

流体構造連成法に基づく
フラッタ現象の数値解析

橋本 敦

流体構造連成法に基づく
フラッタ現象の数値解析

2007

橋本 敦

目次

第 1 章	序論	1
1.1	本研究の背景	1
1.1.1	空力弾性学の歴史	1
1.1.2	フラッタ解析の最近の動向	1
1.1.3	非線形空力弾性学	3
1.1.4	パネルフラッタ	5
1.1.5	デルタ翼フラッタ	7
1.2	本研究の目的	7
1.3	本論文の構成	8
第 2 章	基礎方程式	9
2.1	圧縮性流体支配方程式	9
2.1.1	圧縮性 Navier-Stokes 方程式	9
2.1.2	一般座標変換	11
2.1.3	格子が変形および移動する時の一般座標変換	13
2.2	非圧縮性流体支配方程式	14
2.2.1	擬似圧縮性 Navier-Stokes 方程式	15
2.2.2	一般座標変換	17
2.3	平板支配方程式	18
2.3.1	大変形平板曲げ方程式	18
2.3.2	微小変形平板曲げ方程式	20
第 3 章	数値解析法の概要	21
3.1	格子形成法	21
3.2	メトリックの評価について	22
3.3	流体の計算法	22
3.3.1	空間の離散化	23

3.3.2	セル境界における解ベクトルの補間-MUSCL 法	23
3.3.3	数値流束の計算法-Roe の近似 Riemann 解法	25
3.3.4	粘性項の評価	28
3.3.5	乱流モデル	28
3.3.6	時間積分	31
3.3.7	境界条件	35
3.3.8	非圧縮性流体解析	37
3.4	並列計算	39
3.5	構造の計算法 (大変形平板曲げ方程式)	40
3.5.1	空間の離散化	40
3.5.2	時間積分	43
3.6	構造の計算法 (線形平板曲げ方程式)	44
3.6.1	有限要素法	44
3.6.2	板曲げ要素	44
3.6.3	平面シェル要素	48
3.6.4	質量マトリックス及び外力マトリックス	50
3.6.5	全体のマトリックス	50
3.6.6	モード分解	51
3.7	流体構造連成解析法	51
3.7.1	連成手法	52
3.7.2	格子の移動・変形方法	52
3.7.3	流体構造間のデータの受け渡し	53
3.7.4	検証 (流体解析)	55
3.7.5	検証 (構造解析)	56
第 4 章	境界層のパネルフラッタへの影響	59
4.1	はじめに	59
4.2	計算法	59
4.2.1	流体計算法	59
4.2.2	構造計算法	60
4.2.3	連成計算法	60
4.3	解析コードの検証	61
4.3.1	計算条件	61

4.3.2	計算領域および計算格子	61
4.3.3	計算結果 (フラッタ限界)	61
4.3.4	計算結果 (リミットサイクル振動)	62
4.4	境界層のフラッタ限界への影響	64
4.4.1	計算条件	64
4.4.2	初期流れ場	65
4.4.3	結果	67
4.4.4	パネル下面圧力の影響	69
4.4.5	3次元パネルフラッタ	70
4.5	まとめ	78
第5章	曲面パネルの解析	79
5.1	はじめに	79
5.2	解析対象	79
5.3	曲面パネルフラッタの特性	81
5.4	計算方法	81
5.4.1	流体計算法	81
5.4.2	構造計算法	82
5.4.3	連成計算法	82
5.5	結果及び考察	82
5.5.1	検証	82
5.5.2	質量比の影響	85
5.5.3	低超音速領域での特性	85
5.5.4	アクセスパネルの特性	88
5.6	まとめ	94
第6章	低速デルタ翼フラッタ現象における大変形振動流れ場の解析	95
6.1	はじめに	95
6.2	実験方法	95
6.3	計算方法	98
6.3.1	流体計算法	98
6.3.2	構造計算法	98
6.3.3	連成計算法	98
6.4	デルタ翼の固有振動モード	99

6.5	結果及び考察	99
6.5.1	リミットサイクル振動及び遷移	99
6.5.2	フラッタ速度	104
6.5.3	大振幅振動について	105
6.6	まとめ	115
第7章	結論	116
	参考文献	119
	謝辞	129
	研究業績	130

第1章 序論

1.1 本研究の背景

1.1.1 空力弾性学の歴史

100年ほど前に認知された航空機の空力弾性学は、1950年代、60年代に多くの超音速機開発を経験し、急速に発達した。60年代に有限要素法(FEM)が登場し、それ以降計算機を用いた解析法が多用されるようになった。70年代では、構造解析に有限要素法を、流体解析にはパネル法を使用したフラッタ解析が行われた。さらに、複合材を利用した空力弾性的テーラリングが開発され、フラッタの能動制御技術も進歩した(空力制御弾性学: aeroservoelasticity)。80年代には、 piezoelectric素子を用いたフラッタ制御が開始された。そして、90年代から現在に至るまで、計算機の急速な進歩により、構造の大変形、リミットサイクル振動、衝撃波を含む遷音速流れ等の非線形現象が解析できるようになった。これには、計算流体力学(CFD)の急速な進歩が大いに貢献している。ライト兄弟の初飛行から100年目にあたる2003年のJournal of Aircraftでは空力弾性の特集が組まれ、多くの研究者が空力弾性の歴史と未来の展望について述べている[1]-[10]。

1.1.2 フラッタ解析の最近の動向

計算機は今日においても、とどまることなく進化し続けている。近年では、大型計算機よりも、パーソナルコンピューター(PC)の進歩が顕著であり、それを利用した安価なPCクラスタが一般的になっている。(この傾向はTOP500 Supercomputer Sites[11]が公表している統計データからも明らかである。)PCクラスタの登場により、高性能計算機がより身近になり、また計算機の発展とともに、流体解析手法も変化している。ポテンシャル方程式から始まったCFDであるが、近年では、3次元Navier-Stokes方程式を解くのが普通になってきた。そして、さらに計算コストが高いCFDを用いた流体構造連成解析も、一般的になりつつある。

流体構造連成解析に対する社会的需要は大きく、商用解析ソフトも対応し始めている。その一例として、CD-adapcoは、単に流れ解析のみではなく、連続体力学分野(流

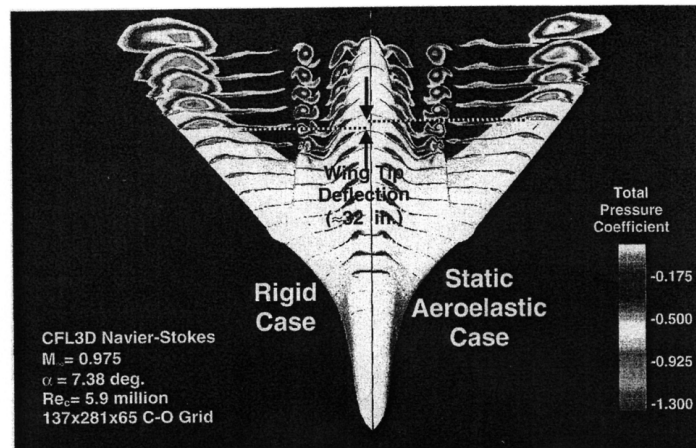


図 1.1: B-1 航空機の剛体翼と静的弾性翼との比較

体、構造解析など)への拡張を視野に入れて、現在新たに STAR-CCM+を開発している。流体のみ、あるいは構造のみの解析ではなく、製品そのものの形状・構成において多分野統合解析を行いたいという企業の需要は大きい。

最近の研究では、実際的な形状の空力弾性問題を流体構造連成により解析している。Hartwich らは、B-1 航空機の形状を連成解析し、実験と比較した [12]。図 1.1 に剛体の場合 (rigid Case) と静的空力弾性変形した場合 (Static Aeroelastic Case) の比較を示す。静的な変形を考慮すると、局所の有効迎角が小さくなり、剛体の場合に比べ剥離渦が小さくなる。そして、その静的変形の大きさは、風洞実験と良く一致している。一方、リミットサイクル振動のシミュレーションも行ったが、その計算により得られた振幅はとても小さく、実験の約 1/5 であった。その理由として、計算の時間刻みの影響が大きく、時間刻みをさらに小さく取るべきであると述べられている。このような剥離渦を含む流れと構造の非定常干渉問題はまだ未解明な部分が多い。そして、精度良く非定常計算するためには計算コストが問題となり、計算の高速化が課題となる。

フラッタ解析用の CFD コードを検証するためには、質の良い非定常計測データが必要である。Scott らは、図 1.2(a) に示す超音速機の半裁模型を用いてフラッタ試験を行った [13][14]。模型を強制的に動かすことにより、検証用の非定常空力データも計測した。図 1.2(b) は各迎角、マッハ数のフラッタ境界を示す。迎角が小さくなるにつれて、フラッタ動圧が下がり、Transonic dip の位置も変化する。このような迎角の効果が亜音速領域でも顕著に現れるのは稀である。この形態では、迎角を下げると、下面側で前縁が丸いストレーキ部分から剥離渦が生じる。そのため、圧力中心が上流側に移動するため、不安定になると考えられる。彼らは静止翼と強制振動翼をそれぞれ CFD を用いて流体解析し、実

験と比較した．静止翼の場合は，格子数が不十分なため，多少渦が拡散しているが，比較的实验と良い一致を示す．一方，図 1.3 は強制振動させた時の非定常圧力データとの比較である．迎角 $\alpha_0 = -5^\circ$ を中心に，角度を $\pm 1^\circ$ 強制振動させている時の結果である．強制振動では，静止時よりも，さらに渦が拡散し，実験との差は増大する．そして，亜音速よりも遷音速領域で実験との差が大きくなると述べられている．

以上述べたように，実際的な形状で実験及び解析が進められているが，非線形解析は計算コストが高く，実験と一致させるのは困難である．また，実験にも誤差が含まれている可能性がある．さらに，現象がより複雑になり，メカニズムを理解することがより一層困難になるという問題がある．最近では，非線形現象を数値的に解けるようになったが，検証が不十分であるため，我々はその現象を十分に理解していない．これを克服するために，基礎的な研究は大学を中心として進められている．

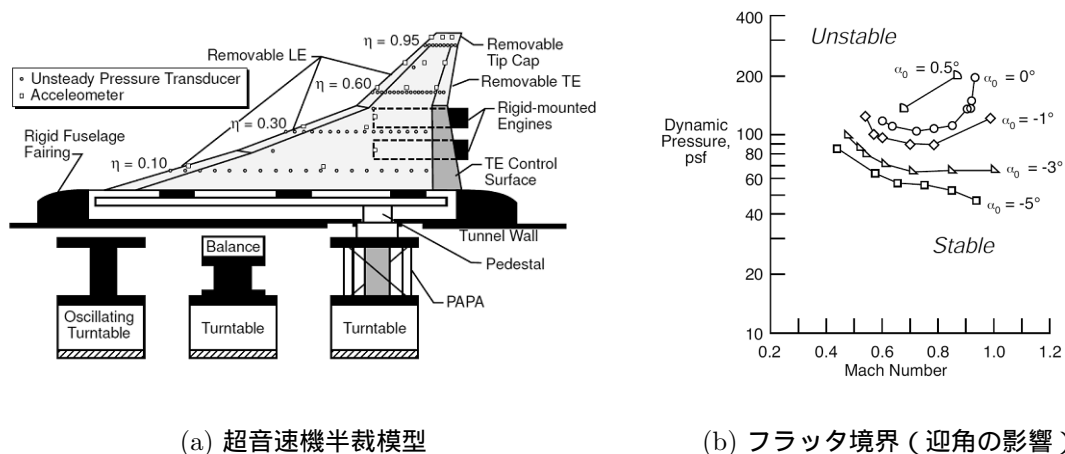


図 1.2: 超音速機フラッタ試験

1.1.3 非線形空力弾性学

Dowell は，空力弾性の非線形性の研究，特にリミットサイクル振動の研究を数多く行ってきた [6][15]．非線形性の特徴は，以下の 2 点としてまとめられる．(1) 線形理論ではフラッタが起きた後，指数関数的に振幅が増加していくが，非線形理論では，有限の振幅をもつリミットサイクル振動となる (図 1.4(a))．(2) 小さな擾乱に対しては安定な系が，大きな擾乱に対しては不安定になることである．この代表的な例が，ヒステリシス現象である (図 1.4(b))．飛行速度を増加させた時と，減少させた時で，異なる現象が現れ，減速させた時の方が，フラッタがより良く持続される．1 つ目の非線形性は「安全側に働く非

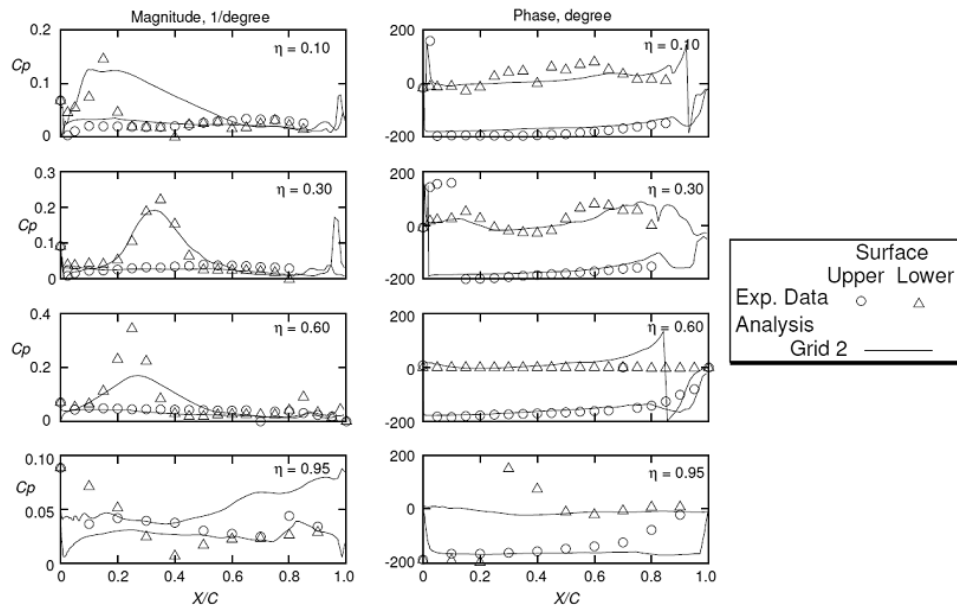


図 1.3: 非定常圧力計測データと計算結果の比較 ($M = 0.95$, 動圧 $q = 150\text{psf}$, $Re = 2.2 \times 10^6$, $f = 5\text{Hz}$, η はスパン方向を示す (図 1.2(a) 参照))

線形性」であるが、2つ目は、逆にフラッタ速度が下がるので、「危険側に働く非線形性」である。このような非線形現象を発生させる原因として、構造側では、(1) ゆるく結合された部品で生じる自由運動、(2) 大変形した際の幾何学的非線形性、(3) 滑る接触面から生じる摩擦や非線形ダンピングなどが考えられる。一方、流体側では、(1) 遷音速領域で発生する衝撃波の移動現象、(2) 剥離流れなどが考えられる。

航空機の翼を空力弾性解析する時、翼のモデル化はアスペクト比によって異なる [15]。高アスペクト比の翼は、「梁」としてモデル化する。このモデル化は長年使用されており、スパン方向の曲げ、コード方向の曲げ (lead-lag)、ねじり (twist) に分解して考える。これらの組み合わせにおいて構造的非線形性が発生する。このようなモデルは、初めヘリコプターブレードの解析用に開発された。また、古典的な方法では、コード方向の変形は、剛体翼のプランジ (並行移動) とピッチ (回転) の組み合わせとして取り扱う。これに関連して、最近では、無人飛行機 (UAV) 用の大変大きいアスペクト比翼 [16] の解析に関心が集まっている。

一方、低アスペクト比の翼は、コード方向にもスパン方向にも大きく変形するので、「平板」としてモデル化する。von Karman は板の曲げ変形が板厚のオーダーになると、面内方向の応力が発生し、非線形効果が現れることを示した。(つまり、面内変形と曲げを

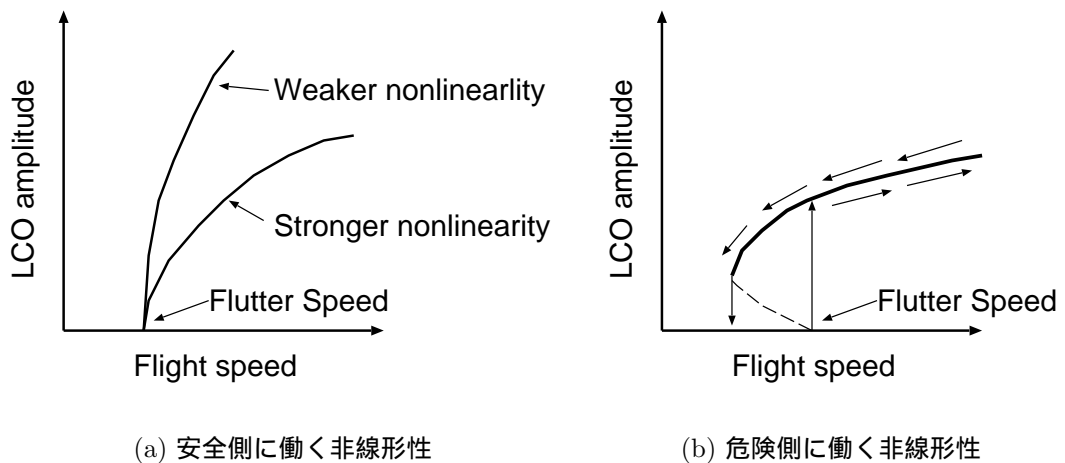


図 1.4: リミットサイクル振動に関連した非線形性

分解できなくなる.)

フラッタ特性はそのアスペクト比により異なるが、低アスペクト比の非線形空力弾性の研究は、高アスペクト比に比べ少なく、最近のものが多い。このようなことを踏まえて、本研究では「平板」のフラッタ現象を扱う。

1.1.4 パネルフラッタ

平板のフラッタ現象の1つにパネルフラッタがある。パネルフラッタとは、両端が固定されたパネルの上面に高速流体が流れることにより、パネルの振動が誘起される空力弾性問題である。このパネルに該当するものは、航空機や宇宙機の胴体の外板、ドア、点検用アクセスパネルなどである。第2次大戦中、V2 ロケットの外板が振動して破壊した時に、この問題の重要性が認識された。その後の超高度極超音速試験機 X-15 でも問題となった。最近では、NASA が再使用ロケットに使用される熱防御システムのパネルフラッタ解析を行っている [17]。フラッタ限界は、マッハ数、無次元動圧（一様流動圧とパネル剛性との比）、質量比、パネルのアスペクト比などにより決定される。

Dowell はパネルフラッタに関する基礎的な研究を数多く行った [18][19]。また、Mei らは、極超音速解析を含め最近のパネルフラッタの研究をまとめている [20]。最近の研究は、以下のように大きく4つに分類することができる。

1. 空気力モデルの研究: 最近では、空気力モデルを新しく開発するというよりも、CFD を用いて連成させることによって、空気力をより精度良く求める。Davis ら [21] は Euler

方程式を，Gordnierら [22] は Nvaier-Stokes 方程式を用いて解析した．

2. 構造モデルの研究： 複合材をモデル化し，有限要素法を用いて解析をする．代表的な解析例として，文献 [23] 及び [24] が挙げられる．複合材のファイバーの方向によって，フラッタ特性が異なる．
3. フラッタ制御の研究： ピエゾ素子を用いてパネルフラッタを抑制する [25][26][27]．
4. 熱効果の研究： 極超音速時に特に問題となる．パネル表面温度が高い場合，フラッタ限界動圧が下がったり，リミットサイクル振動の振幅が大きくなる [20][28]．また，パネルの熱膨張によりフラッタ特性も変化する．

本研究は，この中の (1) 空気力モデルに分類され，CFD を活用してパネルフラッタを解析する．パネルフラッタは，遷音速付近で最もフラッタ限界が下がり，超音速機や極超音速機を設計する際にパネルフラッタの解析が必須である．遷音速領域は，流体现象が非線形であるため，解析的には最も困難な領域であるが，CFD を用いれば比較的容易に解析可能となる．CFD に基づく流体構造連成解析コードを開発できれば，どんな速度領域にも対応でき，かつ複雑な形状にも適用することができる．

これまで，パネルフラッタに関して実験と理論が合わない場合，原因として，速度境界層の影響が考えられてきた [29]．Dowell[30] は，速度境界層の影響を調べるために，流体方程式を時間平均成分と変動成分に分離して考えた．時間平均場として境界層の速度分布を仮定し，それに基づいて変動成分の方程式を解き，速度境界層の影響が大きいことを示した．また，Gordnier[22] は CFD を用いてパネルフラッタの問題を解き，境界層の効果を強調している．しかし，実験との比較がされておらず，その解析法の有効性は示されていない．

また，流れに垂直方向に曲率の付いた曲面パネルの研究もこれまでに行われてきた．Dowell[31][32] は，解析解に基づいた超音速空気力モデルを採用し，この方法に対する定式化を行い，ガラーキン法によりフラッタ境界を求めた．曲率を変化させた場合，異なる固有振動モードが連成し，フラッタ限界動圧，フラッタ振動数等のフラッタ特性が変化することを示した．この現象は，その後，松崎 [33] によって詳細に研究されている．Anderson[34] は，曲率とアスペクト比の効果について調べ，二つの空気力モデル (Ackeret 理論と slender body 理論) による実用的な見積もり方法を提案した．その他，有限要素法を用いた解析方法 [35] も報告されている．しかし，どの研究も超音速準定常空気力モデルを使用しているため，音速に近い超音速領域 (低超音速領域) の解析は報告されていない．

1.1.5 デルタ翼フラッタ

デルタ翼は低アスペクト比の翼の1つで、低アスペクト比翼フラッタは、平板フラッタに分類される。

最近、無人航空機 (UAV: unmanned air vehicle) や、マイクロ航空機 (MAV: micro air vehicle) に使用される柔軟な翼の研究が活発に行われている。UAV や MAV の分野では、機体主翼にデルタ翼が多く採用されている。これは、デルタ翼が高速飛行性能と、低速飛行での機動性 (特に剥離流が支配的である大迎角での機動性) の両方を兼ね備えているためである。最近では、後退角の小さいデルタ翼 (後退角 $\Lambda = 40 \sim 60^\circ$) の使用や研究 [36] も数多くなされている。

有人機との最大の違いは、無人という点で、安全性に対する考え方が異なり、例えば、無人機では、翼の小さな振動は問題とされないように思われる。むしろ、逆に、受動的に振動させると、デルタ翼の高迎角での揚力が増加するという報告 [36] もある。しかし、破壊を起こすような大きな振幅のフラッタ振動は避ける必要がある。

デルタ翼の低速フラッタは、まず Doggett ら [37] によって実験と解析で研究された。彼らは、迎角 $\alpha = 0^\circ$ でのデルタ翼のフラッタ速度に対する後退角の影響を調べ、フラッタ速度指数で評価した場合、後退角を増すと、フラッタ速度が減少することを明らかにした。また、フラッタ速度に関して、doublet lattice 法による計算値と実験データは良く一致することを示した。Tang ら [38] は、振幅が板厚程度のリミットサイクル振動を調べ、その振幅は実験と計算で定性的に一致している。また、迎角の効果は、Tang ら [39] や Attar ら [40] により研究され、フラッタ速度やリミットサイクル振動の振幅は迎角に依存することが示されている。しかし、迎角の効果は、実験と計算で異なり、解明されたとは言えない。

1.2 本研究の目的

以上に述べた様に、CFD に基づく連成解析法は、B-1 航空機や超音速機の様な、より実用的な応用問題に適用されているが、剥離渦が干渉するような問題、つまり流体場が複雑で粘性が影響を及ぼす空力弾性問題は未だ困難であると言える。その様な問題を解くには、精度や効率の良い方法で解く必要がある。

本研究の目的は、CFD を用いた高精度・高効率な流体構造連成計算コードを開発することである。その検証は、パネルフラッタ問題に適用して行われ、パネル上面の境界層がパネルフラッタに及ぼす影響を調べる。また実験データと比較して、CFD で得られる、

より正確な空気力を利用することの有効性を評価する。

さらに、検証された計算コードを用いて、曲面パネルフラッタの問題を解析する。CFDを使用することで遷音速領域の解析が容易になり、今まで報告されていない低超音速領域での解析も行い、実用的なアクセスパネルの問題にも適用する。

最後に、剥離渦を伴うデルタ翼フラッタを解析する。低速実験で、振動や流れ場を計測し、大振幅振動している翼周りの流れ場に焦点を当てて、本解析解と比較する。

1.3 本論文の構成

本論文の構成は以下の様になっている。

第2章では、基礎となる方程式を記述し、流体と構造の方程式をそれぞれ述べる。

第3章では、流体及び構造解析の手法、ならびに連成計算法について述べる。

第4章では、流体構造連成法の検証として、パネルフラッタ問題に適用した結果を述べる。パネル上面の境界層がパネルフラッタに及ぼす影響を調べる。具体的には、境界層を厚くした時に、フラッタが抑制される効果を連成計算によって解析し、その結果を実験と比較し、連成計算の有効性を評価する。

第5章では、実用的な問題である、曲面パネルフラッタの解析について述べる。実際の航空機や宇宙機は曲面パネルで構成されている。本研究では、今までに報告されていない低超音速領域の特性を明らかにし、アクセスパネルの境界条件に関して議論する。

第6章では、剥離渦が干渉するフラッタ問題として、低速デルタ翼フラッタの解析について述べる。実験データからフラッタ特性を明らかにし、大振幅時のデルタ翼流れ場に関して計算結果と比較する。

最後に第7章では、本博士論文研究成果をまとめ、結論を述べる。

第2章 基礎方程式

2.1 圧縮性流体支配方程式

ここでは、遷音速領域の流体解析に用いた圧縮性流体の支配方程式について述べる。

2.1.1 圧縮性 Navier-Stokes 方程式

圧縮性流体の支配方程式は3次元圧縮性 Navier-Stokes 方程式である。直交座標系における無次元化された保存形の Navier-Stokes 方程式は次式のように書ける。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\partial E_v}{\partial x} + \frac{\partial F_v}{\partial y} + \frac{\partial G_v}{\partial z} \right\} \quad (2.1)$$

ここで Q は解ベクトル, E, F, G はそれぞれ x, y, z 方向への非粘性流束ベクトル, E_v, F_v, G_v はそれぞれ x, y, z 方向への粘性流束ベクトルである。それぞれの成分を書き下すと,

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (e+p)u \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vw \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (e+p)v \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho wv \\ \rho w^2 + p \\ \rho wv \\ (e+p)w \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

$$E_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \beta_x \end{pmatrix}, \quad F_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ \beta_y \end{pmatrix}, \quad G_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ \beta_z \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

