを表している。システムが複数の類題を提示した場合は、APRP が最も高い問題と最も低い問題の 2 問のみを選択し、それぞれを「1a(1)」と「1a(2)」と表記した。表は、各問題に対する 2 名の数学教師の類題判断を、システムと比較したものである。各教師の判断について、無地のセルはシステムと一致したことを、灰色のセルはシステムと一致しなかったことを示している。

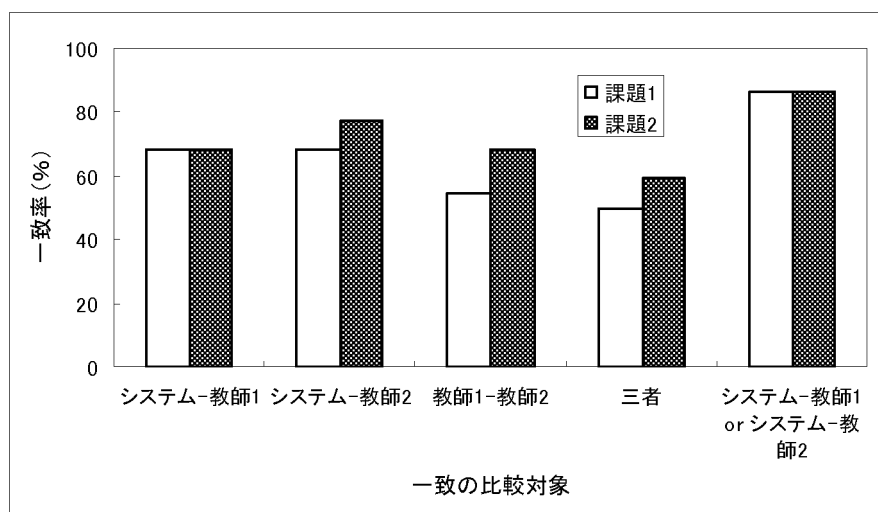


図 2.7: 類題判断の一致率

課題 1 と課題 2 の双方において、システムと 2 名の教師のどの 2 者間を比較しても、一致率は同程度になっている。

図 2.7 に示した通り、システムと教師との判断の一致率はいずれも 70% 前後に留まっているが、2 名の教師間の一致率も同程度となっている。2 者間の判断のカッパ係数を算出したところ、システムと教師 1 は課題 1 と課題 2 の双方で  $\kappa = .56(p < .001)$ 、システムと教師 2 は課題 1 で  $\kappa = .58(p < .001)$ 、課題 2 で  $\kappa = .69(p < .001)$ 、教師 1 と教師 2 は課題 1 で  $\kappa = .38(p < .01)$ 、課題 2 で  $\kappa = .49(p < .001)$  となった。したがって、どの 2 者間を比較しても、類題判断はある程度一致しているとみなすことができる。調査後の教師へのインタビューによると、教師ごとに問題の考え方や教え方が異なるため、また、特に別解が存在する問題は複数の捉え方ができるため、数学教師同士であってもこのような類題判断は異なるだろうということであった。加えて、状況を「類似する／類似しない」の 2 値によって判断することに迷ったという回答もあり、このことが教師間の類題判断のブレに影響した可能性も考えられる。

なお、本課題における一致率のチャンスレベルは、2 者間で 25%、3 者間で約 6% であり、図 2.7 に示した結果は、これより十分に高い値を示している。システムと教師 1、システムと教師 2、教師 1 と教師 2 の一致数と非一致数、および、本課題におけるチャンスレベルから算出される一致数と非一致数を  $\chi^2$  検定により比較したところ、課題 1 ( $\chi^2(3) = 9.90, p < .05$ )、課題 2 ( $\chi^2(3) = 13.81, p < .01$ ) の双方で差が認められた。残差分析の結果、課題 1 と課題 2 の双方において、チャンスレベルの一致数が有意に低く、



チャンスレベルの非一致数が有意に高いことが確認された。また、システムと教師2名の3者間とチャンスレベルとの一致数と非一致数をフィッシャーの正確確率検定（両側検定）により比較したところ、課題1( $p < .01$ )と課題2( $p < .001$ )の双方で有意差が認められた。

教師2名の判断が一致したがシステムの判断のみ異なったのは、5a(2)の1題であった。他に、2aと5a(1)は、三者の判断が分かれていることから、システムの判断が疑問視される。しかし、この不正確な判断は、本システムの問題表現の本質的な欠陥から生じるものではなく、実用段階におけるパラメータの調整などの軽微な対応によって改善可能である。例題2の「組分け問題」、例題5の「整数作成問題」は、2.2節で述べたような特殊な情報を必要とする問題である。具体的には、「分けられる組に区別があるか」、および、「最上位桁に0を入れることができるか」といった、各々の問題に固有の情報が必要になるが、それらがシステムに組み込まれていなかったため、システムの類題判断に誤りが生じたのである。そこで、これらの情報を扱うインデックスを追加した上で、各ランクにそのインデックスに関する制約を加えて調整し、追試的に再度本システムによる類題提示を実施させた。

表2.6に類題判断の追試結果の、表2.5との差分を示す。先の類題提示実験と異なる結果を示したのは、例題2と例題5に対して提示される類題のみであった。なお、5a(1)の問題はbだけでなく、cとしても提示された。表2.6においては、いずれの類題判断もいずれかの教師と一致するため、より適切な類題判断を行わせることに成功したとみなすことができる。以上の結果から、本システムは領域知識の表現に関して若干の課題を持つものの、状況と解法における類似性を統制する類題提示は、数学教師の判断と比較しても、概ね妥当であることが確認できたと考えられる。

表 2.6: 類題判断の追試結果（表 2.5 との差分）

問題	課題 1		課題 2		システム 追試
	教師 1	教師 2	教師 1	教師 2	
2a	c	d	c	b	c
2b	b	d	b	b	b
5a(1)	c	d	c	d	b,c
5a(2)	c	c	c	c	c
5c	b	c	b	c	c

表は、各問題に対する2名の数学教師の類題判断を、システムの追試における判断と比較したものである。なお、表2.6は、システムの判断が表2.5と変わったところだけを示している。表2.5と同じく、各教師の判断について、無地のセルはシステムと一致したことを、灰色のセルはシステムと一致しなかったことを示している。

## 2.5 結言

本章では，数学文章題の領域を対象として，類題解決学習を支援するシステムを試作した．システムの試作にあたっては，設計要件 1 に従い，状況と解法の 2 つの属性における類似性を統制して類題を提示する機能の実現を目標とした．そのため，本章では，状況と解法の 2 つの属性を区別して理解するための問題表現，および，これら属性を統制して類題提示の決定基準を変化させる方法の設計を行った．そして，本システムと数学教師の類題判断を比較する実験的評価により，2 つの属性における類似性を統制する類題提示の妥当性を確認した．

なお，実際に状況と解法の 2 つの属性を統制した類題提示を行うためには，2 つの属性において多様性を持つ，多数の問題のセットが不可欠である．複数の問題集や数学の Web サイトから問題を収拾することで，問題の数を得ることはできるが，多くの教科書的問題には，特定の状況と解法の典型的な組合せが存在するため，問題数を増やしても多様性が得られるとは限らない．そのため，多様性を持つ問題セットを供給することが，次の課題である．

## 第3章 事例自動生成システム

### 3.1 緒言

本章では、数学文章題の領域において、類題解決学習で事例として使用する問題を自動生成するシステムを構築する。本章の目的は、第1章で述べた設計要件2に従って、類題解決学習において学習者にスキーマを構築させるために必要となる、多様性を持つ問題セットを供給することである。そこで、問題を自動生成することで、状況と解法の2つの属性において構造化された問題データベースを生産する手法を提案する。しかし、文章題を扱うためには、常識知識や自然言語処理といった課題を克服しなければならないため、自動生成機能の実現は極めて困難である。

数学の問題を生成するシステムは、これまでにさまざまなものが開発されている。たとえば、MathTeX[1]は、高校数学の計算問題とその解答を自動的に生成して、TeX形式で出力するツールである。[白田 2004]は、経済最適化問題の問題領域において、条件や未知数といった問題の定義情報が与えられると、その情報からWeb教材を自動的に生成するシステムを構築している。[金西 2003]は、事前に与えられた問題生成に関する知識に基づき、基本情報技術者試験の数量関係の問題構造と解、問題文を生成するシステムを実装している。[Martin 2002]はSQL、[Le 2006]は制約充足問題の領域において、CBM (Constraint-Based Model: 制約に基づくモデル)を用いて学習者モデルや領域知識を表現し、これらを用いて問題の自動生成を実現している。これらのシステムは、問題を供給したり、具体的に教材を用意する手間を軽減することを目的としているが、状況のような情報が重要ではない問題領域を扱っている。

一方、問題文に文脈設定を持ち、状況が重要な意味を持つ文章題に関しては、計算機処理可能な問題の特徴記述を与える一連の研究が、平嶋らによって行われている。これらの研究においては、問題を定式化する過程のモデルにより、問題の表層的な情報と解法構造を表現する特徴記述が提案されており[平嶋 1992, Hirashima 1994]、数学の文章題や力学などの領域において、補助問題の定式化[平嶋 1995]や問題の整列[Hirashima 1994]、学習者による作問の支援[中野 2000, 中野 2002]、問題のオーサリング支援環境[平嶋 2001]などが実現されている。また、問題の自動生成についても、問題の単純化という観点からの試みが行われている[Hirashima 1994]。

さらに, [高野 2003] の WBT システムは鶴亀算型の文章題を自動生成するが, システムに用意された限られた状況と解法を持つ問題を生成するのみに留まっている.

本章では, 数学の文章題を対象とし, 「状況」と「解法」において多様な問題を生成するシステムを実現する. このシステムは, 問題集などから得られる問題を登録し, 登録された問題から新しい問題を生成して, 問題の多様性を増やし, 状況と構造において構造化された問題データベースを生産することができる. 常識知識や自然言語処理に関する問題については, 1) システムは作問を事例化し, 事例を利用して問題を生成する仕組みを実現する, 2) システムは教師ユーザとのインタラクションにより問題生成を行う, という方法によって克服, あるいは回避するアプローチを採用する. 作問の事例化とは, ある例題に対し, その類題が生成された時, この 2 つの問題の間で結ぶことができる関係を事例とすることである. 問題を事例と捉えると, 作問の事例はメタ事例にあたる. ここでは, このような作問の事例を「作問エピソード」と呼ぶ.

## 3.2 事例自動生成システムの実装

本章で実装を行ったシステムは, 数学の問題データを蓄積し, 蓄積されている問題データを用いて新しい問題を生成するシステムである. 図 3.1 に, 本システムのユースケース<sup>1</sup>を示す. 問題生成において, 本システムは教師ユーザとのインタラクションを実行し, 教師ユーザが問題データの登録を行った上で, 同時に常識知識も教師ユーザが補間することを前提とする (図の a). このインタラクションを通じて, 本システムは状況と解法において多様性を持つ問題データベースを生産する (b). この問題データベースは, 類題解決学習において, 学習者ユーザに教材コンテンツとして提供されることを想定している (c). また, 第 4 章で論じる研究は, 本システムによって供給される問題を利用した学習支援の実現例である.

本システムが対象とする問題領域には, 鶴亀算型の文章題を採用する. これは, 2 つのオブジェクトの数量と属性値に関する情報から, 二元一次方程式を用いて解を導く問題であり, 中学校数学における「連立方程式の応用」に含まれる. システムの実装は連立方程式の応用という個別的な領域において行われたが, 本章で提案する手法は, 状況を表す問題文を持ち, 方程式で解決することが可能な文章題の問題領域であれば, 一般的に利用可能であると考えられる.

---

<sup>1</sup>システムの機能や使用例を, ユーザや他のシステムとの関係に基づいて記述したものを指す.

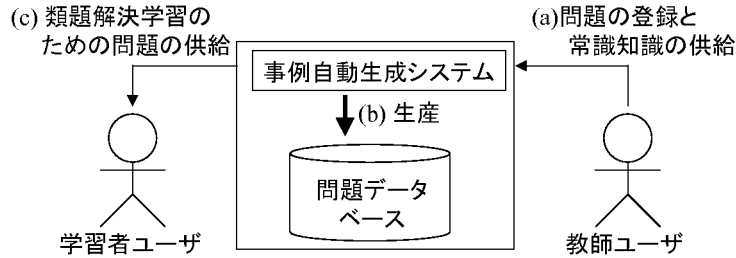


図 3.1: 本システムのユースケース

本システムは、教師ユーザとのインタラクション (a) を通じて問題データベースを生産する (b) . この問題データベースは、学習者ユーザに問題を供給する (c) ために使用される.

### 3.2.1 問題生成の基本コンセプト

本システムは、システムに登録されている問題データから作問エピソードを構成し、これを用いて新しい問題の生成を行う. 先に述べたように、作問エピソードは作問を事例化した知識であり、ある例題 base に対して、その類題 newInstance が作成されたとすると、この 2 つの問題と、それらの間の関係をデータとして持つ事例である. 本システムはこの作問エピソードを用いて、入力として与えられる問題 input に対し、作問エピソードにおける base と newInstance の関係を適用することで、新しい問題 output の生成を行う.

図 3.2 に、作問エピソードを用いた問題生成の概念図を示す. 図において、縦軸は状況の特徴、横軸は解法の特徴を表している. 各座標 (A-1, A-2 など) は、同一の状況と解法を持つ問題が属するカテゴリを表す. このカテゴリを、「問題パターン」と呼ぶことにする. 今、A-1, B-1, A-2, A-3 の 4 つの問題パターンに属する問題が事例として格納されていると仮定する. そして、A-1 に属する 1 つの問題を base, B-1 に属する問題を newInstance として、妥当な作問エピソード E が抽出されたとする. この時、input として A-2 の問題に E を適用することが可能であったとすると、B-2 の問題が output として新たに生成される. つまり、本システムによる作問は、「base: newInstance = input: output」という四項類推の形式によって input から output を生成すること、ということができる. 同様に、E を用いて A-3 の問題から B-3 の問題を生成することができる. これにより、新しく B-2, B-3 という、解法が同一で状況が異なる問題が生成され、問題パターンが 2 つ増加したことになる.

ここで、システムの実装においては、妥当な作問エピソードを構成できるのは、状況が同一である base と newInstance のみであり、作問エピソード

ソードを適用できるのは、base と解法が同一である input のみである、という制約を与えている。これにより、作問エピソードは置き換えてよい解法を base に、置き換えられる解法を newInstance に事例的に持つ知識ということになり、ある作問エピソードに対する input は、置き換えてよい解法を持つ問題のみに絞られることになる。

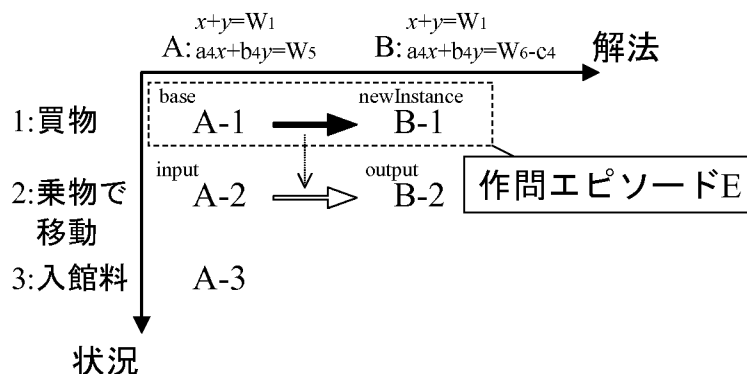


図 3.2: 作問エピソードを用いた問題生成の概念図

本システムは、例題 (base) と類題 (newInstance) の関係にある問題から作問エピソードを構築し、これを他の問題 (input) に適用することで、新しい問題 (output) を生成する。

[平嶋 2001] は、ある問題の解法構造に対し、差分となる概念や操作を与えることで、新しい解法構造の問題を作成する方法を採用している。これに対し、本システムによる新しい問題 output の生成は、newInstance を用いて構築される解法構造に、input の状況を当てはめることで行われる。したがって、本システムは、input の解法構造に差分を与えることによる問題の生成に留まらず、input とは解法が持つ基本的な構造が異なる問題も生成することができる。

このコンセプトに基づき、本システムは問題から作問エピソードを構成し、これを他の問題に適用することで、システムが持つ問題の初期セットから新しい問題を生成し、問題の多様性を増殖する。なお、本システムによる問題生成では、上述の通りに新しい問題パターンの問題を生成する場合の他に、A-1 に属する base 以外の問題から B-1 に属する問題を生成する場合、つまり、既に存在する問題パターンに属する問題を生成する場合も考えられる。前者のような問題生成を「新規生成」、後者を「変更生成」と呼ぶことにする。変更生成によって生成されるのは、newInstance と同じ問題パターンで、問題文に登場するキーワード等を変更したような問題ということになる。

## 3.2.2 問題表現

本システムは、第2章で設計した3層リスト形式を用いて、問題データを表現する。この問題データ上では、問題領域固有の情報はテーブルの形式で表現される。図3.3に、問題の特徴表現の例を示す。図の中央のテーブルに含まれる数値は方程式の係数であり（これを「数値パラメータ」と呼ぶ）、「オブジェクト」は問題に登場する鉛筆やボールペンといった問題要素、「プロパティ」は数値パラメータが持つ助数詞や単位である。テーブルの基本構造は、オブジェクトとプロパティ、ならびに、方程式の数値パラメータの対応表の形式で作成される。その他、問題文の場面を表す動詞、状況、解法の標準形、数値パラメータを算出する追加操作が必要な問題では、その計算式といった情報も問題データに含まれる。追加操作を含む問題の例を図3.4に示す。このように、図3.3に示す問題の基本構造に対し、差分となる概念や演算を与えることで、図3.4に示す問題表現を与える方法は、平嶋らのシステムにおいて用いられたものである[平嶋 2001]。

問) 80円の鉛筆と120円のボールペンをあわせて8本買ったら、代金は760円になった。それぞれ何本買ったか。

解) 鉛筆を  $x$  本、ボールペンを  $y$  本とくと、

$$x + y = 8$$

$$80x + 120y = 760$$

よって、 $x = 5, y = 3$

		オブジェクト (instance)		
		a:鉛筆	b:ボールペン	W: (全体)
プロパティ	1:本	$x$	$y$	8
	2:			
	3:			
	4:円	80	120	
	5:円			760

動詞	買う
オブジェクト (class)	文具
状況	売買
標準形	$x + y = W_1$ $a_4x + b_4y = W_5$

図 3.3: 問題の特徴表現の例 1

本システムでは、上の問題を図の中央と下に示されるテーブルのように表現する。中央のテーブルは、オブジェクトとプロパティ、ならびに、方程式の数値パラメータの対応関係を表している。下のテーブルは、問題の状況や解法の方程式など、問題に含まれる重要な情報である。

### 第 3 章

問) 80 円の鉛筆と 120 円のボールペンをあわせて 6 本と 500 円の筆箱を買ったら、代金は 1060 円になった。鉛筆とボールペンをそれぞれ何本買ったか。

解) 鉛筆を  $x$  本、ボールペンを  $y$  本とおくと、

$$x + y = 6$$

$$80x + 120y + 500 = 1060$$

より、

$$x + y = 6$$

$$80x + 120y = 560$$

よって、 $x = 4, y = 2$

		オブジェクト (instance)			
		a:鉛筆	b:ボールペン	W: (全体)	c:筆箱
プロパティ	1:本	$x$	$y$	6	
	2:				
	3:				
	4:円	80	120		500
	5:円			560	
	6:円			1060	

動詞	買う
オブジェクト (class)	文具
状況	売買
標準形	$x + y = W_1$ $a_4x + b_4y = W_5$
追加操作	$W_5 = W_6 - c_4$

図 3.4: 問題の特徴表現の例 2

$W_5(560)$  のように、問題文に現れない数値パラメータを算出する追加操作が必要な問題の場合、その追加操作も問題データに含まれる。

さらに問題データには、問題文に含まれる instance レイヤーの値をスロットに置き換えた「問題文テンプレート」が保持される。問題文テンプレートは、システムが新しい問題を生成した際、その問題文を生成するために利用される。以下に、図 3.4 の問題における問題文テンプレートを示す。