となる。

ニュートン流体の粘性応力テンソル τ_{ij} は,

$$\tau_{ij} = \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + 2\mu \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.4)$$

と記述できる． λ, μ は係数である．テンソルの対角成分の和をとると，

$$\Sigma \tau_{ii} = (3\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (2.5)$$

となる．この和が0になるように，すなわち体積粘性率 (bulk viscosity) が0になるように，

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (2.6)$$

とする (Stokes の仮定)．この仮定を用いると，粘性流束ベクトルの τ_{ij} ， β_i は具体的に以下の様になる．

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{2}{3}\mu \left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \tau_{yy} &= \frac{2}{3}\mu \left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \tau_{zz} &= \frac{2}{3}\mu \left(2\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \beta_x &= u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} + \frac{k}{(\gamma - 1)M_\infty^2 Pr} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \beta_y &= u\tau_{yy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} + \frac{k}{(\gamma - 1)M_\infty^2 Pr} \frac{\partial T}{\partial y} \\ \beta_z &= u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zy} + \frac{k}{(\gamma - 1)M_\infty^2 Pr} \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned}$$

ここで， γ は比熱比， M_∞ は一様流マッハ数である．また，長さ x, y, z は基準長さ L で、速度成分 u, v, w ，密度 ρ ，温度 T ，粘性係数 μ ，熱伝導係数 k はそれぞれ一様流での値 $U_\infty, \rho_\infty, T_\infty, \mu_\infty, k_\infty$ で、圧力 p 及び単位体積あたりの全エネルギー e はそれぞれ $\rho_\infty U_\infty^2$ で無次元化されている．さらに， Pr はプラントル数で $Pr = C_p \mu_\infty / k_\infty$ ， Re はレイノルズ数で $Re = \rho_\infty U_\infty L / \mu_\infty$ で定義される無次元量である．

粘性係数は温度によって変化し、 μ_0, μ をそれぞれ気体の 1atm, 273 K および T K における値とすると、次の Sutherland の式で近似できる．

$$\mu = \frac{\mu_0 \left(1 + \frac{C}{273}\right)}{\sqrt{273}} \frac{T^{3/2}}{T + C} \quad (2.8)$$

C は Sutherland の定数で気体による物性値として与えられている。例えば空気では、 $C = 123.6$ と与えられる。プラントル数は一定であるので無次元化された熱伝導係数と粘性係数は同じになる。

$$k = \mu \quad (2.9)$$

解ベクトル Q より ρ, u, v, w, e が求まれば、圧力 p は単位体積あたりの全エネルギー式から次の式で計算される。

$$p = (\gamma - 1) \left[e - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) \right] \quad (2.10)$$

また、温度は無次元化された理想気体に対する状態方程式から計算できる。

$$p = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} \rho T \quad (2.11)$$

2.1.2 一般座標変換

本研究において、物理平面については不等間隔格子を用いるため、等間隔格子をもつ計算格子で計算することを考える。以下に物理空間と計算空間の変換関係を導く。Navier-Stokes 方程式を直交座標系 (x, y, z) から一般座標系 (ξ, η, ζ) へ変換する。

$$x = x(\xi, \eta, \zeta), \quad y = y(\xi, \eta, \zeta), \quad z = z(\xi, \eta, \zeta) \quad (2.12)$$

とおくと、chain rule から

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

同様にして

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

と表される。この2つの式から次の逆行列の関係が得られる。

$$\begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.15)$$

成分同士を比較することによりメトリック (metrics) の関係式は、

$$\begin{aligned} \xi_x &= J(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta) & \xi_y &= J(z_\eta x_\zeta - z_\zeta x_\eta) & \xi_z &= J(x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta) \\ \eta_x &= J(y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta) & \eta_y &= J(z_\zeta x_\xi - z_\xi x_\zeta) & \eta_z &= J(x_\zeta y_\xi - x_\xi y_\zeta) \\ \zeta_x &= J(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi) & \zeta_y &= J(z_\xi x_\eta - z_\eta x_\xi) & \zeta_z &= J(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \end{aligned} \quad (2.16)$$

となる. ここで, J はヤコビアン (Jacobian) とよばれ, 次式で与えられる.

$$J^{-1} = x_{\xi}(y_{\eta}z_{\zeta} - y_{\zeta}z_{\eta}) + x_{\eta}(y_{\zeta}z_{\xi} - y_{\xi}z_{\zeta}) + x_{\zeta}(y_{\xi}z_{\eta} - y_{\eta}z_{\xi}) \quad (2.17)$$

ヤコビアンは 3 次元の場合には計算空間のセル体積と物理空間のセル体積の比を表す. また, メトリックは格子セルの各辺の射影を表す.

$$J \equiv \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(z, r)} = \frac{[\text{計算面のセル体積}]}{[\text{物理面のセル体積}]} \quad (2.18)$$

以上の関係式を用いて, 一般座標 (ξ, η, ζ) における解ベクトル \hat{Q} , 非粘性流束 $\hat{E}, \hat{F}, \hat{G}$ 及び粘性流束 $\hat{E}_v, \hat{F}_v, \hat{G}_v$ は, chain rule に従い, 次のようにして導かれる. 例えば, x 方向の流束成分は,

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \xi_x \frac{\partial E}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial E}{\partial \eta} + \zeta_x \frac{\partial E}{\partial \zeta} \quad (2.19)$$

$$= J \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi_x E}{J} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta_x E}{J} \right) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\zeta_x E}{J} \right) \right) \right) \quad (2.20)$$

$$= J \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (J^{-1}(\xi_x E)) + \frac{\partial}{\partial \eta} (J^{-1}(\eta_x E)) \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} (J^{-1}(\zeta_x E)) \quad (2.21)$$

のように変換される. 全ての流束に同様の操作を施して, 一般座標での解ベクトルおよび, 流束の形で求めると,

$$\hat{Q} = J^{-1}Q \quad (2.22)$$

$$\hat{E} = J^{-1}(\xi_x E + \xi_y F + \xi_z G), \quad \hat{E}_v = J^{-1}(\xi_x E_v + \xi_y F_v + \xi_z G_v) \quad (2.23)$$

$$\hat{F} = J^{-1}(\eta_x E + \eta_y F + \eta_z G), \quad \hat{F}_v = J^{-1}(\eta_x E_v + \eta_y F_v + \eta_z G_v) \quad (2.24)$$

$$\hat{G} = J^{-1}(\zeta_x E + \zeta_y F + \zeta_z G), \quad \hat{G}_v = J^{-1}(\zeta_x E_v + \zeta_y F_v + \zeta_z G_v) \quad (2.25)$$

となる. このようにして, 一般座標における保存形の Navier-Stokes 方程式は

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \zeta} = \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\partial \hat{E}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}_v}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}_v}{\partial \zeta} \right\} \quad (2.26)$$

と表される. ここで, 一般座標における解ベクトル \hat{Q} , 非粘性流束ベクトル $\hat{E}, \hat{F}, \hat{G}$ 及び粘性流束ベクトル $\hat{E}_v, \hat{F}_v, \hat{G}_v$ は具体的には以下のようになる.

$$\hat{Q} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$\hat{E} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_y p \\ \rho w U + \xi_z p \\ (e + p)U \end{bmatrix}, \quad \hat{E}_v = J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_x \tau_{xx} + \xi_y \tau_{xy} + \xi_z \tau_{xz} \\ \xi_x \tau_{yx} + \xi_y \tau_{yy} + \xi_z \tau_{yz} \\ \xi_x \tau_{zx} + \xi_y \tau_{zy} + \xi_z \tau_{zz} \\ \xi_x \beta_x + \xi_y \beta_y + \xi_z \beta_z \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$\hat{F} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_y p \\ \rho w V + \eta_z p \\ (e + p)V \end{bmatrix}, \quad \hat{F}_v = J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_x \tau_{xx} + \eta_y \tau_{xy} + \eta_z \tau_{xz} \\ \eta_x \tau_{yx} + \eta_y \tau_{yy} + \eta_z \tau_{yz} \\ \eta_x \tau_{zx} + \eta_y \tau_{zy} + \eta_z \tau_{zz} \\ \eta_x \beta_x + \eta_y \beta_y + \eta_z \beta_z \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$\hat{G} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho W \\ \rho u W + \zeta_x p \\ \rho v W + \zeta_y p \\ \rho w W + \zeta_z p \\ (e + p)W \end{bmatrix}, \quad \hat{G}_v = J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \zeta_x \tau_{xx} + \zeta_y \tau_{xy} + \zeta_z \tau_{xz} \\ \zeta_x \tau_{yx} + \zeta_y \tau_{yy} + \zeta_z \tau_{yz} \\ \zeta_x \tau_{zx} + \zeta_y \tau_{zy} + \zeta_z \tau_{zz} \\ \zeta_x \beta_x + \zeta_y \beta_y + \zeta_z \beta_z \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

τ_{ij}, β_i に含まれる x, y, z 微分 (式 (2.8) 参照) は全て ξ, η, ζ 微分に変換して計算する. また, U, V, W は反変速度 (contravariant velocity) 成分で, 次式で定義される.

$$\begin{aligned} U &= \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w \\ V &= \eta_x u + \eta_y v + \eta_z w \\ W &= \zeta_x u + \zeta_y v + \zeta_z w \end{aligned} \quad (2.31)$$

物理的に反変速度とはそれぞれ (ξ, η, ζ) のどちらかが一定の面に垂直な速度成分をさす. すなわち, 計算面における ξ, η, ζ 方向の速度成分と考えてもよい. これらの方程式は (ξ, η, ζ) が直交している必要はなく, どのような座標系にも有効である. 実際には簡単化のため, 計算領域は長方形とし, その上に構築される格子間隔 $\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta$ を 1 にとる.

以上により物理面と計算面の対応づけがなされた. 物理面で定義された元の方程式との違いは方程式の中に変換による metrics や jacobian が新たに現れたことでこれらの値を数値的に与える必要がある.

2.1.3 格子が変形および移動する時の一般座標変換

格子が変形及び移動する時は, その効果を一般座標変換に含めて考える. 一般座標系でのナビエ・ストークス方程式での変更点は反変速度成分が次のようになる.[41]

$$\begin{aligned} U &= \xi_t + \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w \\ V &= \eta_t + \eta_x u + \eta_y v + \eta_z w \\ W &= \zeta_t + \zeta_x u + \zeta_y v + \zeta_z w \end{aligned} \quad (2.32)$$

また, 非粘性流速ベクトルは具体的に以下ようになる. エネルギー保存の式が変わる.

$$\hat{E} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_y p \\ \rho w U + \xi_z p \\ (e + p)U - \xi_t p \end{bmatrix}, \hat{F} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_y p \\ \rho w V + \eta_z p \\ (e + p)V - \eta_t p \end{bmatrix}, \hat{G} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho W \\ \rho u W + \zeta_x p \\ \rho v W + \zeta_y p \\ \rho w W + \zeta_z p \\ (e + p)W - \zeta_t p \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

ξ_t, η_t, ζ_t の評価は chain rule によって以下の式で表せる.

$$\begin{aligned} \xi_t &= -(x_t \xi_x + y_t \xi_y + z_t \xi_z) \\ \eta_t &= -(x_t \eta_x + y_t \eta_y + z_t \eta_z) \\ \zeta_t &= -(x_t \zeta_x + y_t \zeta_y + z_t \zeta_z) \end{aligned} \quad (2.34)$$

保存量 Q の時間微分はヤコビアンが時間的に変化するので以下のように書きかえる

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{J} Q \right) = f(\hat{Q}) \quad (2.35)$$

$$\frac{1}{J} \frac{\partial Q}{\partial t} = \left(f(\hat{Q}) - Q \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{J} \right) \right) \quad (2.36)$$

ここで, ヤコビアン_{の時間微分 (体積の時間変化) の項を次の Geometric Conservation Law (GCL) を使って求める. [42][43]}

$$\left(\frac{1}{J} \right)_t = - \left(\left(\frac{\xi_t}{J} \right)_\xi + \left(\frac{\eta_t}{J} \right)_\eta + \left(\frac{\zeta_t}{J} \right)_\zeta \right) \quad (2.37)$$

この式は, 体積の時間変化は格子の表面積の時間変化が, 一致しなければならないということからきているので, GCL と呼ばれている. この式は格子形状が変化する際に一様流を保存するための条件でもある. この式を用いて, $n+1$ ステップの格子の体積を, 時間項を含んだ n ステップのメトリックから評価すれば, 一様流が保存される.

2.2 非圧縮性流体支配方程式

ここでは, 低速, 非圧縮流体解析に用いた非圧縮性流体の支配方程式について述べる.

非圧縮流体解析法には, 圧力のポアソン方程式と同時に解く方法をはじめとして, 様々な方法が提案されている. その一つとして, 擬似圧縮性法 (pseudo-compressibility method または artificial compressibility method) が 1968 年に Chorin[45] によって提案された. 擬似圧縮性法は圧縮性流体方程式の特性を利用し, 圧力と速度場を同時に求める方法である. 初めは定常な流れ場のみ用いられたが, Rogersら [46][47] によって, 非定常

な流れ場に拡張された．さらに，Turkel[48]によって，擬似圧縮の式を一般化し，前処理法 (preconditioned method) も提案されている．最近では，前処理法を用いた研究が盛んに行われているが，計算効率を考え，最もシンプルな擬似圧縮法を用いた．

2.2.1 擬似圧縮性 Navier-Stokes 方程式

非圧縮性流れの基礎方程式は Navier-Stokes 方程式であり，具体的には，運動方程式と連続方程式である．

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.38)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.39)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.41)$$

ただし D/Dt は実質微分であり， ρ, u, v, w, p はそれぞれ密度， x 方向， y 方向， z 方向速度，圧力である．また， μ は粘性係数である．はじめの3式が運動方程式であり，左辺は慣性力を，右辺第1項が圧力勾配の寄与，第2項が粘性力の寄与である．最後の連続の式は，非圧縮の仮定から導かれる速度の拘束条件である．

運動方程式からは速度を求めることができるが，圧力を求めることができないため，通常非圧縮流体解析は，運動方程式と圧力のポアソン方程式を交互に解くのが一般的である．しかし，本解析コードは，本大学研究室の圧縮性流体解析プログラムを活用するため，そのコードに”擬似圧縮性法”を組み込むことによって，非圧縮流体の問題を解いている．擬似圧縮性法とよばれる方法は，連続方程式に擬似圧縮性項を加え，この式から新しい時間の圧力 p を求めることができるようにしたものである．

圧縮性流れの連続方程式，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (2.42)$$

に等エントロピー流れの音速の式 $c^2 = dp/d\rho$ とし，密度変化が小さいとすると，

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.43)$$

となる．これより次の擬似圧縮性法の基礎方程式が導かれる．

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.47)$$

ただし, $\beta = \rho c^2$ は擬似圧縮性係数とよばれるものである. この方法は, 時間発展法で定常流れを求めるもので, 式 (2.44) から圧力 p , 式 (2.45) から式 (2.47) で速度 u, v, w が同時に計算される. 解が収束すれば $\partial p / \partial t = 0$ となるので, このようにして求められた解はもとの非圧縮性流れの方程式を完全に満足するものである. しかしながら収束に至る過程の流れは物理的に意味のない仮想的なものである. [49]

ベクトル形で表示すれば,

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\partial E_v}{\partial x} + \frac{\partial F_v}{\partial y} + \frac{\partial G_v}{\partial z} \right\} \quad (2.48)$$

ここで Q は解ベクトル, E, F, G はそれぞれ x 方向, y 方向, z 方向への非粘性流束ベクトル, E_v, F_v, G_v はそれぞれ x, y, z 方向への粘性流束ベクトルである. それぞれの成分を書き下すと,

$$Q = \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \beta u \\ u^2 + p \\ uv \\ uw \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \beta v \\ vu \\ v^2 + p \\ vw \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \beta w \\ wu \\ wv \\ w^2 + p \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

$$E_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix}, \quad F_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}, \quad G_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

となる.

また, 粘性流束ベクトルの中の τ_{ij} は次式のように計算できる.

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{2}{3} \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \tau_{yy} &= \frac{2}{3} \mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \tau_{zz} &= \frac{2}{3} \mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned}\tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

ここで，長さ x, y, z は基準長さ L で，速度成分 u, v, w ，粘性係数 μ はそれぞれ一様流での値 U_∞, μ_∞ で，擬似圧縮性係数 β はそれぞれ $\rho_\infty U_\infty^2$ で無次元化されている．また，圧力 p は， $(p - p_\infty)/\rho_\infty U_\infty^2$ の様に無次元化する．非圧縮性流体の場合は圧縮性流体に比べ，圧力変化が小さいので，一様流圧力からの差を用いるのが一般的である．さらに， Re はレイノルズ数で， $Re = \rho_\infty U_\infty L / \mu_\infty$ で定義される無次元量である．

2.2.2 一般座標変換

節 2.1.2 と同様にして，一般座標変換することができる．擬似圧縮流体方程式の一般座標における保存形の Navier-Stokes 方程式は，

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \zeta} = \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\partial \hat{E}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}_v}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}_v}{\partial \zeta} \right\} \quad (2.52)$$

と表される．

ここで，一般座標における解ベクトル \hat{Q} ，非粘性流束ベクトル $\hat{E}, \hat{F}, \hat{G}$ 及び粘性流束ベクトル $\hat{E}_v, \hat{F}_v, \hat{G}_v$ は具体的には以下ようになる．

$$\hat{Q} = J^{-1} \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

$$\hat{E} = J^{-1} \begin{bmatrix} \beta U \\ uU + \xi_x p \\ vU + \xi_y p \\ wU + \xi_z p \end{bmatrix}, \quad \hat{E}_v = J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_x \tau_{xx} + \xi_y \tau_{xy} + \xi_z \tau_{xz} \\ \xi_x \tau_{yx} + \xi_y \tau_{yy} + \xi_z \tau_{yz} \\ \xi_x \tau_{zx} + \xi_y \tau_{zy} + \xi_z \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

$$\hat{F} = J^{-1} \begin{bmatrix} \beta V \\ uV + \eta_x p \\ vV + \eta_y p \\ wV + \eta_z p \end{bmatrix}, \quad \hat{F}_v = J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_x \tau_{xx} + \eta_y \tau_{xy} + \eta_z \tau_{xz} \\ \eta_x \tau_{yx} + \eta_y \tau_{yy} + \eta_z \tau_{yz} \\ \eta_x \tau_{zx} + \eta_y \tau_{zy} + \eta_z \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

$$\hat{G} = J^{-1} \begin{bmatrix} \beta W \\ uW + \zeta_x p \\ vW + \zeta_y p \\ wW + \zeta_z p \end{bmatrix}, \quad \hat{G}_v = J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \zeta_x \tau_{xx} + \zeta_y \tau_{xy} + \zeta_z \tau_{xz} \\ \zeta_x \tau_{yx} + \zeta_y \tau_{yy} + \zeta_z \tau_{yz} \\ \zeta_x \tau_{zx} + \zeta_y \tau_{zy} + \zeta_z \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

τ_{ij} に含まれる x, y, z 微分 (式 (2.51) 参照) は全て ξ, η, ζ 微分に変換して計算する。また, U, V, W は反変速度成分で, 次式で定義される。

$$\begin{aligned} U &= \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w \\ V &= \eta_x u + \eta_y v + \eta_z w \\ W &= \zeta_x u + \zeta_y v + \zeta_z w \end{aligned} \quad (2.57)$$

また, 格子が移動・変形する時は, 節 2.1.3 と同様であり, 一般座標系でのナビエ・ストークス方程式での変更点は反変速度成分が次のようになる.[41]

$$\begin{aligned} U &= \xi_t + \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w \\ V &= \eta_t + \eta_x u + \eta_y v + \eta_z w \\ W &= \zeta_t + \zeta_x u + \zeta_y v + \zeta_z w \end{aligned} \quad (2.58)$$

また, 非粘性流束ベクトルは具体的に以下のようなになる。

$$\hat{E} = J^{-1} \begin{bmatrix} \beta(U - \xi_t) \\ uU + \xi_x p \\ vU + \xi_y p \\ wU + \xi_z p \end{bmatrix}, \hat{F} = J^{-1} \begin{bmatrix} \beta(V - \eta_t) \\ uV + \eta_x p \\ vV + \eta_y p \\ wV + \eta_z p \end{bmatrix}, \hat{G} = J^{-1} \begin{bmatrix} \beta(W - \zeta_t) \\ uW + \zeta_x p \\ vW + \zeta_y p \\ wW + \zeta_z p \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

擬似圧縮性法を用いた式は, ポアソン方程式を別に解く必要がなく, 圧縮性流体方程式と同じ様に解くことができる。その手法を次章に述べる。

2.3 平板支配方程式

2.3.1 大変形平板曲げ方程式

平板の大変形を扱う問題の場合, 構造の支配方程式は von Karman 方程式である。これは, 板の大たわみ理論の基礎方程式である [50]。本計算で扱うパネルフラッタ問題では, たわみが板厚程度の大きさでリミットサイクル振動を起こす。このような問題に対しては, 微小変形理論ではなく板の面内応力と曲げ応力が連成する大たわみ理論を用いなければならない。

ここで板は, 等方性で一樣な板厚を持ち, 初期たわみのない完全な平面と仮定する。板に垂直方向のたわみは板厚のオーダーで, 接線方向のたわみは微小とする。板の長さ比べ板厚は微小と考え, そのため変形に関して”中央面に垂直な直線上の点は, 変形後も変形した中央面の法線上にある (Kirchhoff の仮定)”が成立するとする。これらの仮定を用いると, 平板の大たわみ支配方程式は以下のようなになる。

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right)$$

$$= p + \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad (2.61)$$

ただし, xy 平面上に平板があり, z 方向の変位を w としている. D は板の曲げ剛性で

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.62)$$

ここで, ρ は単位面積あたりの板の質量, w は板に垂直方向のたわみ, E はヤング率, ν はポアソン比, h は板の厚さ, p は板に加わる単位面積当たりの力を表す. N_x, N_y, N_{xy} は合応力で,

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (2.63)$$

$$N_y = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2.64)$$

$$N_{xy} = \frac{1-\nu}{2} \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (2.65)$$

となる. 式 (2.60) から式 (2.65) に次の無次元化を施す.

$$\hat{w} = \frac{w}{h}, \quad \hat{u} = \frac{au}{h^2}, \quad \hat{v} = \frac{av}{h^2}, \quad \hat{p} = \frac{pa^4}{Eh^4}, \quad \hat{x} = \frac{x}{a}, \quad \hat{y} = \frac{y}{a}, \quad \hat{\rho} = \frac{\rho a^4}{Eh^3 T^2}, \quad (2.66)$$

$$\hat{N}_x = \frac{a^2 N_x}{Eh^3}, \quad \hat{N}_{xy} = \frac{a^2 N_{xy}}{Eh^3}, \quad \hat{N}_y = \frac{a^2 N_y}{Eh^3}, \quad \hat{t} = \frac{t}{T} \quad (2.67)$$

a はパネル長さ, T は代表時間である. すると,

$$\begin{aligned} & 12(1-\nu^2)\hat{\rho} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{t}^2} + \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial \hat{x}^4} + 2 \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2 \partial \hat{y}^2} + \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial \hat{y}^4} \\ &= 12(1-\nu^2) \left[\hat{\rho} + \hat{N}_x \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} + 2\hat{N}_{xy} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + \hat{N}_y \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{y}^2} \right] \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\frac{\partial \hat{N}_x}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{N}_{xy}}{\partial \hat{y}} = 0 \quad (2.69)$$

$$\frac{\partial \hat{N}_{xy}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{N}_y}{\partial \hat{y}} = 0 \quad (2.70)$$

$$\hat{N}_x = \frac{1}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \nu \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{y}} \right)^2 \right] \quad (2.71)$$

$$\hat{N}_y = \frac{1}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} + \nu \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{y}} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 \right] \quad (2.72)$$

$$\hat{N}_{xy} = \frac{1}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{y}} \right] \quad (2.73)$$

となる。

2.3.2 微小変形平板曲げ方程式

微小変形の場合，つまり変形が板厚に比べてずっと小さい場合，平板の方程式は，線形の方程式になる．そして，面内荷重と曲げ問題に分離することができる．具体的に，解くべき平板の曲げ方程式は，以下のようなになる．

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = p \quad (2.74)$$

第3章 数値解析法の概要

3.1 格子形成法

本研究は計算対象が非常に単純な形状であるので、構造格子を用いている。構造格子の利点は物体表面に沿った、かつ、物体表面から垂直方向に細かい格子が作成できることであり、今回のように境界層の影響の大きい細部の流れの解析には有用である。物理面で定義される計算領域を先の一般座標への変換により長方形の計算面に写像し、計算空間に張られた等間隔格子の上にて支配方程式を数値計算をする。そのために差分式が比較的簡潔に記述され、汎用性を持つことも構造格子の特徴である。また、連成計算は、格子を移動させることが必要なので、その移動が容易にできるという利点もある。

ここでは格子生成の概要を述べる。生成法には数多くの方法があるが、ここでは、格子を代数的な方法により求めている。それは代数法によれば、格子の制御が明確であり、かつ短時間で結果が得られるという長所を考慮したからである。ただし、その過程には試行錯誤的なパラメータの調整が必要である。そのステップは大きく二つに分けられる。

まずはじめに境界の線上に格子点を分布させる。このときに特に変動が大きい、あるいは細かく見たい部分の格子幅を狭くとる。すなわち、不等間隔格子にする。また、格子点の重なりがないようにしなくてはならない。これには、1次元補間関数 (Stretching Function) による配置が論理的でかつ効率がよい。本研究では Vinokur による補間関数を用いた [52] [51]。これは線分両端での格子幅がパラメータとして定義できる便利さがある。段差のある形状にあわせて Multi-block 的に格子を組んでいる。

次に境界上に配置した点のうち対応する2点を結ぶ線分上に点を置き、内部格子を定める。これにより空間内にすきま無く格子点が配置される。ここでは Eriksson により実用化された Transfinite 法 [51][53] 参照を用いている。これは混合関数 (blending function) とベクトルをのばしていくやり方で、混合関数は目的に応じていろいろ考えられるが、今回は曲線部がないので、単純な線形補間で混合関数を定義した。これら格子生成の詳しい式や手順については文献 [51] を参照されたい。

また、本研究の格子作成については、形状が簡単なものに対しては、in-house の格子生成プログラムを用いたが、複雑なものに対しては、商用ソフトウェアである米国 Pointwise

社開発の Girdgen を用いた . Gridgen が用いている方法や手順も同じであるが , Graphical User Interface(GUI) で操作することができ , 格子を容易に作成できる . また , 格子をスムージング , 直交化する機能が充実している .