$\boxed{a4} \boxed{4}$  の  $\boxed{a}$  と  $\boxed{b4} \boxed{4}$  の  $\boxed{b}$  をあわせて  $\boxed{W1} \boxed{1}$  と  $\boxed{c4} \boxed{4}$  の  $\boxed{c}$  を買った  
ら、代金は  $\boxed{W6} \boxed{6}$  になった。  $\boxed{a}$  と  $\boxed{b}$  をそれぞれ何  $\boxed{1}$  買ったか。

なお、先述の通り、これらのテーブルは 3 層リスト形式上で実現される。表 3.1 に、図 3.4 の問題データの実装レベルの表現を示す。ここでは、問題文中のキーワードと数値パラメータが instance レイヤーに、キーワードの上位概念が class レイヤーに、解法の情報が d-prop レイヤーに分類される。3 層リスト形式を用いるのは、本システムが供給する問題データを、



状況と解法を統制して提示することを可能にするためである。図 3.4 に示したテーブルは問題構造を表現しているが、このテーブルは、表 3.1 のインデックスに賦与された ID (a,1,a4 など) に基づいて構築される、領域依存の情報である。

表 3.1: 図 3.4 の問題データの実装レベル表現

インデックス	値
オブジェクト.a:instance	鉛筆
オブジェクト.b:instance	ボールペン
オブジェクト.c:instance	筆箱
プロパティ.1:instance	本
プロパティ.4:instance	円
プロパティ.5:instance	円
プロパティ.6:instance	円
数値パラメータ.a <sub>1</sub> :instance	x
数値パラメータ.b <sub>1</sub> :instance	y
数値パラメータ.W <sub>1</sub> :instance	6
数値パラメータ.a <sub>4</sub> :instance	80
数値パラメータ.b <sub>4</sub> :instance	120
数値パラメータ.c <sub>4</sub> :instance	500
数値パラメータ.W <sub>5</sub> :instance	560
数値パラメータ.W <sub>6</sub> :instance	1060
動詞:instance	買う
オブジェクト:class	文具
状況:class	売買
標準形.1:d-prop	$x + y = W_1$
標準形.2:d-prop	$a_4x + b_4y = W_5$
追加操作.W <sub>5</sub> :d-prop	$W_6 - c_4$

本システムの実装レベルの問題データは、「インデックス＝値」のリスト形式で表現される。また、各インデックスにはレイヤーが付加されている。

### 3.2.3 システムの構成

本システムは、教師ユーザの入力する問題を解析して問題データを生成する「入力インタフェース」、問題生成に利用する単語の知識を保持するための「辞書データベース」、問題データや作問エピソードを蓄積する「事例データベース」、作問エピソードの作成と問題生成を実行する「プロ



は、問題の問題文と解法式をテキスト形式で入力する。システムはまず、解法の方程式の解析を行い、その構造を理解するとともに、方程式の数値パラメータを抽出する。続いて、形態素解析ツールを利用して問題文を単語に分割した後、係り受けの情報に基づいて単語のブロックを構成する。このブロックと方程式の数値パラメータを比較し、問題文からオブジェクトとプロパティを抽出する。ここでは、ブロックがある数値パラメータと同値の数字を含む場合、システムはブロック中の数字に係る助数詞をプロパティ、ブロックに含まれる名詞をオブジェクトとして抽出する。この処理では、オブジェクトの候補となる名詞が複数存在してシステムが自力で解決できない場合、抽出する名詞の決定をユーザに委ねる。そして、問題文に含まれる動詞を抽出し、この動詞を辞書データベースで検索して、その上位概念を状況とする。抽出する動詞の決定はユーザに委ねられ、システム自身は候補をリストアップするのみに留まる。文章題の問題文は、短い文章と限られた単語によって構成されることが多いため、このような表現でも問題文の状況を分類することはある程度可能であると考えられる。しかし、複数通りに解釈できる状況を持つ問題の場合、抽出する動詞の決定はユーザの判断に全面的に依存することになるなど、問題もある。状況の解釈と表現は、自然言語処理と常識推論を伴う困難な問題であり、今後検討すべき課題である。

続いて、システムは未解決の情報がないかをチェックした後、確認のため、ユーザに問題データを示す。未解決の情報とは、問題文に含まれるが、テーブルに抽出されなかった数字や、テーブルに抽出されているが、問題文に含まれない数値である。未解決の情報がある場合、システムはこれをリストアップして、ユーザに問題データの修正や追加を要求する。また、システムの知識ベースに含まれない単語が抽出された場合、概念辞書を検索してその単語の情報を取り出し、ユーザに単語に対する助数詞などの常識知識を補間してもらった上で、知識ベースに新たな単語知識として格納する。図 3.6 に、問題データの登録の実行画面を示す。図は、ユーザが問題を入力した後、システムがユーザに問題データを示したところである。システムは問題データのテーブル（図 3.6 の 1）と未解決の情報（2）を提示しており、ユーザは情報の追加を行っている（3）。以上の処理を通じて、表 3.1 に示したような問題データが生成される。

最後に、システムはユーザが入力した問題文のテキストから instance レイヤーの値をスロットとして抜き出し、問題文テンプレートを生成して問題データに付加する。問題文テンプレートは、将来の問題生成において、入力された問題と同じ問題パターンに属する問題が生成された場合、その問題文の生成に利用される。

解法式のパラメータ キーワード 追加操作

$x+y=W1, a4 \cdot x + b4 \cdot y = W5$

◇編集 \*削除

	[a:鉛筆]	[b:ボールペン]	[W:全体]	[c:筆箱]
[1:本]	x a1	y b1	6 W1	c1
	a2	b2	W2	c2
	a3	b3	W3	c3
[4:円]	80 a4	120 b4	W4	500 c4
[5:円]	a5	b5	560 W5	c5
[6:円]	a6	b6	1060 W6	c6

!! 解法式にある係数・定数項のうち、以下を認識することができませんでした。  
各数値に関する設定を行って下さい。  
設定しないものは無視を選択して削除して下さい。

未認識の数値  
W5: 560

\*無視 ◇追加操作を定義

問題文  
80円の鉛筆と120円のボールペンをあわせて6本と500円の筆箱を買ったら、代金は1060円になった。鉛筆とボールペンをそれぞれ何本買ったか。

解法式  
 $x+y=6$   
 $80 \cdot x + 120 \cdot y + 500 = 1060$

追加操作を定義

? W5 = 追加操作の式  
W6-c4

( ) BS CL

+ - \* /

0 1 2 3 4

5 6 7 8 9

▲追加 c4 ▼

了解 取消し

図 3.6: 問題データ登録の実行画面の一部

図は、ユーザが問題を入力した後、システムがユーザに問題データのテーブル (1) と未解決の情報 (2) を提示したところである。そして、ユーザは情報の追加を行っている (3)。

### 作問エピソードの作成

作問エピソードは、システムに登録されている問題データのセットから、教師ユーザが base と newInstance とする問題を選択すると、プロダクションエンジンが自動的に作成する。作問エピソードは、base と newInstance のセットに対し、プロダクションエンジンが書き換えアクション生成ルールを用いて 2 つの問題間の特徴を比較し、どの特徴をどう書き換えるかの手続き (書き換えアクション) を賦与することで作成される。書き換えアクション生成ルールは、base と newInstance の間で特徴値が異なるかを調べる調査ルール、調査ルールの結果に基づいて書き換えアクションを賦与する賦与ルールの 2 種類からなる。たとえば、図 3.3 の問題を base、

図 3.4 の問題を `newInstance` とする作問エピソードの作成を行う場合、プロダクションエンジンは、調査ルールによりオブジェクトが同一であるという結果を得て、賦与ルールによりオブジェクトをそのままコピーする書き換えアクションを生成するといった手順で、表 3.2 に示す書き換えアクションを賦与する。このことから、作問エピソードは、適切な作問が成り立つような書き換えアクションのセットを生成するための制約である、ということができる。

表 3.2: 書き換えアクションの例

---

の **a** を **output** の **a** にコピー  
 の **b** を **output** の **b** にコピー  
**output** に **c** を作成  
 の **1** を **output** の **1** にコピー  
 の **4** を **output** の **4** にコピー  
...  
 の標準形を **output** の標準形にコピー  
**newInstance** の追加操作を **output** の追加操作にコピー

---

図 3.3 の問題を `base`、図 3.4 の問題を `newInstance` とする作問エピソードに賦与される書き換えアクションのセットの一部である。書き換えアクションは、問題生成においてシステムが実際に行う処理である。

書き換えアクションは、`base` と `newInstance` との間の共通点と差異に基づいて賦与されるものであり、2 つの問題間の関係とみなすことができる。 `base` と `newInstance` の間に共通点が全くない場合は、2 つの問題間の関係を抽出することができないため、どのような `input` に対しても `newInstance` のコピーを `output` として出力するだけの作問エピソードが作成されることになる。したがって、作問エピソードは、どのような問題の組み合わせでも有効というわけではなく、適切な関係を結ぶことができる問題の組合せのみから作成される。作問エピソードを作成する際に適切な関係を持つとみなされるのは、先にも述べたとおり、状況が同一である問題の組合せである。

### 新しい問題の生成

本システムによる問題の生成は、作問エピソードを利用して、与えられる問題 `input` から新しい問題 `output` の生成を行う、という形式で実行される（図 3.2 を参照）。先に述べた通り、作問エピソードには書き換えアクションが賦与されている。 `input` が与えられると、システムは作問エ

ピソードが input に適用可能であるかを判断し、可能であれば、プロダクションエンジンに書き換えアクションを実行させて、output の問題データを生成させる。作問エピソードが input に適用可能と判断されるのは、input の d-prop レイヤーの値が作問エピソードの base のものと等しい場合である。d-prop レイヤーには、解法の方程式の標準形と追加操作のセットが含まれているため、その値が全て等しいということは、解を導出するための計算手続きが同一であることを意味する。なお、割合は演算上特殊な性質を持つため、割合を含む問題と含まない問題とを比較する場合は、d-prop レイヤーの特徴が異なると無条件で判断する補助ルールを使用している。この補助ルールを使用しないと、システムは数学的に不適切な問題を生成してしまう可能性がある。問題生成の実行方法には、1) 教師ユーザが input とする問題を指定し、システムが適用可能な作問エピソードを検索する場合と、2) 教師ユーザが使用する作問エピソードを指定し、システムが input とする問題を検索する場合の 2 通りがあるが、いずれの場合も、システムは適用可能な全ての作問エピソードと input とを組合せ、output を生成する。

最後に、問題文テンプレートに output のキーワードをあてはめることで output の問題文を生成し、output は新しい問題として出力される。変更生成の場合、ここで使用するテンプレートは、問題データベースから検索して得られる。一方、新規生成の場合は、利用できる問題文テンプレートが存在しないため、システムは output の問題データから「抽象テンプレート」を作成し、仮の問題文を生成する。これは、 $x + y = W_1$  に対して「aとbの合計はW11」というように、式の形式ごとに用意されているテンプレートの断片を組み合わせ、それを問題データに含まれる情報に応じて変形することで生成される。新奇生成の場合、システムは抽象テンプレートから仮に作成された問題文を教師ユーザに示し、ユーザに問題文を作成して入力するように要求する。そして、システムはユーザが入力した問題文から問題文テンプレートを生成し、このテンプレートを以後の問題生成において利用する。

このプロセスを具体例を用いて示す。図 3.3 に示す問題を base、図 3.4 に示す問題を newInstance とする作問エピソードを選択して作問を実行した場合、システムは問題データベースを検索し、base と d-prop レイヤーの値が同一である問題が見つかったら、この作問エピソードを適用する。ここで、以下のような問題が見つかったと仮定する。

問) A市からB駅経由で195km離れたC市まで行くのに、A市からB駅までは時速50kmのバスで、B駅からC市までは時速80kmの電車で行ったら3時間かかった。A市からB駅まで、B駅からC市までにかかった時間はそれぞれ何時間か。

解) A市からB駅までを  $x$  時間、B駅からC市までを  $y$  時間とおくと、

$$x + y = 3$$

$$50x + 80y = 195$$

より、 $x = 1.5, y = 1.5$

すると、システムは表3.2に示した書き換えアクションを実行し、outputの問題データを生成する。このoutputの問題データを持つテーブルは、図3.7に示す通りとなる。これは、図3.4の問題と、解法が同一で状況が異なる問題である。

		オブジェクト (instance)			
		a:バス	b:電車	W: (全体)	c: (未設定)
プロパティ	1:時間	$x$	$y$	$W_1$	
	2:				
	3:				
	4:k m	$a_4$	$b_4$		$c_4$
	5:k m			$W_5$	
	6:k m			$W_6$	

動詞	行く
オブジェクト (class)	乗物 (陸上)
状況	往復
標準形	$x + y = W_1$ $a_4x + b_4y = W_5$
追加操作	$W_5 = W_6 - c_4$

図 3.7: output の問題データのテーブル

新しい問題を生成する際は、まず最初に問題データのテーブルが生成され、続いて問題文が生成される。オブジェクトの  $c$  は、システムが自力で設定することができなかったために空欄となっている。このような空欄がある時、システムは後でユーザに入力进行を要求する。

そして、システムはこのoutputと同一の問題パターンの問題を問題データベースから検索し、問題文テンプレートの獲得を試みる。問題パターンが同一と判断されるのは、問題データにおけるclassレイヤーの状況の値と、d-propレイヤーの値が等しい問題である。ここではoutputと同一の

### 第 3 章

---

問題パターンに属する問題が見つからなかったとすると、システムは新規生成と判断し、問題データから抽象テンプレートを作成して、以下のような問題文を仮に生成する。

問) バスと電車はあわせて  $W_1$  時間。

1 時間あたり  $a_4$  k m のバスと 1 時間あたり  $b_4$  k m の電車で、あわせて  $W_5$  k m [=  $W_6$  k m -  $c_4$  k m]。

バスと電車はそれぞれ何時間か。

次に、output をユーザに提示するとともに、ユーザに問題データの修正を要求する<sup>2</sup>。ユーザは提示される問題データとシステムが仮に作成した問題文を参照しながら、問題文の編集入力を行う。図 3.8 に、問題データの修正の実行画面を示す。この時、この output (図 3.8 の画面下のウィンドウ・右下のフィールドに表示) に対し、その生成に使用された作問エピソードの base (左上) と newInstance (右上)、そして input (左下) もあわせて四項類推の形式で表示される。以下は、この output に入力する問題文の例である。

A 地点から  $W_6$  k m 離れた D 地点まで行くには、A 地点から時速  $a_4$  k m のバスに乗って B 地点に、B 地点から時速  $b_4$  k m の電車に乗って、D 地点の  $c_4$  k m 手前の C 地点まで行き、D 地点までの残りは徒歩で行くことになる。バスと電車に合計で  $W_1$  時間乗るとすると、バスと電車それぞれには何時間乗ることになるか。

システムは、この問題文から問題文テンプレートを作成する。

最後に、ユーザは修正した output の問題データをシステムに登録する。このような手続きを踏むため、システムが生成した問題の中で新たに問題データベースに登録されるのは、ユーザによって評価、修正された問題のみということになる。このように、本システムはメタ事例を用いた CBR により、新しい問題の候補として output を生成してユーザに提示し、ユーザの知識を引き出すような形式でインタラクションを実行して、解法が同一で状況が異なる問題を、様々な解法の問題に対して生成する。

なお、本システムによる問題生成では、数値の割り当ては行われない。これは、本システムの支援対象の想定が、状況と解法を統制して問題を学習者に提示し、問題間の比較を行わせる学習であることに基づいている。ただし、他の学習支援システムへの教材コンテンツ供給を行うためには、数値の割り当ては重要な問題であり、今後の課題である。

---

<sup>2</sup>ここでは、 $c$  のオブジェクトの設定と、問題文の入力を要求する。



**問題文を編集**

問題文を編集して下さい。「W1」や「a4」などのそれ以外の文字は全て全角文字で入力して下さい。オを変更する場合は、キーワードリストから編集して下さい

問題文

A地点からW6 km離れたD地点まで行くには、A地点から時速a4 kmのバスに乗ってB地点に、B地点から時速

この問題が成立するために必要な単語・パラメータ

▲挿入 b4 km

了解 取消し

**使用されたエピソード**

元例題	大問記号
問) 80円の鉛筆と120円のボールペンをあわせて8本買った場合、代金は760円になった。鉛筆とボールペンをそれぞれ何本買ったか。 解) 鉛筆x本、ボールペンy本とおくと、 $x+y=8$ $80x+120y=760$	問) 80円の鉛筆と120円のボールペンをあわせて8本買った場合、代金は760円になった。鉛筆とボールペンをそれぞれ何本買ったか。 解) 鉛筆x本、ボールペンy本とおくと、 $x+y=8$ $80x+120y=760$

base input

**実行された作問**

入力例題	出力例題
問) A市からB駅経由で195 km離れたC市まで行くのに、A市からB駅までは時速50 kmのバスで、B駅からC市までは時速80 kmの電車で行ったら3時間かかった。A市からB駅まで、B駅からC市までにかかった時間はそれぞれ何時間か。 解) バスx時間、電車y時間とおくと、 $x+y=3$ $50x+80y=195$	問) バスと電車はあわせてW1時間あたりa4 kmのバスと195 km離れたC市まで行くのに、A市からB駅までは時速50 kmのバスで、B駅からC市までは時速80 kmの電車で行ったら3時間かかった。A市からB駅まで、B駅からC市までにかかった時間はそれぞれ何時間か。 解) バスx時間、電車y時間とおくと、 $x+y=W1$ $50x+80y=195$

newInstance output

図 3.8: 問題データ修正の実行画面の一部

図は、システムが output を提示してユーザに修正を要求した後、ユーザが問題文を入力しているところである（画面右上）。この時、システムは問題生成で使った作問エピソードの base と newInstance、および、input と output を四項類推の形式で表示する（画面下）。

### 3.3 実験的評価

本システムは、1) 適切な問題を生成し、問題の多様性を増やすことができるか、2) 教師ユーザとのインタラクションを通じて有効な知識を学習することができるか、の 2 点において評価される必要がある。そのため、1 の評価を、システムに問題を搭載して機械的に問題生成を実行させ、生成される問題を評価する「動作実験」を通じて、2 の評価を、実際に本システムを教師ユーザに使用させ、本システムとユーザのインタラクションを確認する「運用実験」を通じて、それぞれ実施した。

#### 3.3.1 動作実験

##### 方法

動作実験では、最初に問題の初期セットをシステムに登録し、システムに問題生成をさせて教師ユーザとのインタラクションを行うサイクルを繰り返し実行した。そして、システムが生成する問題を評価した。この問題生成では、作問エピソードの作成と問題生成の手続きをシステムに自動実行させた。これは、1) システムに登録されている問題から、関係を結ぶことが可能な 2 つの問題の組み合わせ全てを選び出して作問エピソードを生成し、重複するエピソード<sup>3</sup>を除外する、2) 1 で作成された全ての作問エピソードを適用可能な全ての問題に適用する、という作業を機械的にシステムに行わせる方法である。また、本実験における教師ユーザは、著者が行った。システムに登録する問題の初期セットには、市販の問題集 3 冊 [5, 6, 7] より対象領域の問題を取り出し、各問題集の問題からなるセットと、3 つのセットをマージしたセットの 4 つを用意した。表 3.3 に、各初期セットのデータを示す。システムが問題の多様性を増殖可能であるかどうかは、問題生成後の問題パターン数の増加率を算出することで、また、システムが適切な問題を生成可能であるかどうかは、生成された問題の問題文の適切さを評定することで評価する。

表 3.3: 動作実験で用いた問題の初期セット

	問題集 1	問題集 2	問題集 3	マージ
問題数	9	34	34	77
問題パターン数	6	22	26	41

<sup>3</sup>書き換えアクションのセットが同一であるエピソードである。

## 結果

図 3.9 に、各初期セットから問題生成を行った後の問題パターン数の増加率を示す。増加率は、問題生成を行った後の問題パターン数を、初期セットの問題パターン数で割ることで算出した値である。問題集 1 からの問題生成では、新しい問題パターンは一切生成されていないが、問題集 2 からの問題生成では、最終的に問題パターンが倍増している。この結果から、本システムによる問題生成は問題の多様性を増やすことが可能であることが確認されたが、どの程度増えるかは、問題の初期セットに大きく依存することが判明した。

なお、同一の問題パターンの問題は基本的に複数作成される。たとえば、本システムがマージセットから生成した問題のうち、同一の問題を除外してカウントしたユニークな問題の数は、問題生成 1 回目で 303、2 回目で 584、3 回目で 592 であった。

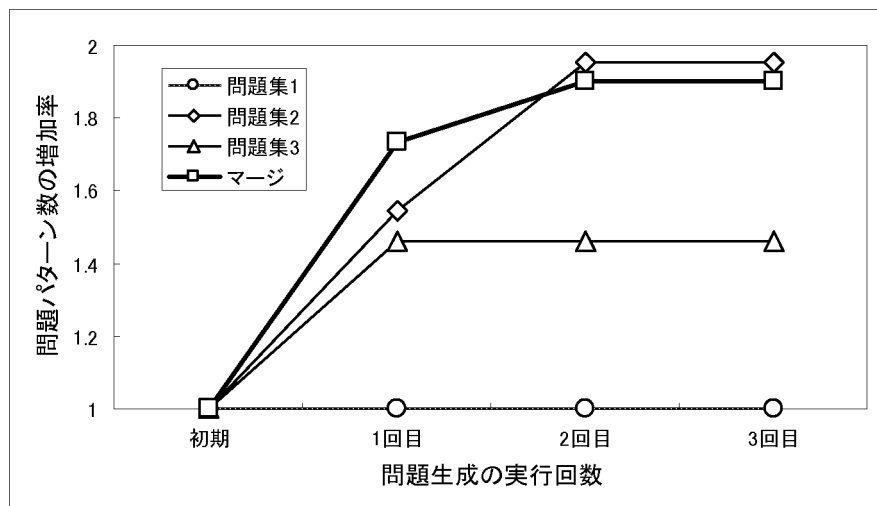


図 3.9: 問題パターン増加率

問題パターン数の増加率は、問題生成後の問題パターン数を初期セットの問題パターン数で割ることで算出した数値である。本システムは問題パターンを増やすことが可能であることが確認された。また、どの程度増えるかは初期セットに依存することが判明した。

次に、マージセットからの自動生成によってシステムが生成した問題の適切さを図 3.10 に示す。図 3.10 では、システムが生成した問題のうち、変更生成によって問題文を適切に生成することができた問題（適切）、変更

生成によって生成されたが、問題文に常識知識に基づく部分修正<sup>4</sup>や、図 3.7 の c のオブジェクトのように単語知識の入力をユーザに要求する必要があった問題（要修正）、新規生成によって生成され、ユーザによる問題文の入力が必要であった問題（要入力）の、それぞれの占める割合を示している。なお、要入力の問題の割合はシステムに算出させたが、適切な問題と要修正の問題は、著者が問題文を見て判断し、その割合を算出した。自動生成によってシステムが提示した問題数は大量であったため、適切な問題と要修正の問題の割合は、全問題から新規生成の問題を除いたセットから 100 問をランダム抽出し、この 100 問の評定から算出したものである。

図 3.10 に示されている通り、問題生成を 2 回繰り返すと、ユーザからの問題文の入力を必要とする問題は出現しなくなる。これは、図 3.9 にも示されている通り、新規生成の問題が出現しなくなったためである。この結果から、問題生成と教師ユーザとのインタラクションを繰り返し実行することで、本システムはある程度適切な問題を生成することが可能になることが確認された。

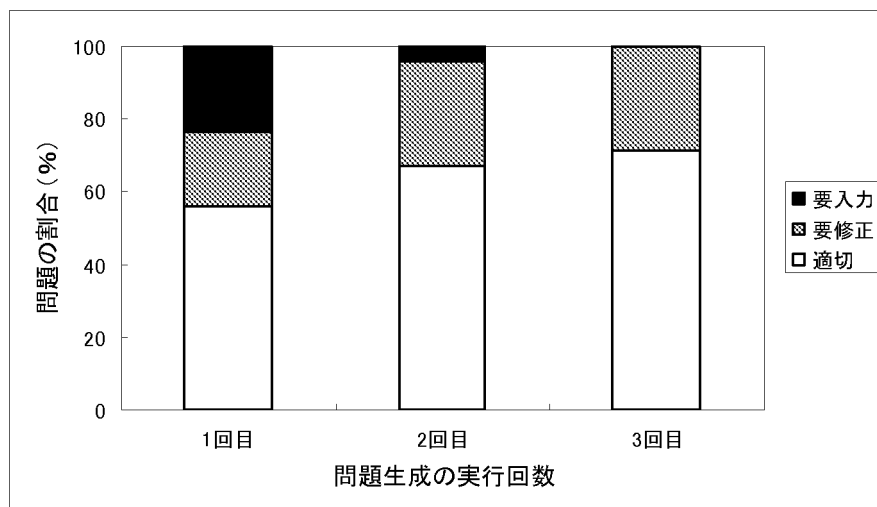


図 3.10: 生成された問題の適切さ

図は、システムが生成した問題のうち、問題文を適切に生成することができた問題（適切）、問題文を生成することはできたが、ユーザによる修正や情報の追加が必要であった問題（要修正）、問題文を生成することができなかった問題の割合を示している。問題生成を繰り返し実行することで、本システムはある程度適切な問題を生成できるようになることが確認された。

<sup>4</sup>たとえば、「花屋でジュースを買った」を「店でジュースを買った」に、「A 駅まで船で」を「A 港まで船で」に、といった修正である。

### 考察

図 3.9, 図 3.10 に示した結果から, 本システムは問題の多様性を増やすことが可能であり, かつ, ある程度適切な問題を生成できることが確認できた. 本システムが問題文の生成に使用するテンプレートには, 数学的問題解決にとって重要でない単語を切り出して変更することができないという問題点が残っているため, 常に教師ユーザが個々の問題を評価し, 問題文を部分的に修正しなければならない. この問題文テンプレートの問題が, 図 3.10 において, 要修正の問題が最後まで残っている原因である.

システムが生成した問題の中には, 通常の教科書や問題集には載っていないような問題もいくつか含まれていた. このような問題の例<sup>5</sup>を示す.

output Q

問) Aは  $a_4$  円の鉛筆を、Bは  $b_4$  円のボールペンを何本か買った。二人が使った金額の合計は  $W_1$  円で、鉛筆とボールペンの本数は合計で  $W_5$  本であった。AとBが使った金額はそれぞれ何円か。

解) Aが使った金額を  $x$  円、Bを  $y$  円とくと、

$$x + y = W_1 \dots\dots(1)$$

$$\frac{x}{a_4} + \frac{y}{b_4} = W_5 \dots(2)$$

この問題では, 鉛筆とボールペンそれぞれの合計の代金を求める解としており, 式 (1) では全体の代金の合計, 式 (2) ではそれぞれの代金を単価で割って本数を算出することで, 全体の本数の合計を求めている. この問題構造は, 市販の問題集では「速さ-時間-距離」の問題のみが持つものである. この問題構造を買物という状況に適用することによって, 新奇な問題が生成されている.

#### 3.3.2 運用実験

運用実験では, 教師ユーザを募り, 本システムを操作させた. 実験 1 では一般大学生に, 実験 2 では数学専攻の大学院生と高校数学教師に教師ユーザを依頼して, 本システムがユーザとのインタラクションを通じて, 有効な知識を学習することができるかの確認を行った. ここでシステムが学習する知識は, オブジェクトとして使用する単語知識と, 問題文テンプレートを作成するための問題文の 2 つであり, これらをユーザが適切に供給することが可能かどうかを検証した.

<sup>5</sup>システムが作成した問題文「鉛筆の合計とボールペンの合計をあわせて  $W_1$  円。1 本あたり  $a_4$  円の鉛筆と 1 本あたり  $b_4$  円のボールペンで、あわせて  $W_5$  本。鉛筆の合計とボールペンの合計はそれぞれ何円か。」を著者が修正したものである。

## 実験 1

実験 1 では、表 3.4 に示す 2 種類の初期セットをシステムに登録した。セット 1 には最も基本的な解法を持つ問題のみが含まれ、セット 2 には追加操作を持つ複雑な問題が含まれている。この初期セットからシステムに問題生成を実行させると、システムは 9 つの問題パターンに含まれる問題を各 1 問ずつ、それぞれのセットごとに合計 9 問を生成して提示する。実験の参加者には、これらの問題を評価し、システムを操作して問題を修正することを課題として依頼した。具体的には、システムがオブジェクトの単語を設定できない場合は、その単語を与えることを、また、初期セットに含まれない問題パターンの問題が生成された場合は、自然な問題文を作成して入力することを求めた。参加者に対しては、システムの操作に関する説明を充分に行うとともに、実験中は常に著者が同席して、システムの操作に関する質問に適宜応じた。

表 3.4: 運用実験で用いた問題の初期セット

		(左：セット 1, 右：セット 2)		
		解法		
		A	B	C
状 況	1	A-1	B-1	
	2	A-2		C-2
	3	A-3		

解法)

$$A : x + y = W_1, a_4x + b_4y = W_5$$

$$B : a_2x + b_2y = W_3, a_4x + b_4y = W_5$$

$$C : x + y = W_1, \frac{x}{a_4} + \frac{y}{b_4} = W_5$$

$$D : x + y = W_1, a_4x + b_4y = W_6 - c_4$$

$$E : x + y = W_1, (1 + a_6)x + (1 + b_6)y = W_5$$

状況)

1 : 買物    2 : 乗物で移動    3 : 入場料

表は、システムに登録した初期セットが持つ問題パターンを示している。左のセット 1 には基本的な解法を持つ問題のみが含まれ、右のセット 2 には追加操作を持つ複雑な問題が含まれている。運用実験では、これらの初期セットに登録したシステムを、参加者に操作させた。

実験 1 の参加者は文系の大学 1 年生 18 名で、そのうち 9 名にセット 1 を登録したシステム、残りの 9 名にはセット 2 を登録したシステムを操作させた。なお、参加者には実験の前に、初期セットの問題のうちの 3 問を

練習問題として与えて解かせ、参加者全員が対象領域の問題を解く能力を持つことを確認した。

### 実験 1 の結果

表 3.5 に、各問題に対して適切に修正することができた参加者数を示す。表に示される通り、変更生成の問題の修正は、セット 1 の参加者 9 名、セット 2 の参加者 9 名のいずれも全員が適切に行うことができたが、新規生成の問題の修正は、適切に行うことができなかった参加者も多い。特に問題 C-1・C-3 に対しては、適切な問題文を入力できた参加者は 1 名のみである。C-1 は動作実験において示した新奇な問題 outputQ と同一の問題である。新奇な問題であるために、参加者が適切な問題文を作成することができなかった可能性が考えられる。C-1 の問題に対して、参加者が入力した不適切な問題文の例を示す。

鉛筆 1 本とボールペン 1 本ずつ買ったとき、代金は合計  $W_1$  円である。 $a_4$  円分のお金で鉛筆を買い、 $b_4$  円分のお金でボールペンを買ったとき、合計  $W_5$  本買うことができた。鉛筆とボールペンはそれぞれ何円か。

この問題文から導かれる解法は、以下の通りである。

$$\begin{aligned} x + y &= W_1 \\ \frac{a_4}{x} + \frac{b_4}{y} &= W_5 \end{aligned}$$

これは、outputQ のものとは異なる。この例のように、参加者が入力した不適切な問題文は全て、output の問題と異なる解法を持つものであった。

表 3.5: 適切な修正を行った参加者数

		(左：セット 1, 右：セット 2)		
		解法		
		A	B	C
状況	1	9	9	1
	2	9	9	9
	3	9	9	1

		解法		
		A	D	E
状況	1	9	9	5
	2	9	5	3
	3	9	6	9

灰色のセルは新規生成、無地のセルは変更生成の問題であったことを示している。実験 1 の参加者は、変更生成の問題を修正することができたが、新規生成の問題を適切に修正することができなかった。

この結果から、一般の大学生を教師ユーザとした場合、システムが有効な知識を学習できることは確認されなかった。そこで、次の実験 2 では、専門家を教師ユーザとした運用実験を実施する。

### 実験 2

実験 2 では、この領域の専門家として、数学を専攻している大学院生 3 名、および、高校で数学を教育している教師 1 名の合計 4 名が実験に参加した。システムに登録する初期セットは、実験 1 のセット 1 とセット 2 をマージしたセットを用いた。実験 2 では、システムに問題生成を行わせたい際、新規生成の問題のみを提示するようにシステムを設定した。そして、参加者にシステムを操作して問題の修正を行うことを課題として依頼した。

### 実験 2 の結果

実験 2 では、参加者全員が全ての問題を適切に修正することができた。この結果から、領域専門家を教師ユーザとした場合、システムが有効な知識を学習できることが確認された。

### 考察

実験 1 においては、一般大学生が教師ユーザとなって本システムとのインタラクションを行ったが、ユーザが適切に問題を修正できないケースが多くみられた。このため、一般大学生とのインタラクションを行ったシステムは、不適切な知識を獲得し、不適切な問題を生成してしまう可能性が考えられる。実験 2 では、数学の専門知識を持ち、数学能力が十分に高いと考えられる教師ユーザが本システムとのインタラクションを行い、全ての問題を適切に修正した。この結果から、本システムが問題生成を実行するためには、十分な数学能力を持つ教師ユーザが必要であることが判明した。

## 3.4 結言

本章では、数学文章題の領域において、類題解決学習で事例として使用する問題を自動生成するシステムを実現した。システムの実現にあたっては、設計要件 2 に従い、状況と解法の 2 つの属性において構造化された問題データベースを生産する手法を提案した。本システムは、1) 作問を事



例化した作問エピソードを利用する, 2) 教師ユーザとのインタラクションを行うという方法により, システムに登録された問題から新しい問題を生成し, 問題の多様性を増殖する機能を持つ. そして, 本システムの実験的評価により, 本システムは実際に問題の多様性を増やすことが可能であることが確認されたものの, 十分な数学能力を持つ教師ユーザを必要とすることが判明した. 次に行うべき重要な課題の1つは, 本システムによって供給される問題データベースが, 実際の数学学習支援において有効であるかどうかを確認することである.

## 第4章 事例作成支援システム

### 4.1 緒言

本章では、数学文章題の作問学習において、人間が新しい事例（問題）を作成することを支援する方法の検討、および、システムの実現を行う。既に述べたように、学習者が問題を作り出す作問学習においては、学習者自身が知っている例題や類題に差異を与えて、多様な問題を作成することが望まれる。しかし、そのことは学習者にとって困難を伴う。ここでは、第1章において導出した、類題解決学習支援を実現するための設計要件を応用し、作問学習を支援する方法を検討するとともに、作問を支援するシステムを構築する。なお、本章においてのみ、「問題解決」は全て「数学的問題解決」を指す。

### 4.2 作問支援の検討

数学においては、問題を解くことだけでなく、「問題を作ること」も重要な活動であり、学習者自身が作問を行うことによる学習の重要性が、数学者や数学教育者によって指摘されている [English 1997b, Polya 1954, Silver 1994]。ただし、作問と問題解決とは全く異なる認知活動ではなく、両者には密接な関係がある。問題解決と作問のパフォーマンスの間には相関が見られることや、作問を行うことで問題解決が促進されることが、実験や調査を通じて報告されている（たとえば、[Ellerton 1986, 荷方 2005, Silver 1996]）。学習者に作問を行わせることには様々な意義があり、問題解決能力を向上させる、柔軟な発散的思考を促進する、誤概念を認識させる、数学に対する価値観や態度を改善する、などといった効果があると考えられている [English 1997b, Silver 1994]。

作問は、必ずしも特殊な活動ではない。たとえば、数学や科学では、既知の結果の一般化や現在の仮説に対する推測、大規模な問題を解決するための副問題の提起などにおいて、作問が起こることがあり [Silver 1994]、こうした分野は、先駆者による作問とその解決によって進捗してきたと捉えることができる [Mestre 2002]。自分自身で作成した問題を解くこともしばしば行われるが、このことは、数学者や科学者だけに限らない。日常

生活で数学を使用する場合は、基本的に問題が他者から与えられることはなく、必要とする解を得るための問題は、問題解決者自身が作成しなければならない。学校教育において作問の指導はあまり行われていないが、日常生活における問題解決のための教育という観点からも、作問教育の必要性が指摘されている [石田 1983]。

また、作問は創造的生成課題の側面を持っており、しばしば創造性との関わりが論じられる。本章ではこの点に注目し、作問を支援する方法を検討する。

#### 4.2.1 創造的生成課題としての作問

作問には、新しい問題を生成することと、与えられた問題を再構成することという、2つの意味がある [Silver 1994]。前者の場合、作問は可能な解（作成される問題）を複数持つ発散的課題である。すなわち、作問は産出的な思考を必要とする、創造的生成課題の側面を持つとみなすことができる。そのため、作問は思考の流暢さ、柔軟さ、独創性を測定する創造性テストの課題としても用いられており [Sternberg 1999]、しばしば創造性との関わりが論じられる [Leung 1997a, Silver 1994]。しかし、作問と創造性との関係は明確ではない。[Leung 1997b] は、教師候補者を対象に、作問、数学知識、言語的創造性を測定した結果、作問は数学知識と関係があり、言語的創造性とは関係がなかったことを報告している。ただし、Leung らが測定した作問のパフォーマンスは、作成された問題の数学的な質と複雑さである。創造的生成課題としての作問の検討は、あまり行われていない。

作問による学習では、似たような問題を作り続けること自体には意義がない [Hirashima 2006]。柔軟な発散的思考を育てるために、学習者には広範な問題の作成を行うことが望まれる。しかし、初学者の作問は多様性に欠けることが指摘されている。[English 1998] は、小学校の算数教育において作問プログラムを実施し、数学的文脈（数式）と非数学的文脈（物語や絵など）からの作問を児童に行わせた。その結果、数学的・非数学的文脈の双方において、児童は限られた範囲の問題しか作成しなかったことを報告している。

[Mestre 2002] は、力学の領域において、大学生に文脈と物理法則に関する情報を与えて作問を行わせる実験を行った。この実験において、大学生の文脈と法則の結びつけは狭く、典型的な問題（教科書や講義によく登場するもの）がより多く作成された。これらのことから、多様な作問は難しく、学習者の作問に多様性を与えるための支援が必要であると考えられる。

創造的生成課題を支援する方法としては、事例の提示が挙げられる。新しい製品の設計やプロジェクトのコンセプト形成などの創造的生成において、人は過去の経験や既存の例を事例として利用することが知られている。そのため、製品のライブラリを構築して検索したり、アイデアの例を生成することで、創造的生成を支援する様々なシステムが提案され、実装されている（たとえば、[Domeshek 1994, Maher 1996, 折原 1994, Restrepo 2005, Young 1987]）。本章では、作問の創造的生成課題としての側面に焦点を置くことから、事例の提示による支援を検討する。

### 4.2.2 作問支援のための事例提示

通常、作問においては、どのような問題を作ってもよいということはない。作成者は、課題の条件や要求に沿った上で、問題における文脈と、解法の重要概念や構造とを適切に選ばなければならない。そのため、作問において作成者には、広範な状況へ解法を適用する能力が要求される [Mestre 2002]。すなわち、作問においても、状況と解法という 2 つの属性は、重要な要因である。