3.2 メトリックの評価について

一般座標を用いた場合, これら座標変換により生じた項を差分化のプロセスで計算する時に, メトリックの評価法によっては一様流が保存されない場合がある . そこで , 本計算では , 文献 [44] を参考にし , 以下の方法で評価することにした .

一般座標における各方向の面要素ベクトルは , メトリックを用いて次のように表現できる .

$$S^\xi = J^{-1}\nabla\xi = \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \end{pmatrix}, S^\eta = J^{-1}\nabla\eta = \begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_z \end{pmatrix}, S^\zeta = J^{-1}\nabla\zeta = \begin{pmatrix} \zeta_x \\ \zeta_y \\ \zeta_z \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

これらの面ベクトルは位置ベクトル $r_{i,j,k} = [x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}]^t$ を用いて次の様に求められる .

$$\begin{aligned} S_{i,j,k}^\xi &= \frac{1}{8}(r_{i,j+1,k+1} - r_{i,j-1,k-1})(r_{i,j-1,k+1} - r_{i,j+1,k-1}) \\ S_{i,j,k}^\eta &= \frac{1}{8}(r_{i+1,j,k+1} - r_{i-1,j,k-1})(r_{i+1,j,k-1} - r_{i-1,j,k+1}) \\ S_{i,j,k}^\zeta &= \frac{1}{8}(r_{i+1,j+1,k} - r_{i-1,j-1,k})(r_{i-1,j+1,k} - r_{i+1,j-1,k}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

ヤコビアンはセルの体積であり , 面ベクトルを用いて次式で計算される .

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{12}(S_{i+1,j,k}^\xi + S_{i+1,j,k}^\xi)(r_{i+1,j+1,k+1} + r_{i,j,k}) \\ V_2 &= \frac{1}{12}(S_{i,j+1,k}^\eta + S_{i,j+1,k}^\eta)(r_{i+1,j+1,k+1} + r_{i,j,k}) \\ V_3 &= \frac{1}{12}(S_{i,j,k+1}^\zeta + S_{i,j,k+1}^\zeta)(r_{i+1,j+1,k+1} + r_{i,j,k}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$J^{-1} = V = V_1 + V_2 + V_3 \quad (3.4)$$

3.3 流体の計算法

圧力変動のような微小擾乱を含む流れ場の数値解析シミュレーションでは, 数値拡散を抑えた高精度での計算法が要求される . 格子点数を増やして格子間隔を狭くする方法もあるが, その場合にはメモリー使用量の増大, また CFL 条件により時間刻みが大きくとれないなどの欠点が生じる . 理想的にはなるべく少ない格子点数を使ってメモリーを節約し, 時間刻みを大きくとり, かつ精度よく計算できるスキームが望ましい . また, 圧縮性流では, 衝撃波等の不連続面も計算できる方法が必要となる .

ここでは, 本研究で用いた数値解法について説明する. 前章で述べたように, 擬似圧縮性法を用いて導いた式は, 圧縮性流体解析法と同じように解くことができる. まず, 圧縮性流体の数値解析法を一通り説明する. そして, 本章の最後に, 非圧縮流体の解析法を述べる.

3.3.1 空間の離散化

式 (2.26), 式 (2.52) における ξ 方向の移流項は次のように離散化される.

$$\frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} = \frac{\hat{E}_{i+1/2,j,k}^* - \hat{E}_{i-1/2,j,k}^*}{\Delta \xi} \quad (3.5)$$

ここで, 簡単のために $\Delta \xi = 1$ とする. $\hat{E}_{i+1/2,j,k}^*$ は数値流束であって, セルの境界での解ベクトルから計算される.

$$\hat{E}_{i+1/2,j}^* = \hat{E}(Q_{i+1/2,j,k}^L, Q_{i+1/2,j,k}^R) \quad (3.6)$$

$Q_{i+1/2,j,k}^L, Q_{i+1/2,j,k}^R$ は2つのセル ((i, j, k) のセルと $(i+1, j, k)$ のセル) 境界 ($\xi = \xi_{i+1/2}$) での左右における解ベクトルであり, 一般には異なる値をもつ.

3.3.2 セル境界における解ベクトルの補間-MUSCL 法

セル境界における解ベクトル ($Q_{i+1/2}^L, Q_{i+1/2}^R$) (図 3.1) を高次精度で近似する方法はいくつか提案されている. 重要なのは離散値 Q_i をもとに構成される補間多項式 $Q(x)$ に致命的な振動を生じさせないことで, それにより解は安定となる. 高次精度化の手法として, 例えば, MUSCL 法 [54][55], ENO 法 [57][58][59], ENO 法を簡略化した KRC 法 [62][61], WENO 法 [63][64] などが挙げられる. 流体音響計算では, WENO 法を用いた4次あるいは5次精度の補間法が通常用いられるが, 本研究では, そこまでの精度を必要としない. 計算効率を考えて, 3次精度の MUSCL 法を採用した.

具体的には, 以下の式を用いて, セル境界における解ベクトル ($Q_{i+1/2}^L, Q_{i+1/2}^R$) を内挿により求める.

$$\begin{aligned} Q_{i+1/2}^L &= Q_i + \frac{1}{4}[(1 - \kappa)\delta_- + (1 + \kappa)\delta_+]_i \\ Q_{i+1/2}^R &= Q_{i+1} - \frac{1}{4}[(1 - \kappa)\delta_+ + (1 + \kappa)\delta_-]_{i+1} \end{aligned} \quad (3.7)$$

ここに, $\delta_{+,i} = Q_{i+1} - Q_i$ 及び $\delta_{-,i} = Q_i - Q_{i-1}$ である. さらに, 制限関数を導入することで, 解の単調性を維持することができる. 実際に, van Albada の制限関数 [56] を使用

すると,

$$\begin{aligned}
 Q_{i+1/2}^L &= Q_i + \frac{s}{4}[(1 - \kappa s)\delta_- + (1 + \kappa s)\delta_+]_i \\
 Q_{i+1/2}^R &= Q_{i+1} - \frac{s}{4}[(1 - \kappa s)\delta_+ + (1 + \kappa s)\delta_-]_{i+1}
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

$$s = \frac{2\delta_+\delta_- + \epsilon}{(\delta_+)^2 + (\delta_-)^2 + \epsilon}
 \tag{3.9}$$

と表せる．ここで， ϵ は 0 でない小さな数である． $\kappa = 1/3$ で風上側にバイアスした 3 次精度， $\kappa = -1$ で純粋な風上 2 次精度になる．また，この内挿により，境界での物理量を決定するのに際し，保存量（密度，運動量，全エネルギー）ではなく，基本量（密度，速度，圧力）を用いた．経験上，全エネルギーよりも，圧力の方が変化が大きいので，それを内挿に用いることで，安定性が向上する．

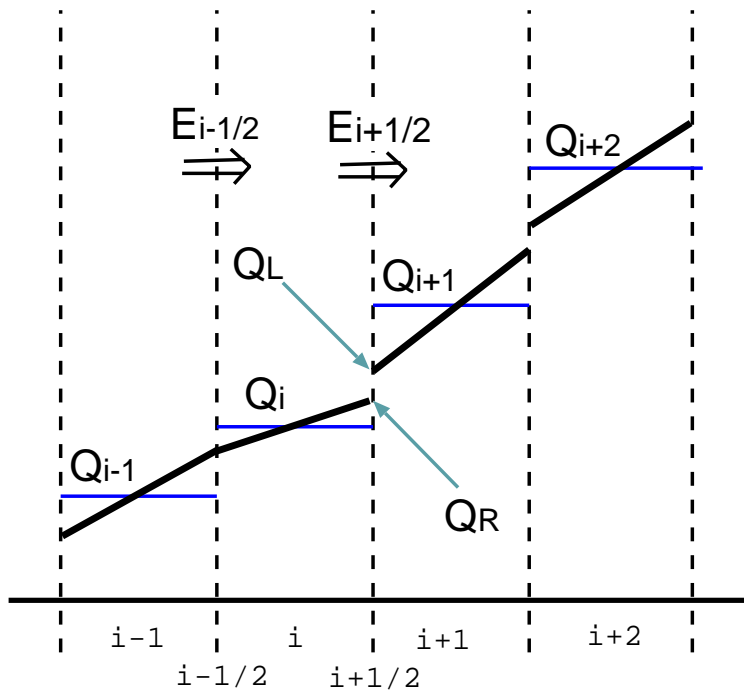


図 3.1: セル内の物理量分布と近似精度

3.3.3 数値流束の計算法-Roeの近似 Riemann 解法

前節で示した補間法により, セル内の分布が求められた. その次のステップは, セル境界での数値流束を求めることである. セル境界の両側における解ベクトル $Q_{i+1/2}^L, Q_{i+1/2}^R$ を用いて, Roeの方法により数値流束を決定する. 左右で異なる解ベクトルをセル境界でどう評価するかは, 等価的に全てのセル境界において Riemann 問題を解くことに相当する (図 3.1).

数値流束の求めかたとしては, Riemann 問題の厳密解を用いる Godunov 法, Roe の近似 Riemann 解法 [66] に代表される Flux Diffrence Splitting(FDS) と, Steger, Warming の方法 [67], Van Leer の方法 [68] に代表される Flux Vector Splitting(FVS) の二つが一般的である. また, Liou はそれとは異なる AUSM 法 [69] を提案し, その後, AUSM 法はさらに改良されて, AUSM+[69], AUSM-DV[65], SHUS[71], AUSM-up+[70] などが今までに開発されている.

本研究ではできるだけ数値粘性を抑えるために Roe の方法により数値流束を求めた. Roe の方法は, 強い膨張波で現実には起こり得ない膨張衝撃波ができてしまったり, 強い衝撃波でカーブクル現象が起きるとような良くない面も持ち合わせているが, 本計算では, そのような現象が顕著に起こらなかったため, この方法を用いた. 計算コストと, 精度を考えるとこのスキームは非常に良いものであり, 現在よく使われているスキームの一つである.

Roe の Riemann 解法は線形分解によるもので, 平均の値 Q_{ave} が左右の状態 Q^L と Q^R の非線形関数と定義され, それらは次の三つの条件を満たすものとする [44].

1. $F(Q^R) - F(Q^L) = A(Q^R, Q^L)(Q^R - Q^L) = A_{ave}(Q^R - Q^L)$
2. $A(Q^R, Q^L)$ は実固有値と線形独立な固有ベクトルを持つ.
3. $A(Q, Q) = A(Q)$

ここで, F, A は流束ベクトル, 流束ベクトルのヤコビアンマトリックスである. そして, 具体的に ξ 方向の数値流束は,

$$\hat{E}_{i+1/2}^* = \frac{1}{2}(\hat{E}(Q_{i+1/2}^R) + \hat{E}(Q_{i+1/2}^L)) - \frac{1}{2}|A_\xi|_{i+1/2}(Q_{i+1/2}^R - Q_{i+1/2}^L) \quad (3.10)$$

と表される. ここで A はヤコビアンマトリックスであり,

$$|A_\xi|_{i+1/2} = (R_\xi)_{i+1/2}|A_\xi|_{i+1/2}(L_\xi)_{i+1/2} \quad (3.11)$$

により計算される. η, ζ 方向についても添字 ξ を η, ζ と入れ換えるだけで, 同様の式である.

$(\Lambda_\xi)_{i+1/2}$ は固有値行列, $(R_\xi)_{i+1/2}$, $(L_\xi)_{i+1/2}$ はそれぞれセル境界における Roe 平均に基づく右固有ベクトル行列 (right eigenvector matrix) 及び左固有ベクトル行列 (left eigenvector matrix) である. 固有値行列はそれぞれ波の伝播の特性速度を表し, その伝播方向の正負が差分において重要となる.

また,

$$\alpha_{i+1/2} = (L_\xi)_{i+1/2}(Q_{i+1/2}^R - Q_{i+1/2}^L) \quad (3.12)$$

はセル境界での物理量の跳びを表し, 式 (3.10) の右辺最後の項はその跳び量に応じた数値粘性を意味している. 逆にいえば物理量の跳びが無い, 解が滑らかに変化する所では余計な数値粘性が付加されない. よって FDS は粘性の効果に注目する流れ場では優れた特性を示す. 固有値行列 $(\Lambda_\xi)_{i+1/2}$, および固有ベクトル行列 $(R_\xi)_{i+1/2}$, $(L_\xi)_{i+1/2}$ の式について以下の節で説明する.

3.3.3.1 Roe 平均

Λ, R, L を計算するのに使用する, Roe 平均された各物理量は, セル境界の左右の値から次のように求められる.

$$\begin{aligned} \rho_{ave} &= \sqrt{\rho^L} \sqrt{\rho^R} \\ u_{ave} &= \frac{\sqrt{\rho^L} u^L + \sqrt{\rho^R} u^R}{\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R}} \\ v_{ave} &= \frac{\sqrt{\rho^L} v^L + \sqrt{\rho^R} v^R}{\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R}} \\ w_{ave} &= \frac{\sqrt{\rho^L} w^L + \sqrt{\rho^R} w^R}{\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R}} \\ H_{ave} &= \frac{\sqrt{\rho^L} H^L + \sqrt{\rho^R} H^R}{\sqrt{\rho^L} + \sqrt{\rho^R}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

ただし, H は総エンタルピーで

$$H = \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{u^2}{2} \quad (3.14)$$

と定義される. また, 音速 c_{ave} は

$$c_{ave}^2 = (\gamma - 1)(H_{ave} - \frac{u_{ave}^2}{2}) \quad (3.15)$$

により計算される.

3.3.3.2 固有値行列 Λ

ξ 方向のみ示すが, η, ζ 方向についても添字 ξ を η, ζ と入れ換えるだけで, 同様の式である. 式 (2.32) の反変速度は,

$$U = \xi_t + \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w \quad (3.16)$$

と表すことができ, 固有値は以下ようになる.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= U - c\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2} \\ \lambda_2 &= U \\ \lambda_3 &= U \\ \lambda_4 &= U \\ \lambda_5 &= U + c\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2} \end{aligned} \quad (3.17)$$

これを用い, 固有値行列 Λ_ξ は,

$$(\Lambda_\xi) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

と定義される.

また, セル境界でのメトリックは代数平均した値を用いる. 例えば, $(\xi_x)_{i+1/2} = ((\xi_x)_i + (\xi_x)_{i+1})/2$ である. そして, Roe 平均した値を上式に代入すれば, $(\Lambda_\xi)_{i+1/2}$ が求まる.

3.3.3.3 右固有行列 R 及び左固有行列 L

右固有行列 R 及び左固有行列 L は以下のものを用いて計算した. 以下の行列の u, v, w, H, c に, Roe 平均によって求めた $u_{ave}, v_{ave}, w_{ave}, H_{ave}, c_{ave}$ を代入して, セル境界での固有行列, $(R_\xi)_{i+1/2}, (L_\xi)_{i+1/2}$ を求める.

$$R_\xi = \begin{bmatrix} 1 & \bar{\xi}_y & \bar{\xi}_z & \bar{\xi}_x & 1 \\ u - \bar{\xi}_x c & \bar{\xi}_y u + \bar{\xi}_z c & \bar{\xi}_z u - \bar{\xi}_y c & \bar{\xi}_x u & u + \bar{\xi}_x c \\ v - \bar{\xi}_y c & \bar{\xi}_y v & \bar{\xi}_z v + \bar{\xi}_x c & \bar{\xi}_x v - \bar{\xi}_z c & v + \bar{\xi}_y c \\ w - \bar{\xi}_z c & \bar{\xi}_y w - \bar{\xi}_x c & \bar{\xi}_z w & \bar{\xi}_x w + \bar{\xi}_y c & w + \bar{\xi}_z c \\ H - c\bar{U} & \bar{\xi}_y \frac{1}{2} q^2 + \bar{\xi}_z u c - \bar{\xi}_x w c & \bar{\xi}_z \frac{1}{2} q^2 - \bar{\xi}_y u c + \bar{\xi}_x v c & \bar{\xi}_x \frac{1}{2} q^2 - \bar{\xi}_z v c + \bar{\xi}_y w c & H + c\bar{U} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

ただし,

$$\bar{\xi}_x = \frac{\xi_x}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2}}, \quad \bar{\xi}_y = \frac{\xi_y}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2}}, \quad \bar{\xi}_z = \frac{\xi_z}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2}}, \quad \bar{U} = \frac{U}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2}}$$

ここで、 $\tilde{\cdot}$ は Favre 平均、 $\bar{\cdot}$ は Reynolds 平均、 k は乱流運動エネルギー $1/2 \cdot \overline{\rho u_i'' u_i''}$ である。

$$\bar{f} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f dt \quad (3.25)$$

$$\tilde{f} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{1}{\bar{\rho}} \int_0^T \rho f dt = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}} \quad (3.26)$$

Favre 平均をすることで、非圧縮性 Navier-Stokes 方程式で Reynolds 平均をとった時と似た形になる。式 (3.23)、式 (3.24) の $\partial(-\overline{\rho u_i'' u_j''})/\partial x_j$ はレイノルズ応力、式 (3.24) の $\partial \overline{\rho u_j'' h''}/\partial x_j$ は熱の乱流輸送、 $\partial \overline{\tau_{ij} u_i''}/\partial x_j$ 、 $1/2 \cdot \partial \overline{\rho u_j'' u_i'' u_i''}/\partial x_j$ は乱流運動エネルギーの分子拡散、乱流輸送である。レイノルズ応力は、Boussinesq 近似に基づき、渦粘性係数 μ_t でモデル化される。

$$-\overline{\rho u_i'' u_j''} = 2\mu_t \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (3.27)$$

また、熱の乱流輸送は、乱流プラントル数 Pr_t と μ_t でモデル化する。

$$\overline{\rho u_j'' h''} = -\kappa_t \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} = -\frac{C_p \mu_t}{Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \quad (3.28)$$

乱流プラントル数 Pr_t は 0.9 とした。また、本研究は代数モデルを使用するので、式 (3.24)、式 (3.27) に含まれる乱流運動エネルギー k 、その分子拡散、乱流輸送は無視する。超音速までの速度域では、一般的に $\bar{\rho} k \ll \bar{p}$ 、 $k \ll \bar{h}$ なので、これらの効果は無視することができる [74]。しかし、極超音速では考慮する必要がある。

以上のことから、乱流計算する場合には、粘性係数 μ 、熱伝導率 κ を以下のように変更すれば良いことになる。

$$\mu \rightarrow \mu + \mu_t \quad (3.29)$$

$$\kappa \rightarrow \kappa + \kappa_t = C_p \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \quad (3.30)$$

一般的にフラッタ振動数は小さく、準定常的な流れ場であるので、簡単な代数モデルを使用できる。本研究では、乱流計算をする際に、Baldwin-Lomax モデル [72] を用いた。付着した境界層については、このモデルでも問題ない [73][74]。

Baldwin-Lomax モデルは、航空宇宙分野で非常に広く使われている。この方法の長所として、境界層厚さを計算する必要がなく、乱流スケールを境界層内の渦度分布から計算する。この乱流モデルを用いて、渦粘性係数 μ_t を決定した。以下に詳細を述べる。

まず、境界層を 2 層（内層と外層）に分けて考える。

$$\mu_t = \begin{cases} (\mu_t)_{inner} & y \leq y_{crossover} \\ (\mu_t)_{outer} & y > y_{crossover} \end{cases} \quad (3.31)$$

ここで， y は壁面からの距離で， $y_{crossover}$ は $(\mu_t)_{inner} = (\mu_t)_{outer}$ となる最も近い壁からの距離である．次式により $(\mu_t)_{inner}$ が求まる．

$$(\mu_t)_{inner} = \rho l_{mix}^2 |\omega| \quad (3.32)$$

$$l_{mix} = \kappa y \left[1 - e^{-\frac{y^+}{A^+}} \right] \quad (3.33)$$

$$y^+ = \frac{\rho_w \tau_w y}{\mu_w} \quad (3.34)$$

下添字 w は壁面での値を示す．式 (3.32) は混合距離理論と比較すると，速度勾配が渦度になっているだけで，ほぼ同じ式の形である．また，式 (3.33) では，van Driest の減衰関数を含む混合距離が使用されている． $|\omega|$ は渦度の大きさで，

$$|\omega| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2} \quad (3.35)$$

外層に関しては，

$$(\mu_t)_{outer} = \alpha C_{cp} \rho F_{wake} F_{Kleb}(y) \quad (3.36)$$

となる．ここで， α は Clauser 定数， C_{cp} は付加定数である．また， F_{wake}, F_{Kleb} はそれぞれ以下の式で表される．

$$F_{wake} = \min \left[y_{max} F_{max}, C_{wk} y_{max} U_{diff}^2 / F_{max} \right] \quad (3.37)$$

$$F_{Kleb} = \left[1 + 5.5 \left(\frac{C_{Kleb} y}{y_{max}} \right)^6 \right] \quad (3.38)$$

F_{wake} は，境界層と後流の切り替えをする関数で，境界層のモデル $y_{max} F_{max}$ ，後流のモデル $C_{wk} y_{max} U_{diff}^2 / F_{max}$ を含む．また F_{Kleb} は，Klebanoff の間欠関数であり，境界層の端付近で，乱流流れが間欠的に存在する効果を考慮している． U_{diff} は，境界層の最大流速と最小流速の差である．一般的に，最小流速は 0 であるので，最大流速になる．また， F_{max} は，

$$F_{max} = \frac{1}{\kappa} \left[\max_y (l_{mix} |\omega|) \right] \quad (3.39)$$

であり， y_{max} は， F_{max} となる y の値である． κ はカルマン定数である．本研究で用いた定数は以下の通りである．

$$\begin{aligned} A^+ &= 26, \quad C_{cp} = 1.6, \quad C_{Kleb} = 0.3, \\ C_{wk} &= 0.25, \quad \kappa = 0.40, \quad \alpha = 0.0168, \end{aligned}$$

3.3.6 時間積分

陽解法 (explicit method) は 1 ステップにかかる計算時間は少ないが、クーラン数の制限が厳しい。そして、特に境界層が薄くなる高レイノルズ数流れでは計算量が非常に多くなる。一方、陰解法 (implicit method) は、1 ステップの計算時間は増大するが、クーラン数が 1 を超える大きな時間刻み Δt がとれる

代表的な陽解法は、多段 Runge-Kutta 法 [76][75] である。また、陰解法には、Beam-Warming 法 [77] を始め、様々なものが提案されているが、代表的なものは、LU-SGS 法 [78][79]、LU-ADI 法 [80]、MFGS 法 [84] である。ちなみに、LU-SGS 法は非構造格子用にも拡張されている [81][82][83]。

一般的に、構造の特性時間 T_s は流体の特性時間 T_f に比べ大きい。フラッタ振動数を f 、パネルあるいは翼弦長を L 、流速を V とすると、特性時間はそれぞれ、 $T_s = 1/f$ 、 $T_f = L/V$ となり、無次元パラメータ $St = fL/V = T_f/T_s$ は小さい。パネルフラッタでは、 $St = 0.03 \sim 0.1$ 、デルタ翼フラッタでは、約 0.2 である。よって、流体計算で時間刻みを大きくとって、効率的に計算する必要がある。さらに、表面上の乱流境界層を解像しようとする、 $10^{-6}L \sim 10^{-5}L$ の最小格子幅が必要になり、陽解法で計算するのは、実用的に不可能である。そこで、本研究では、陰解法の LU-SGS 法を用いた。以下に、この手法について述べる。

3.3.6.1 LU-SGS 法

本研究では、LU-SGS 法 (Lower-Upper Symmetric-Gauss-Seidel method) [78][79] と Dual Time Stepping 法を組み合わせ、時間発展させる。ここでは、その手法の説明をする。式 (2.26) は、

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \zeta} = \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\partial \hat{E}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}_v}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}_v}{\partial \zeta} \right\} \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\hat{E} - \frac{1}{Re} \hat{E}_v \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\hat{F} - \frac{1}{Re} \hat{F}_v \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\hat{G} - \frac{1}{Re} \hat{G}_v \right) = 0 \quad (3.41)$$

と変形できる。陰解法で非定常解を得るために、擬似時間 τ を導入すると、

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\hat{E} - \frac{1}{Re} \hat{E}_v \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\hat{F} - \frac{1}{Re} \hat{F}_v \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\hat{G} - \frac{1}{Re} \hat{G}_v \right) = 0 \quad (3.42)$$

$\Delta \tau$ を大きくとれるように、オイラー陰解法により離散化を行う。

$$\frac{\hat{Q}^{m+1} - \hat{Q}^m}{\Delta \tau} + \left[\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\hat{E} - \frac{1}{Re} \hat{E}_v \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\hat{F} - \frac{1}{Re} \hat{F}_v \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\hat{G} - \frac{1}{Re} \hat{G}_v \right) \right]^{m+1} = 0 \quad (3.43)$$

上添字 m は擬似時間ステップを表す． E, F, G に対して時間方向に線形化を施すと，

$$\hat{E}^{m+1} \simeq \hat{E}^m + \left(\frac{\partial \hat{E}}{\partial \hat{Q}} \right)^m (\hat{Q}^{m+1} - \hat{Q}^m) = \hat{E}^m + \hat{A}^m \Delta \hat{Q}^m \quad (3.44)$$

ここで，

$$\hat{A}^m = \left(\frac{\partial \hat{E}}{\partial \hat{Q}} \right)^m, \quad \Delta \hat{Q}^m = \hat{Q}^{m+1} - \hat{Q}^m \quad (3.45)$$

\hat{A}^m は非粘性流束のヤコビアンである．同様に，

$$\hat{F}^{m+1} \simeq \hat{F}^m + \hat{B}^m \Delta \hat{Q}^m, \quad \hat{B}^m = \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{Q}} \right)^m \quad (3.46)$$

$$\hat{G}^{m+1} \simeq \hat{G}^m + \hat{C}^m \Delta \hat{Q}^m, \quad \hat{C}^m = \left(\frac{\partial \hat{G}}{\partial \hat{Q}} \right)^m \quad (3.47)$$

となる．以上の線形化を式 (3.43) に適用すると， Δ 形陰解法が次のように得られる．

$$\begin{aligned} & \left[I + \frac{\partial \hat{A}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{B}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{C}}{\partial \zeta} \right]^m \Delta \hat{Q}^m \\ &= - \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\hat{E} - \frac{1}{Re} \hat{E}_v \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\hat{F} - \frac{1}{Re} \hat{F}_v \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\hat{G} - \frac{1}{Re} \hat{G}_v \right) \right]^m - \left(\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \right)^{m+1} \end{aligned} \quad (3.48)$$