さらに、作問においては、問題の重要な要素、および、要素間の関係を認識することは重要であり [English 1997b, Leung 1997b]、この点も問題解決と同様である。既に述べたように、作問と問題解決とはお互いに密接な関係にある認知活動であるため、問題解決を支援する方法は、作問の支援に適用しても有効に働く可能性がある。すなわち、第 1 章で論じた、学習者に状況と解法の 2 つの属性を統制して問題の事例を与え、事例間の比較を行わせることで、学習者のスキーマ構築を導く支援である。このことは、状況と解法の統制によって多様な作問を行うことを、学習者に意識させる手段となり得ると考えられる。これは、作問という創造的生成課題において、学習者の発散的思考を促進する手段となり得る、と言い換えることもできる。この仮説に基づき、本章ではまず、作問において、状況と解法における類似性を統制した事例を提示することの効果をも、実験的に調査する。

### 4.2.3 課題形式

作問は、与える材料や制約により、様々な課題形式を取ることができる。たとえば、[English 1998] の作問プログラムでは、与えられた数式で解ける問題を作成する、ある写真の中に含まれる情報に基づいて問題を作成する、といったような課題形式が用いられている。

本章では、例からの問題作成という課題形式を採用する。具体的には、作成者に例題を与え、この例題を学習した生徒の練習に類題として利用で

きる問題の作成を要求するという形式である。この課題では、材料として与えられる例題に含まれる情報だけでは、新しい問題を作成することができないため、何らかの意味において新しいアイデアを生成する必要性が生じる。新しいアイデアの生成には、状況の想起と解法の操作の両方が含まれる。そして、第三者が作問を評価する際には、生成された問題と例題との類似性を判定することで、例題に差異を与える作問が行われたかどうかを判断することができる。したがって、作問の多様性を評価することが容易である。

本課題では、問題は以下の3種類に分類される。

- 例題

課題において、基本として提示される問題である。類題解決においては、例題は解法の教示に用いられるが、ここでは、課題の問題領域を示すために用いられる。

- 作成問題

作成者によって、例題から作り出される新しい問題である。

- 事例

課題実行時に、作成者に与えられる問題である。基本的に、事例の提示は作問を支援することを意図して行われる。

作成問題は、状況と解法とを区別して例題との類似性を判定し、図 4.1 に示すカテゴリを用いて評価する。各カテゴリの名称は、たとえば例題と状況が同一で解法が異なる問題は「同状・異解」というように、状況・解法の順に例題と同一であるか異なるかを示している。カテゴリ同状・同解は例題と同じような問題、カテゴリ異状・同解は例題の状況を変更することで作成される問題、カテゴリ同状・異解は例題の解法を変更することで作成される問題、カテゴリ異状・異解は状況と解法の変更を組み合わせで作成される問題ということになる。

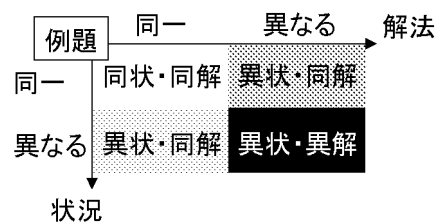


図 4.1: 作成問題の評価のためのカテゴリ

図の縦軸は状況、横軸は解法の特徴を示している。作成問題のカテゴリは、例題と状況・解法における類似性を判定することで決定される。

## 第 4 章

なお、本章の問題領域には、第 3 章と同じ、鶴亀算型の文章題を採用する。そして、作問課題における例題には、以下に示す例題 A を使用する。

例題 A) 60 円のみかんと 120 円のりんごを合計 12 個買った、代金が 1020 円であった。りんごとみかんをそれぞれ何個買ったか。

解) みかんを  $x$  個, りんごを  $y$  個とおくと,

$$x + y = 12$$

$$60x + 120y = 1020$$

よって,  $x = 7, y = 5$

例題 A を使用した場合の各カテゴリの問題の例は、図 4.2 に示す通りである。これらの問題は、後述の実験的調査において、事例として使用される。

	例題	$x + y = W_1$ $ax + by = W_2$	$a_1x + b_1y = W_1$ $a_2x + b_2y = W_2$	解法
買物	同状・同解1: 80 円の柿と 100 円の桃を合計 8 個買った、代金が 720 円であった。柿と桃をそれぞれ何個買ったか。	同状・同解2: 用紙が 30 枚のメモ帳と 40 枚のメモ帳をあわせて 5 冊買った、用紙は 170 枚になった。それぞれ何冊買ったか。	異状・同解: 柿を 3 個と桃を 4 個買うと、代金は 640 円である。柿を 7 個と桃を 3 個買うと、代金は 860 円である。柿と桃はそれぞれ何円か。	
	異状・同解: A 市から B 駅経由で 195 km 離れた C 市まで行くのに、A 市から B 駅までは時速 50 km のバスで、B 駅から C 市までは時速 80 km の電車で行ったら 3 時間かかった。A 市から B 駅まで、B 駅から C 市までにかかった時間はそれぞれ何時間か。			
乗物で移動			異状・異解: A 地点から 230 km 離れた B 地点へ行くには、バスに 3 時間、電車に 1 時間乗ることになる。また、A 地点から 260 km 離れた C 地点へ行くには、バスに 2 時間、電車に 2 時間乗ることになる。バスと電車の速さは時速何 km か。	
状況				

図 4.2: 各カテゴリの問題の例

図は、例題 A を使用した場合の各カテゴリの問題の例である。図の縦軸は状況、横軸は解法の特徴を示している。

## 4.3 実験的調査

本調査では、作問において事例を提示することの効果を確認した。調査にあたっては、参加者に例題から新しい問題を生成することを課題として要求した。この時、状況と解法の 2 つの属性における類似性を統制して作成した事例を、参加者に提示した。参加者の作成問題は、例題との類似性に基づいて評価された。そして、作成問題と事例のカテゴリとの関係に基づき、事例提示の効果を検証した。

### 4.3.1 方法

本調査は、造形心理学の講義を受講する大学生 145 名を参加者とし、集団形式で実施された。調査の手続きは、以下の通りであった。

#### 手続き 1 例題の提示

参加者に例題 A を提示し、この例題を解かせた後、正答を示した。

#### 手続き 2 問題の作成（1 回目）

参加者に、例題 A から問題を作成させた。作成した問題は、与えられた用紙に問題文と解法を記述するよう求めた。

#### 手続き 3 事例の提示

参加者に事例を 3 問提示し、実験者が指示する 1 問を解かせた後、正答を示した。

#### 手続き 4 問題の作成（2 回目）

参加者に、例題 A からもう 1 問の問題を作成させた。2 回目の作問では、手続き 3 で提示された事例を参照することが可能であったが、作問においてそれらの事例を使うように促す指示は行っていない。

また、参加者の作成問題は、例題 A との類似性を判定し、図 4.1 に示すカテゴリに従って評価された。

### 4.3.2 条件群

本調査では、参加者を 6 つの条件群にランダムに割り当て、手続き 3 において異なる事例を与えた。各条件群と事例として与えられた問題は、以下の通りである。

**同状・同解 1 事例群** 例題と状況・解法とも同一の問題

**同状・同解 2 事例群** 例題と状況・解法とも同一だが、問題文のパラメータは例題と異なる問題

**異状・同解事例群** 例題と状況は異なるが解法は同一の問題

**同状・異解事例群** 例題と状況は同一だが解法は異なる問題

**異状・異解事例群** 例題と状況・解法とも異なる問題

**統制群** 例題と類似する属性のない、幾何学の問題

なお、図 4.2 に示す各カテゴリの問題は、各条件群において提示した事例の 1 つである。

事例提示の効果は、参加者の 1 回目と 2 回目の作問の比較に基づいて検証した。状況と解法の類似性を統制する提示の効果は、2 回目の作問の条件間の違いに基づいて検証した。なお、事例なしで作問を 2 回行うことの影響を確認するため、事例として利用できない問題を受け取る統制群を設けた。

### 4.3.3 結果

以後の結果からは、授業に遅刻した 13 名、作問課題を完了できなかった 5 名、数学的に不適切な問題や、問題文と解法が一貫しない<sup>1</sup>問題を作成した 12 名を除外した。また、不等式などのように、例題 A とは異なる領域の問題を作成した 3 名も除外した。その結果、分析対象となった参加者の数は、同状・同解 1 事例群が 18 名、同状・同解 2 事例群が 20 名、同状・異解事例群が 16 名、異状・同解事例群が 23 名、異状・異解事例群が 17 名、統制群が 18 名であった。

図 4.3 に、1 回目の作問における各カテゴリの作成問題の割合を示す。図に示される通り、半数以上の作成問題がカテゴリ同状・同解だが、同状・異解事例群ではカテゴリ同状・同解が 50%以下で、カテゴリ異状・同解と同程度になっている。全体的には、事例が提示される前の段階では、例題と状況・解法とも同じ作成問題が多かったということになる。

図 4.4 に、事例が提示された後の、2 回目の作問における各カテゴリの作成問題の割合を示す。同状・同解 1 事例群、同状・同解 2 事例群、統制群では、1 回目と同様に 2 回目でも、半数以上の作成問題がカテゴリ同状・同解である。一方、異状・同解事例群、同状・異解事例群、異状・異解事例群では、1 回目と 2 回目は異なる傾向を示している。

---

<sup>1</sup>参加者の記述した解法が、参加者の問題文から実際に導かれるものと一致しない問題である。そのため、参加者がどのような問題の作成を試みたかが不明である。



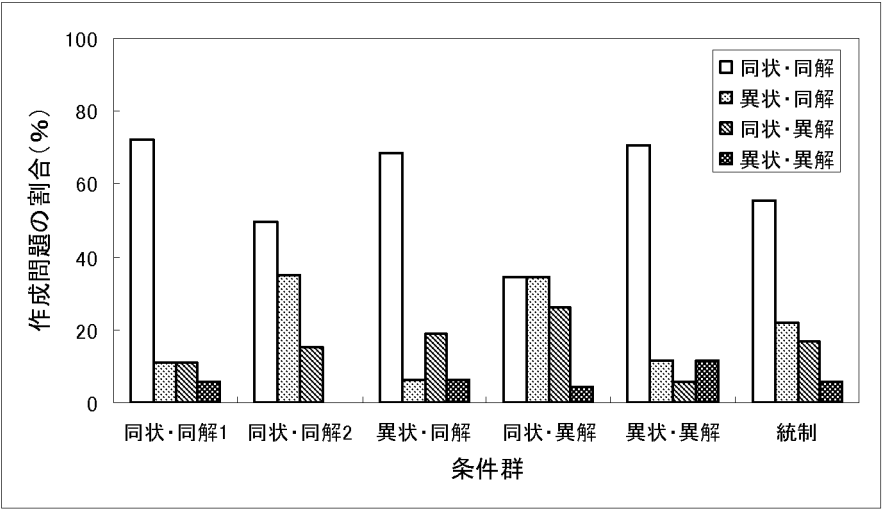


図 4.3: 各カテゴリの作成問題の割合 (1 回目)  
全体的に、カテゴリ同状・同解の作成問題が多かった。

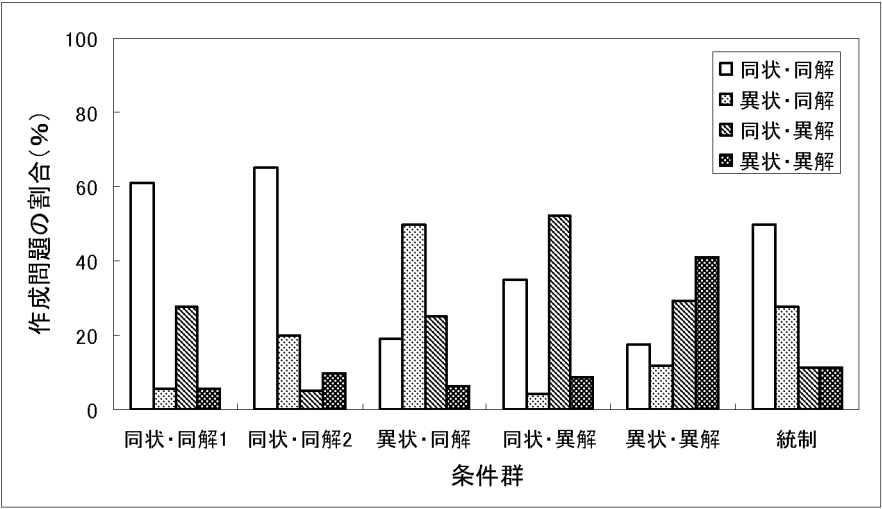


図 4.4: 各カテゴリの作成問題の割合 (2 回目)  
同状・同解 1 事例群、同状・同解 2 事例群、統制群は 1 回目と同様にカテゴリ同状・同解が多かったのに対し、異状・同解事例群、同状・異解事例群、異状・異解事例群は 1 回目と異なる傾向を示している。

$\chi^2$  検定により、各条件群の 1 回目と 2 回目の各カテゴリの作成問題の数を比較したところ、同状・同解 1 事例群 ( $\chi^2(3) = 1.79$ )、同状・同解 2 事例群 ( $\chi^2(3) = 4.21$ )、統制群 ( $\chi^2(3) = 0.70$ ) では差が認められないが、異状・同解事例群 ( $\chi^2(3) = 10.16, p < .05$ )、異状・異解事例群 ( $\chi^2(3) = 10.84, p < .05$ ) では差が認められ、同状・異解事例群 ( $\chi^2(3) = 7.78, p < .10$ ) では差に傾向が認められた。残差分析の結果、異状・同解事例群においては、1 回目のカテゴリ同状・同解と 2 回目のカテゴリ異状・同解が有意に高く、1 回目のカテゴリ異状・同解と 2 回目のカテゴリ同・同が有意に低かった。同状・異解事例群においては、1 回目のカテゴリ異状・同解が有意に高く、2 回目のカテゴリ異状・同解が有意に低かった。異状・異解事例群においては、1 回目のカテゴリ同状・同解が有意に高く、2 回目のカテゴリ同状・同解が有意に低かった。この結果から、作問において、事例提示は影響を与えること、異なる事例は異なる効果を持つことが確認された<sup>2</sup>。

#### 4.3.4 考察

図 4.3, 4.4 に示した結果より、異なる事例は作問において異なる効果を持つことが確認された。異状・同解事例群、同状・異解事例群、異状・異解事例群においては、提示された事例のカテゴリと一致する作成問題のカテゴリの割合が 2 回目の作問で増えている。したがって、事例提示は、例題と事例との間の差異や関係性を学習させる効果を持つ可能性が考えられる。

しかし、参加者は単に事例を複製し、提示された事例と似た問題を作っただけであったという可能性も考えられる。たとえば異状・同解事例群において、事例と同一の状況と解法を持つ作成問題は、もちろん例題とは異なる状況を持つため、カテゴリ異状・同解の問題として評価される。しかし、このような作問が行われていたとしたら、例題と同じ問題を作る場合と本質的な違いはなく、事例は発散的な作問を促進してないことになる。そこで、参加者が事例を複製していたか否かを検証するために、参加者の作成問題と事例との比較を行った。図 4.5 に、事例の複製とみなされる作成問題の割合を示す。図において、「複製」は学習した事例と状況、解法の双方が同一の作成問題、「非複製」は事例と同じカテゴリだが、状況か解法のいずれかは事例と異なる作成問題の割合を表している。図に示される通り、複製の作成問題もあるが、異状・同解事例群、同状・異解事例群、異状・異解事例群では、非複製の作成問題が生成されている。つまり、これらの条件群では、新しいアイデアの生成を含む作問がより多く行われた可能性が考えられる。

<sup>2</sup>参加者の作成問題の一部を付録の C に示した。

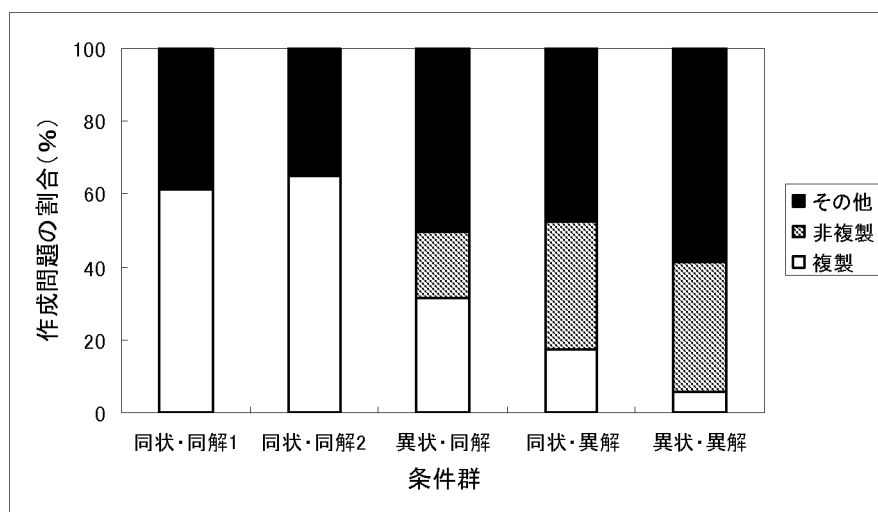


図 4.5: 事例を複製した作成問題の割合

図は、2 回目の作問において、提示された事例と同一の状況と解法を持つ作成問題（複製）、および、事例と同一のカテゴリだが状況か解法のいずれかは事例と異なる作成問題（非複製）の割合を示している。異状・同解事例群、同状・異解事例群、異状・異解事例群では、複製だけではなく非複製も生成されていた。

これらの結果から、状況と解法の 2 つの属性における類似性を統制した事例の提示は、作問における発散的思考を促進する手段として利用可能であると考えられる。そこで、本章では、作問課題において、学習者に類似性を統制して事例を提示するシステムの実装を行う。次節では、本システムの詳細について述べる。

## 4.4 事例作成支援システムの実装

本章で実装する事例作成支援システムは、学習者ユーザに対し、数学文章題の例題から新しい問題を作成する作問課題を与える。作問学習を支援するシステムの実現例には、平嶋らの一連の研究が挙げられる。平嶋らは、問題の状況と解法とを区別する計算機表現を定義し [平嶋 1992, Hirashima 1994]、この表現を用いて、指定された解法で解決可能な問題を作成する作問課題を学習者ユーザに与えるシステムを実装している [中野 2000, 中野 2002, Hirashima 2006]。平嶋らのシステムは、ユーザに問題解決で用いる数学概念を理解させたり、ユーザの問題理解における情報統合を促進することに焦点を置いており、システムの使用を通じてユーザの作問や問題解決が改善されることを実験的に確認している [中野 2004, Hirashima 2006]。

平嶋らのシステムは主に小学生を学習者ユーザとして想定しているため、小学生でも実行できる単純な課題形式を採用している。そのため、システムに用意されたテンプレートで扱うことができる問題しか作成できないという制限がある。これに対し、本章では、特に作問の創造的生成課題としての側面に注目し、学習者ユーザの発散的思考を促進することを目標とする。そのため、ユーザの作問における発散的思考を促進した上で、ユーザが比較的自由に作成した問題を受理できるシステムを実現しなければならない。

また、作問におけるユーザの思考の促進には、状況と解法の 2 つの属性を統制して多様な事例を提示する方法を採用する。そのため、これらの属性における類似性を統制して事例を検索・提示する方法、および、これらの属性において多様性を持つ問題のデータベースが必要になる。そこで、本システムの構築にあたっては、第 2 章で試作した事例検索システムの類題提示手法を実装する。また、第 3 章で実装した事例自動生成システムを組み込み、その問題データベースを利用する。

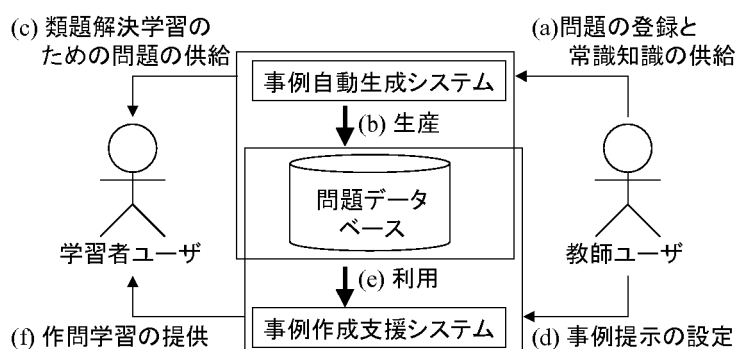


図 4.6: 事例作成支援システムのユースケース

本システムは、学習者ユーザに作問学習を提供する (f)。本システムは、事例自動生成システムのデータベースを利用して (e)、学習者ユーザに事例を提示することができる。事例提示の方法は、教師ユーザが設定する (d)。