ただし，

$$I = \begin{bmatrix} 1/\Delta\tau & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\Delta\tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\Delta\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\Delta\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\Delta\tau \end{bmatrix} = \text{diag}[1/\Delta\tau, 1/\Delta\tau, 1/\Delta\tau, 1/\Delta\tau, 1/\Delta\tau] \quad (3.49)$$

式 (3.48) の右辺最後の項は，2 次の後退差分を用いる．完全に収束した時に 2 次精度になる．この手法は，フラッタ解析の様な時間精度を保ちつつ，時間刻みを大きくとりたい時によく使われる方法である [43][22]．

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \right)^{m+1} &= \left[\frac{1}{J} \frac{\partial Q}{\partial t} + Q \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{J} \right) \right]^{m+1} \\ &= \frac{1}{J} \frac{3Q^{m+1} - 4Q^n + Q^{n-1}}{2\Delta t} + \left[Q \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{J} \right) \right]^{m+1} \\ &= \frac{1}{J} \frac{3}{2} \frac{\Delta Q^m}{\Delta t} + \frac{1}{J} \frac{3Q^m - 4Q^n + Q^{n-1}}{2\Delta t} + \left[Q \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{J} \right) \right]^{m+1} \\ &\simeq \frac{1}{J} \frac{3}{2} \frac{\Delta Q^m}{\Delta t} + \frac{1}{J} \frac{3Q^m - 4Q^n + Q^{n-1}}{2\Delta t} + \left[Q \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{J} \right) \right]^m \\ &= \frac{3}{2} \frac{\Delta \hat{Q}^m}{\Delta t} + \frac{3\hat{Q}^m - 4\hat{Q}^n + \hat{Q}^{n-1}}{2\Delta t} + \left[Q \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{J} \right) \right]^m \end{aligned} \quad (3.50)$$

上添字 n は物理時間ステップを表す．ここで，ヤコビアン の時間微分（体積の変化率）を以下の Geometric Conservation Law(GCL)[42] により求める．

$$\left(\frac{1}{J}\right)_t = - \left[\left(\frac{\xi_t}{J}\right)_\xi + \left(\frac{\eta_t}{J}\right)_\eta + \left(\frac{\zeta_t}{J}\right)_\zeta \right] \quad (3.51)$$

式 (3.50) と式 (3.51) を式 (3.48) に代入して，最終的に以下の式を得る．

$$\begin{aligned} & \left[I' + \frac{\partial \hat{A}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{B}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{C}}{\partial \zeta} \right]^m \Delta \hat{Q}^m \\ &= - \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\hat{E} - \frac{1}{Re} \hat{E}_v \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\hat{F} - \frac{1}{Re} \hat{F}_v \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\hat{G} - \frac{1}{Re} \hat{G}_v \right) \right]^m \\ & \quad - \frac{3\hat{Q}^m - 4\hat{Q}^n + \hat{Q}^{n-1}}{2\Delta t} + Q^m \left[\left(\frac{\xi_t}{J}\right)_\xi + \left(\frac{\eta_t}{J}\right)_\eta + \left(\frac{\zeta_t}{J}\right)_\zeta \right]^m \equiv RHS \end{aligned} \quad (3.52)$$

ただし，

$$I' = \text{diag} \left[\frac{3}{2\Delta t} + \frac{1}{\Delta \tau}, \frac{3}{2\Delta t} + \frac{1}{\Delta \tau}, \frac{3}{2\Delta t} + \frac{1}{\Delta \tau}, \frac{3}{2\Delta t} + \frac{1}{\Delta \tau}, \frac{3}{2\Delta t} + \frac{1}{\Delta \tau} \right] \quad (3.53)$$

である．この式を LU-SGS 法を用いて時間積分する．内部反復つまり擬似時間で収束し，左辺の $\Delta Q = 0$ となれば， $RHS = 0$ となり，その解は $n + 1$ ステップでの非定常解となる．まず，式 (3.52) の左辺を以下の様に 1 次精度の風上化をする．

$$\begin{aligned} & \left[I' + \frac{\partial \hat{A}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{B}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{C}}{\partial \zeta} \right] \Delta \hat{Q} \\ &= \left[I' + (D_\xi^- \hat{A}^+ + D_\xi^+ \hat{A}^-) + (D_\eta^- \hat{B}^+ + D_\eta^+ \hat{B}^-) + (D_\zeta^- \hat{C}^+ + D_\zeta^+ \hat{C}^-) \right] \Delta \hat{Q} \end{aligned} \quad (3.54)$$

ここで， D^- ， D^+ は後退差分オペレーター，前進差分オペレーターである．例えば，

$$D_\xi^- \hat{A}^+ = \frac{\hat{A}_{i,j,k}^+ - \hat{A}_{i-1,j,k}^+}{\Delta \xi}, \quad D_\xi^+ \hat{A}^- = \frac{\hat{A}_{i+1,j,k}^- - \hat{A}_{i,j,k}^-}{\Delta \xi} \quad (3.55)$$

となる．また， A^+ ， A^- は，それぞれ非負，非正の固有値を持つ流束ヤコビアン行列である．

$$A^+ = R_\xi \Lambda_\xi^+ L_\xi, \quad A^- = R_\xi \Lambda_\xi^- L_\xi \quad (3.56)$$

B^+ ， B^- ， C^+ ， C^- も同様である．そして，式 (3.54) は，以下のように分解できる．

$$\left[I' + \frac{\partial \hat{A}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{B}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{C}}{\partial \zeta} \right] = L + D + U \quad (3.57)$$

$$L = -\frac{\hat{A}_{i-1,j,k}^+}{\Delta \xi} - \frac{\hat{B}_{i,j-1,k}^+}{\Delta \eta} - \frac{\hat{C}_{i,j,k-1}^+}{\Delta \zeta} \quad (3.58)$$

$$D = I + \frac{\hat{A}_{i,j,k}^+}{\Delta \xi} - \frac{\hat{A}_{i,j,k}^-}{\Delta \xi} + \frac{\hat{B}_{i,j,k}^+}{\Delta \eta} - \frac{\hat{B}_{i,j,k}^-}{\Delta \eta} + \frac{\hat{C}_{i,j,k}^+}{\Delta \zeta} - \frac{\hat{C}_{i,j,k}^-}{\Delta \zeta} \quad (3.59)$$

$$U = \frac{\hat{A}_{i+1,j,k}^-}{\Delta \xi} + \frac{\hat{B}_{i,j+1,k}^-}{\Delta \eta} + \frac{\hat{C}_{i,j,k+1}^-}{\Delta \zeta} \quad (3.60)$$

ここで, L, U, D は, 下三角行列, 上三角行列, 対角行列である. さらに, 近似的 LDU 分解を用いる.

$$\left[I' + \frac{\partial \hat{A}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{B}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{C}}{\partial \zeta} \right] = L + D + U \approx (L + D)D^{-1}(D + U) \quad (3.61)$$

$$L + D = I' + D_{\xi}^{-} \hat{A}^{+} + D_{\eta}^{-} \hat{B}^{+} + D_{\zeta}^{-} \hat{C}^{+} - \hat{A}^{-} - \hat{B}^{-} - \hat{C}^{-} \quad (3.62)$$

$$D = I' + \hat{A}^{+} - \hat{A}^{-} + \hat{B}^{+} - \hat{B}^{-} + \hat{C}^{+} - \hat{C}^{-} \quad (3.63)$$

$$D + U = I' + D_{\xi}^{+} \hat{A}^{-} + D_{\eta}^{+} \hat{B}^{-} + D_{\zeta}^{+} \hat{C}^{-} + \hat{A}^{+} + \hat{B}^{+} + \hat{C}^{+} \quad (3.64)$$

ここでは, $\Delta \xi, \Delta \eta, \Delta \zeta$ を 1 としている. また, 全ての添え字が i, j, k であるため, 省略した. 近似的 LDU 分解を用いて, 3 段階で解くことができる. 具体的には,

$$(L + D)\Delta \hat{Q}^{*} = RHS \quad (3.65)$$

$$D^{-1}\Delta \hat{Q}^{**} = \Delta \hat{Q}^{*} \quad (3.66)$$

$$(D + U)\Delta \hat{Q} = \hat{Q}^{**} \quad (3.67)$$

それぞれの式を書き下すと,

$$D\Delta \hat{Q}_{i,j,k}^{*} = RHS + (\hat{A}^{+}\Delta Q)_{i-1,j,k} + (\hat{B}^{+}\Delta Q)_{i,j-1,k} + (\hat{C}^{+}\Delta Q)_{i,j,k-1} \quad (3.68)$$

$$D^{-1}\Delta \hat{Q}_{i,j,k}^{**} = \Delta \hat{Q}_{i,j,k}^{*} \quad (3.69)$$

$$D\Delta \hat{Q}_{i,j,k} = \Delta \hat{Q}_{i,j,k}^{**} - (\hat{A}^{-}\Delta Q)_{i+1,j,k} - (\hat{B}^{-}\Delta Q)_{i,j+1,k} - (\hat{C}^{-}\Delta Q)_{i,j,k+1} \quad (3.70)$$

これらは, 以下の様に 2 段階にすることができる.

$$\begin{aligned} \Delta \hat{Q}_{i,j,k}^{*} &= D^{-1} \left(RHS + (\hat{A}^{+}\Delta Q)_{i-1,j,k} + (\hat{B}^{+}\Delta Q)_{i,j-1,k} + (\hat{C}^{+}\Delta Q)_{i,j,k-1} \right) \\ &: \text{forwardsweep} \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} \Delta \hat{Q}_{i,j,k} &= \Delta \hat{Q}_{i,j,k}^{**} - D^{-1} \left((\hat{A}^{-}\Delta Q)_{i+1,j,k} + (\hat{B}^{-}\Delta Q)_{i,j+1,k} + (\hat{C}^{-}\Delta Q)_{i,j,k+1} \right) \\ &: \text{backwardsweep} \end{aligned} \quad (3.72)$$

ここで, 以下のように流束ヤコビアン行列を近似する [78].

$$\hat{A}^{\pm} \simeq \frac{1}{2}(\hat{A} \pm \tilde{\rho}(\hat{A})I) \quad (3.73)$$

I は単位行列である. ただし,

$$\tilde{\rho}(\hat{A}) = \sigma \max [|\lambda(\hat{A})|] = \sigma [|U| + c\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2}] \quad (3.74)$$

であり, $\lambda(\hat{A})$ は \hat{A} の固有値であり, $\tilde{\rho}(\hat{A})$ は, 行列 A のスペクトル半径その絶対値の最大値である. また, σ は 1 以上の定数であり, 本計算では $\sigma = 1.01$ を用いた. \hat{B}^\pm, \hat{C}^\pm に対しても同様である. 式 (3.73) の近似を用いると,

$$D = [I' + \hat{A}_{i,j,k}^+ - \hat{A}_{i,j,k}^- + \hat{B}_{i,j,k}^+ - \hat{B}_{i,j,k}^- + \hat{C}_{i,j,k}^+ - \hat{C}_{i,j,k}^-] = I' + (\tilde{\rho}(\hat{A}) + \tilde{\rho}(\hat{B}) + \tilde{\rho}(\hat{C}))I \quad (3.75)$$

となり, 対角行列になる. 行列反転は割り算になり, 演算量が格段に減る. さらに, 以下のように変形すると, 全く行列演算のない陰解法がつけられる. (Matrix-free LU-SGS)

$$\hat{A}^\pm \Delta \hat{Q} \approx (\hat{A} \pm \tilde{\rho}I) \Delta \hat{Q} \quad (3.76)$$

$$= \hat{A} \Delta \hat{Q} \pm \tilde{\rho} \Delta \hat{Q} \quad (3.77)$$

$$= \Delta \hat{E} \pm \tilde{\rho} \Delta \hat{Q} \quad (3.78)$$

$$= [\hat{E}(Q + \Delta Q) - \hat{E}(Q)] \pm \tilde{\rho} \Delta \hat{Q} \quad (3.79)$$

そして, これまで流束ヤコビアンは非粘性流束のみを考慮していたが, 近似的な粘性流束の効果を固有値の最大値 $\tilde{\rho}$ に加える [85]. 例えば, ξ 方向は以下の式で表される.

$$(\rho_v)_\xi = \frac{2\mu(\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2)}{Re \rho \Delta \xi} \quad (3.80)$$

乱流計算の時は, μ ではなく, 乱流渦粘性である μ_t を代わりに用いる. 乱流粘性は分子粘性に比べずっと大きく, その効果も大きい. この項を加えないと, 収束が遅くなったり収束しなくなる. 特に, フラッタ計算の様な非定常問題では, 収束が遅れると, 時間遅れの力が働き, フラッタが起きやすくなる.

3.3.7 境界条件

3.3.7.1 壁面条件 (静止している場合)

Euler 計算の場合は, 壁に垂直方向に流入が無いように壁上の流速を決定する.

$$\vec{V}_w \cdot \vec{n} = 0 \quad (3.81)$$

\vec{V}_w は流速ベクトル, \vec{n} は壁面から垂直に伸びるベクトルである.

Navier-Stokes 計算の場合は, 壁面上で滑り無し (no slip) 条件とした.

$$[u_w, v_w, w_w] = [0, 0, 0] \quad (3.82)$$

温度に関しては断熱条件 (η は壁に垂直方向で)

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = 0 \quad (3.83)$$

より, これを 2 次精度の片側差分で近似して

$$T_w = \frac{4}{3}T_{w-1} - \frac{1}{3}T_{w-2} \quad (3.84)$$

となる. 圧力についても壁に垂直方向 (今は η 方向) への変化が無いとして,

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = 0 \quad (3.85)$$

$$P_w = \frac{4}{3}P_{w-1} - \frac{1}{3}P_{w-2} \quad (3.86)$$

密度はこれらと状態方程式より,

$$\rho_w = \frac{P_w}{\gamma M_\infty^2} T_w \quad (3.87)$$

のように決定される.

3.3.7.2 壁面条件 (移動している場合)

境界条件にすべり無し条件と, さらに物体が加速度運動をしたときの流体に与える力を考慮する. 計算するときの, 実用的な問題として, この効果を外力として与えるのは難しい. よって, モデル化した式が必要となる. 2次元に対しては現在までに, 一般座標系に対しての式が提案されている [86][87] が, 3次元のものは調べた限りでは, 詳細に述べられた文献はない. ここでは, 簡単に今回採用した境界条件 [88][22] を導く.

検査体積が速度 W_s で移動する場合, 連続の式と運動量の式は積分の形で以下のようにかける.

$$-\oint_S \rho (\vec{V} - \vec{W}_s) \cdot d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV \quad (3.88)$$

$$\oint_S (\rho (\vec{V} - \vec{W}_s) \cdot d\vec{S}) \vec{V} + \int_V \frac{\partial (\rho \vec{V})}{\partial t} dV = - \oint_S p d\vec{S} \quad (3.89)$$

ここで, 境界上では

$$\vec{V} = \vec{W}_s \quad (3.90)$$

となるので, これを式 (3.88) と式 (3.89) に代入すると,

$$-\rho \frac{\partial \vec{W}_s}{\partial t} = \text{grad } p \quad (3.91)$$

となる。実際、計算で使うときには以下のような形で使う。

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho \vec{a} \cdot \vec{n} \quad (3.92)$$

ここで、 \vec{n} は表面から垂直方向に伸びるベクトルである。この境界条件を用いて、表面の圧力を決めることによって、構造の加速度が流体に作用する力を考慮できる。

3.3.7.3 流入および流出条件

流入と流出の取り扱いは、その流れが、超音速なのか、亜音速かによってかわる。つまり、特性の理論を考えれば、超音速の場合は全ての特性波が流れ方向にでて、流れとは逆方向に出ていないのに対し、亜音速の場合は、流れ方向にも、その逆方向にも出る。

本解析では、超音速に限定しているので、流入は全ての保存量を流入境界で与える。逆に、流出は全ての保存量を0次外挿する。流出境界において、境界層は亜音速であるが、その部分も0次外挿している。

3.3.8 非圧縮性流体解析

擬似圧縮性法を用いれば、圧縮性流体とほぼ同じように解くことができる。実際に、使用したスキームは同じであり、非粘性項に、MUSCL法、Roeの方法、粘性項に2次中心差分、時間積分にLU-SGS法である。ここでは、変更点のみを述べる。

3.3.8.1 数値流束計算法

非圧縮の場合でも、同様にRoeの近似リーマン解法を用いる。

$$\hat{E}_{i+1/2}^* = \frac{1}{2}(\hat{E}(Q_{i+1/2}^R) + \hat{E}(Q_{i+1/2}^L)) - \frac{1}{2}|A_\xi|_{i+1/2}(Q_{i+1/2}^R - Q_{i+1/2}^L) \quad (3.93)$$

ここで、固有ベクトル、固有値を求める際には、以下の値を用いる。

$$p_{ave} = \frac{p_L + p_R}{2} \quad (3.94)$$

$$u_{ave} = \frac{u_L + u_R}{2} \quad (3.95)$$

$$v_{ave} = \frac{v_L + v_R}{2} \quad (3.96)$$

$$w_{ave} = \frac{w_L + w_R}{2} \quad (3.97)$$

例えば ξ 方向では、反変速度 \bar{U} は以下ようになる。

$$\bar{U} = \xi_t + \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w \quad (3.98)$$

そして、固有値は以下ようになる。

$$\lambda_1 = \bar{U} + \xi_t \quad (3.99)$$

$$\lambda_2 = \bar{U} + \xi_t \quad (3.100)$$

$$\lambda_3 = \bar{U} + \frac{\xi_t}{2} + c \quad (3.101)$$

$$\lambda_4 = \bar{U} + \frac{\xi_t}{2} + c \quad (3.102)$$

また、 c は擬似音速と呼ばれるもので次のように定義される。

$$c = \sqrt{\left(\bar{U} + \frac{\xi_t}{2}\right)^2 + \beta(\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2)} \quad (3.103)$$

3.3.8.2 時間積分法

圧縮性同様に LU-SGS 法を用いる。ただし、解くべき方程式は以下の様になる。

$$\begin{aligned} & \left[I' + \frac{\partial \hat{A}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{B}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{C}}{\partial \zeta} \right]^m \Delta \hat{Q}^m \\ &= - \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\hat{E} - \frac{1}{Re} \hat{E}_v \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\hat{F} - \frac{1}{Re} \hat{F}_v \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\hat{G} - \frac{1}{Re} \hat{G}_v \right) \right]^m \\ & - \frac{3\hat{H}^m - 4\hat{H}^n + \hat{H}^{n-1}}{2\Delta t} + H^m \left[\left(\frac{\xi_t}{J} \right)_\xi + \left(\frac{\eta_t}{J} \right)_\eta + \left(\frac{\zeta_t}{J} \right)_\zeta \right]^m \equiv RHS \end{aligned} \quad (3.104)$$

ここで Q, H は、

$$Q = J^{-1} \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad H = J^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (3.105)$$

である。また、流束ヤコビアンを以下のように近似する。

$$\hat{A}^\pm \simeq \frac{1}{2} (\hat{A} \pm \tilde{\rho}(\hat{A}) I) \quad (3.106)$$

I は単位行列である。ただし、

$$\tilde{\rho}(\hat{A}) = \sigma \max [|\lambda(\hat{A})|] = \sigma \left[\left| \bar{U} + \frac{\xi_t}{2} \right| + \sqrt{\left(\bar{U} + \frac{\xi_t}{2}\right)^2 + \beta(\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2)} \right] \quad (3.107)$$

である。

3.3.8.3 境界条件

流入境界では、流速を固定し、圧力を内側から外挿した。一方、流出境界では、圧力を固定し、流速を内側から外挿した。

3.4 並列計算

本研究では、計算時間のかかる問題に対し、本大学研究室で構築した PC クラスタを使用し、並列計算を行った。使用した PC クラスタの概要は以下の通りである。

表 3.1: PC クラスタの諸元

CPU	Pentium D (3.0GHz) 及び Core 2 Duo(2.4GHz)
メモリ	2.0GB(DDR2 533 及び 677)
転送方法	Gigabit ethernet
総 CPU 数	22(44 コア)
OS	CentOS Linux (X86-64bit 用)

PentiumD や Core 2 Duo といった最新のプロセッサを使用しており、Intel Extended Memory 64 Technology(EM64T) を用いた 64 ビット環境である。また、それぞれ、1CPU に 2 コア搭載したデュアルコアプロセッサである。

プログラムは Fortran で書かれており、Intel Fortran Compiler(Ver. 9.1) でコンパイルした。また、並列計算プログラムはフリーの MPI ライブラリーである MPICH(Ver. 1.2.7) を使用した。本計算プログラムを本 PC クラスタで 4CPU(8 コア) で計算した時、名古屋大学所有の大型計算機 (HPC2500) を 8CPU 使用した計算に比べて約 1.2 倍速く計算できることを確認している。ちなみに、JAXA 所有の大型計算機 (CeNSS) より約 4 倍速い。メモリが多く必要になる問題には向いてないが、本大学研究室で通常計算する規模の流体解析では十分な性能である。約 1000 万点用いた流体計算を 8CPU(16 コア) 用いて計算できることを確認している。

並列計算する際には、領域を等分割して、それぞれを各 CPU に振り分ける。本計算では、3 次精度 MUSCL 法を使用しているため、分割された境界で値 Q を 2 つずつ転送した (図 3.2 参照)。Block1, Block2 を分割された領域とする。Block1 からは、 Q_{n-1}, Q_n を転送し、 Q_{-1}, Q_0 に格納する。同様に、Block2 からは、 Q_1, Q_2 を転送し、 Q_{n+1}, Q_{n+2} に格納する。そして、Block1 で流束 $F_{n+1/2}$ を求めるために必要な $Q_{n+1/2}^R$ を決定する際に、 Q_n, Q_{n+1}, Q_{n+2} を使用する。そのため、境界で 2 つの Q を転送する必要がある。

また、並列計算用の陰解法には様々な方法が提案されているが、今回用いた方法は、DP-LUR 法 [89][90] と同様の方法を用いた。ちなみに、嶋 [91] は、MFGS 法を使用した並列計算を提案している。その方法は、境界のみでデータをやり取りするという点で類似している。

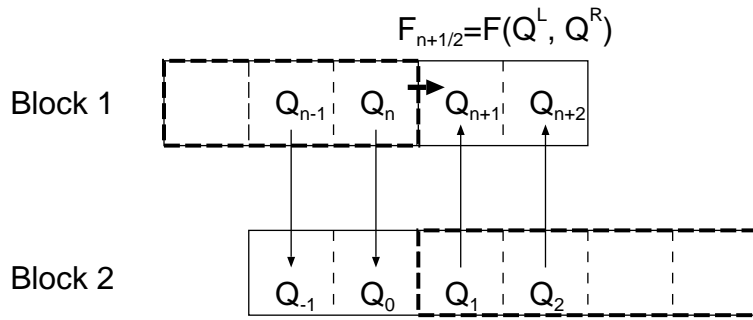


図 3.2: 分割された領域間での転送

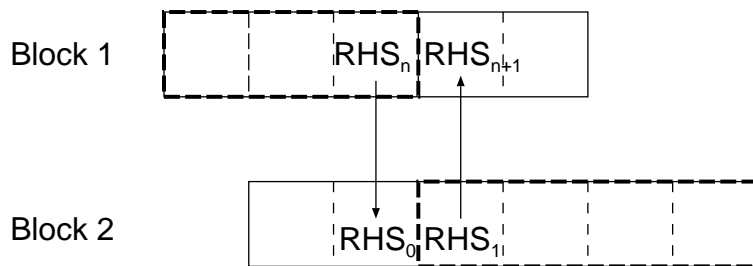


図 3.3: 分割された領域間での転送 (LU-SGS)

式 (3.72) において，境界上では $\Delta Q = 0$ とする．しかし，分割境界で $\Delta Q = 0$ としてしまうと，境界上で収束が遅くなる．そこで，式 (3.52) の右辺 RHS だけをスリーブの前に境界でやり取りする (図 3.3 参照)．Block1 から Block2 に RHS を転送し， $\Delta Q_0^* = RHS_0/D$ とする．流体構造連成計算する時には，構造計算は流体計算に比べほとんど時間がかからないため，流体計算だけを並列計算している．

3.5 構造の計算法 (大変形平板曲げ方程式)

大変形非線形方程式に対しては，本節で述べる有限差分法により解く．一方，微小変形線形方程式は有限要素法を用いた．これは，次節に述べる．

3.5.1 空間の離散化

式 (2.68) から式 (2.70) を有限差分法により数値的に解く [92]．式 (2.71) から式 (2.73) を式 (2.69) と式 (2.70) に代入すると，

$$\left[\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} + \nu \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{y}} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} \right]$$

$$+\frac{1-\nu}{2}\left[\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial\hat{y}^2}+\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}+\frac{\partial\hat{w}}{\partial\hat{x}}\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{y}^2}+\frac{\partial\hat{w}}{\partial\hat{y}}\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}\right]=0 \quad (3.108)$$

$$\left[\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial\hat{y}^2}+\nu\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}+\frac{\partial\hat{w}}{\partial\hat{y}}\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{y}^2}+\nu\frac{\partial\hat{w}}{\partial\hat{x}}\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}\right]$$

$$+\frac{1-\nu}{2}\left[\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial\hat{x}^2}+\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}+\frac{\partial\hat{w}}{\partial\hat{y}}\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{x}^2}+\frac{\partial\hat{w}}{\partial\hat{x}}\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}\right]=0 \quad (3.109)$$

式 (2.68) , 式 (3.108) , 式 (3.109) の空間微分を全て 2 次精度中心差分で離散化する .