図 4.6 に、事例作成支援システムのユースケースを示す。事例自動生成システムとは異なり、本システム自体は新しい問題を生成する機能を持たない。本システムは、学習者ユーザが入力する問題を自動的に認識する機能、および、ユーザに対して事例の提示を含むフィードバックを行う機能を持つ。これらの機能を用いて、本システムは学習者ユーザに作問学習を提供する (図の f)。本システムは、事例自動生成システムによって構築されたデータベースを利用する (e) ことで、多様な事例の提示が可能であるが、具体的な事例提示の方法は教師ユーザが設定することを想定して

いる (d)。

本システムの問題領域は、連立方程式の文章題である。システムの実装においては、問題を入力するインタフェースを個別の領域毎に用意する必要があるが、本章で提案する手法は、状況を表す問題文を持ち、方程式で解決することが可能な文章題の問題領域であれば、一般的に利用可能であると考えられる。

#### 4.4.1 システムの構成

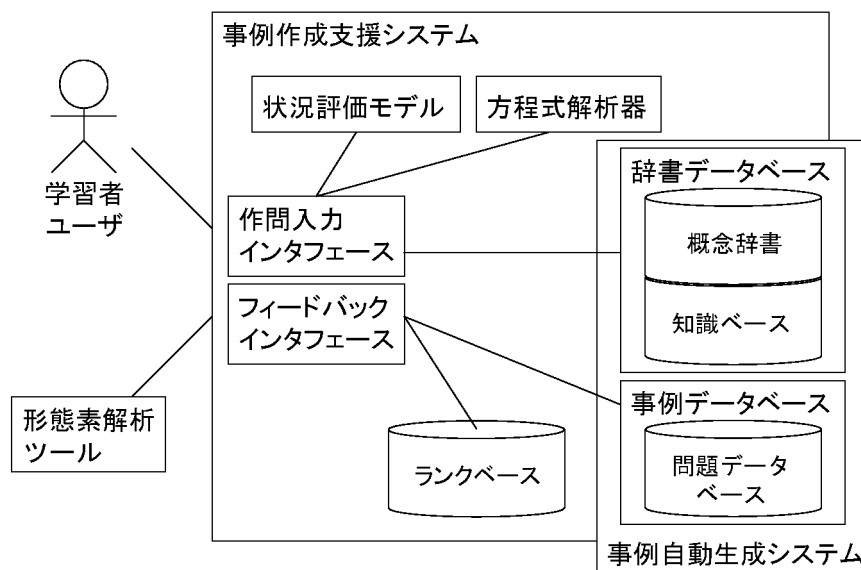


図 4.7: 事例作成支援システムの構成図

図 4.7 に、事例作成支援システムの構成図を示す。本システムは、学習者ユーザが問題を作成して入力を行うための「作問入力インタフェース」と、ユーザの作問に対する評価と事例の提示を行う「フィードバックインタフェース」という 2 つのユーザインタフェースを持つ。「状況評価モデル」はユーザの作問の状況を推定するために、「方程式解析器」は解法式を解析するために、作問入力インタフェースにおいて利用される。また、問題に使用される単語を認識するための「辞書データベース」、および、問題データベースを持ち、事例として提示する問題の供給を行う「事例データベース」は、事例自動生成システムより統合したコンポーネントである。そして、「ランクベース」には、事例提示を決定するためのランクが蓄積されている。事例自動生成システムの問題データは 3 層リスト形式で

特徴付けがなされているため、状況と解法の特徴を区別して処理することが可能である。

### 4.4.2 システムの実行手順

事例作成支援システムを実行するにあたっては、まず事前準備として、教師ユーザが事例自動生成システムを実行し、問題を生成して問題データベースに蓄積する。これは、図 4.6 の (b) に相当する。本システムの実行時には、十分な量と多様性を持つ問題データベースが用意されていることが前提となる。

#### 学習者ユーザの作問の認識

学習者ユーザが事例作成支援システムを利用して作問を行う際には、システムはまず例題を提示し、ユーザに新しい問題を作成するよう促す。ユーザは、1) 問題文に登場するオブジェクト（りんご、鉛筆など）の入力、2) 問題文に登場し、解の導出に必要な数値とその単位・助数詞の入力、3) 解法の方程式の入力、4) 問題文の入力という手順により、作問入力インタフェース上で作成した問題をシステムに入力する。図 4.8 に、問題入力インタフェースの実行画面を示す。手順 3 において、システムは方程式解析器を用いてユーザの入力した方程式を実際に解き、不適切な場合<sup>3</sup>は修正を促す。また、手順 4 の問題文の入力においては、システムは問題が成立するために必要なキーワードと数値をリストアップし、ユーザはそれらを問題文にコピーすることができる（図 4.8 の 5）。これらの機能は、ユーザが不適切な方程式と問題文を入力しないように支援することを意図して提供されている。

ユーザが作成問題の入力を完了すると、システムは問題の特徴を抽出し、自動的に認識する。この認識では、システムはユーザの入力を解析し、表 3.1 に示したような問題データを構築する。d-prop レイヤーのインデックスの値は、ユーザが入力した方程式の解析から得られる。instance レイヤーの値は、先述の手順 1 と 2 においてユーザが入力した情報から得られる。そして、class レイヤーの「状況」は、ユーザが入力した問題文に含まれるキーワードからの推定によって得られる。この自動認識により、システムの利用にあたっては、ユーザがシステムのデータ表現を意識する必要はない。

---

<sup>3</sup> 方程式が解を持たない場合か、解が一意に定まらない場合のどちらかである。

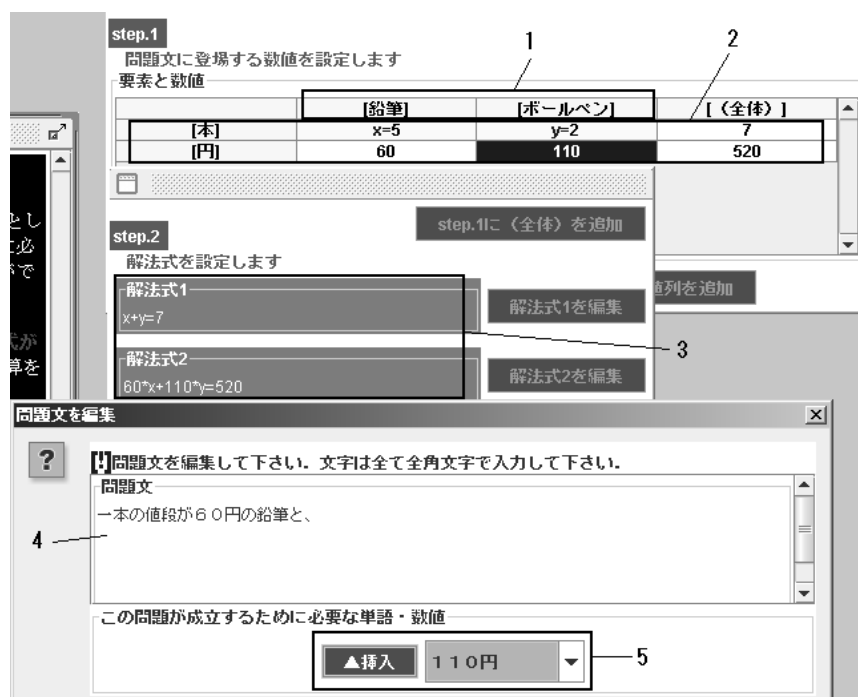


図 4.8: 作問入力インターフェースの実行画面の一部

図は、学習者ユーザが作成問題のオブジェクト (1)，数値と助数詞 (2)，方程式 (3) を入力した後，問題文 (4) を入力しているところである。

システムが学習者ユーザの作成問題を自動認識する際、状況の推定は、状況評価モデルを用いて行われる。状況評価モデルは、システムにより、問題データベースに登録されている問題から問題文の自立語を切り出して自動的に構築される。状況評価モデルは、「買物」や「乗物での移動」といった各々の状況を表すモデルからなる。各状況のモデルは、それを持つ全ての問題の問題文に含まれる自立語によって表現される。システムは、ユーザの入力した問題文に含まれる自立語から、状況評価モデルを用いて各状況との類似度を算出することで、ユーザの作成問題の状況を推定する。この類似度の算出は、tf/idf を変形した重み計算を用いて行われる。

状況評価モデルにおいて、状況  $S_j$  の特徴は、以下のように表される。

$$S_j = (m_{j1}, m_{j2}, \dots, m_{jL})$$

ここで、 $L$  はモデルに含まれる自立語の総数、 $m_{ji}$  は状況が  $S_j$  で、モデルに含まれる自立語  $T_i$  を問題文に持つ問題の数である。そして、ユーザ

の作成問題  $P$  と、モデルにおける状況  $S_j$  との類似度  $sim(P, S_j)$  は、

$$sim(P, S_j) = \sum_{i=1}^L (w_{Pi} \times w_{ji})$$

によって計算される． $w_{Pi}$  は、 $T_i$  が  $P$  の問題文に含まれる時に 1，含まれない時に 0 となる値である． $w_{ji}$  は、状況  $S_j$  における  $T_i$  の重みであり、

$$w_{ji} = \frac{m_{ij}}{M} \times \log_{10} \frac{N}{n_i}$$

によって与えられる．ここで、 $N$  は状況評価モデルに含まれる状況の種類数、 $n_i$  は  $m_{ki} > 0 (k = 1, 2, \dots, N)$  である状況  $S_k$  の数、 $M$  は状況が  $S_j$  である問題の数である．この方法により、システムは作成問題と状況評価モデルに含まれる各状況との間で  $sim(P, S_j)$  を算出し、最も高い類似度を示したものを作成問題の状況であると推定する．

なお、この方法では、問題データベースに含まれない状況を推定することはできない．本システムでは、問題データベースに典型的な状況を持つ問題を網羅的に登録し、その他の状況を持つ問題は何らかの意味で新奇であるとみなすことを仮定している．そのため、状況の推定を行った後は、結果をユーザに示して確認を行い、不適切な場合や推定に失敗した場合は、ユーザに状況の設定を要求する．

## フィードバック

事例作成支援システムが作成問題の認識を完了すると、続いて学習者ユーザに対するフィードバックが行われる．図 4.9 に、フィードバックインタフェースの実行画面を示す．システムはまず、ユーザの作成問題と例題との間で、状況と解法における類似性を判定し、図 4.1 と同じ表現を用いて、作成問題のカテゴリを評価としてユーザに示す（図 4.9 の 1）．作成問題のカテゴリの決定は、ランクを用いて、状況と解法が同一か異なるかを判定することで行われる．表 4.1, 4.2 に、状況と解法それぞれを判定するためのランク<sup>4</sup>を示す．作成問題の状況や解法が例題と同一であるとみなされるのは、それぞれに対するランクの類題群条件が充足された時である．そして、状況と解法それぞれの類題群条件が充足されたか否かに基づいて、作成問題のカテゴリが決定される．

続いてシステムは、問題データベースから問題を検索し、事例としてユーザに提示する．この時、ユーザの作成問題と同様に、事例のカテゴリ

<sup>4</sup>表の制約における「cof index:layer」は、レイヤー layer に属し、名前に index を含む全てのインデックスの値の組み合わせが等しい時に充足される制約であり、「nof index:layer」は、同様のインデックスの数が等しい時に充足される制約である．



#### 4.4. 事例作成支援システムの実装

も示される（図 4.9 の 2）。これは、ユーザに問題間の比較を行うよう促すとともに、比較を支援することを目的として行われる。事例は、ユーザの作成問題のカテゴリに基づいて提示される。たとえば、作成問題と同じ解法を持つが状況が異なる事例や、逆に作成問題と同じ状況を持つが解法が異なる事例を提示するといったように、本システムは状況と解法の類似性を統制して、様々な事例を提示することができる。さらに、最適化ランクにより、指定された類似性を持つ事例の中から、作成問題とより類似するものや、より異なるものを選ぶこともできる。システムにどのような事例を提示させるかは、システムの設定により自由に統制することができる。この事例提示の設定は、図 4.6 における d に相当し、基本的に教師ユーザが行うことを想定している。

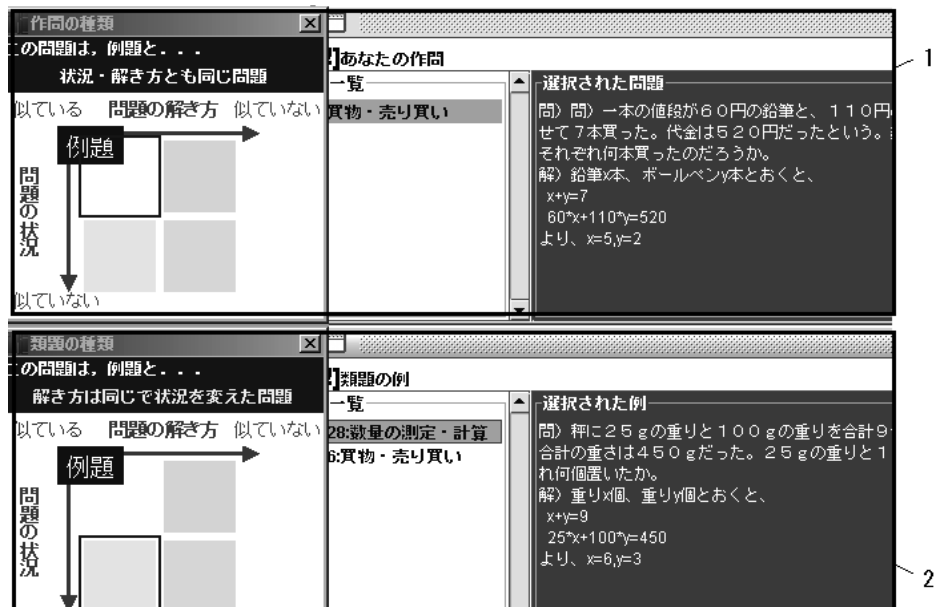


図 4.9: フィードバックインターフェースの実行画面の一部

図は、学習者ユーザが作成問題の入力を完了した後、システムがフィードバックを行ったところである。ユーザの作成問題とその評価は上のウインドウに（1）、システムが事例として提示した問題は下のウインドウ（2）に示されている。

表 4.1: 状況を判定するためのランク

	制約
類題群条件	状況:class
	オブジェクト:class
最適化	cof プロパティ:instance
ランク	cof オブジェクト:instance
	動詞:instance

システムが問題のカテゴリを決定する際に使用するランクの 1 つである。このランクは、問題間で状況が同一か否かを判定するために使用される。

表 4.2: 解法を判定するためのランク

	制約
類題群条件	cof 標準形:d-prop
	cof 追加操作:d-prop
	nof オブジェクト:instance
最適化	nof プロパティ:instance
ランク	nof パラメータ:instance

システムが問題のカテゴリを決定する際に使用するランクの 1 つである。このランクは、問題間で解法が同一か否かを判定するために使用される。

上述のように、事例作成支援システムにおいては、学習者ユーザが作問を行い、システムがそれを評価すると同時に事例を提示する、という手順を繰り返すことになる。提示される事例を比較・検討しながら作問を行っていくことで、ユーザの発散的思考が促進され、様々な問題を作成できるようになることが期待される。

## 4.5 実験的評価

本システムは、1) 運用、すなわち、本システムは学習者ユーザの作問をどの程度認識することができるか、2) 支援効果、すなわち、本システムを使用して作問を行うことにより、ユーザの多様な作問が促進されるか、という 2 点において評価される必要がある。また、システムの効果的な運用方法を模索するためには、事例提示における類似性の統制と支援効果との関係も、あわせて検討する必要がある。そこで、参加者に学習者ユーザ

として本システムを使用させ、例題 A からの作問課題を行わせる実験的評価を実施した。

#### 4.5.1 方法

評価の実施に際して、著者があらかじめ事例自動生成システムに市販の問題集から得た 24 問の問題<sup>5</sup>を登録し、教師ユーザとしてシステムに問題生成を行わせ、75 問の問題を含む問題データベースを作成した。このデータベースに含まれる問題状況の種類数は、12 であった。

本評価の作問課題には、大学生 68 名が個人、または 2 人か 3 人のグループ単位で参加した。課題の実施手続きは以下の通りであった。

##### 手続き 1 事前テスト

参加者に、以下の一元一次方程式の文章題の例題 B を提示し、例題から問題を 2 問作成させた。

例題 B) 子供たちに飴を分ける。1 人に 5 個ずつ分けると 3 個余り、1 人に 6 個ずつ分けると 5 個足りないという。子供は何人いるか。

解) 子供の数を  $x$  人とする、

$$5x + 3 = 6x - 5$$

より、 $x = 8$

##### 手続き 2 システムを用いた作問

参加者に、本システムを用いて例題 A から問題を 2 問作成させた。

なお、作問の前に、参加者に例題 A をシステムに入力させることで、システムの操作を練習させた。

##### 手続き 3 事後テスト

参加者に、例題 B から別の問題を 2 問作成させた。

##### 手続き 4 アンケート

参加者に、システムの操作と作問についてどの程度難しく感じたかを、1 を難しい、5 を容易とする 5 段階の尺度を用いて評価させた。

このような手続きにより、参加者の事前テストと事後テストの作問がどのように変化するかを見ることで、本システムを用いて作問を行うことの効果を検討した。なお、参加者の作成問題は、4.3 節の実験的調査と同様に、図 4.1 に示すカテゴリに基づいて評価された。

<sup>5</sup>基本的に、第 3 章の実験的評価で使用したマージセットから、例題 A に対しカテゴリ同状・異解とカテゴリ異状・同解となる問題を抽出し、1 つの問題パターンにつき 1 問ずつを選んで得た問題である。ただし、状況の種類数を増やすために、数学の Web サイトから得たカテゴリ異状・同解の作成問題を 2 問加えた。

#### 4.5.2 条件群

ここでは、事例提示を用いるシステムの効果的な運用方法を模索することを目的として、どのような事例の提示がどのような効果を持つかを、あわせて検討した。[Smith 1993] は、創造的生成において人間は似通った例を見せられると、例に制約され、その例と似たものばかりを生成するようになることを実験的に確認しており、これを例による同調効果と呼んでいる。さらに、4.3 節の実験的調査において、同状・同解 1 事例群と同状・同解 2 事例群の参加者が、事例を提示された後の 2 回目の作問においてカテゴリ同状・同解の問題を多く作成していたことから、類似する事例ばかりを提示されると、事例に固着し、発散的思考が阻害されることが予想される。一方、4.3 節の実験的調査において、異状・同解事例群、同状・異解事例群、異状・異解事例群の参加者が、2 回目の作問においてカテゴリ同状・同解以外の問題を多く作成するようになったことから、何らかの意味で差異を持つ事例を見せられると、発散的思考が促進されることが予想される。これらの予想に基づき、手続き 2 において、事例提示を含むシステムのフィードバックを統制して条件群を設け、参加者をランダムに割り当てた。各条件群とフィードバックの設定は以下の通りであった。

**統制（事例なし）群** システムは参加者の作問に対し、一切のフィードバックを行わなかった。

**固着事例群** システムは参加者の作成問題のカテゴリを示すとともに、それと同じカテゴリに属する事例のうち、最も作成問題と類似するものを提示した。これにより、参加者の作問を強化するようなフィードバックが行われた。

**発散事例群** システムは参加者の作成問題のカテゴリを示すとともに、それとは異なるカテゴリに属する事例のうち、最も作成問題と異なるものを提示した。具体的には、参加者の問題がカテゴリ同状・同解かカテゴリ同状・異解である時にカテゴリ異状・同解の問題を、カテゴリ同状・異解かカテゴリ異状・異解の時にカテゴリ異状・同解の問題を事例として提示した。これは、例題の状況か解法のいずれか一方に差異を与える作問の事例を示すことを意図して行われた。これにより、参加者の作問とは常に異なる、多様なフィードバックが与えられた。