$$12(1-\nu^2)\hat{\rho}\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{t}^2}+\frac{\delta_x^4\hat{w}}{(\Delta\hat{x})^4}+2\frac{\delta_{xy}^4\hat{w}}{(\Delta\hat{x})^2(\Delta\hat{y})^2}+\frac{\delta_y^4\hat{w}}{(\Delta\hat{y})^4}$$

$$=12(1-\nu^2)\left[\hat{\rho}+\hat{N}_x\frac{\delta_x^2\hat{w}}{(\Delta\hat{x})^2}+2\hat{N}_{xy}\frac{\delta_{xy}^2\hat{w}}{\Delta\hat{x}\Delta\hat{y}}+\hat{N}_y\frac{\delta_y^2\hat{w}}{(\Delta\hat{y})^2}\right] \quad (3.110)$$

$$\left[\frac{\delta_x^2\hat{u}}{(\Delta\hat{x})^2}+\nu\frac{\delta_{xy}^2\hat{v}}{\Delta\hat{x}\Delta\hat{y}}+\frac{\delta_x\hat{w}}{\Delta\hat{x}}\frac{\delta_x^2\hat{w}}{(\Delta\hat{x})^2}+\nu\frac{\delta_y\hat{w}}{\Delta\hat{y}}\frac{\delta_{xy}^2\hat{w}}{\Delta\hat{x}\Delta\hat{y}}\right]$$

$$+\frac{1-\nu}{2}\left[\frac{\delta_y^2\hat{u}}{(\Delta\hat{y})^2}+\frac{\delta_{xy}^2\hat{v}}{\Delta\hat{x}\Delta\hat{y}}+\frac{\delta_x\hat{w}}{\Delta\hat{x}}\frac{\delta_y^2\hat{w}}{(\Delta\hat{y})^2}+\frac{\delta_y\hat{w}}{\Delta\hat{y}}\frac{\delta_{xy}^2\hat{w}}{\Delta\hat{x}\Delta\hat{y}}\right]=0 \quad (3.111)$$

$$\left[\frac{\delta_y^2\hat{v}}{(\Delta\hat{y})^2}+\nu\frac{\delta_{xy}^2\hat{u}}{\Delta\hat{x}\Delta\hat{y}}+\frac{\delta_y\hat{w}}{\Delta\hat{y}}\frac{\delta_y^2\hat{w}}{(\Delta\hat{y})^2}+\nu\frac{\delta_x\hat{w}}{\Delta\hat{x}}\frac{\delta_{xy}^2\hat{w}}{\Delta\hat{x}\Delta\hat{y}}\right]$$

$$+\frac{1-\nu}{2}\left[\frac{\delta_x^2\hat{v}}{(\Delta\hat{x})^2}+\frac{\delta_{xy}^2\hat{u}}{\Delta\hat{x}\Delta\hat{y}}+\frac{\delta_y\hat{w}}{\Delta\hat{y}}\frac{\delta_x^2\hat{w}}{(\Delta\hat{x})^2}+\frac{\delta_x\hat{w}}{\Delta\hat{x}}\frac{\delta_{xy}^2\hat{w}}{\Delta\hat{x}\Delta\hat{y}}\right]=0 \quad (3.112)$$

δ は中心差分のオペレータを表す . つまり , 格子点 (i, j) での w の 2 次精度 1 次中心差分は ,

$$\delta_x w_{i,j} = \frac{1}{2}(w_{i+1,j} - w_{i-1,j}) \quad (3.113)$$

$$\delta_y w_{i,j} = \frac{1}{2}(w_{i,j+1} - w_{i,j-1}) \quad (3.114)$$

同様に 2 次精度 2 次中心差分は ,

$$\delta_x^2 w_{i,j} = w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j} \quad (3.115)$$

$$\delta_y^2 w_{i,j} = w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1} \quad (3.116)$$

$$\delta_{xy}^2 w_{i,j} = \frac{1}{4}(w_{i+1,j+1} - w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1} - w_{i+1,j-1}) \quad (3.117)$$

2 次精度 4 次中心差分は ,

$$\delta_x^4 w_{i,j} = w_{i+2,j} - 4w_{i+1,j} + 6w_{i,j} - 4w_{i-1,j} + w_{i-2,j} \quad (3.118)$$

$$\delta_y^4 w_{i,j} = w_{i,j+2} - 4w_{i,j+1} + 6w_{i,j} - 4w_{i,j-1} + w_{i,j-2} \quad (3.119)$$

$$\delta_{xy}^2 w_{i,j} = 4w_{i,j} - 2(w_{i+1,j} + w_{i,j+1} + w_{i-1,j} + w_{i,j-1})$$

$$+ w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1} + w_{i+1,j-1} \quad (3.120)$$

u, v の差分もこれと同様である．ここでは，正方形格子 $\Delta x = \Delta y = \Delta l$ を考え， x 方向に $m + 1$ 点， y 方向に $n + 1$ 点で等間隔に離散化する．このようにして得られた差分式は，繰り返し計算により解かれる．

式 (3.110) において w に関する項を左辺にまとめ，全格子点についての式を行列形式で示せば，

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[12(1 - \nu^2)(\Delta l)^4 \rho [I] \{w\} \right] + [B(N_x, N_y, N_{xy})] \{w\} = 12(1 - \nu^2)(\Delta l)^4 [I] \{p\} \quad (3.121)$$

となる． $[I]$ は単位行列， $[B(N_x, N_y, N_{xy})]$ は $N \times N$ 行列， $\{w\}, \{p\}$ は $N \times 1$ の行列で，

$$\{w\} = [w_{0,0} \cdots w_{i,j} \cdots w_{m,n}]^T \quad (3.122)$$

$$\{p\} = [p_{0,0} \cdots p_{i,j} \cdots p_{m,n}]^T \quad (3.123)$$

また，式 (3.111) について， u, v に関する項を左辺に， w に関する項を右辺にまとめ，全格子点を考えると行列形式で以下のように書ける．

$$[A_1] \{uv\} = \{k_1(w)\} \quad (3.124)$$

$N = m \times n$ とすると， $[A_1]$ は $N \times 2N$ の行列， $\{uv\}, \{k_1(w)\}$ は $N + 1$ の行列である．ただし，

$$\{uv\} = [u_{0,0} \cdots u_{i,j} \cdots u_{m,n} \ v_{0,0} \cdots v_{i,j} \cdots v_{m,n}]^T \quad (3.125)$$

同様にして，式 (3.112) も行列形式で以下のようなになる．

$$[A_2] \{uv\} = \{k_2(w)\} \quad (3.126)$$

式 (3.124) と式 (3.126) は次のようにまとめられる．

$$[A] \{uv\} = \{k(w)\} \quad (3.127)$$

ただし，

$$[A] = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \quad \{k(w)\} = \begin{Bmatrix} k_1(w) \\ k_2(w) \end{Bmatrix} \quad (3.128)$$

この時， $[A]$ は $2N \times 2N$ の行列， $\{k(w)\}$ は $2N \times 1$ の行列である．式 (3.121) 及び式 (3.127) の 2 組の連立方程式が解くべき方程式である．

式 (3.121) を解く時には， N_x, N_y, N_{xy} を既知として扱い w について解く．(これは線形問題を解くことに相当する．ちなみに，計算開始時には 0 とする．) そして，得られた

w を既知として式 (3.127) を u, v について解く．得られた u, v から N_x, N_y, N_{xy} を求めるには，式 (2.71) から式 (2.73) を中心差分で評価し，

$$(N_x)_{i,j} = \frac{1}{2(1-\nu^2)\Delta l} [(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + \nu(v_{i,j+1} - v_{i,j-1}) + \frac{1}{4\Delta l}(w_{i+1,j} - w_{i-1,j})^2 + \frac{\nu}{4\Delta l}(w_{i,j+1} - w_{i,j-1})^2] \quad (3.129)$$

$$(N_y)_{i,j} = \frac{1}{2(1-\nu^2)\Delta l} [(v_{i,j+1} - v_{i,j-1}) + \nu(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + \frac{1}{4\Delta l}(w_{i,j+1} - w_{i,j-1})^2 + \frac{\nu}{4\Delta l}(w_{i+1,j} - w_{i-1,j})^2] \quad (3.130)$$

$$(N_{xy})_{i,j} = \frac{1}{2(1-\nu^2)\Delta l} [(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) + \nu(v_{i+1,j} - v_{i-1,j}) + \frac{1}{4\Delta l}(w_{i,j+1} - w_{i,j-1})^2 + \frac{\nu}{4\Delta l}(w_{i+1,j} - w_{i-1,j})^2] \quad (3.131)$$

$$(3.132)$$

により求める．得られた N_x, N_y, N_{xy} を $B[N_x, N_y, N_{xy}]$ に代入し，再び式 (3.121) を解き始める．この一連の計算を繰り返し，解が許容誤差まで収束すると非線形解が得られる．式 (3.127) の連立方程式の計算において $[A]$ 行列の反転をする必要がある．本計算では行列反転に Intel Math Kernel Library の LU 分解法を用いた．

3.5.2 時間積分

時間積分には線形加速度法の延長である陰解法の Newmark β 法を用いた [93]．Newmark β 法では以下の式を用いる．

$$w_{t+\Delta t} = w_t + \Delta t \dot{w}_t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{w}_t + \beta \ddot{w}_{t+\Delta t} \right] \Delta t^2 \quad (3.133)$$

$$\dot{w}_{t+\Delta t} = \dot{w}_t + \frac{\ddot{w}_t + \ddot{w}_{t+\Delta t}}{2} \Delta t \quad (3.134)$$

ただし， $0 \leq \beta \leq 1/2$ である．本研究では $\beta = 1/4$ を採用する．このとき，時間 2 次精度，無条件安定のスキームとなる．これは時刻 t から $t + \Delta t$ まで平均的な加速度で一定に加速したことになる．これと組み合わせると式 (3.121) は次のように整理できる．

$$[M]\{\ddot{w}\}_{t+\Delta t} + [B(N_x, N_y, N_{xy})]\{w\}_{t+\Delta t} = \{P\}_{t+\Delta t} \quad (3.135)$$

ただし，

$$[M] = 12(1-\nu^2)(\Delta l)^4 \rho [I]\{w\} \quad (3.136)$$

$$\{P\} = 12(1-\nu^2)(\Delta l)^4 \{p\} \quad (3.137)$$

である．式 (3.133) と式 (3.134) を式 (3.135) に代入して， $\{\ddot{w}\}$ について解くと，

$$\left[[M] + \frac{(\delta t)^2}{4} [B] \right] \{\ddot{w}\}_{t+\Delta t} = \{P\}_{t+\Delta t} - [B(N_x, N_y, N_{xy})] \left[\{w\}_t + \Delta t \{\dot{w}\}_t + \frac{(\Delta t)^2}{4} \{\ddot{w}\}_t \right] \quad (3.138)$$

式 (3.133)，式 (3.134)，式 (3.138) から時刻 $t + \Delta t$ での板の変位，速度，加速度が得られる．また式 (3.138) の行列反転には，Intel Math Kernel Library の LU 分解法を用いた．

3.6 構造の計算法（線形平板曲げ方程式）

本節では，線形の板曲げ方程式を有限要素法を用いて解く方法を述べる．

3.6.1 有限要素法

有限要素法は構造の分野で確立されており，研究，企業の製品開発等で広く用いられている．構造解析には，MSC/NASTRAN 等の多くの商用ソフトウェアが存在し，精度や機能も十分である．しかし，本研究では，流体構造連成させるため，解析に必要な板曲げ要素，平面シェル要素を作成した．そして，効率的に解くために，モード分解し，低次のモードのみ使用した．以下に，それぞれの要素の概要，モード分解について述べる．

3.6.2 板曲げ要素

板曲げ要素は，長方形及び三角形の非適合要素を用いた．具体的には，以下の様になる．これらの要素を作成するにあたって，文献 [94]-[98] を参考にした．

3.6.2.1 長方形要素

本研究で用いた要素は，ACM 非適合長方形要素と呼ばれる，Adini, Clough, Melosh による 12 自由度の非適合長方形要素である．この要素は，辺に沿っての法線方向微分 $\frac{\partial w}{\partial n}$ は 3 次多項式になってしまい，一般的には要素間で不連続になる．モーメントやたわみの近似精度は良好であり，非適合要素ではあるが，収束は証明されているものである．以下，この要素についての説明を述べる．この有限要素法は変分法に基づいて計算されている．図 3.4 にあるような，要素の座標系で考えることにする．番号 1 から 4 は節点の番号である．各節点で， $(w, \partial w / \partial y, \partial w / \partial x)$ という 3 つの値をもつ．1 要素につき 4 節点存在し，1 要素に対しては 12 個の値を持つことになる，そして，要素内変位を以下の関数を用いて

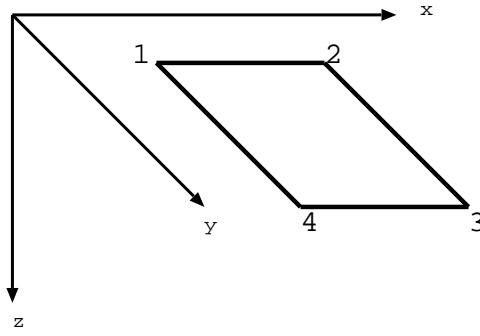


図 3.4: 要素の座標系

近似する .

$$w(x, y) = (1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3) \times \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_{12} \end{pmatrix} \quad (3.139)$$

これを次のように定義する .

$$w(x, y) = [H(x, y)] \cdot \{\alpha\} \quad (3.140)$$

$H(x, y)$ は要素内を近似する関数で, $\{\alpha\}$ は一般化変位である . そして, 変位ベクトルを以下の様に定義する .

$$\{U\} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}, \quad u_i = \begin{pmatrix} w_i \\ \frac{\partial w}{\partial y_i} \\ \frac{\partial w}{\partial x_i} \end{pmatrix}, \quad (i = 1 \sim 4) \quad (3.141)$$

さらに ,

$$\{U\} = [C]\{\alpha\} \quad (3.142)$$

とすると, $[C]$ マトリックスは以下の様になる .

$$[C] = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}, \quad c_i = \begin{pmatrix} H(x, y) \\ \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad (i = 1 \sim 4) \quad (3.143)$$

具体的に ,

$$c_i = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 & x_i^3 & x_i^2 y_i & x_i y_i^2 & y_i^3 & x_i^3 y_i & x_i y_i^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_i & 2y_i & 0 & x_i^2 & 2x_i y_i & 3y_i^2 & x_i^3 & 3x_i y_i^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_i & y_i & 0 & 3x_i^2 & 2x_i y_i & y_i^2 & 0 & 3x_i^2 y_i & y_i^3 \end{pmatrix} \quad (3.144)$$

である．そして，形状マトリックス $[N]$ は以下の様に導くことができる．

$$\{\alpha\} = [C]^{-1}\{U\} \quad (3.145)$$

$$w = [H(x, y)]\{\alpha\} = [H(x, y)][C]^{-1}\{U\} = [N]\{U\} \quad (3.146)$$

$$[N] = [H(x, y)][C]^{-1} \quad (3.147)$$

以上より，有限要素内部の変位 w はその要素を構成する節点の変位 $\{U\}$ を用いて

$$w = [N]\{U\} \quad (3.148)$$

と書くことができる．

一方，微小変形理論より，モーメントと曲率の関係式（一般化応力-歪関係式）は以下の様になる．

$$[\sigma] = [D][\epsilon] \quad (3.149)$$

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix}, [\epsilon] = \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix}, [D] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{pmatrix} \quad (3.150)$$

ここで， $(Eh^3)/(12(1-\nu^2))$ は板の曲げ剛性である．そして， E はヤング率， h は板厚， ν はポアソン比である．式中の平板の曲率 (κ_x, κ_y) ，ねじり率 (κ_{xy}) は，

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.151)$$

であり，モーメント (M_x, M_y, M_{xy}) は，

$$M_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xy} z dz \quad (3.152)$$

である．

そして，歪 $\{\epsilon\}$ と一般化変位 $\{\alpha\}$ の関係を表す $[B]$ マトリックスは，

$$\{\epsilon\} = [B]\{\alpha\} \quad (3.153)$$

$$\{\epsilon\} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} = [B]\{\alpha\} = [B][C]^{-1}U, \quad [B] = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \quad (3.154)$$

$$b_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x_i & -2y_i & 0 & 0 & -6x_i y_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x_i & -6y_i & 0 & -6x_i y_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -4x_i & -4y_i & 0 & -6x_i^2 & -6y_i^2 \end{pmatrix}, \quad (i = 1 \sim 4) \quad (3.155)$$

となる．以上のマトリックスを用いて，長方形要素の要素剛性マトリックスは以下の様に表される．

$$[K_e] = ([C]^{-1})^T \left(\iint [B]^T [D] [B] dx dy \right) [C]^{-1} \quad (3.156)$$

積分は，Gauss 積分を用いて計算した．

3.6.2.2 三角形要素

Tocher は 9 個の自由度を持ち， x と y との対称性も考慮して，次のようなたわみ形状関数を提案した．

$$w(x, y) = \left(1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y + xy^2, y^3 \right) \times \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_9 \end{pmatrix} \quad (3.157)$$

すなわち， x^2y と xy^2 の項を一緒にして，同一の任意定数を乗じ自由度を 1 個節約している．そして各節点で， $w, \partial w / \partial y, \partial w / \partial x$ を持つ．剛性マトリックスを求める方法は，長方形の場合と同じであるので，省略する．

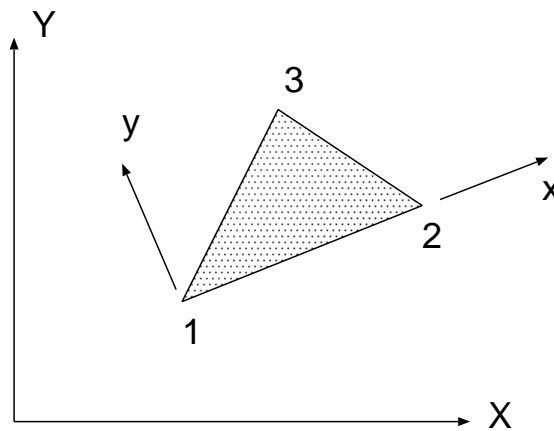


図 3.5: 三角形要素の座標変換

ただし，三角形要素の場合は，座標変換が必要になる．まず，局所座標 (x, y) で要素を作成し，その後，全体座標 (X, Y) に変換する (図 3.5 参照)．

$$\begin{bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(x, X) & \cos(x, Y) \\ 0 & \cos(y, X) & \cos(y, Y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial Y} \\ \frac{\partial w}{\partial X} \end{bmatrix} = [L_2] \begin{bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial Y} \\ \frac{\partial w}{\partial X} \end{bmatrix} \quad (3.158)$$

$[L_2]$ が変換マトリックスであり，それを用いて変位ベクトル U に対する変換マトリックス $[R]$ は以下の様になる．

$$[R_e] = \begin{bmatrix} L_2 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & L_2 \end{bmatrix} \quad (3.159)$$

その変換マトリックスを用いて，局所座標での剛性マトリックス $[\bar{K}_e]$ から，全体座標での剛性マトリックス $[K_e]$ を計算する．

$$[K_e] = [R_e]^T [\bar{K}_e] [R_e] \quad (3.160)$$

3.6.3 平面シェル要素

シェル構造は曲面で構成された構造物であるから，要素自身も曲面形状のものが望ましいが複雑な計算を避けるために，平面と膜要素と曲げ要素とを組み合わせた平面シェル要素 (planar shell element) でシェル要素を近似する手法が開発された．簡易的な方法を用いているので，精度は劣るが，十分な要素数を用いれば問題ない．

本解析では，前節に述べた長方形板曲げ要素と 8 自由度長方形膜要素を組み合わせ，平面シェル要素を構築した．以下，平面シェル要素の概略を述べる．

長方形膜要素では，各節点に変数 u, v を持つ．一方，長方形板曲げ要素では，各節点に変数 w, θ_x, θ_y を持つ．ここで， $\theta_x = \partial w / \partial y, \theta_y = \partial w / \partial x$ である．それぞれの要素で，剛性マトリックスを作成し，それらを組み合わせる．図 3.6 に平面シェル要素の組み合わせ方を示す．膜要素で要素剛性マトリックス $[K_P]$ を作成し，平板曲げ要素で要素剛性マトリックス $[K_B]$ を作成する．そして，それぞれを組み合わせ，平面シェル要素 $[K_S]$ を得る．

また，本研究では航空機のアクセスパネルを模擬した，曲面のフラッタ計算を行う．その際，パネルの境界条件として自由端を設定する縁がある．ところが，シェル要素で縁に自由端境界条件を適用すると，剛性マトリックスや慣性マトリックスが非正則となり方程式が解けなくなる．これは Zienkiewicz によっても報告されており [99]，すなわち同一平面内に 1 つの節点を共有する要素が並ぶとこのような問題が起こる．この問題に対して Zienkiewicz は三角形平面シェル要素の剛性マトリックスに対して擬似的な回転剛性を付加することを提案した．これは方程式を解く際に，特異点を避け円滑に数値計算を行わせるためのものであり，力学的根拠は薄い．本研究ではこれを参考に，長方形平面シェル要素の剛性マトリックス，慣性マトリックスにそれぞれ次のような擬似回転剛性，擬似

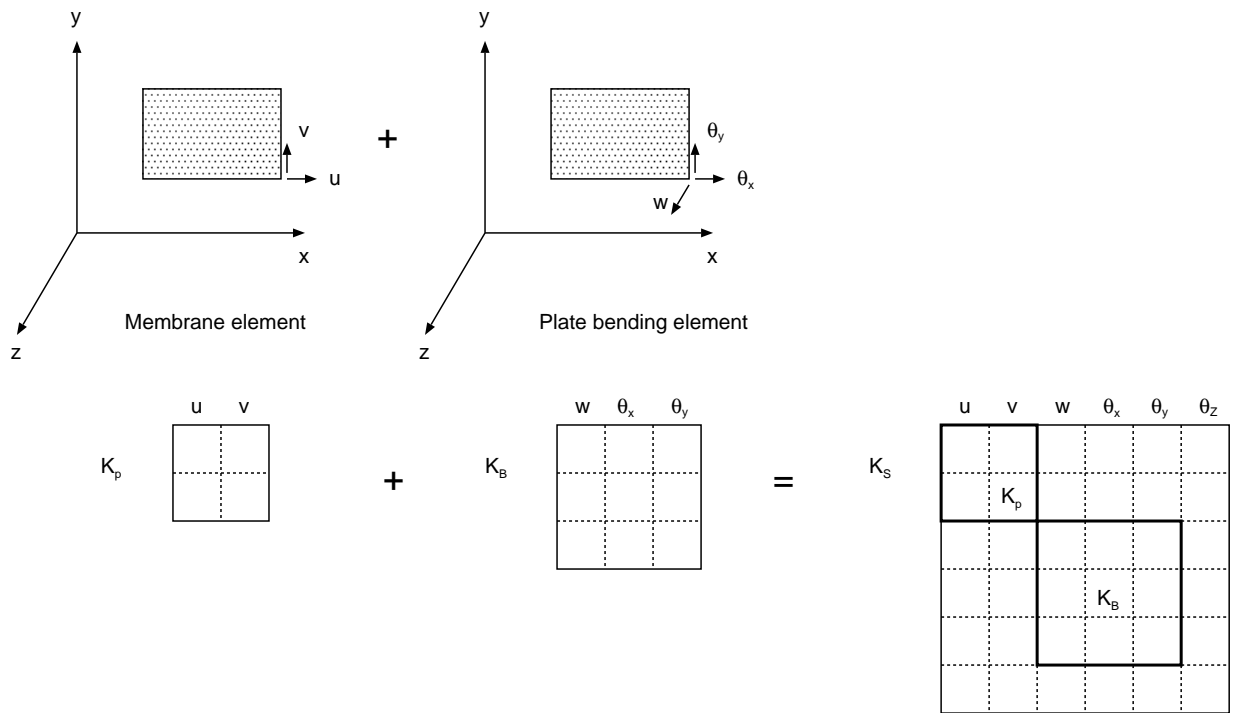


図 3.6: 平面シェル要素

回転慣性を加えた .

$$\begin{Bmatrix} M_{z1} \\ M_{z2} \\ M_{z3} \\ M_{z4} \end{Bmatrix} = \alpha EhA \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \\ \theta_{z4} \end{Bmatrix} \quad (3.161)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{z1} \\ M_{z2} \\ M_{z3} \\ M_{z4} \end{Bmatrix} = \beta \rho h A \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_{z1} \\ \ddot{\theta}_{z2} \\ \ddot{\theta}_{z3} \\ \ddot{\theta}_{z4} \end{Bmatrix} \quad (3.162)$$

ここで、数値実験により、 $\alpha = 0.03$ 、 $\beta = 0.03 \times 10^{-5}$ を最適値として選んだ。このとき、剛性マトリックス、慣性マトリックスは縁に自由端境界条件を適用しても、正則を保つ。全周単純支持された円筒形シェルの固有振動数を計算した時、擬似回転剛性・慣性を付加しても、解は十分な精度を保っていることを確認している。

また、局所座標から全体座標に変換する必要がある。まず、局所座標 (x, y, z) で要素

を作成し，その後，全体座標 (X, Y, Z) に変換する．

$$[L_3] = \begin{bmatrix} \cos(x, X) & \cos(x, Y) & \cos(x, Z) \\ \cos(y, X) & \cos(y, Y) & \cos(y, Z) \\ \cos(z, X) & \cos(z, Y) & \cos(z, Z) \end{bmatrix} \quad (3.163)$$

$[L_3]$ が変換マトリックスであり，それを用いて変位ベクトル U_e に対する変換マトリックス $[R_e]$ は以下の様になる．

$$[R_e] = \begin{bmatrix} L_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_3 \end{bmatrix} \quad (3.164)$$

その変換マトリックスを用いて，局所座標での剛性マトリックス $[\bar{K}_e]$ から，全体座標での剛性マトリックス $[K_e]$ を計算する．

$$[K_e] = [R_e]^T [\bar{K}_e] [R_e] \quad (3.165)$$

3.6.4 質量マトリックス及び外力マトリックス

要素質量マトリックス，要素荷重マトリックスはそれぞれ以下の様になる．

$$[M_e] = \iint [N]^T \rho t [N] dx dy \quad (3.166)$$

$$\{F_e\} = \iint [N]^T q(x, y) dx dy \quad (3.167)$$

$q(x, y)$ は荷重分布である．

3.6.5 全体のマトリックス

これらの要素内で作られたマトリックスを重ね合わせ，全体のマトリックスを作成する．

$$[K] = \sum_i [K_e]^i \quad (3.168)$$

$$[M] = \sum_i [M_e]^i \quad (3.169)$$

$$\{F\} = \sum_i \{F_e\}^i \quad (3.170)$$

静的解析では，

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (3.171)$$

を解けば，荷重に対する変位が得られる．その後，変位と歪の関係式（例えば，式(3.153)）を使えば歪が求まり，さらに歪と応力（例えば，式(3.149)）を使えば，応力を求めることができる．

3.6.6 モード分解

動的解析において，解くべき方程式は以下のようなになる．

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = \{F\} \quad (3.172)$$

ここで， $[M]$ は質量マトリックス， $[K]$ は剛性マトリックス， $\{F\}$ は外力ベクトル， $\{U\}$ は解ベクトルである．

ここでは，この方程式から得られる固有値や固有ベクトルを利用して，以下のようにモード分解し，計算の効率化を図る．固有値を求める計算には，Intel Math Kernel Library を用いた．まず，固有値，固有ベクトルは以下の固有値問題を解くことで得られる，

$$([K] - \omega^2[M])\{U\} = 0 \quad (3.173)$$

得られた固有値を小さいものから， $\omega_1, \omega_2, \dots$ ，固有ベクトルを， ϕ_1, ϕ_2, \dots とする．そして，それらを用いて，以下のように独立なスカラーの方程式を得る．

$$m_n \ddot{\xi}_n + k_n \xi_n = f_n, \quad \{U\} = \sum_n \xi_n \{\phi_n\} \quad (3.174)$$

ここで，

$$\begin{aligned} m_n &= \{\phi_n\}^T [M] \{\phi_n\}, \quad k_n = \{\phi_n\}^T [K] \{\phi_n\}, \\ f_n &= \{\phi_n\}^T \{F\} \end{aligned} \quad (3.175)$$

ξ_n, m_n, k_n, f_n はそれぞれ n 次の，モード係数，モード質量，モード剛性，外力である．この式を Newmark β 法を用いて時間発展させる．

3.7 流体構造連成解析法

この節では，流体構造連成解析に必要な要素技術を述べる．

3.7.1 連成手法

流体と構造の連成計算には、弱連成 (weak coupling, loose coupling) と強連成 (strong coupling, tight coupling) がある。弱連成は、毎回または数回に一回データをやり取りして交互に時間発展させる方法である (図 3.7(a))。この方法では、各時間ステップで流体と構造で同期させず、前の時間ステップの情報のみ使用するため、常に位相のずれが生じる。例えば、(N+2) ステップ目を解く時、(N+1) ステップ目の情報のみ使用する。一方、強連成は、データをやり取りしながら、流体及び構造を同時に時間発展させる方法である (図 3.7(b))。この方法は、(N+1) ステップ目を求める時、お互いに (N+1) ステップ目の情報を用いて解く必要があるため、流体、構造共に陰解法を用いて解く必要がある。非線形方程式を陰的に解く場合、通常反復解法が用いられる。その内部反復中にデータをやり取りしながら、計算を進める。強連成は、各時間ステップで同期させることができ、流体・構造間の位相のずれを小さくすることができる。強連成の方が弱連成に比べ、大きな時間刻みを使用しても、高い精度を保つことができる [100]。

本研究では、強連成方式を採用し、流体と構造を同時に解く。流体計算から構造計算へは、物体表面圧力による流体力を、構造計算から流体計算へは、構造の変位、速度、加速度を与える。また、この構造変位に合わせて格子を移動・変形し、メトリックを毎回計算している。そして、本計算では反復回数を 3 回と限定し、時間刻み Δt を調節して、解の収束性を調べた。フラッタ境界の計算では、時間刻みを半分にしても結果が変化しないことを確認してから計算を行った。

3.7.2 格子の移動・変形方法

格子を構造の変形に応じて移動及び変形する方法はこれまでに様々方法が提案されている [101]。特に複雑な形状、例えば戦闘機などの形状で、翼の変形に合わせて格子を移動・変形させると、格子がねじれてしまったり、格子が重なってしまう恐れがある。さらに、滑らかに移動・変形しなければ、格子の質が悪化し、それによる数値誤差が発生し精度も落ちる。

代表的な方法は、(1) 代数式を使って変形・移動させる方法 [22]、(2) 格子生成の時に用いた Transfinite Interpolation (TFI) 法を使って変形・移動させる方法 [102]、(3) 格子を弾性体だとみなし、有限要素法を解いて格子を変形・移動させる方法 [103][104] がある。3 番目が最もロバストであるが、その分コストも大きい。

本研究の対象は、単純な形状なので、代数式を用いて変形・移動させる方法を用いた。物体表面近くの格子点は構造変位と同じだけ移動させ、それより外側の格子点は、外

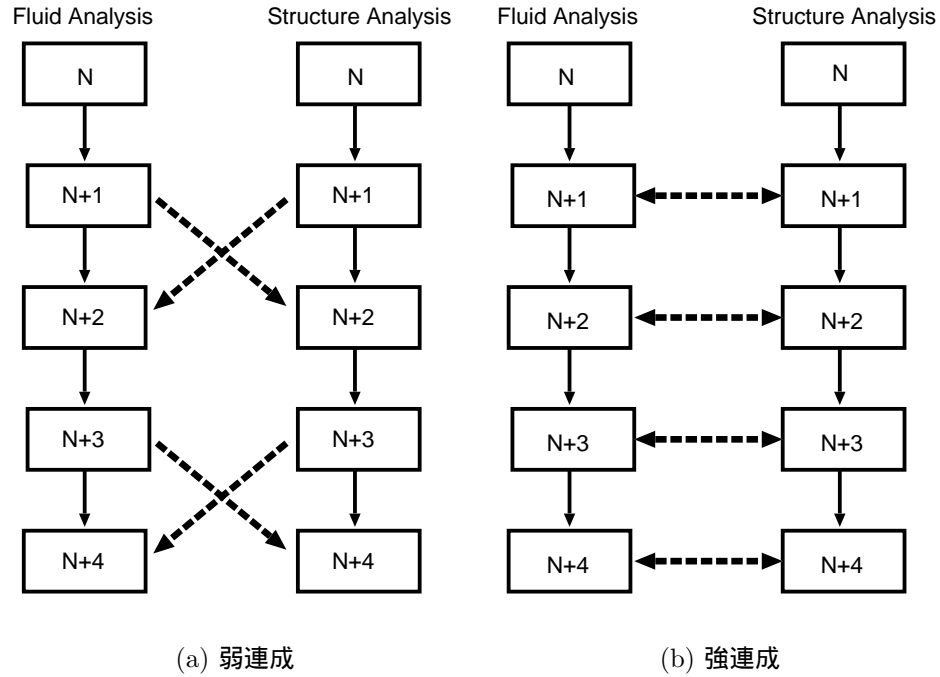


図 3.7: 連成手法

部境界との間で滑らかに内挿させる．具体的に， $k = 0$ を変形する構造表面， $k = k_{max}$ を外部境界とすると， $0 < k < k_1$ は構造変位と同じだけ移動させ， $k_2 < k < k_{max}$ の外部境界付近は動かさない．そして， $k_1 < k < k_2$ を以下の 3 次関数を用いて内挿する．

$$g_1 = \frac{k_2 - k}{k_2 - k_1}, \quad g_2 = -2g_1^3 + 3g_1^2 \quad (3.176)$$

$k = k_1, k_2$ で分布の一階微分が 0 になっており，滑らかに分布させることができる．

パネルフラッタの場合には，パネルの垂直方向にこの方法を用いて，格子の変形・移動の計算をした．ただし，デルタ翼の場合は，スプライン関数も用いている．

3.7.3 流体構造間のデータの受け渡し

パネルフラッタの場合には，流体と構造で同じ格子を用いたので，データの受け渡しは容易に行える．しかし，デルタ翼の場合は，流体と構造で異なる格子を使用しているのでデータの補間が必要である．一般的に，流体と構造の特性は異なり，細かい格子が必要となる場所も異なる．よって，このデータをいかに受け渡すかというのも連成計算に必要な技術課題の 1 つである．さらに，一般的に構造格子は流体格子に比べ少ないので，流体から構造へ受け渡す時に，補間する必要がある．実際，この補間法によって，フラッタ計

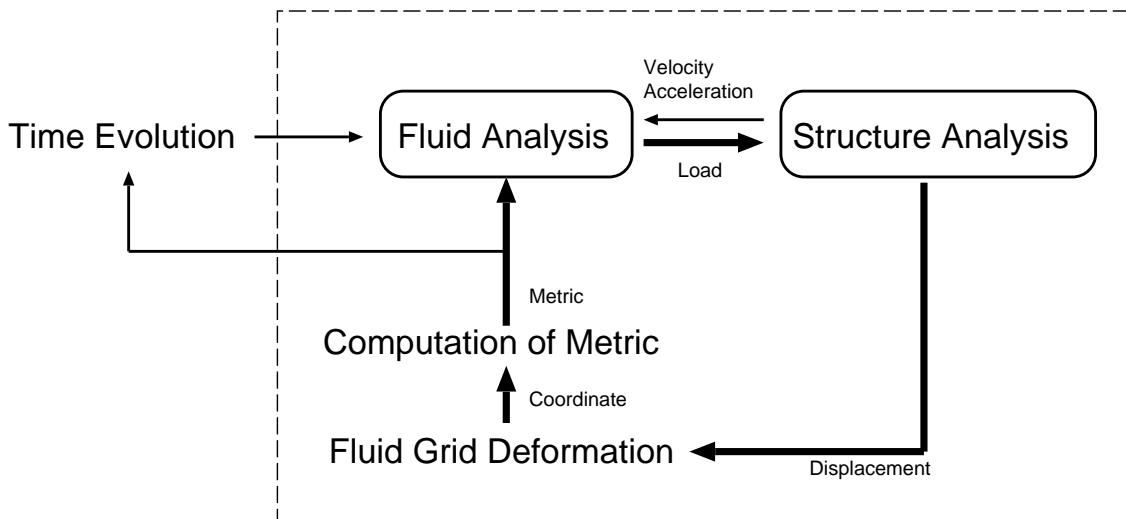


図 3.8: 流体構造連成解析の流れ

算の結果が異なることも示されている [106] .

Smithら [105] は、様々な補間法を実用問題に適用し、どの方法がロバストであるか調べた。方法としては、Infinite-Plate Spline(IPS) 法、Multiquadric-Biharmonic(MB) 法、Thin-Plate Spline(TPS) 法、Nonuniform B-Splines(NURBS) 法が試されており、これらの中では、MB 法、TPS 法がロバストであると結論づけている。しかし、構造の格子が流体の格子に比べ非常に粗い時、あるいは外挿が必要になる時のみに誤差が大きくなることも述べている。よって、本研究対象の様に、格子の差が小さく、外挿の無い問題では、どの方法をつかってても特に問題はないと思われる。そこで本研究では、文献 [105] の中で AGARD 翼の補間に対して、最も良い性能を示していた B-spline 法を用いた。

B-spline は数値計算ライブラリ DIERCKX(<http://www.netlib.org/dierckx/>) を用いて計算した。ここでは、流体の格子から構造の格子へデータを補間して転送する時を考える。流体の持っているデータは、圧力 p 、座標 x, y である。

$$p = p(i, j) \tag{3.177}$$

$$x = x(i, j) \tag{3.178}$$

$$y = y(i, j) \tag{3.179}$$

構造の格子の座標 x_0, y_0 の p の値を補間して求めたい時には、まず

$$x_0 = x(\xi_0, \eta_0) \tag{3.180}$$

$$y_0 = y(\xi_0, \eta_0) \quad (3.181)$$

を満たす ξ_0, η_0 を求めなければならない．そこで， $x(i, j), y(i, j)$ をスプライン補間し，以下の Newton-Rhapson 法を用いて ξ_0, η_0 を求めた．

$$d\vec{\xi} = \left[\frac{\partial X}{\partial \xi} \right]^{-1} d\vec{X} \quad (3.182)$$

$$\vec{\xi}_{n+1} = \left[\frac{\partial X}{\partial \xi} \right]^{-1} (\vec{X}_0 - \vec{X}_n) + \vec{\xi}_n \quad (3.183)$$

具体的には，以下の様になる．

$$\xi_{n+1} = \xi_x(x_0 - x_n) + \xi_y(y_0 - y_n) + \xi_n \quad (3.184)$$

$$\eta_{n+1} = \eta_x(x_0 - x_n) + \eta_y(y_0 - y_n) + \eta_n \quad (3.185)$$

実際， (i, j) の離散点のみの値を使うと，なかなか収束しないが，スプライン補間することで，非常に良い収束性が得られる．

最後に，求めた ξ_0, η_0 と， $p(i, j)$ のスプライン補間を用いて，

$$p_{x_0, y_0} = p(\xi_0, \eta_0) \quad (3.186)$$

を求めることができる．この計算をすべての流体と構造の接触面を構成する格子で行う．また，構造から流体へのデータ補間も同様である．

3.7.4 検証 (流体解析)

本流体解析コードを検証するために，理論解と比較した．圧縮性流体の場合は衝撃波管問題で厳密解と比較し検証した．さらに，粘性効果を検証するために，層流では Blasius 解と比較し検証した．乱流モデルの検証は，乱流境界層の摩擦係数を検証に用いた．一方，非圧縮流体の場合でも，Blasius 解との比較， $Re = 200$ のカルマン渦 [107] を計算し実験値，他者の計算結果と比較し良い一致を示した．ここでは，フラッタ解析で重要な移動格子法の検証を示す．

移動格子上で本解析コードを用いて一様流保存問題を解く．検証には，Visbal[108] と同じ方法を用いる．格子点を以下の式により，時間と共に動的に変形させる．

$$\begin{aligned} x_{i,j,k}(t) &= x_{min} + \Delta x_0 \left[(i-1) + A_x \sin(2\pi\omega t) \sin \frac{n_{xy}\pi(j-1)\Delta y_0}{L_y} \sin \frac{n_{xz}\pi(k-1)\Delta z_0}{L_z} \right] \\ y_{i,j,k}(t) &= y_{min} + \Delta y_0 \left[(j-1) + A_y \sin(2\pi\omega t) \sin \frac{n_{yx}\pi(i-1)\Delta x_0}{L_x} \sin \frac{n_{yz}\pi(k-1)\Delta z_0}{L_z} \right] \\ z_{i,j,k}(t) &= z_{min} + \Delta z_0 \left[(k-1) + A_z \sin(2\pi\omega t) \sin \frac{n_{zx}\pi(i-1)\Delta x_0}{L_x} \sin \frac{n_{zy}\pi(j-1)\Delta y_0}{L_y} \right] \end{aligned}$$

ここで, $i = 1 \cdots i_{max}$, $j = 1 \cdots j_{max}$, $k = 1 \cdots k_{max}$, $\Delta x_0 = L_x / (i_{max} - 1)$, $\Delta y_0 = L_y / (j_{max} - 1)$, $\Delta z_0 = L_z / (k_{max} - 1)$ である. 各定数はそれぞれ, $i_{max} = j_{max} = k_{max} = 31$, $A_x = A_y = A_z = 1.5$, $L_x = L_y = L_z = 12$, $n_{xy} = n_{yz} = \cdots = 4$ とする. 振動周波数は $\omega = 1$ とする. 格子の移動速度は上式を微分することにより解析的に与えられる.

このように動的に変形する格子上 (図 3.9) で, 一様流 ($u = U_\infty$, $v = w = 0$) を計算する. この時, 格子の最大速度は $3.78U_\infty$ に達する. 時間刻み $\Delta t = 0.002$ で, $t = 60$ (約 50 サイクル分の振動) まで計算を行う. 結果は, 流れ場に数値振動を生じることなく, 主流方向速度に対する誤差 $\delta v = \max(v/U_\infty)$ は $10^{-15} \sim 10^{-16}$ 程度で小さい (図 3.10). またクーラン数を 1 以上にとっても問題なかった. 以上より, 本流体解析コードが移動格子上で一様流保存特性を満たしていることが示された.

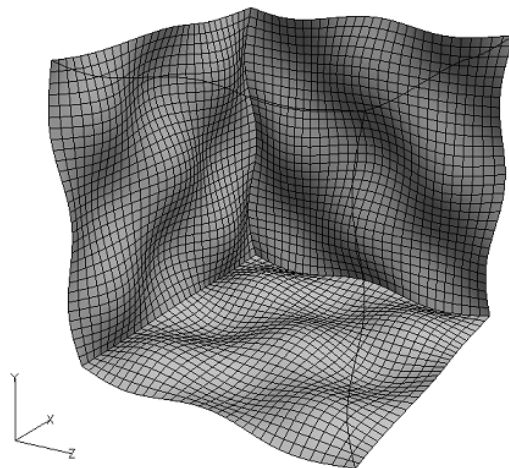


図 3.9: 検証用移動変形格子

3.7.5 検証 (構造解析)

全ての要素について静的解析及び動的解析して, 解析解との比較する検証をした. ここでは, 最も計算精度が懸念される平面シェル要素の検証する.

動的な検証問題として全周単純支持された円筒形シェルの振動特性 (固有振動数, 固有モード) を計算する. アスペクト比 $a/b = 1$, パネル長さ板厚比 $a/h = 100$, ポアソン

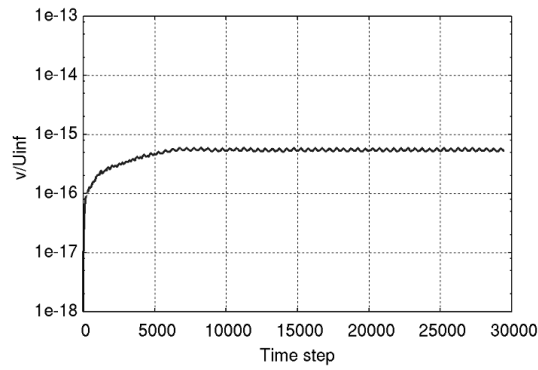
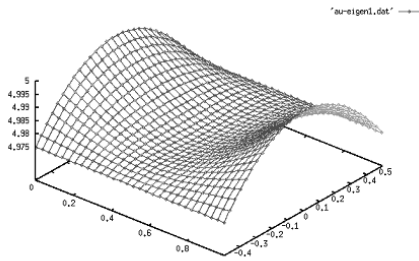


図 3.10: 一様流誤差

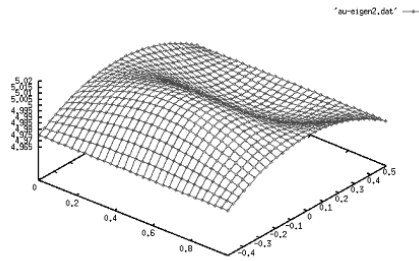
表 3.2: 固有振動数

モード	FEM	解析解
(1,1)	38.49	38.44
(2,1)	51.11	51.06
(1,2)	72.30	72.30
(2,2)	85.54	85.56
(3,1)	98.86	98.89
(1,3)	115.1	115.2

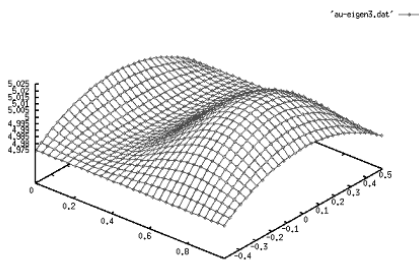
比 $\nu = 0.3$, パネル長さ曲率比 $a/R = 0.2$ とする . 用いた要素数は $841(29 \times 29)$ である . 図 3.11 に 1 次から 6 次までの固有モード , 表 3.2 に固有振動パラメータの解析解 [109] との比較を示す . モードの (m,n) は x 方向 , y 方向に含まれる半波長の数が m 個 , n 個であることを示す . 本計算法が動的に正しく円筒シェルの挙動を捉えることが示された .



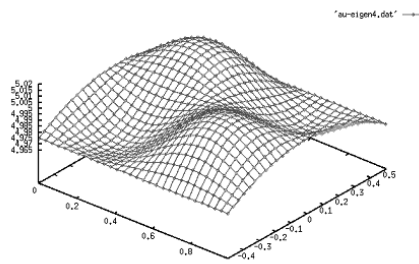
(a) (1,1) モード



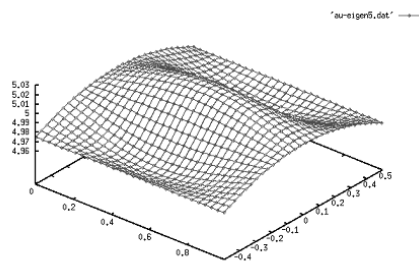
(b) (1,2) モード



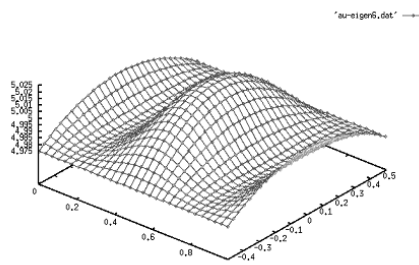
(c) (2,1) モード



(d) (2,2) モード



(e) (1,3) モード



(f) (3,1) モード

図 3.11: シェルの固有振動モード

第4章 境界層のパネルフラッタへの影響

4.1 はじめに

本章では，CFD を用いた流体構造連成解析コードを開発し，パネルフラッタ問題に適用し検証する．そして，そのコードを用いて，その上面の境界層厚さとフラッタ限界との関係を調べる．

まず，コード検証として，空気力の計算に線形ポテンシャルを用いた Dowell の解析結果と比較する．その後で，パネル上面速度境界層のフラッタ境界への影響について述べる．

4.2 計算方法

4.2.1 流体計算法

流体の支配方程式は，移動格子に基づく一般座標系の Euler 方程式，Navier-Stokes 方程式 (式 (2.26) 及び 2.1.3 参照) で，これらを理想気体の状態方程式とともに解く．時間発展計算には，Dual Time Stepping 法を組み込んだ二次精度 LU-SGS 法 (3.3.6.1 節参照) を採用する．

非粘性流束の計算では，セル境界での解ベクトルを Van Albada の limiter を用いた MUSCL 法 (3.3.2 節参照) により 3 次精度で求め，Roe の近似 Riemann 解法 (3.3.3 節参照) を適用した．一方，粘性流束は二次の中心差分で計算した．また，プラントル数は一定とし，粘性係数は Sutherland の式で近似した．

また，乱流計算する際には，乱流モデルとして Baldwin-Lomax モデル (3.3.5 節参照) を用いた．乱流モデルを用いた計算では，LU-SGS 法の中で乱流渦粘性拡散の効果を特性速度 (式 (3.80)) で考慮する事が重要である．これをしないと，収束が遅れ，時間遅れによる力が発生し，低い動圧でもフラッタが起こる．

4.2.2 構造計算法

構造の支配方程式には、平板の大たわみ理論の基礎方程式である von Karman 方程式 (式 (2.60) ~ (2.61)) を用いる。本計算で扱うパネルフラッタ問題では、変位 w が板厚よりずっと大きくなるリミットサイクル振動や、パネル上下面の圧力差による大変形が起こる可能性がある。このような問題に対しては、線形の微小変形理論ではなく板の面内変形と曲げ変形が連成する非線形大たわみ理論を用いなければならない。

本研究では、式 (2.60), (2.61) を有限差分法によって解く (3.5 節参照)。空間を 2 次精度中心差分で離散化し、時間積分には、陰解法の Newmark 法を適用する。各時間ステップで、式 (2.60), (2.61) を交互に解いて、収束するまで反復する。その際、パネル上下面の圧力差を外力として与える。せん断力は考慮していない。

また、パネルの境界条件は、単純支持か固定端とする。両方とも、変位は $u = v = w = 0$ である。単純支持の場合、モーメントが 0 なので、 $\partial^2 w / \partial n^2 = 0$ であり、固定端支持の場合、勾配が 0 なので、 $\partial w / \partial n = 0$ である。ここで n は境界に垂直方向の座標である。

4.2.3 連成計算法

本研究では、強連成方式を採用し、流体と構造を同時に解く (3.7.1 節参照)。流体計算から構造計算へは、物体表面圧力による流体力を、構造計算から流体計算へは、構造の変位、速度、加速度を与える。また、この構造変位に合わせて格子を移動・変形させる。具体的には、物体表面近くの格子点は構造変位と同じだけ移動させ、それより外側の格子点は、外部境界との間で滑らかに内挿させる。時間ステップ毎に格子を移動させるため、3 次関数 (式 (3.176)) を用いる。

流体解析における境界条件は、物体表面上で、

$$\vec{v}_w \cdot \vec{n} = \vec{v}_s \quad (4.1)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_w = -\rho_w \vec{a}_s \cdot \vec{n} \quad (4.2)$$

となる。ここで、 v_w, ρ_w は物体表面上での流体の速度と密度である。また、 \vec{n} は物体表面での単位法線ベクトル、 v_s, a_s は構造物表面の変形速度と加速度である。壁での圧力勾配は、構造の加速度に依存する。

4.3 解析コードの検証

4.3.1 計算条件

パネルフラッタ現象における重要なパラメータは、マッハ数 M 、無次元動圧 λ 、パネルのアスペクト比 a/b (主流方向長さ/横方向長さ)、質量比 μ である。

$$\lambda = \frac{\rho_{\infty} u_{\infty}^2 a^3}{D}, \quad \mu = \frac{\rho_{\infty} a}{\rho_s h} \quad (4.3)$$

h はパネルの厚さである。また、 ρ_{∞} 、 u_{∞} は一様流の密度と速度である。

検証計算として、主流方向のパネル両端を単純支持した場合を計算した。質量比を一定として ($\mu = 0.1$)、各マッハ数で無次元動圧 λ を変化させた。マッハ数は $M = 1.2 \sim 1.8$ とした。流体計算には Euler 方程式を用い、計算開始時に微小な初期速度を擾乱としてパネルに与え、その応答からフラッタ限界を決定した。パネル下面の圧力は一様流の静圧とした。

スパン方向に一樣な 2 次元問題を考える。計算コードは 3 次元コードとして作製されているので、スパン方向には周期境界条件を適用した。

4.3.2 計算領域および計算格子

計算領域は図 4.1 の点線で囲まれた領域とする。領域の主流方向長さは、パネル長さ a に対し、パネル前方に a 、パネル後方に $4a$ とした。パネル垂直方向長さは $20a$ とした。また、解析コードは 3 次元用であるので、スパン方向 (紙面垂直方向) 長さを $0.1a$ とし、2 次元的な特性を解析した。

計算格子は、主流方向に 112 点 (パネル上に 40 点)、物体表面から垂直方向に 96 点、スパン方向に 5 点用いた。データのやりとりを容易にするため、流体格子は構造格子に合わせて作製している。

4.3.3 計算結果 (フラッタ限界)

図 4.2 は、パネルに擾乱を与えた後の初期応答の結果である。変位はパネル前縁から下流方向にコード長の 75% ($0.75a$) 位置で計測した。 $\lambda = 10$ の場合は安定な状態を (図 4.2(a))、 $\lambda = 18$ は中立な状態を (図 4.2(b))、 $\lambda = 24$ は不安定な状態を (図 4.2(c)) 示す。この結果から、フラッタ限界は $\lambda = 18$ と判断される。

同様に、 $M = 1.414, 1.6, 1.8$ の場合のフラッタ限界を計算し、流体計算に線形ポテンシャル方程式を用いた Dowell[18] の結果と比較する (図 4.3)。プロットされた線や