なお、例題 A から問題を作成すること自体の影響を確認するために、システムからのフィードバックを受け取らない統制群を設けた。

### 4.5.3 結果

#### 運用

課題の手続き 2 において、68 名の参加者からあわせて 133 問の作成問題が本システムに対して入力された。それらのうち、11 問 (8.3%) は問題データベースに含まれない未知の状況を持ち、本システムが認識することは不可能な問題であった。残りの 122 問は、問題データベースに含まれる状況を持っていたが、システムが認識に成功した問題は 105 問 (86.1%) で、認識に失敗した問題は 17 問 (13.9%) であった。システムが認識に失敗した問題は全て、状況の推定が適切に行われなかったことが原因であった。図 4.10 に、作成問題の認識の結果を示す。なお、システムが認識不可能な問題の場合、および、システムが認識に失敗した問題の場合の全てにおいて、実験者の指示に基づいて参加者が状況を修正入力したため、システムからのフィードバックは正しく受け取ることができた。

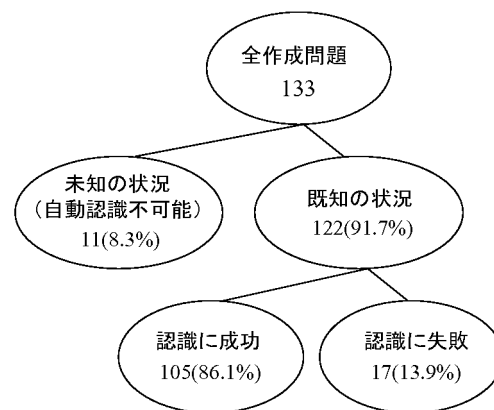


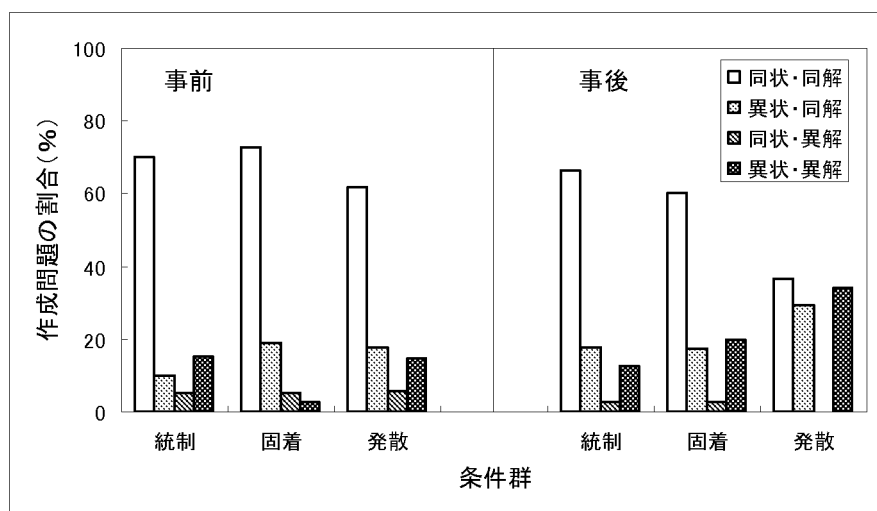
図 4.10: 作成問題の認識の結果

図は、参加者がシステムに入力した作成問題を、システムが認識することが不可能な問題（未知の状況）、システムが認識に成功した問題（認識に成功）、システムが認識に失敗した問題（認識に失敗）に分類したものである。

#### 支援効果

以後の結果からは、事前テストにおいて問題を 1 問も作成できなかった統制群の参加者 1 名を除外した。その結果、分析対象の参加者数は、統制群が 22 名、固着事例群が 22 名、発散事例群が 23 名であった。なお、数学的に不適切な問題や、例題とは異なる領域の問題は作成されなかった。

図 4.11 に、事前テスト、および、事後テストにおける各カテゴリの作成問題の割合を示す。事前テストでは、図の左のグラフに示されるように、全ての条件群においてカテゴリ同状・同解の作成問題が多くなっている。この結果から、本システムを用いた作問を行う前の段階では、例題と状況・解法とも同一の問題が生成されることが確認された。一方、事後テストについては、図 4.11 の右のグラフに示されるように、統制群と固着事例群では事前テストと同様にカテゴリ同状・同解の作成問題が多くなっているのに対し、発散事例群では事前テストと異なる傾向が見られる。 $\chi^2$  検定により、各条件群の事前テストと事後テストにおける各カテゴリの作成問題の数の比較を行ったところ、統制群 ( $\chi^2(3) = 1.30$ ) と固着事例群 ( $\chi^2(3) = 5.85$ ) では差が認めれないが、発散事例群においては差が認められた ( $\chi^2(3) = 8.69, p < .05$ )。残差分析の結果、事前テストのカテゴリ同状・同解が有意に高く、事後テストのカテゴリ同状・同解が有意に低いことが確認された。これら結果から、本システムを用いた作問を通じて、発散事例群の作問に変化が現れたことが確認された<sup>6</sup>。



(左：事前，右：事後)

図 4.11: 各カテゴリの作成問題の割合

事前テストでは、全ての条件群においてカテゴリ同状・同解の作成問題が多い。事後テストでは、統制群と固着事例群は事前テストと同様にカテゴリ同状・同解が多いが、発散群は事前テストと異なる傾向を示している。

<sup>6</sup>参加者が作成した問題の例を、付録の D に示した。

また、図 4.12 に、全参加者のうち、作成問題がカテゴリ同状・同解のみであった参加者<sup>7</sup>の占める割合を示す。図に示される通り、事前テストでは、どの条件群においても半数以上の参加者がカテゴリ同状・同解のみであるが、事後テストでは、発散事例群においてのみ、そのような参加者が減少している。 $\chi^2$  検定により、各条件群の事前テストと事後テストにおけるカテゴリ同状・同解のみの参加者とその他の参加者の数の比較を行ったところ、統制群 ( $\chi^2(1) = 0.10$ ) と固着事例群 ( $\chi^2(1) = 0.09$ ) では差が認められないが、発散事例群では差が認められた ( $\chi^2(1) = 4.57, p < .05$ )。残差分析の結果、発散事例群では、事前のカテゴリ同状・同解のみと事後のその他が有意に高く、事前のその他と事後のカテゴリ同状・同解のみが有意に低いことが確認された。このことから、本システムを用いた作問を通じて、発散事例群の作問が変化したことが確認された。

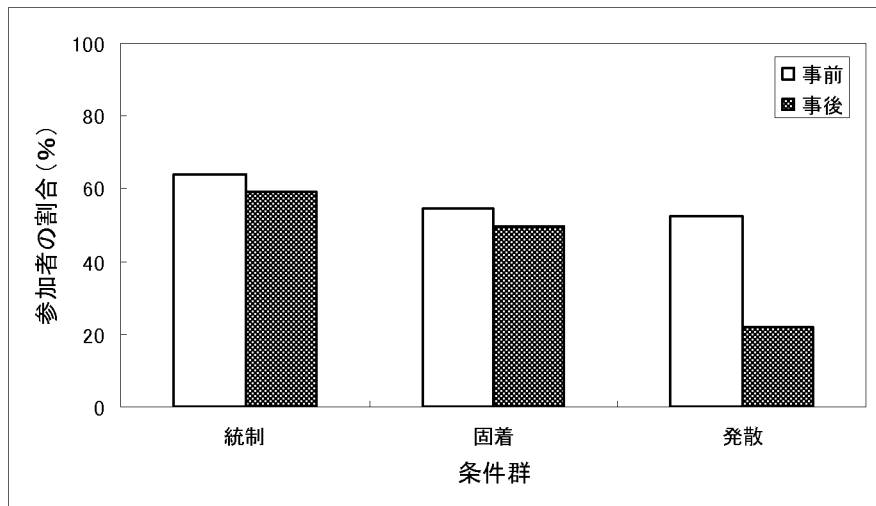


図 4.12: 作成問題がカテゴリ同状・同解のみの参加者の割合

事前テストでは、どの条件群においても半数以上の参加者がカテゴリ同状・同解のみであるが、事後テストでは、発散事例群においてのみ、そのような参加者が減少している。

<sup>7</sup>2 問の作成問題の両方がカテゴリ同状・同解である参加者か、作成問題が 1 問しかない場合はそれがカテゴリ同状・同解である参加者である。参加者には 2 問の作問が求められたが、1 問しか作成できなかった参加者もいた。

#### 4.5.4 考察

##### 運用

本評価では、市販の問題集から得た問題セットから、事例自動生成システムを用いて増やした問題データベースを使用した。元の問題セットは、比較的少数であった。また、使用したどの問題集にも、他の問題集にはない状況を持つ問題は含まれなかったため、典型的な状況を持つ問題ばかりであったと考えられる。参加者の作成問題のうち、システムが認識できないもの、すなわち、これらの状況に含まれない新奇な状況を持つものは少数であった。また、問題データベースに含まれる状況を持つ問題であっても、システムが認識に失敗するケースも多少あったものの、本システムは比較的少数の問題セットを与えても、十分に運用可能なパフォーマンスを示すことが確認できたと考えられる。

##### 支援効果

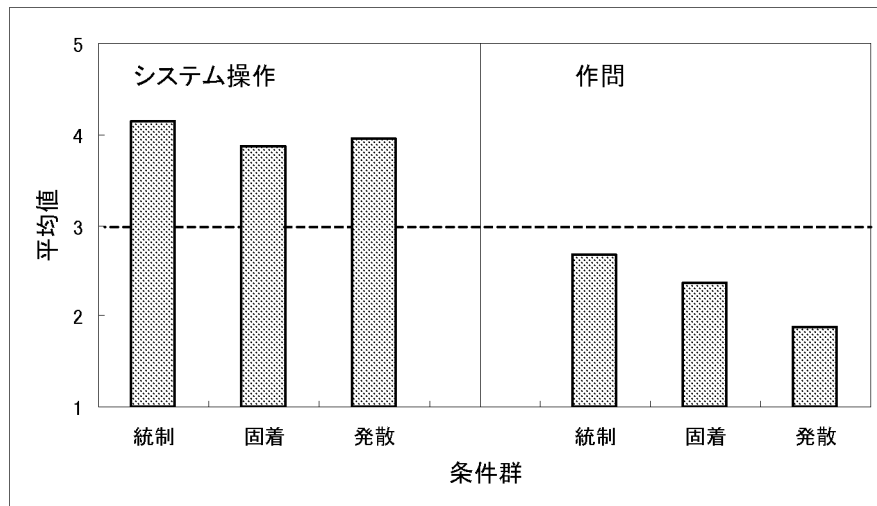
図 4.11, 4.12 に示した結果より、発散事例群においてのみ、事前テストと事後テストとの間で変化が認められた。このことから、本システムを用いて作問を行うことで、発散的思考が促進される可能性があることが確認された。

事後テストにおいて、発散事例群は他の条件群と異なる作問を行っていたことになるが、発散事例群と他の条件群との違いは、手続き 4 において実施したアンケートの回答にも表れていた。図 4.13 に、アンケートの回答の平均値を示す。回答の値は、3 を中立点（どちらともいえない）として、それを上回ると容易、下回ると難しいと評定されたことになる。システムの操作は全体的に容易と評定されており、条件間に差は見られない。一方、作問に関しては、特に発散事例群が他の条件群と比べてより難しいと評定している。各アンケート項目について、条件群 1 要因 3 水準の分散分析を行ったところ、システムの操作には条件群の間に統計的な差は見られないが ( $F(2, 66) < 1$ )、作問には条件群の間の差に有意傾向が認められた ( $F(2, 66) = 3.01, p < .10$ )。また、多重比較 (Ryan 法) により、統制群と発散事例群との間に有意差が認められた。この結果から、発散事例群の参加者は、システムにより発散的思考が促進された結果、より難しい作問を試みた可能性が考えられる。

統制群と固着事例群は、本システムを用いて作問を行ったものの、その効果が認められなかった。固着事例群は、本システムを用いた作問においてシステムからのフィードバックを受けているが、それが効果を発揮しなかったか、あるいは阻害した可能性がある。本実験における固着事例群では、4.5.2 節で予測したように、事例による「同調効果」が生じたと解釈



することもできよう。そうであるならば、本実験の結果は、事例を利用するにあたっては類似するものばかりではなく、適度に差異を持つものを参照することが重要であることを示したことになる。



(左：システム操作，右：作問)

図 4.13: アンケートの回答の平均値

図の破線は3（どちらともいえない）を示しており、この線を上回ると容易、下回ると難しいと評定されたことになる。システムの操作は全体的に容易と評定されており、条件間に差は見られないが、作問については、特に発散事例群で他の条件群より難しいと評定されている。

以上より、本システムはユーザの作問を多様にする支援効果を持つことが確認された。また、そのためには適切な事例提示が必要であることが判明した。

本システムは事例検索システムの類題提示手法、および、事例自動生成システムが供給する問題データベースを用いて、学習者ユーザの作問を支援する。そのため、本システムの評価実験により、この類題提示手法と問題データベースの応用例の一例を示すとともに、学習支援における有効性もあわせて確認することができたと考えている。

## 4.6 結言

本章では、数学文章題の領域において、作問学習を支援する方法を検討するとともに、支援システムを実現した。ここでは、類題解決学習支援を実現するための設計要件を応用し、状況と解法を統制して事例を提示す

ることによる作問支援を提案した．そして実験的調査により，事例提示によって作問における発散的思考を促進できることを確認した．この結果に従い，事例提示によって学習者ユーザの作問を支援するシステムを実装した．そして，本システムの実験的評価により，本システムの支援効果が確認された．

また，本システムは第 2 章で設計した類題提示手法を実装するとともに，第 3 章の自動事例生成システムが供給する問題データベースを使用した．そのため，本システムの評価実験により，その類題提示手法と問題データベースの応用例と有効性もあわせて示すことができたと考えられる．

## 第5章 結論

### 5.1 本論文の総括

本論文では、数学学習を対象とし、類似性に基づく推論を用いて知的問題解決支援システムを実現する一連の研究を報告した。第1章では、本論文の目的と背景を明らかにするとともに、本論文で実現するシステムの設計要件を導出した。類似性に基づく推論は、人間にとっても計算機システムにとっても強力な問題解決方略であり、様々な課題を用いて、その理解や実現を行う研究が展開されてきた。第1章では特に、数学学習で行われる問題解決を例とし、類似性に基づく推論を用いた知的問題解決支援システムの実現において、問題間の共通点と差異という2つの側面に基づき、類似性を扱う枠組みの必要性を論じた。数学学習には、学習者が例題に基づいて類題を解く類題解決や、学習者自身が新しい問題を作り出す作問といった方法がある。数学における作問については、問題を作ることは問題を解くことと同様に重要な活動であることが、数学者や数学教育者によって指摘されている。そして、数学学習においては、学習者が差異を持つ問題を解くことや作ることの重要性和困難性が知られている。そこで、人間の類似性に基づく推論の解明に取り組んできた類推研究の知見に基づき、数学学習を支援するシステムを実現するための2つの設計要件を導出した。具体的には、1) 学習者に対し、状況と解法の2つの属性における類似性を統制して、類題の事例を提示する機能、2) 学習者に比較を行わせるために、多数の、かつ、多様な事例を供給する機能を実現しなければならないというものである。本論文では、この要件に基づき、数学文章題の学習を支援する一連のシステムを実現した。

第2章では、類題解決学習を支援するシステムを試作した。本システムの試作にあたっては、設計要件1に従い、類題を提示するための手法を設計した。この手法には、1-a) 状況と解法の特徴を区別して理解するための問題表現である「3層リスト形式」、ならびに、1-b) 状況と解法の類似性を統制して類題提示の決定基準を変化させる手法である「ランク」の2つが含まれる。第2章で試作したシステムは、これらを実装することで、学習者ユーザが学習した例題に対し、様々な類似性を持つ類題を検索して提示することが可能である。そして、本システムの類題提示の妥当性を検証するために、数学教師の類題判断と比較する実験的評価を実施した。そ

の結果、本システムの類題提示は概ね妥当であること、すなわち、状況と解法の類似性を統制して類題を提示するという方法が有効であることを確認した。

第 3 章では、類題解決学習で使用する文章題を自動的に生成するシステムを実現した。本システムの実現にあたっては、設計要件 2 に従い、状況と解法の 2 つの属性において構造化された問題データベースを生産する手法を提案した。文章題を扱う上で生じる常識知識や自然言語処理に関する問題については、1) システムは作問エピソードを作成して使用することで問題を生成する、2) システムは教師ユーザとのインタラクションを行う、という方法によって克服、あるいは回避するアプローチを採用した。作問エピソードとは、例題に対し、その類題が生成された時、この 2 つの問題の間で結ぶことができる関係を事例化した知識である。本システムは、システムに登録された問題から作問エピソードを形成し、それを他の問題に適用して新しい問題を生成することで、問題の多様性を増やす。そして、本システムの実験的評価により、システムが実際に問題の多様性を増やすことが可能であることが確認されたものの、そのためには十分な数学能力を持つ教師ユーザが必要であることが判明した。

第 4 章では、作問学習において、学習者が多様な作問を行うように支援する方法を検討し、その結果に基づいて、学習者ユーザの発散的思考を促進するシステムを実現した。ここでは、作問の創造的生成課題としての側面に注目し、そのような課題を支援する主要な方法である事例提示を採用した。具体的な事例提示の方法には、類題解決学習支援を実現するための設計要件を応用し、状況と解法を統制することを提案した。そして、実験的調査により、そのような事例提示が、人間の作問における発散的思考の促進に利用できることを確認した。この結果に従い、事例提示によって学習者ユーザの作問を支援するシステムを実現した。システムの事例提示機能は、第 2 章で設計した類題提示の手法、および、第 3 章で実現したシステムによって生産された問題データベースを使用して実装した。そして、本システムの実験的評価により、システムはユーザの作問を多様にする支援効果を持つことが確認されたものの、そのためには、適切な事例提示が必要であることが判明した。第 4 章では同時に、本システムの実装に使用した類題提示手法と問題データベースの応用例が示されたとともに、その有効性が確認された。

## 5.2 本論文の成果

ここでは、本論文の一連の研究による成果を考察することで、これらの研究の位置づけを明らかにする。

### 5.2.1 CBR 研究への貢献

本論文で実現したシステムは全て、CBR のモデルに則って実装された。したがって、本論文の成果の 1 つは、CBR を応用した知識工学的システムを設計、開発する一事例を示したことにある。

第 1 章で述べたように、CBR の原理は、1) 類似した問題は類似した解を持つ、2) 問題解決を続けると同じような問題に遭遇する傾向がある、という 2 つの経験則に基づいている。このことを体現した最も典型的な例が、トラブルシューティングにおける FAQ (Frequently Asked Question) である。FAQ が有用であるのは、この経験則が現実世界で有効であるからに他ならない。その他、CBR の適用が有効である顕著な例は、建築や機械などの定型的な設計における、過去の設計事例の再利用である。これらの設計では、新しい問題、すなわち、顧客からの設計仕様の要求は、ほとんどが既存の仕様で実現可能である [仲谷 1992]。そのため、事例に含まれる要素を直接的に利用することが可能であり、事例によって問題解決の効率を向上させることができる。これが、設計事例のライブラリを構築して設計者に事例を提示することが、効果的な支援方法となる理由である。

本論文におけるシステムの重要な特徴の 1 つは、数学学習における、差異のある数学的問題解決、ならびに、差異を持たせることに積極的な意味が生じる創造的生成を支援対象とし、類似性を統制する機能を実装したことにある。前者の数学的問題解決の支援については、学習者に類題を提示するシステム、および、類題として使用する問題を自動生成するシステムを実現した。この類題は、学習者から見ると、新たに獲得する事例とみなすことができる。そのため、システムから見た場合、学習者が既に学習した例題を直接的に利用して解くことができる、よく似通った類題だけを与えることは無意味であるため、差異を持つ類題を与える必要性が生じる。また、システムが問題を生成する場合も同様に、似通った問題だけでなく、既存の問題に差異を加えて新しい問題を生成しなければならない。この点において、最も問題解決に貢献する事例、すなわち、与えられた問題と最も類似する事例を検索し、それを直接的に利用する一般的な CBR システムと、本論文におけるシステムとは、大きく異なる。