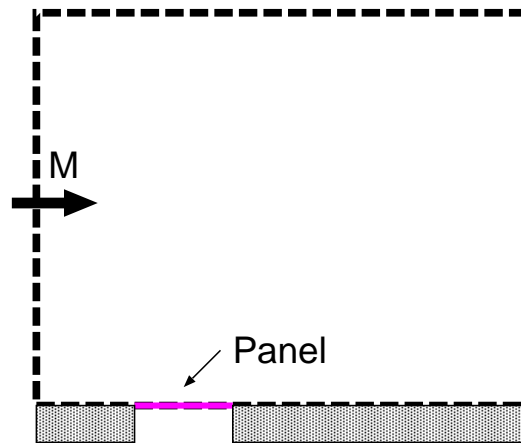


図 4.1: 計算領域

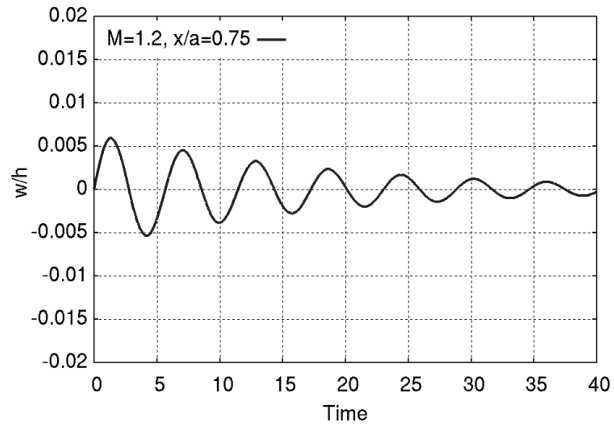
点よりも上側で不安定，下側で安定となる．両者は良く一致し，本計算法の妥当性が確認された．線形ポテンシャル理論を用いると，音速点で流体のモデル化が不十分なため，フラッタ限界が0となる．ちなみに，実験結果では，マッハ数 $M=1$ 付近においても，発散する傾向は見られない [110] ．

4.3.4 計算結果 (リミットサイクル振動)

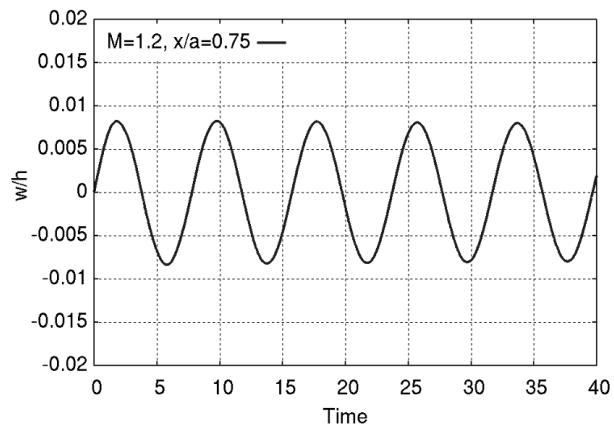
マッハ数 $M = 1.2$ でのフラッタ限界動圧 $\lambda = 18$ よりかなり大きい $\lambda = 100$ におけるパネル前縁から下流方向 $0.75a$ 位置でのパネル変位の時間履歴を図 4.4 に示す．横軸は無次元時間，縦軸は変位量 w を板厚 h で無次元化したものである．フラッタ限界を超えているので，パネルの振幅は最初急激に増大するが，その後，一定の振幅に落ち着く．つまり，リミットサイクル振動となる．振幅は板厚の 1.5 倍になっているため，構造の幾何学的非線形性の影響が現れていると考えられる．このような大振幅リミットサイクル振動の解析には，構造の非線形計算が要求される．

マッハ数 $M = 1.2, 1.414, 1.8$ におけるリミットサイクル振動時のパネルの変形と，パネル周辺流れ場における圧力場を図 4.5 に示す．マッハ数 $M = 1.2$ では，主に 1 次モードで変形し，これまで報告された結果 [18][22] と一致している．パネルが下方にたわむときには，パネルの前縁と後縁に膨脹波が，また上方にたわむときには，パネルの前縁と後縁に衝撃波が発生する．

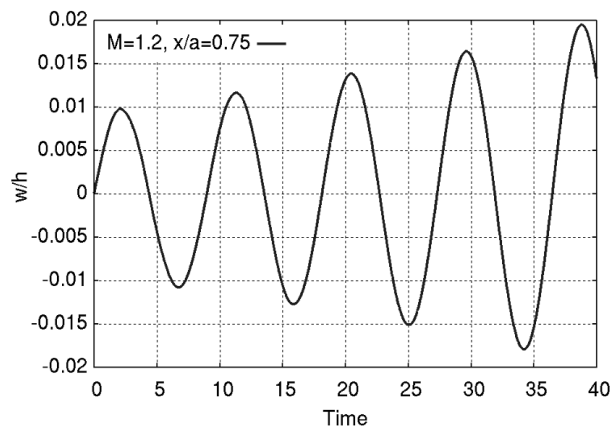
マッハ数 $M = 1.414$ の場合は，パネルは高次モードで振動する．本計算では初期に 1 次モードの擾乱を与えたので，計算が収束するまでに時間を要した．マッハ数 $M = 1.8$ の場合は，パネル振動は低次のモードに戻る．パネルの最大たわみ位置は， $M = 1.2$ の



(a) 減衰 ($\lambda = 10$)



(b) 平衡 ($\lambda = 18$)



(c) 発散 ($\lambda = 24$)

図 4.2: フラッタ限界の求め方

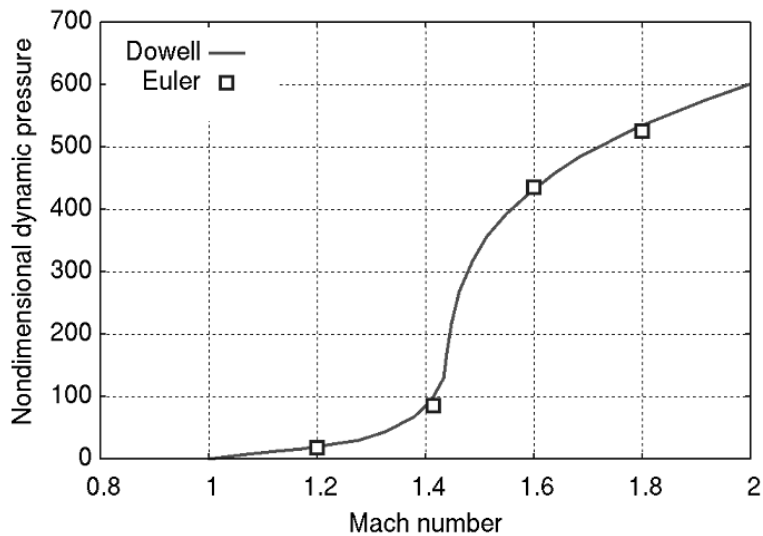


図 4.3: 線形空気モデルとの比較

場合よりも下流側に移動し、パネルの上流側部分での振動は減少する。流れ場の特徴は、パネルの後縁での強い衝撃波と膨脹波の発生である。

図 4.6 に各マッハ数でのリミットサイクル振動の振幅を Dowell の結果と比較する。本計算結果は Dowell の結果とほぼ一致し、大変形を含む振動でも、同様な傾向が得られることが分かった。

4.4 境界層のフラッタ限界への影響

4.4.1 計算条件

上記の結果は Euler 計算によるものである。ここでは、粘性効果として、境界層のフラッタ限界に対する影響を調べる。

2次元パネルフラッタの実験 [110] では、流れ方向のパネル両端を固定し、両サイドは自由端としている (図 4.7)。本計算では、2次元問題として扱い、図 4.7 に示した A-A' 断面のみを考える。計算領域は図 4.7 の点線で囲まれた領域であり、下方境界に壁面境界を適用することで模型を考慮する。パネル長さを a とすると、平板先端はパネル前縁から $0.6a$ だけ上流側にある。この長さは、石井らの実験 [110] を参考にしている。また、パネル下流方向の長さは $3a$ である。

また、実験ではパネルの下面には空洞があり、計算では下面全体に一定圧力を与える。パネルは、主流方向の両端を固定支持し、材質は鋼鉄とする。パネルの物性値を表 4.1

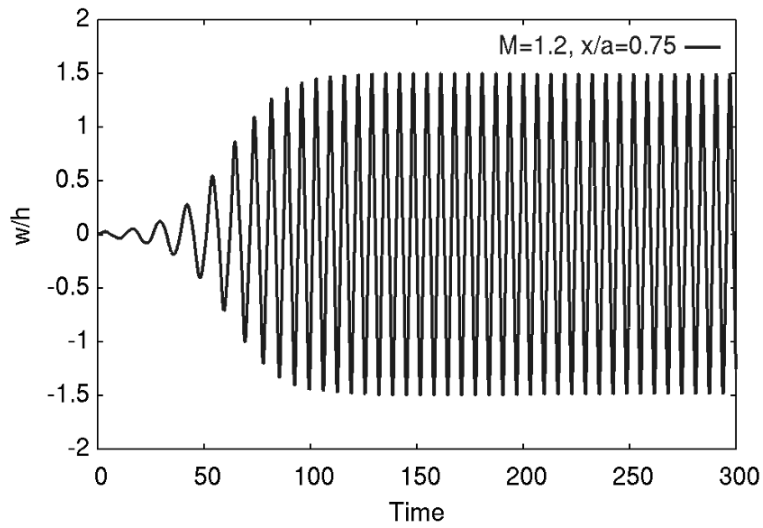


図 4.4: マッハ数 $M=1.2$ の時のリミットサイクル振動

表 4.1: パネルの物性値

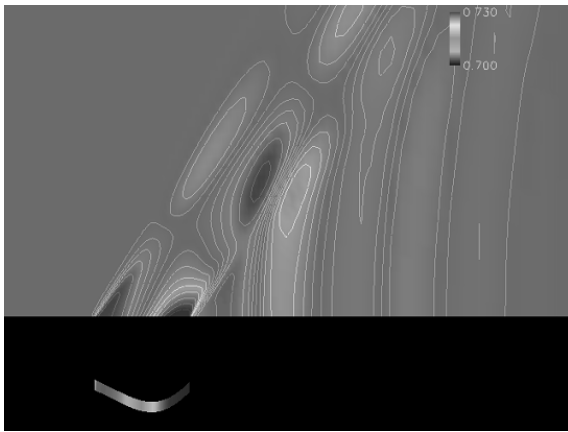
パネル長さ $a(mm)$	171
ポアソン比 ν	0.3
ヤング率 $E (Pa)$	2.05×10^{11}
密度 $\rho (kg/m^3)$	7.84×10^3

に示す．流体は空気とし，海面上の値を用いる．質量比は， $h/a = 0.01$ の時， $\mu = 0.015$ である．

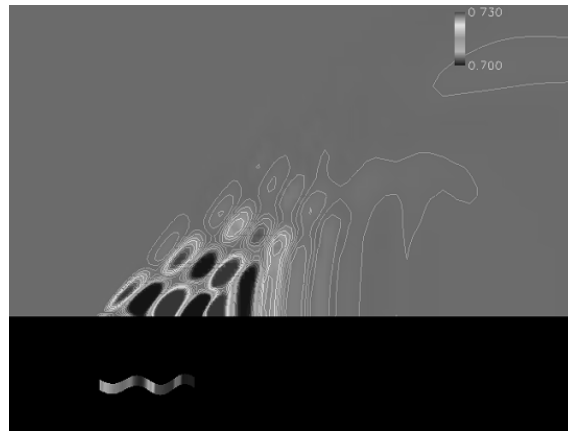
本研究では，板厚 h を変化させて，マッハ数 $M = 1.05 \sim 1.6$ の範囲で，フラッタ限界を求める．また， Re 数を $10^4 \sim 10^7$ の範囲で変化させ， Re 数のフラッタ限界への影響も調べる． Re 数の定義は， $Re = \rho_{\infty} U_{\infty} a / \mu_{\infty}$ である． Re 数が $10^5 \sim 10^7$ に対して乱流計算， $10^4 \sim 10^5$ に対して層流計算を行った．比較のため非粘性計算も行った．

4.4.2 初期流れ場

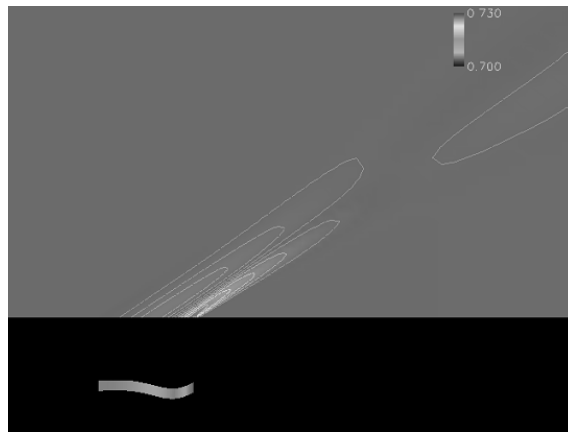
境界層が完全に発達するまで，流体場のみを計算し，その後，連成計算を実行した．図 4.8 に $M = 1.2$ ， $Re = 10^4$ の場合のパネル上面の速度分布を示す．パネル先端から弱い衝撃波が発生し，パネル上面に境界層が発達していることが分かる．この解を初期条件として，連成計算を開始した．パネル上流にある弱い衝撃波や平板上の境界層のため，パネル上面の圧力分布は一様ではなくなる．そのため，連成計算では，パネル上面での圧力



(a) $M=1.2$



(b) $M=1.414$



(c) $M=1.8$

図 4.5: リミットサイクル振動時の圧力場

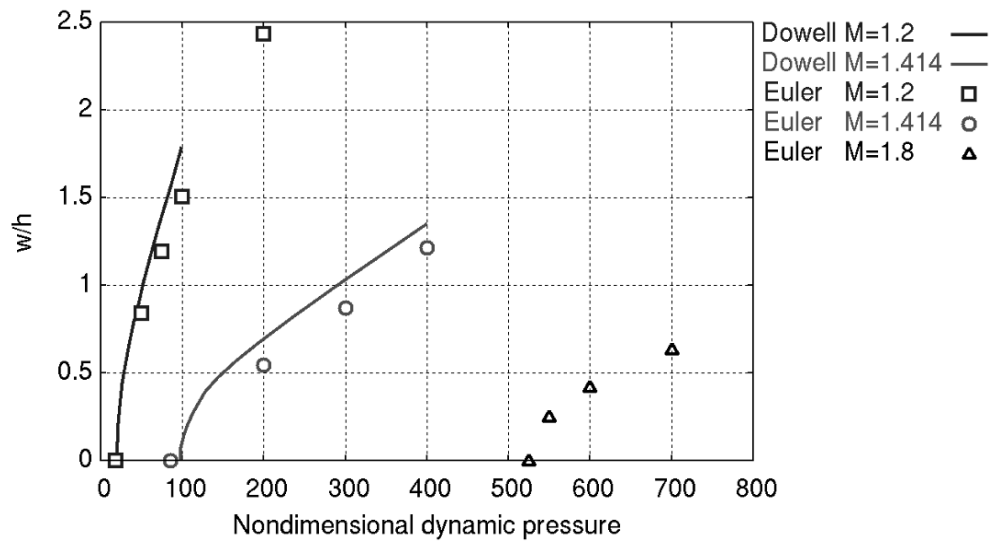


図 4.6: リミットサイクル振動における振幅と無次元動圧の関係

分布の平均値をパネル下面に均等に与えた。

パネル上面の境界層は2つの効果があると考えられる。一つは、境界層の存在による、振動に対するパネル表面圧力の応答変化である。もう一つは、境界層が原因で発生した衝撃波による、パネル上面での主流方向圧力勾配である。パネル上下面の圧力差は、パネルの変形を増大させる。ちなみに、この変形がさらに大きくなると、パネルの非線形性により、パネルの剛性は増大する。

4.4.3 結果

図 4.9 は Re 数をパラメータとした場合の各マッハ数におけるフラッタ限界である。横軸はマッハ数、縦軸はフラッタ限界での板厚 h をパネル長さ a で無次元化したものである。プロットした線より上は安定で、下は不安定である。ほとんどの Re 数において、マッハ数 $M = 1.2 \sim 1.3$ でフラッタ限界は増大する。また、 Re 数が小さいほど、つまり境界層が厚くなるほど安定になり、特に $M = 1.2 \sim 1.35$ の領域でその効果は大きい。また、 Re 数 10^5 で層流と乱流で比較すると、層流の方が安定効果大きい。層流に比べて乱流の方が境界層厚さは大きい。乱流境界層では、壁付近まで速い速度が存在するため、その抑制効果が小さいと思われる。このように、境界層厚さだけでなく、境界層の速度分布もフラッタ限界を決定する要因となる。

以上の結果を実験 [29][110][112] 及び Fung の計算結果 [29] と比較したものを図 4.10 に示す。Fung の計算結果は、線形超音速空気力モデル使用のため、音速付近で発散して

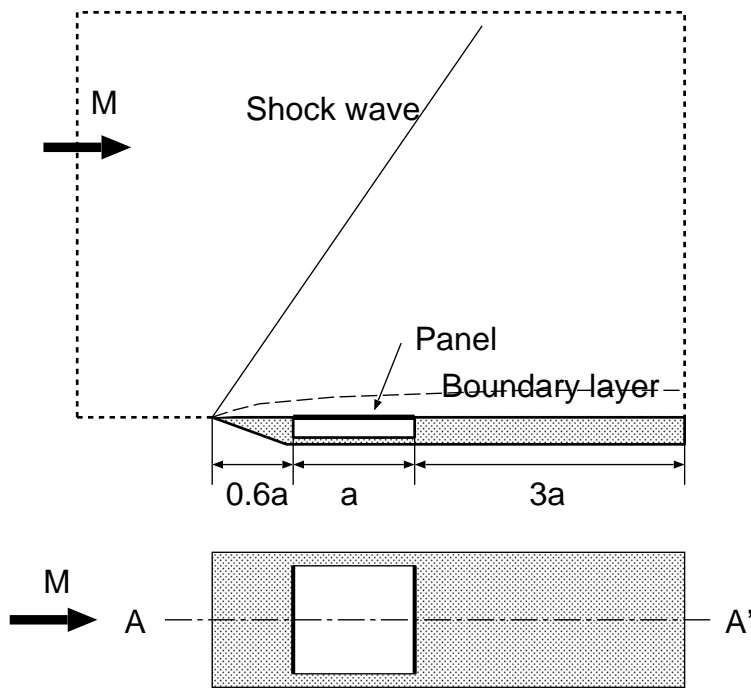


図 4.7: 計算領域

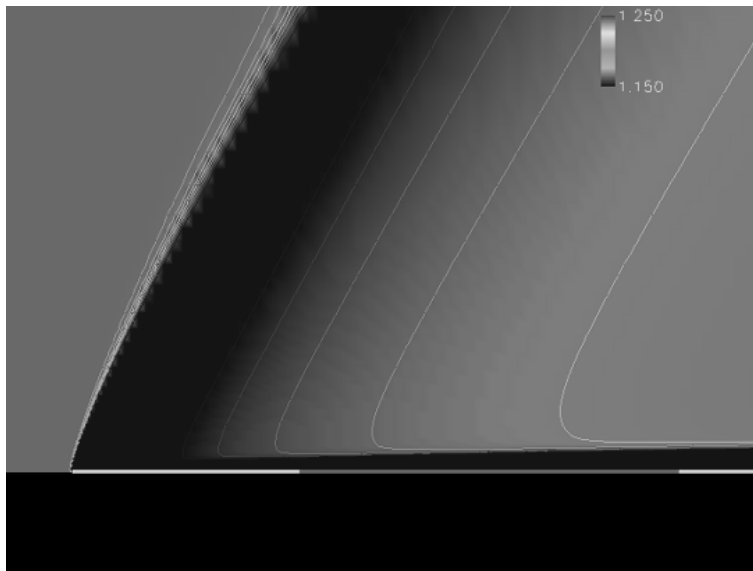


図 4.8: パネル上面の境界層

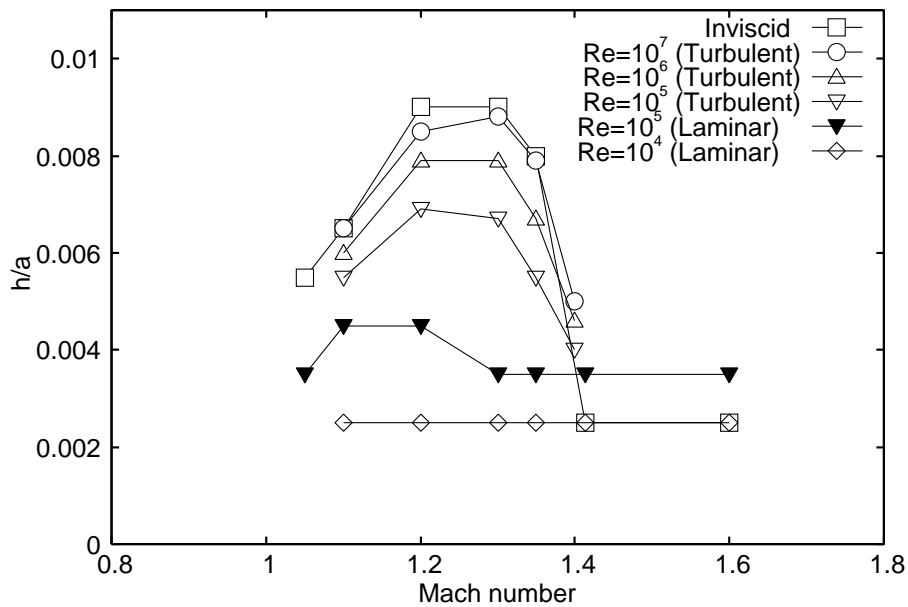


図 4.9: フラッタ限界

いる。

本研究での非粘性計算結果は、Fung の計算結果と、マッハ数が $M=1.35$ 以上で非常に良く一致している。これは、Fung の用いた線形超音速空気力のモデルが通常 $M=1.4$ 以上で有効であることから、納得できる結果である。また、本非粘性計算結果は、マッハ数 1 付近で実験結果と良く一致しており、CFD を用いた流体構造連成計算法が、低超音速領域で有効であることが確かめられた。また、マッハ数 $M = 1.2$ 付近で実験との大きな差が生じているが、マッハ数 $M = 1.2$ 付近で最大値となる定性的な傾向は一致している。

次に、乱流計算結果と実験を比較する。石井らの論文 [110] では、 Re 数を示していないが、同じ風洞を用いた報告書 [111] から、実験の Re 数は、 $3 \times 10^6 \sim 7 \times 10^6$ であると推測される。 Re 数 10^6 及び 10^7 の計算結果は、非粘性計算よりも実験に近い値を示すが、まだ実験結果との差はある。この違いは、実験の誤差や流れの 3 次元性などに起因していると考えられる。

4.4.4 パネル下面圧力の影響

以上の計算では、パネル上面の圧力の平均をパネル下面に与えていたが、ここではパネル下面に一様流の静圧を与え、パネル下面の圧力の影響を調べる。マッハ数は $M = 1.2$ とする。

図 4.11 にパネル下面に上面圧力の平均値を与えた場合と、一様流静圧を与えた場合

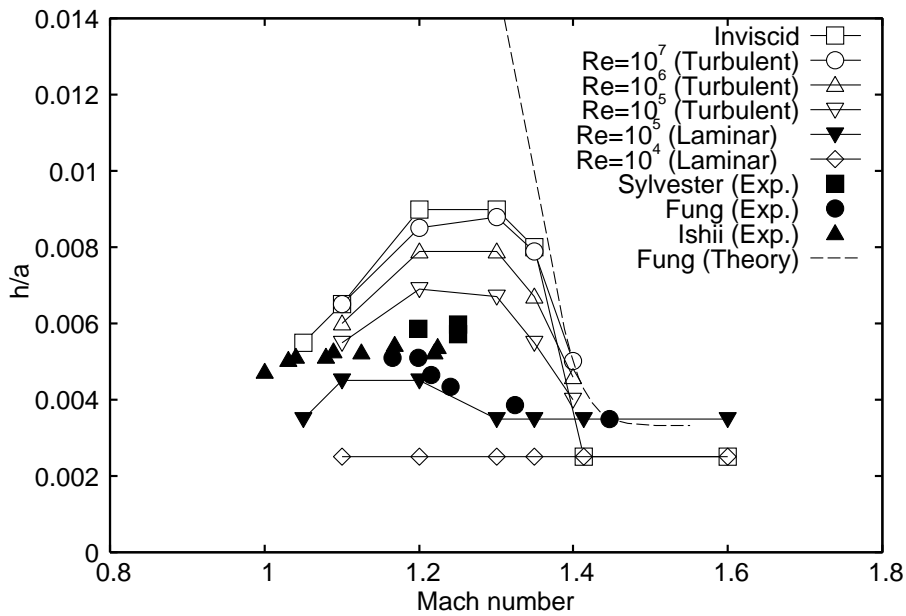


図 4.10: フラッタ限界の実験との比較

の各 Re 数に対するフラッタ限界を示す． Re 数が $10^5 \sim 10^7$ は乱流計算， 10^4 は層流計算の結果である． Re 数が小さく境界層が厚くなるほど，平板前縁での圧力上昇が大きくなるため，下面の圧力の影響が大きくなる．そのとき，下面に一樣流静圧を与えた方が，フラッタ限界が下がり安定化する．これは，上面と下面の圧力差により，パネルが大きく変形し，構造の非線形効果により，見かけの剛性が増大するためである．しかし，その差は大きくても Re 数 10^4 で $h/a = 0.001$ 程度であり，今回の計算条件では，境界層自体の効果の方が支配的であることが分かった．

4.4.5 3次元パネルフラッタ

本計算法をさらに確固たるものにするために，3次元パネルフラッタ問題を計算し，実験と比較する．Muhlsteinらの実験 [113] では，乱流境界層の厚さを制御して，その影響を調べている．そこでは，流れの物理量，パネル特性値，境界層厚さ等が全て示されており，本計算はそれと同じ条件で行った．その際，実験と同じ境界層厚さがパネル上に再現できるように，平板の前縁の位置を調節した．

図 4.12 にパネルを横から見た図と，上から見た図を示す．パネル上面の境界層厚さを δ とし，パネルの主流方向長さを a ，スパン方向長さを b とする．パネルは全ての辺を固定支持されている．石井らのパネル両サイドを自由端とした2次元パネルフラッタの実