後者の作問の支援において、本論文では、問題の作成者に事例を提示する方法を採用した。これは、新しいものを作り出す創造的生成課題において、事例提示によって作成者を支援するという形式を取る点で、先に述べた設計課題と類似している。しかし、顧客要求からの設計課題とは異なり、この作問課題では、事例とは差異を持つ問題の作成が積極的に望まれており、さらに、事例は課題において直接的に利用されることを想定していない。この点においても、一般的な CBR システムと本論文のシステムとは、大きく異なっている。

上述の特徴に基づいて考えると、本論文のシステムは、CBR のモデルに則って設計・構築されているものの、その支援目標は、必ずしも CBR の原理に基づいていないといえることができる。しかし、たとえば第 4 章では、事例提示によってユーザに差異のある問題を作るように促進する支援を実現することができた。このことから本論文は、一般的な CBR の応用課題とは異なる性質の課題において、CBR の新しい有効性を模索した一事例とみなすことができると考える。

### 5.2.2 類推研究への貢献

本論文で実現したシステムの設計要件、すなわち、対象課題を支援する方法は全て、認知心理学における類推研究の知見から導出されたものである。したがって、一連のシステムの実現は、その知見の応用を意味することになる。

類推研究の多くは、第 1 章でも述べた通り、心理実験と計算機シミュレーションを通じて人間の思考を探究してきている。そのような研究は、実験室課題を用いており、また、人工的な状況におかれた被験者の問題解決を対象としているため、現実的な人間の思考を捉えているとはいえないという批判がある。このことは、1.3 節で述べた表層的特徴と構造的特徴という理論にも当てはまる。たとえば [Gentner 1993] は、被験者にベースとする多数の短い物語を読ませ、一週間後にターゲットの物語からベースを想起させるという実験を行った。ここでは、ベースとターゲットの表層と構造の特徴における類似性を操作することで、ベースの検索におけるこれら属性の影響の検討を確認している。しかし、この実験は、現実で類推が行われる状況とは異なり、ベースが実験者から与えられるものであって、被験者自身のよく知っている経験ではない。そこで、被験者にベースを与えることなく、より現実的な課題や状況で類推を行わせる試みも行われている。たとえば [Blanchette 2000] は、カナダ政府の赤字財政問題に関して、被験者に福祉予算を増やすか減らすかのいずれかの立場を選択させてから、類推を用いて反対の立場を説得する意見を作らせる実験を行った。その結果、被験者の類推は赤字財政問題と構造的には類似するものの、表層的には類似しなかったことを報告しており、現実場面の類推は実験室のものとは異なると主張している。[森田 2005] は、被験者に短い物語（ターゲット）を読ませた後で、被験者自身が知っている事例を想起して書き出させてから、各事例がターゲットの類推としてどの程度良いかを被験者自身に評価させる実験を行った。その結果、被験者はターゲットと表層的に類似する事例を多く想起したが、類推として良いと評価されたのは構造的に類似する事例であったことを報告している。この結果から

森田は、被験者が自分自身の経験を自由に使用する類推においても、表層的特徴と構造的特徴が関与することを議論している。

本論文では、実験室研究によって得られた理論をシステムの設計要件として取り込んでいる。そのため、この理論に対し、システムを実際にユーザに使用させる実験的評価を通じてフィードバックを与えることができるはずである。第4章では、作問という創造的生成課題を採用した。創造的生成課題では、可能な解が無数に存在することから、また、新しいものの産出が求められることから、作成者に解の候補となるベースを事前に与えることは無意味である。そのため、4.5節の実験的評価では、参加者は自分自身の知識や経験を使用しなければならなかった。そして、問題の状況と解法、すなわち、表層と構造を統制して事例を提示するシステムが、実際に人の作問を支援できるかどうかを検討した。このシステムの支援効果が確認されたことで、表層的特徴と構造的特徴の理論が、実際に人の問題解決を支援するために有効となる一事例を示すことができたと考える。

本論文ではさらに、類推研究のフレームワークを創造的生成課題に適用するというを試みた。第4章で実現したシステムの事例提示の統制は、先述のように、表層的特徴と構造的特徴の理論に基づいて行われたものである。たとえば、4.3節の実験的調査では、事例の統制を図4.1に示すカテゴリに従って行った。このカテゴリのような、状況と解法の2×2の分類による統制は、類推研究において用いられたものである[Reed 1987]。類推研究では、状況と解法の類似性を統制することで、数学的問題解決における事例（例題）の利用を実験的に検討しており、特に初学者は例題を異状・同解の問題を解く際にうまく利用できないこと、同状・異解の問題に対して負の転移を行ってしまうこと、同状・同解の問題であっても、問題文のパラメータの操作によってはパフォーマンスが下がることを確認している[Novick 1988, Reed 1985, Ross 1987]。これは、第1章でも述べたように、差異を持つ数学的問題解決は困難であるということである。そして、本論文では、数学的問題解決を支援するために、状況と解法における類似性を統制して問題を与え、比較を行わせる方法を採用した。これらのことを踏まえ、4.3節の実験的調査における条件群の設定は、類推研究で採用された実験計画をヒントとして行った。本調査では、図4.3に示した結果より、差異を持つ問題は作成されないこと、図4.4に示した結果より、差異を持つ事例の提示によって、差異を持つ問題の作成を引き起こせることが判明した。そして、事例提示によって作問を支援するシステムを構築し、その効果を検証した。このことにより、数学的問題解決を対象とする類推研究のフレームワークが作問のような創造的生成課題においても利用できる可能性を示すことができたと考える。

### 5.2.3 教育工学・学習科学への貢献

本論文では、数学学習を対象課題とした知的支援の検討と実現を行った。特に、第 2 章の事例検索システムと第 4 章の事例作成支援システムは、学習者の活動の支援を指向している。そのため、本論文の研究は、学習支援システムを実現した、教育工学研究と捉えることができる。さらに、学習支援の方法を検討することにより、学習の理解を試みた学習科学研究としても捉えることができるはずである。

学習活動の支援を実現するためには、その学習活動自体を理解することが不可欠となる。そのため、学習科学では、学習に対する「理解」と「支援」という両輪からのアプローチの必要性が強調されており [三輪 2004, 三輪 2006]、それらの相互作用において学習支援システムを設計、構築することは、重要な試みである。

本論文の研究は、類推研究の理論から学習における問題解決を理解し、CBR を適用したシステムの実装によって支援を実現することで進められた。さらに第 4 章においては、その理論に基づいて事例提示による学習者の作問支援を提案した上で、システムの実装に先立ち、作問における事例提示の効果を実験的調査を通じて理解する「先知恵実験」を試みた。この結果を受けて、システムを実装した後、システムの効果を実験的に評価する「後知恵実験」を行った。システムの設計と実装は、認知心理学の知見と人工知能の要素技術を基礎とするのみならず、それぞれ先知恵実験と後知恵実験による実証からのフィードバックを得ているのである。これは、学習の「科学的理解」と「工学的支援の実現」を橋渡しする取り組みであり [三輪 2006]、本論文は、この観点からも重要な一事例を与えることができたと考える。

## 5.3 今後の研究展開

本論文では、類似性に基づく推論を用いて、数学的問題解決と創造的生成を対象とする知的問題解決支援システムを構築した。ここでは、より効果的な知的問題解決支援を実現するための、今後の研究展開の方向性について述べる。

第 1 に、本論文のシステムにおいて、作問を支援する機能を追加実装することが挙げられる。これは、事例作成支援システムの学習者ユーザのみならず、事例自動生成システムの教師ユーザに対しても必要である。3.3 節の運用実験において、数学の専門知識を持たない大学生は、本システムに対して適切な問題文を入力することができなかった。この大学生は、システムの問題対象領域において、十分な数学的問題解決の能力を持っているはずである。このことから、作問は数学的問題解決以上に困難な課題で



あると指摘されている通り [English 1997b, Mestre 2002], 事例自動生成システムの教師ユーザには, 数学的問題解決以上の能力が要求されることが判明した. 専門的な数学能力を持たないユーザでも事例作成支援システムを利用できるようにするためには, 問題文作成を支援する機能が必要である. より具体的には, ユーザが作成した問題文から導かれる解法構造を, ユーザ自身に認識させるための支援である. そのような支援機能は, 事例作成支援システムにおいても, 学習者ユーザに効率的な作問演習を提供し, 効果的な発散的思考を育成させる上で, 有効に働くと考えられる.

第2に, 事例提示による作問の支援, ひいては, 創造的生成の支援のさらなる検討が挙げられる. 本論文では, 作問という創造的生成課題において, 類推研究のフレームワークを適用して事例を提示することで, 作問支援を実現できる可能性を示した. しかし, 本論文の結果だけでは, 創造的生成課題における事例提示の方法や効果について, 十分な知見を得るまでには至っていない. 創造的生成課題に対する事例の影響は, 実験を通じた議論が行われている. たとえば, 事例を与えられると人は事例と似たアイデアを生成するようになることや, 欠陥のある事例であっても, 事例の要素をアイデアに取り入れてしまうことが確認されている [Jansson 1991, Smith 1993]. その一方で, 事例の模倣を行うことで, 創造的生成課題のパフォーマンスが高まるという報告もある [石橋 2004]. 前者と後者では, 実験における事例の数や性質, 与え方が異なっている. すなわち, 事例には創造的生成を阻害する場合もあれば, 促進する場合もあるということである. 本論文では, 4.5 節において, 作問課題を阻害する事例提示と促進する事例提示の一例を示すことができたが, より効果的な事例提示による支援を実現するためには, 事例の提示方法と効果との関係をさらに理解するための取り組みが必要である. その際に, 本論文で実現した事例作成支援システムは, 課題環境を提供してデータ収集を行う, 実験システムとして利用することができよう.

第3に, 本論文で提案した設計要件, および, 実現したシステムのフレームワークを, 他の問題領域に応用することが挙げられる. 本論文では, 数学文章題の類題解決学習と作問学習を対象とした. その他にも, 「表層」と「構造」という2つの属性を持つ問題の領域であり, 差異に積極的な意味が生じる問題解決課題があれば, 本論文の提案手法を適用することは本質的に可能であり, 意義があると考えられる. 問題領域の候補の一例としては, インテリアレイアウト, あるいは, 動く遊具や玩具といった製品の設計課題が挙げられる. こうした製品は, 外観の特徴という「表層」と, 振る舞いや機能という「構造」に相当する属性を持ち, 多様な構成要素の組み合わせが存在する. そのため, 表層と構造において多様な事例を供給して提示する支援は, 先に述べたような定型的な設計課題だけではな

## 第 5 章

---

く、特に新奇なアイデアが求められるような設計課題に対して、有効に働く可能性があるだろう。

## 謝辞

本論文の完成に至るまで、実に長年に渡って丁寧に御指導頂き、数多くの御助力を賜りました、名古屋大学 大学院情報科学研究科 メディア科学専攻 認知情報論講座の三輪和久先生に、心よりの感謝の意を表します。名古屋大学 大学院情報科学研究科 メディア科学専攻 認知情報論講座の斎藤洋典先生、川合伸幸先生には、日々の研究活動、および、本論文の執筆にあたり、様々な御助言と御教授を賜りました。名古屋大学 大学院情報科学研究科 メディア科学専攻 認知情報論講座の光松秀倫先生、中京大学 情報理工学部 情報知能学科の笈一彦先生、青山学院大学 文学部 心理学の薬師神玲子先生には、日々の研究活動において、様々な御助言と御教授を賜りました。厚く御礼申し上げます。

また、愛知県立春日井南高等学校の小澤和幸先生には、数学学習について御教授を頂くとともに、実験的評価にも御協力頂きました。名古屋大学 大学院情報学研究科 社会情報学専攻 認知情報論講座、ならびに、名古屋大学 大学院情報科学研究科 メディア科学専攻 認知情報論講座の皆様には、日頃より多数の御助言、御指摘を頂きました。そして、名古屋大学 21 世紀 COE「社会情報基盤のための音声・映像の知的統合」より、研究活動における多大な援助を頂きました。この場を借りて、皆様の御協力、御支援に感謝致します。

最後に、日々陰ながら支えてくれた家族と友人に感謝し、本論文を捧げます。

2007 年 2 月 名古屋大学情報科学研究科棟より  
小島一晃

## 参考文献

- [Aha 2001] Aha, D. W., Breslow, L. A. and Muñoz-Avila, H.: Conversational Case-Based Reasoning, *Applied Intelligence*, Vol. 14, No. 1, pp. 9-32 (2001)
- [Blanchette 2000] Blanchette, I. and Dunbar, K.: How Analogies are Generated: The Roles of Structural and Superficial Similarity, *Memory and Cognition*, Vol. 28, No. 1, pp. 108-124 (2000)
- [Chi 1981] Chi, M. T. H., Feltovich, P. J. and Glaser, R.: Categorization and Representation of Physics Problems by Experts and Novices, *Cognitive Science*, Vol. 5, No. 2, pp. 121-152 (1981)
- [Domeshek 1994] Domeshek, E. A., Kolodner, J. L. and Zimring, C.: The Design of a Tool Kit for Case-Based Design Aids, *Proceedings of International Conference on Artificial Intelligence in Design*, pp. 109-126 (1994)
- [Ellerton 1986] Ellerton, N. F.: Children's Made up Mathematics Problems: A New Perspective on Talented Mathematicians, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 17, No. 3, pp. 261-271 (1986)
- [English 1997a] English, L. D.: Children's Reasoning Processes in Classifying and Solving Computational Word Problems, *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images*, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 191-220 (1997)
- [English 1997b] English, L. D.: Promoting a Problem-posing Classroom, *Teaching Children Mathematics*, Vol. 4, No. 3, pp. 172-179 (1997)
- [English 1998] English, L. D.: Children's Problem Posing within Formal and Informal Contexts, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 29, No. 1 pp. 83-106 (1998)
- [Forbus 1995] Forbus, K. D., Gentner, D. and Law, K.: MAC/FAC: A Model of Similarity-Based Retrieval, *Cognitive Science*, Vol. 19, No. 2, pp. 141-205 (1995)

- [Gentner 1983] Gentner, D.: Structure-Mapping: A Theoretical Framework for Analogy, *Cognitive Science*, Vol. 7, No. 2, pp. 155-170 (1983)
- [Gentner 1993] Gentner, D., Rattermann, M. J. and Forbus, K. D.: The Roles of Similarity in Transfer: Separating Retrievability from Inferential Soundness, *Cognitive Psychology*, Vol. 25, No. 4, pp. 524-575 (1993)
- [Gick 1980] Gick, M. L. and Holyoak. K. J.: Analogical Problem Solving, *Cognitive Psychology*, Vol. 12, No. 3, pp. 306-355 (1980)
- [Gick 1983] Gick, M. L. and Holyoak. K. J.: Schema Induction and Analogical Transfer, *Cognitive Psychology*, Vol. 15, No. 1, pp. 1-38 (1983)
- [Göker 2006] Göker, M. H., Howlett, R. J. and Price, J. E.: Case-Based Reasoning for Diagnosis Applications, *Knowledge Engineering Review*, Vol. 20, No. 3, pp. 277-281 (2006)
- [波多野 1995] 波多野誼余夫: 理解と教授の相互作用, *人工知能学会誌*, Vol. 10, No. 3, pp. 24-30 (1995)
- [平嶋 1992] 平嶋宗, 中村祐一, 池田満, 溝口理一郎, 豊田順一: ITS を指向した問題解決モデル MIPS, *人工知能学会学会誌*, Vol. 7, No. 3, pp. 475-486 (1992).
- [Hirashima 1994] Hirashima, T., Niitu, T., Hirose, K., Kashiara, A. and Toyoda, J.: An Indexing Framework for Adaptive Arrangement of Mechanics Problems for ITS, *IEICE Transactions on Information and Systems*, Vol. E77-D, No. 1, pp. 19-26 (1994)
- [平嶋 1995] 平嶋宗, 東正造, 柏原昭博, 豊田順一: 補助問題の定式化, *人工知能学会誌*, Vol. 10, No. 3, pp. 413-420 (1995)
- [平嶋 2001] 平嶋宗, 梅田多一, 志岐隆弘, 竹内章: XML を用いた算数の文章問題の作成・共有環境, *教育システム情報学会誌*, Vol. 18, No. 3, pp. 284-296 (2001)
- [Hirashima 2006] Hirashima, T., Yokoyama, T., Okamoto, M. and Takeuchi, A.: Interactive Learning Environment by Posing Arithmetical Word Problems as Sentence-Integration, *ICCE 2006 Workshop of Problem-Authoring, -Generation and -Posing in a Computer-Based Learning Environment*, pp. 1-8 (2006)

- [Holyoak 1998] Holyoak, K. J. and Thagard, P.: アナロジーの力, 鈴木宏昭, 河原哲雄 監訳, 新曜社 (1998)
- [石橋 2004] 石橋健太郎, 岡田猛: 創造のための「芸術作品の知覚」経験: 模倣に焦点をあてて, 認知科学, Vol. 11, No. 1, pp. 51-59 (2004)
- [石田 1983] 石田一三, 井上豊: 作問の指導について, 日本数学教育学会誌, Vol. 65, No. 6, pp. 109-112 (1983)
- [Jansson 1991] Jansson, D. G. and Smith, S. M.: Design Fixation, Design Studies, Vol. 12, No. 1, pp. 3-11 (1991)
- [金西 2003] 金西計英, 林賢太郎, 光原弘幸, 矢野米雄: 教材知識に基づき WBT 上で演習問題を生成する機能の実現, 教育システム情報学会誌, Vol. 20, No. 2, pp. 71-82 (2003)
- [川上 2001] 川上清人, 渡辺卓摩, 館野允人, 田原雪岳, 伊丹誠, 伊藤紘二: 問題解決学習においてプランを手がかりとする例題の検索とプランニングを支援するシステム, 日本教育工学会論文誌, Vol. 25, No. 2, pp. 95-102 (2001)
- [小林 1992] 小林重信: 事例ベース推論の現状と展望, 人工知能学会誌, Vol.7, No.4, pp. 559-566 (1992)
- [Kolodner 1993] Kolodner, J. L.: Case-Based Reasoning, San Mateo, CA; Morgan Kaufmann Publishers (1993)
- [Le 2006] Le, N. and Menzel, W.: Constraint-based Problem Generation for a Self-Assessment System, ICCE2006 Workshop Proceedings of Problem-Authoring, -Generation and -Posing in a Computer-Based Learning Environment, pp. 33-40 (2006)
- [Leake 1996] Leake, D. B.: CBR in Context: The Present and Future, Case-Based Reasoning: Experiences, Lessons, and Future Directions, pp. 1-35, CA: AAAI Press / MIT Press (1996)
- [Lenz 1999] Lenz, M. and Glintschert, A.: On Texts, Cases, and Concepts, Proceedings of the 5th Biannual German Conference on Knowledge-Based Systems, pp. 148-156 (1999)
- [Leung 1997a] Leung, S. S.: On the Role of Creative Thinking in Problem Posing, International Reviews on Mathematical Education, Vol. 29, No. 3, pp. 81-85 (1997)

- [Leung 1997b] Leung, S. S. and Silver, E. A.: The Role of Task Format, Mathematics Knowledge, and Creative Thinking on the Arithmetic Problem Posing of Prospective Elementary School Teachers, *Mathematics Education Research Journal*, Vol. 9, No. 1, pp. 5-24 (1997)
- [Maher 1996] Maher, M. L. and Garza, A. G.: Developing Case-Based Reasoning for Structural Design, *IEEE Expert*, Vol. 11, No. 3, pp. 42-52 (1996)
- [Martin 2002] Martin, B. and Mitrovic, A.: Automatic Problem Generation in Constraint-Based Tutors, *Proceedings of the 6th International Conference on Intelligent Tutoring Systems*, pp. 388-398 (2002)
- [松原 1992] 松原仁: 推論技術の観点からみた事例に基づく推論, *人工知能学会誌*, Vol. 7, No. 4, pp. 567-575 (1992)
- [Mestre 2002] Mestre, J. P.: Probing Adults' Conceptual Understanding and Transfer of Learning via Problem Posing, *Journal of Applied Developmental Psychology*, Vol. 23, No. 1, pp. 9-50 (2002)
- [三輪 2004] 三輪和久, 齋藤ひとみ: 学習科学に基づく学習/教育支援システムの設計と実現, *教育システム情報学会誌*, Vol. 21, No. 3, pp. 145-156 (2004)
- [三輪 2006] 三輪和久: 学習の科学と工学を結ぶメディアとしての学習支援システム, *人工知能学会誌*, Vol. 21, No. 1, pp. 53-57 (2006)
- [森田 2005] 森田純哉, 三輪和久: 計算機モデルによる Open-end な状況での認知の分析, *人工知能学会論文誌*, Vol. 20, No. 4, pp. 306-317 (2005)
- [中野 2000] 中野明, 平嶋宗, 竹内章: 「問題を作ることによる学習」の知的支援環境, *電子情報通信学会論文誌*, Vol. J83-D-I, No. 6, pp. 539-549 (2000)
- [中野 2002] 中野明, 平嶋宗, 竹内章: 演算の理解を指向した作問学習支援システム, *人工知能学会誌*, Vol. 17, No. 5, pp. 598-607 (2002)
- [中野 2004] 中野明, 柳原健志, 平嶋宗, 岡本真彦, 竹内章: 和と差の二項演算に関する作問学習支援環境利用による算数能力への影響調査, *日本教育工学会論文誌*, Vol. 28, No. 3, pp. 205-216 (2004)

- [仲谷 1992] 仲谷善雄: 事例ベース推論によるエレベータの設計支援, 人工知能学会誌, Vol. 7, No. 4, pp. 31-35 (1995)
- [仲谷 1995] 仲谷善雄, 築山誠, 福田豊生: 事例ベース推論による設計集団内での設計知識の共有の支援, 人工知能学会誌, Vol. 10, No. 2, pp. 86-97 (1995)
- [仲谷 2002] 仲谷善雄: 事例ベース推論の動向, 人工知能学会誌, Vol. 17, No. 1, pp. 28-33 (2002)
- [Nathan 1992] Nathan, M. J., Kintsch, W. and Young, E.: A Theory of Algebra-Word-Problem Comprehension and its Implications for the Design of Learning Environments, Cognition and Instruction, Vol. 9, No. 4, pp. 329-389 (1992)
- [荷方 2005] 荷方邦夫, 島田英昭: 類題作成経験が類推的問題解決に与える効果, 教育心理学研究, Vol. 53, No. 3, pp. 381-392 (2005)
- [新田 1992] 新田克己: 法的推論システム HELIC-II, 人工知能学会誌, Vol. 7, No. 4, pp. 603-607 (1992)
- [Novick 1988] Novick, L. R.: Analogical Transfer, Problem Similarity, and Expertise, Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, Vol. 14, No. 3, pp. 510-520 (1988)
- [折原 1994] 折原良平: 発想支援システム「知恵の泉 (R)」, 人工知能学会誌, Vol. 9, No. 2, pp. 68-77 (1994)
- [Polya 1954] Polya, G.: いかにして問題を解くか, 柿内賢信訳, 丸善株式会社 (1954)
- [Prince 1997] Prince, A. and Smolensky, P.: Optimality: From Neural Networks to Universal Grammar, Science, Vol. 275, pp. 1604-1610 (1997)
- [Reed 1985] Reed, S. K., Dempster, A. and Ettinger, M.: Usefulness of Analogous Solutions for Solving Algebra Word Problems, Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, Vol. 11, No. 1, pp. 106-125 (1985)
- [Reed 1987] Reed, S. K.: A Structure-Mapping Model for Word Problems, Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, Vol. 13, No. 1, pp. 124-139 (1987)



- [Restrepo 2005] Restrepo, J. and Christiaans, H.: From Function to Context to Form: Precedents and Focus Shifts in the Form Creation Process, Proceedings of 5th Creativity and Cognition 2005, pp. 195-204 (2005)
- [Ross 1987] Ross, B. H.: This is like that: The Use of Earlier Problems and the Separation of Similarity Effects, Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, Vol. 13, No. 4, pp. 629-639 (1987)
- [崎谷 1991] 崎谷真也: 問題解決における類推過程, 兵庫教育大学研究紀要, Vol. 3, No. 11, pp. 13-24 (1991)
- [白田 2004] 白田由香利: 経済最適化問題を例とする数学 Web 教材自動作成システム, 学習院大学経済論集, Vol. 41, No. 1 (2004)
- [Silver 1994] Silver, E. A.: On Mathematical Problem Posing, For the Learning of Mathematics, Vol. 14, No. 1, pp. 19-28 (1994)
- [Silver 1996] Silver, E. A.: Fostering Creativity Through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing, International Reviews on Mathematical Education, Vol. 29, No. 3, pp. 75-80 (1997)
- [Simoudis 1992] Simoudis, E.: Using Case-Based Retrieval for Customer Technical Support, IEEE Expert, Vol. 7, No. 5, pp. 7-12 (1992)
- [Smith 1993] Smith, S. M., Ward, T. B. and Schumacher, J. S.: Constraining Effects of Examples in a Creative Generation Task, Memory and Cognition, Vol. 21, No. 6, pp. 837-845 (1993)
- [Sternberg 1999] Sternberg, R. J. and O'hara, L. A.: Creativity and Intelligence, Handbook of Creativity, pp. 251-272, Cambridge University Press (1999)
- [鈴木 1996] 鈴木宏昭: 類似と思考, 共立出版株式会社 (1996)
- [Thagard 1990] Thagard, P., Holyoak, K. J., Nelson, G. and Gochfeld, D.: Analog Retrieval by Constraint Satisfaction, Artificial Intelligence, Vol. 46, No. 3, pp. 259-310 (1990)
- [高野 2003] 高野敦子, 橋本淳: 知識ベースに基づいた学習者個別演習問題生成手法について, 情報処理学会研究報告, Vol. NL-160, pp. 23-28 (2003)

## 参考文献

---

- [寺尾 1998] 寺尾敦, 楠見孝: 数学的問題解決における転移を促進する知識獲得について, 教育心理学研究, Vol. 46, No. 4, pp. 472-483 (1998)
- [戸沢 1992] 戸沢義夫: 特集「事例ベース推論」にあたって, 人工知能学会誌, Vol. 7, No.4, pp. 558 (1992)
- [Wills 1994] Wills, L. M. and Kolodner, J. L.: Towards more Creative Case-Based Design Systems, Proceedings of American Association for Artificial Intelligence, pp. 50-55 (1994)
- [梅沢 1995] 梅沢敏夫: 数学学習の理論と問題解決 学び方・考え方・教え方, 培風館 (1995)
- [Young 1987] Young, L.: The Metaphor Machine: A Database Method for Creativity Support, Decision Support Systems, Vol. 3, pp. 309-317 (1987)
- [1] MathTeX 工房, <http://www12.plala.or.jp/htown/mathtex/>
- [2] ChaSen's Wiki, <http://chasen.naist.jp/hiki/ChaSen/>
- [3] 分類語彙表, 国立国語研究所, <http://www.kokken.go.jp/>
- [4] 分野別数学レッスンシリーズ 4 個数の処理・確率, 畦森宣信監修, 旺文社
- [5] 10 分間集中 TRAINING 中学 2 年数学, 数学研究社
- [6] ワンランク上の実力をめざす段階別新問題集中学 2 年数学, 数学研究社
- [7] くもんの中学基礎がため 100% 中 2 数学計算・関数編, くもん出版

## 関連論文

### 学術誌掲載論文

1. 小島一晃, 三輪和久: 数学における類題からの学習支援のための事例検索システム, 教育システム情報学会誌, Vol. 21, No. 3, pp. 193-204 (2004)
2. 小島一晃, 三輪和久: 作問事例を用いて数学文章題を生成するシステムの実現と評価, 人工知能学会誌, Vol. 21, No. 4, pp. 361-370 (2006)

### 国際会議（査読あり）

1. Kojima, K. and Miwa, K.: A Case Retrieval System for Mathematical Learning from Analogical Instances, Proceedings of International Conference on Computers in Education 2003, pp. 1124-1128 (2003)
2. Kojima, K. and Miwa, K.: A System that Generates Word Problems Using Problem Generation Episodes, Proceedings of International Conference on Computers in Education 2005, pp. 193-200 (2005)
3. Kojima, K. and Miwa, K.: Evaluation of a System that Generates Word Problems through Interactions with a User, Proceedings of 8th Intelligent Tutoring Systems, pp. 124-133 (2006)
4. Kojima, K. and Miwa, K.: Experimental Investigation and Implementation of Support for Problem Generation by Presenting Cases, Proceedings of International Conference on Computers in Education 2006, pp. 123-126 (2006)
5. Kojima, K. and Miwa, K.: Bridging Automatic Problem Generation System and Learning Support System for Humans' Prob-

lem Generation, ICCE2006 Workshop Proceedings of Problem-Authoring, -Generation and -Posing in a Computer-Based Learning Environment, pp. 9-16 (2006)

## 国内学会, 研究会

1. 小島一晃, 三輪和久: 類題事例を用いた数学学習支援システムの試作, 第 15 回人工知能学会全国大会論文集 (2001)
2. 小島一晃, 三輪和久: 類似関係に注目した事例検索システムによる数学学習支援, 人工知能学会第 35 回知的教育システム研究会資料, SIG-IES-A201, pp. 35-40 (2002)
3. 小島一晃, 三輪和久: 類似関係の制御に基づく知的事例検索システムについて, 日本認知科学会第 19 回大会発表論文集, pp. 144-145 (2002)
4. 小島一晃, 三輪和久: 類題生成実験に基づく作問学習支援システムの設計, 人工知能学会第 40 回知的教育システム研究会資料, SIG-IES-A303, pp. 21-26 (2004)
5. 小島一晃, 三輪和久: 過去の作問エピソードを用いた文章題作問システムの試作, 人工知能学会第 43 回先進的学習科学と技術研究会資料, SIG-ALST-A203, pp. 81-86 (2005)
6. 小島一晃, 三輪和久: 作問を事例化して数学文章題を生成するシステムの試作, 日本認知科学会第 22 回大会発表論文集, pp. 80-81 (2005)
7. 小島一晃, 三輪和久: 作問エピソードを用いた文章題生成システムの試作と評価, 人工知能学会第 45 回先進的学習科学と工学研究会資料, SIG-ALST-A502, pp. 35-40 (2005)
8. 小島一晃, 三輪和久: アイデア生成における事例提示の検討と支援システムの設計, 人工知能学会第 46 回先進的学習科学と工学研究会資料, SIG-ALST-A503, pp. 65-70 (2006)
9. 小島一晃, 三輪和久: 事例提示によるアイデア生成支援の検討 - 数学文章題の作問を対象として -, 日本認知科学会第 23 回大会発表論文集, pp. 408-409 (2006)
10. 小島一晃, 三輪和久: 文章題の自動作問システムおよび作問支援システムの実現, 教育システム情報学会第 31 回全国大会講演論文集, pp. 57-58 (2006)

11. 小島一晃, 三輪和久: 事例提示による作問支援システムの評価, 人工知能学会第48回先進的学習科学と工学研究会資料, SIG-ALST-A602, pp. 7-12 (2006)

## 付 録 A 研究 1 の実験的評価において使用したランク

表 A.1: 基本練習モード  
制約

類題群 条件	operation:d-prop
	slot.isIdentifiable:d-prop
	object.isIdentifiable:d-prop
	constraint.strategy:d-prop
	constraint.target:d-prop
	object.hasAttribute:d-prop
最適化 ランク	slot.hasAttribute:d-prop
	object:class
	slot:class
	operation:class
	constraint:class
	object:instance
	slot:instance
	operation:instance
	constraint:instance

表 A.2: 発展練習モード

	制約
類題群 条件	operation:d-prop
	slot.isIdentifiable:d-prop
	object.isIdentifiable:d-prop
最適化 ランク	!constraint.strategy:d-prop
	!constraint.target:d-prop
	!object.hasAttribute:d-prop
	!slot.hasAttribute:d-prop
	!object:class
	!slot:class
	!operation:class
	!object:instance
	!slot:instance
	!operation:instance

表 A.3: ひっかけモード

	制約
類題群 条件	object:class
	slot:class
	operation:class
最適化 ランク	!operation:d-prop
	!slot.isIdentifiable:d-prop
	!slot.hasAttribute:d-prop
	!object.isIdentifiable:d-prop
	!object.hasAttribute:d-prop
	!constraint.strategy:d-prop
	!constraint.target:d-prop
	object:instance
	slot:instance
	operation:instance

## 付 録 B 研究 1 の実験的評価において使用した問題

**例題 1** 7 人の生徒から 3 人を選ぶ方法は何通りあるか。

解)  ${}_7C_3 = 35$  通り。

**1a** 生徒 12 人から 4 人の役員を選ぶ方法は何通りあるか。

解)  ${}_{12}C_4 = 495$  通り。

**1b(1)** ジョーカーを除く 52 枚のトランプから 3 枚のカードを同時に引くとき、少なくとも 1 枚は絵札がある場合の数を求めよ。

解) 12 枚の絵札から 1 枚が選ばれる場合の数は 12 通り、  
残りの 51 枚から 2 枚を選ぶ場合の数は  ${}_{51}C_2$  通りだから、  
 $12 \times {}_{51}C_2 = 15300$  通り。

**1c** 20 人のクラスで学級委員長・副委員長・書記・会計を選ぶ方法は何通りあるか。ただし、学級委員長以外は同じ人が兼任してもよいものとする。

解) 20 人から学級委員長を選ぶ場合の数は 20 通り、  
残りの 19 人から重複を許して選ぶ場合の数は  $19^3$  通りだから、  
 $20 \times 19^3 = 137180$  通り。

**1d(1)** 15 チームから 2 チームずつ対戦する総当たり戦を行うとき、試合数は何通りか。

解)  ${}_{15}C_2 = 105$  通り。

**例題 2** 9 人の生徒を 4 人・5 人の 2 組に分ける方法は何通りあるか。

解)  ${}_9C_4 \times {}_5C_5 = 126$  通り。

**2a** 9 人の生徒を 3 人ずつの 3 組に分ける方法は何通りあるか。

解) 9 人を 3 人ずつ 3 組に分ける場合の数は  ${}_9C_3 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3$  通り。  
3 つの組のどれに選ばれるかに区別はないから、求める解は  
 ${}_9C_3 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 \div 3! = 280$  通り。

**2b** 男子 6 人、女子 3 人の合計 9 人を 3 人ずつの 3 組に分けるととき、どの組にも女子がいるような分け方は何通りあるか。



解) 求める解は、各々に女子が 1 人がいる 3 組に男子 6 人を 2 人ずつ分ける場合の数だから、区別のある 3 組に男子 6 人を 2 人ずつ分ける場合の数と等しい.

よって、 ${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 = 90$  通り.

**例題 5** 0,1,2,3,4,5 の 6 個の数字から異なる 4 つの数字を選んで 4 桁の整数を作る方法は何通りあるか。

解) 最上位桁の数は 0 以外の数字を選ぶ必要があるから 5 通り、残りの 5 つから 3 つを選んで並べる場合の数は  ${}_5P_3$  通りだから、 $5 \times {}_5P_3 = 300$  通り.

**5a(1)** 1,2,3,4,5,6 の 6 つの数字から異なる 4 つを選び出して 4 桁の整数を作るとき、偶数は何通りできるか。

解)  ${}_6P_4 = 360$  通り.

**5a(2)** 0,1,2,3 の 4 個の数字を使って 4 桁の電話番号は何通りできるか。

解)  ${}_4P_4 = 24$  通り.

**5c** 1,1,1,2,2,3,4 の 7 個の数字を使って 7 桁の整数を作る場合の数を求めよ。

解)  ${}_7P_7 \div (3! \times 2!) = 420$  通り.

## 付 録 C 研究 3 の実験的調査における作成問題

**カテゴリ同状・同解** 180 円の赤い花と 210 円の白い花を合計 7 本買ったなら、合計 1380 円になった。赤い花と白い花はそれぞれ何本ずつ買ったか。

解) 赤い花を  $x$  本, 青い花を  $y$  本とおくと,

$$x + y = 7$$

$$180x + 210y = 1380$$

より,  $x = 3, y = 4$

(同状・同解 1 事例群, 作問 2 回目)

**カテゴリ異状・同解** 150 g のミルクと 200 g のコーヒーを合わせて 8 本ミックスさせると、1500 g 分のカフェオレができ上がりました。それぞれ何本用意しますか。

解) ミルクを  $x$  本, コーヒーを  $y$  本とおくと,

$$x + y = 8$$

$$150x + 200y = 1500$$

より,  $x = 2, y = 6$

(異状・同解事例群, 作問 2 回目)

**カテゴリ同状・異解** ケーキとプリンを買いに行った。普段なら、ケーキ 6 個とプリン 6 個を買い合計は 2400 円なのだが、今日はケーキが 30% 引きだったので、ケーキをいつもより 3 個多く買おうと、合計は 2475 円だった。普段のケーキとプリンの値段を求めよ。

解) ケーキを  $x$  円, プリンを  $y$  円とおくと,

$$6x + 6y = 2400$$

$$\frac{100-30}{100} \times (6+3)x + 6y = 2475$$

より,  $x = 250, y = 150$

(同状・異解事例群, 作問 2 回目)

**カテゴリ異状・異解** Bさんは友達 6 人とビリヤード場に行きました。そこでは 30 分 350 円でした。そして、何人かは割引券をもっていました。割引券は 2 時間以上の利用で 30 分 250 円でした。1

枚につき 1 人使えました。3 時間遊んで 1 0 8 0 0 円だった場合、  
割引券の枚数を答えよ。

解) 割引券を持っていなかった人を  $x$  人, 持っていた人を  $y$  人とおくと,

$$x + y = 6$$

$$\frac{3 \times 60}{30} \times (350x + 250y) = 10800$$

より,  $x = 3, y = 3$

(異状・異解事例群, 作問 2 回目)

## 付 録 D 研究 3 の実験的評価における作成問題

**カテゴリ同状・同解** ゲームをするためカードを配る。ひとり 10 枚ずつ配ると 3 枚あまり、ひとり 11 枚ずつ配ると 2 枚足りない。何人いるか？

解)  $x$  人とおくと、

$$10x + 3 = 11x - 2$$

より、 $x = 5$

(統制群, 事後テスト)

**カテゴリ異状・同解** コップを使ってボウルに水を入れる。ボウルにコップ満杯の水を 7 杯入れると 10 ml 足りなく、9 杯入れると 130 ml あふれてしまう。このコップは何 ml の水が入るか。

解)  $x$  ml とおくと、

$$7x + 10 = 9x - 130$$

より、 $x = 70$

(発散事例群, 事後テスト)

**カテゴリ同状・異解** 1 冊 80 円のノートを何人かの子供に配る。1 人に 5 冊配ると 100 円あまり、1 人に 7 冊配ると 700 円足りない。子供の数は何人か。

解) 子供を  $x$  人とおくと、

$$(5 \times 100)x + 100 = (7 \times 100)x - 700$$

より、 $x = 4$

(固着事例群, 事前テスト)

**カテゴリ異状・異解** 父の年齢は私の年齢の 3 倍より 6 歳年上で、私より 5 歳年下の妹の年齢のちょうど 6 倍である。私の年齢は何歳か。

解) 私の年齢を  $x$  歳とおくと、

$$3x + 6 = 6x - 6 \times 5$$

より、 $x = 12$

(発散事例群, 事後テスト)