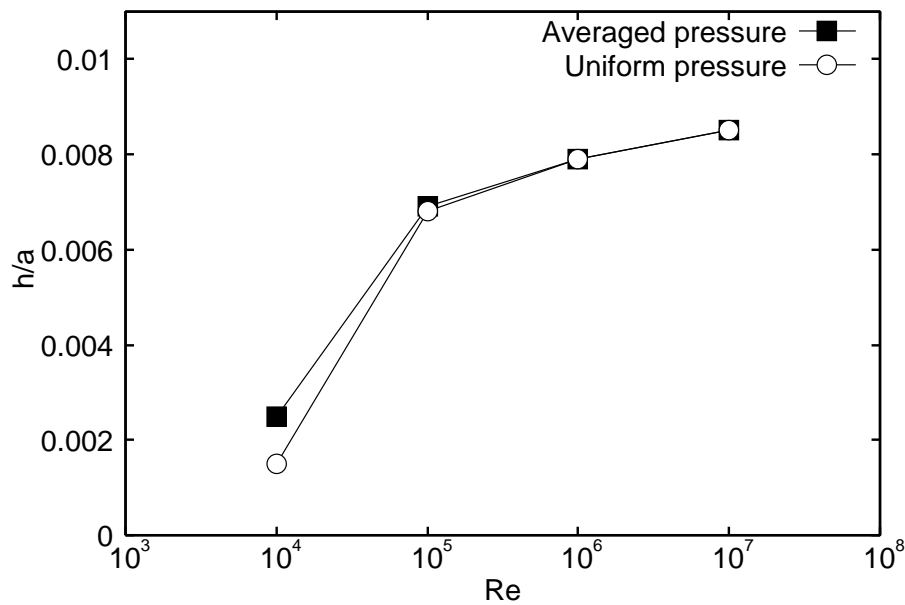


図 4.11: 下面圧力の影響

験と異なり，Muhlstein らの実験は全ての辺を固定した 3 次元問題である．また，石井らの実験ではスティングで支持された平板にパネルを設置しているが，Muhlstein らは風洞壁にパネルを取り付けているので，境界層は厚くなる．さらに，Muhlstein らは吸い込みにより境界層厚さを制御して，そのフラッタ限界に対する影響を調べた．

パネルのアスペクト比 $a/b = 0.5$ ，マッハ数 $M = 1.2$ で，境界層厚さ δ とパネル長さ a の比 δ/a を $0 \sim 0.1$ で変化させた場合を考える．フラッタ限界の計算値と実験値との比較を図 4.13 に示す．縦軸は無次元動圧 λ (式 (4.3)) である．また，横軸の $\delta/a = 0$ での結果は，Euler 計算の結果である．この図には，4.4.3 節で議論した 2 次元パネルフラッタの実験結果と計算結果や、境界層厚さを仮定して微小擾乱方程式を用いた，Dowell の計算結果 [30] も参考のため示されている．3 次元問題でも，2 次元と同様，境界層を厚くするとフラッタ動圧が大きくなる．さらに，3 次元では定量的にも実験と良く一致している．一方，2 次元問題での比較では，実験と計算で大きな差が生じている．しかし，Dowell の計算結果は本計算結果に近い．このように，3 次元の実験は計算値と一致し，境界層の効果でフラッタが抑制されることを示すことができた．しかし，2 次元実験データは，自由端の影響が大きく，実際は 3 次元的な影響を含む可能性がある．

さらに，マッハ数 $M = 1.1 \sim 1.4$ の範囲で，マッハ数の依存性も調査した．実験データは同様に Muhlstein らの実験 [113] である．図 4.14 にフラッタ限界動圧を示す．その図で，本計算結果，Dowell[30] の計算結果，実験データを比較する．境界層厚さ $\delta/a = 0$ (図

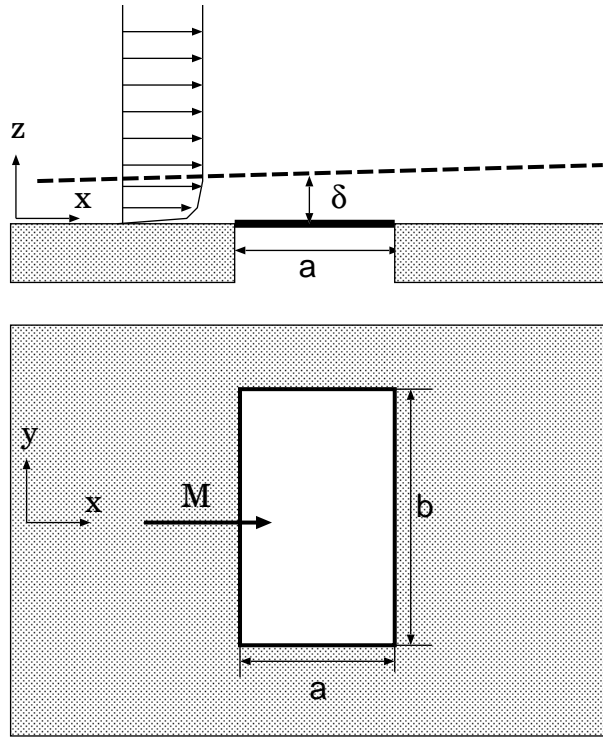


図 4.12: 3次元パネルフラッタ

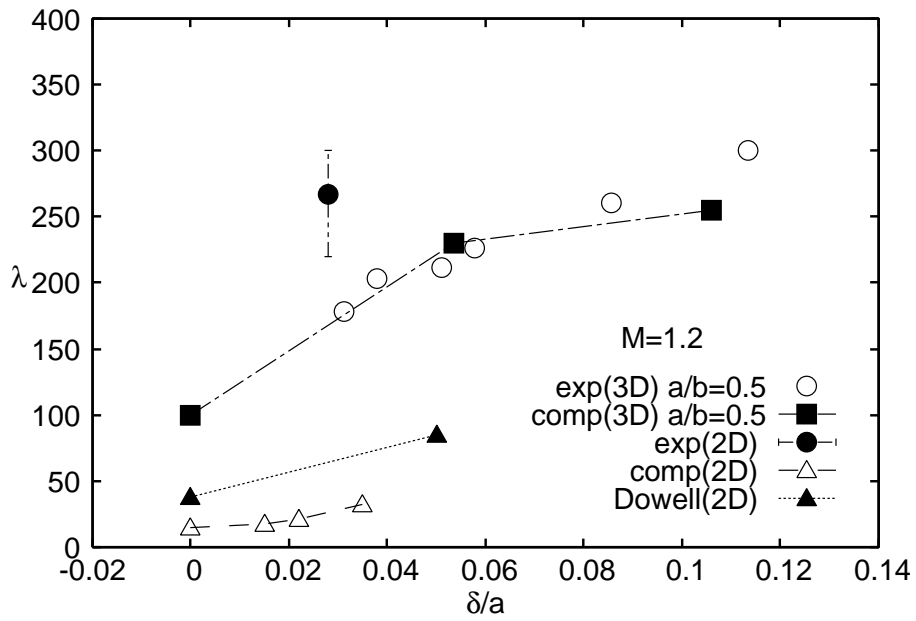


図 4.13: フラッタ限界に対する乱流境界層厚さの影響

4.14(a)) の実験データは、異なる境界層厚さ $0 < \delta/a \leq 0.1$ で数回実験を行い、それらのデータから外挿して得た境界層厚さ $\delta = 0$ でのフラッタ動圧である。この結果と比較する計算結果として、本計算では非粘性計算を、Dowell は線形ポテンシャル方程式を用いた。一方、境界層厚さ $\delta/a = 0.1$ の場合 (図 4.14(b)) は、本計算は乱流計算であり、Dowell は境界層厚さを仮定して微小擾乱方程式を用いた計算である。 $\delta/a = 0$ の場合、本計算結果はマッハ数を大きくすると、フラッタ限界が大きくなり、安定域が増大する (図 4.14(a))。この傾向は、Dowell の結果と似ている。そして、本計算結果を実験と比較すると、同じ傾向を示しているが、大きな値を示している。そして、マッハ数 $M = 1.4$ で最も差が大きい。一方、 $\delta/a = 0.1$ の結果 (図 4.14(b)) では、多少実験値よりも、低く予測しているが、実験と良く一致している。本計算では、構造減衰を考慮していないので、低く評価されるのは妥当である。また、Dowell の結果では、 $\delta/a = 0$ の結果と同様に、 $M = 1.4$ で急に大きくなっている。Dowell は粘性の影響を考慮しておらず、 $\delta/a = 0$ と同じ傾向が $\delta/a = 0.1$ でも表れていると考えられる。

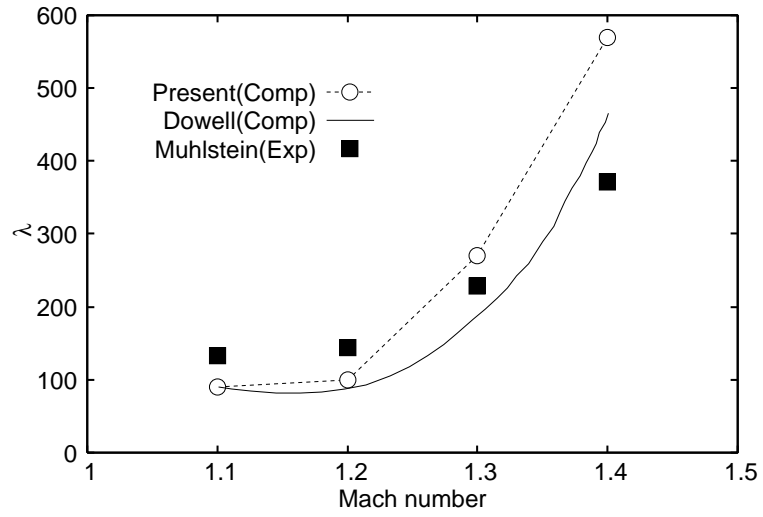
図 4.15 にフラッタ振動数を示す。縦軸は、無次元振動数で $K_f = \omega_f(\rho_s(ha^4/D))^{1/2}$ である。振動数 K_f はフラッタが起きた時の振動数であり、図 4.14 に示したフラッタ動圧に対応する。本計算結果を実験と比較すると、 $\delta/a = 0$ では差が大きい (図 4.14(a))、 $\delta/a = 0.1$ は非常に良い一致を示す (図 4.14(b))。

以上より、本計算結果で境界層を考慮することによって、実験と良く一致する結果が得られた。フラッタの実験と計算との比較で、これほど良く一致する結果はあまりない。この実験データは、乱流計算する時の検証用データとして優れていると考えられる。

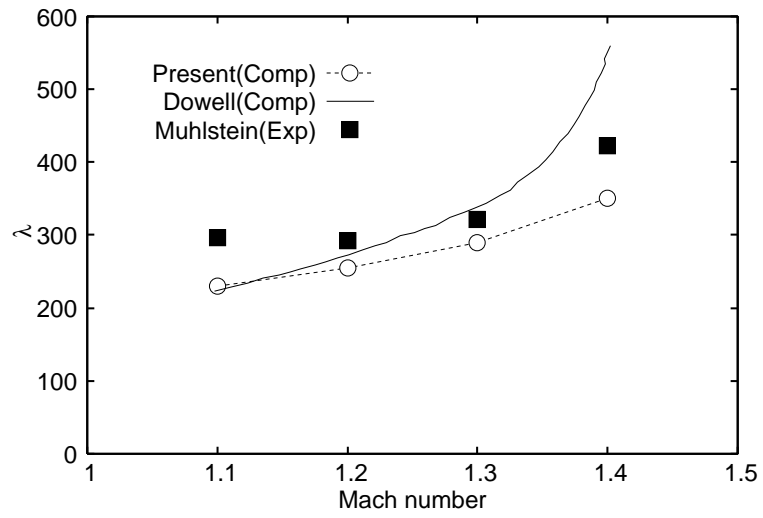
また、本計算では境界層厚さ $\delta/a = 0$ に対して非粘性計算を、境界層厚さ $\delta/a = 0.1$ に対して乱流計算を適用した。これを比較すると、特性が大きく異なり、乱流計算の方が実験に良く一致している。境界層厚さを 0 に外挿して得たフラッタ限界は、非粘性計算の解に一致するとは限らない。ちなみに、本計算では、乱流計算結果を境界層厚さ 0 に外挿した場合、非粘性計算結果と同じにならない (図 4.13)。

また、図 4.16 は、非粘性計算結果と乱流計算結果をまとめてプロットしたものである。図 4.16(a) に示されているように、マッハ数 $M = 1.1 \sim 1.3$ では境界層があることによって、フラッタ限界動圧が上昇し、安定化する。ただし、マッハ数 $M = 1.4$ だけ、境界層厚さ $\delta/a = 0$ と $\delta/a = 0.1$ のフラッタ限界動圧が逆転している。つまり、図 4.13 及び Muhlstein らの実験 [113] が示す様に、境界層が厚いほど抑制される効果があるが、境界層が存在することで非粘性計算の結果よりも抑制されているとは限らない。そもそも、境界層厚さ 0 に外挿されたデータは、乱流境界層を厳密に考慮することができなかった時代に、ポテンシャル流の計算結果と比較するために使われた [114]。その研究報告 [114] によると、

$M = 1.1 \sim 1.3$ では、外挿された実験データと解析解は良い一致を示すが、 $M = 1.4$ で大きな差が存在する。そして、 $M = 1.4$ では実験データの境界層厚さを小さくすればするほど、解析結果との差が大きくなる逆の現象が起きていると述べている。この現象は他のマッハ数では表れておらず、不可解な現象だとされた。本計算結果も同じ現象が現れており、境界層厚さを 0 に外挿して得たフラッタ限界は、非粘性計算の解に一致しない可能性がある。

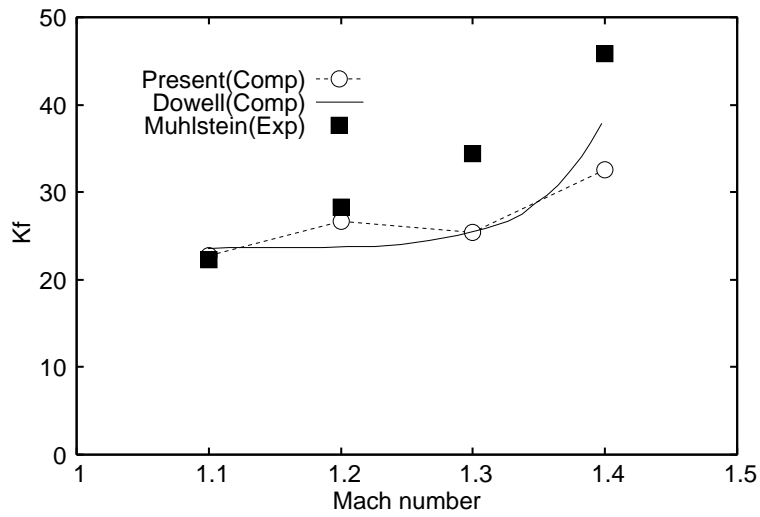


(a) $\delta/a = 0$

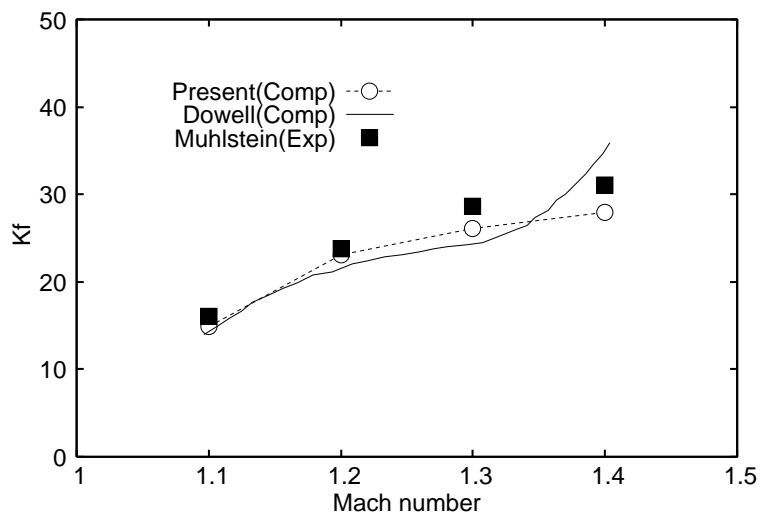


(b) $\delta/a = 0.1$

図 4.14: フラッタ限界動圧

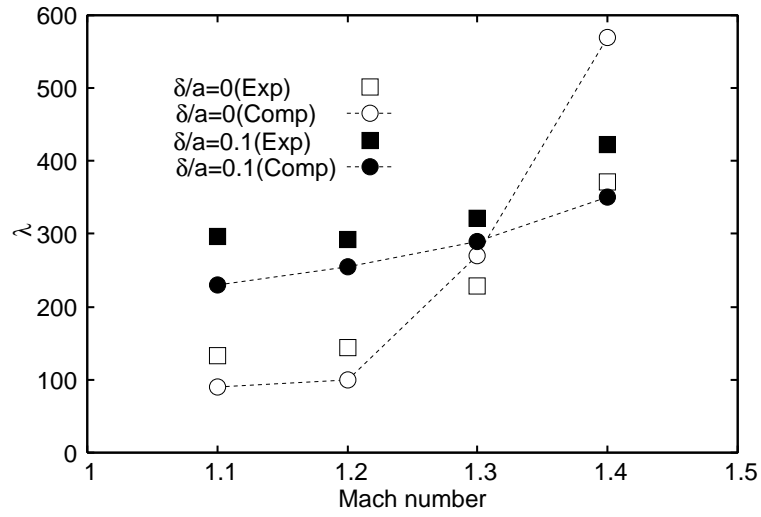


(a) $\delta/a = 0$

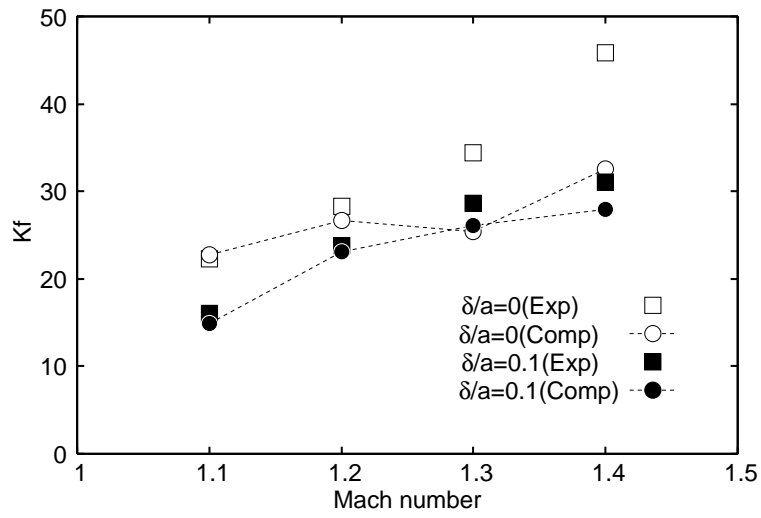


(b) $\delta/a = 0.1$

図 4.15: フラッタ振動数



(a) フラッタ限界動圧



(b) フラッタ振動数

図 4.16: 非粘性計算と乱流計算の比較

4.5 まとめ

CFD を用いた流体と構造の連成計算を行い、フラッタ限界動圧とリミットサイクル振動に関して計算コードの検証を行った。また、この計算コードを用いて、境界層のフラッタ現象への効果を調べた。得られた結果をまとめると、以下ようになる。

- 非粘性計算で、フラッタ限界とリミットサイクル振動を解析した。線形ポテンシャル理論を用いた計算結果と比較し、良い一致を得られ、本計算法の妥当性が確認された。本研究での非粘性計算結果は、他の計算結果よりも実験に近い値が得られ、CFD を用いた流体構造連成計算法の有効性が示された。
- 粘性計算を行い、境界層のフラッタ限界に与える影響を調べた。境界層が厚くなると、フラッタ発生が抑制される。特に、 $M=1.2 \sim 1.35$ の範囲において、境界層の効果によるフラッタ限界の大きな変化が存在する。
- 今回の計算条件下では、下面圧力のフラッタ限界への影響は、せいぜい $h/a = 0.001$ 程度である。下面圧力の影響よりも、上面での境界層の影響の方が大きい。
- 2次元問題では不十分であった実験と計算との定量的一致が、3次元問題では得られた。2次元問題を模擬した実験は、自由端の影響が大きく、3次元的な影響を含んでいる可能性がある。
- 3次元問題でマッハ数効果を解析し、実験と良い一致を得た。そして、マッハ数 $M = 1.4$ ではフラッタ限界が非粘性流解析と乱流解析で逆転し、乱流計算の方が不安定になる。境界層厚さを 0 に外挿して得たフラッタ限界は、非粘性計算の解に一致するとは限らない。

第5章 曲面パネルの解析

5.1 はじめに

本章の目的は、曲率半径が板厚に比べてかなり大きい曲面パネルに対して、そのフラッタ特性を明らかにすることである。平板のフラッタ限界は、マッハ数、無次元動圧（一様流動圧とパネル剛性の比）、質量比、パネルのアスペクト比などにより決定される [18][20]。本研究では、さらに曲率というパラメータが加わる。

これまでの研究は、超音速空気力モデルを使用しているため、音速に近い超音速領域（低超音速領域）の解析はない。本章では、CFD を用いた流体構造連成解析を用いて曲面パネルの解析をする。

コード検証として、超音速の領域で、超音速空気力モデルを用いた解析と比較する。その後、低超音速領域でのフラッタ特性を調べる。さらに、実用的な解析例として、アクセスパネルの解析を行う。

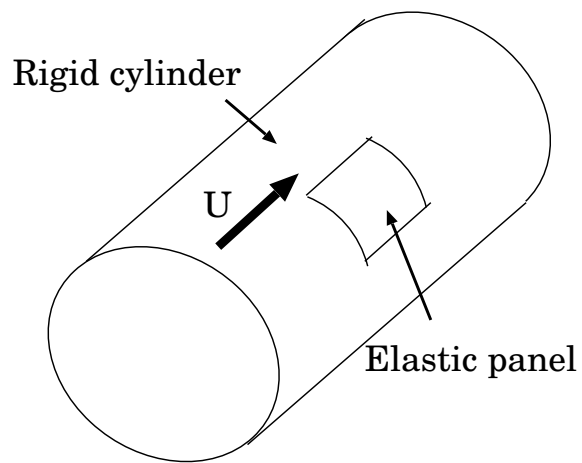
5.2 解析対象

本研究では、剛体である円筒の一部分に弾性体のパネルがある場合を考える (図 5.1(a))。主流方向は円筒の軸方向とし、円筒内部の圧力は一様流の静圧とする。

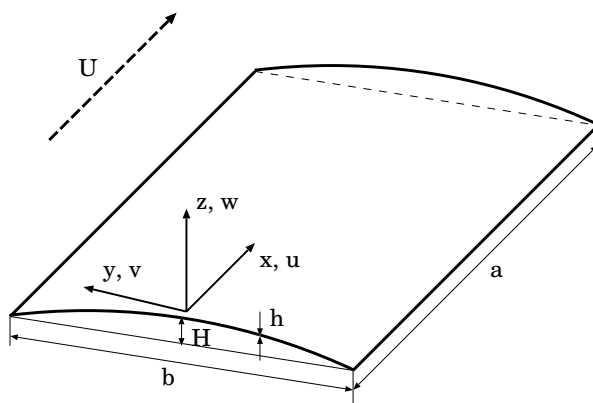
パネル寸法は、主流方向長さを a 、スパン方向の幅を b 、板厚を h とする (図 5.1(b))。スパン方向に曲率が付いており、湾曲による最大高さを H とする。曲率半径を R とすると、以下の関係式が成り立つ。

$$R = \frac{4H^2 + b^2}{8H} \quad (5.1)$$

用いる座標系は、流れ方向に x 、スパン方向に y 、高さ方向に z とし、各方向のパネル変位を、それぞれ u , v , w と定義する (図 5.1(b))。



(a) 弾性パネル



(b) パネル形状・座標系

図 5.1: 曲面パネル

5.3 曲面パネルフラッタの特性

超音速空気力モデルでは，次式で表面圧力を与える．

$$p - p_\infty = \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \frac{1}{U_\infty} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \quad (5.2)$$

上式と曲面パネルの方程式を用いると，フラッタ限界動圧は，以下に示す特性量で決定される [31]．

$$\lambda_M = \lambda_M(\mu/F_M, H/h, a/b) \quad (5.3)$$

ここで，

$$\lambda = \frac{\rho_\infty U_\infty^2 a^3}{D} \quad (5.4)$$

$$\lambda_M = \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \lambda \quad (5.5)$$

$$\mu = \frac{\rho_\infty a}{\rho_s h} \quad (5.6)$$

$$F_M = \frac{(M_\infty^2 - 1)^{2.5}}{(M_\infty^2 - 2)^2} \quad (5.7)$$

である． λ は無次元動圧で，動圧と剛性の比を表し， λ_M は，超音速領域で使用される無次元動圧である． μ は，質量比， $\rho_\infty, U_\infty, M_\infty$ は，一様流密度，速度，マッハ数， ρ_s, D は，板の密度，曲げ剛性である．ちなみに，曲げ剛性 D は， $Eh^3/12(1 - \nu^2)$ で定義され， E はヤング率， ν はポアソン比である．

$M_\infty \gg 1$ とすると， $\mu/F_M \rightarrow \mu/M_\infty$ となるため， μ/F_M の代わりに μ/M_∞ が使用されている論文 [31] もあるが，本研究では，厳密性を維持するために， μ/F_M を用いる．

5.4 計算方法

5.4.1 流体計算法

本解析コードにおける流体の支配方程式は，移動格子に基づく一般座標系の Euler 方程式 (式 (2.26) 及び 2.1.3 参照) で，これを理想気体の状態方程式とともに数値的に解く．時間発展計算には，Dual Time Stepping 法を組み込んだ二次精度 LU-SGS 法 (3.3.6.1 節参照) を採用する．

非粘性流束の計算では，セル境界での解ベクトルを Van Albada の limiter を用いた MUSCL 法 (3.3.2 節参照) により 3 次精度で求め，Roe の近似 Riemann 解法 (3.3.3 節参照) から数値流束を決定している．

格子は、 x, y, z の各方向にそれぞれ 100 点、90 点、95 点用いた。パネル上には、 x, y の各方向に 30 点ずつある。

5.4.2 構造計算法

構造計算には有限要素法を用いた。曲面パネルが外力を支える仕組みでは、平板とは異なり、板の曲げと面内力の両方を考慮する必要がある。そのため、長方形曲げ要素と膜要素をそれぞれ製作し、それらを重ね合わせて平面シェル要素 [94] を得る (3.6.3 節参照)。

また動的解析する際に、モード解析を用いて効率的に計算する。本計算では、20 までのモードを使用している。

この構造解析コードで、曲面パネルの固有振動数を求め、厳密解 [109] と比較した。 $a/b = 1, a/R = 0.2, a/h = 100$ の場合に対して、 29×29 要素で計算すると、誤差は最大 0.1% となり、十分な精度を持っていると言える (3.7.5 節参照)。本研究の解析は全て 29×29 要素を用いている。

5.4.3 連成計算法

本計算では、流体と構造をともに陰解法で反復計算する強連成法を用いる (3.7.1 節参照)。

また、構造変位に合わせて格子を移動・変形させる。具体的には、物体表面近くの格子は構造変位と同じだけ移動させ、それより外側にある格子は、外部境界との間で 3 次関数 (式 (3.176)) を用いて滑らかに分布させる。

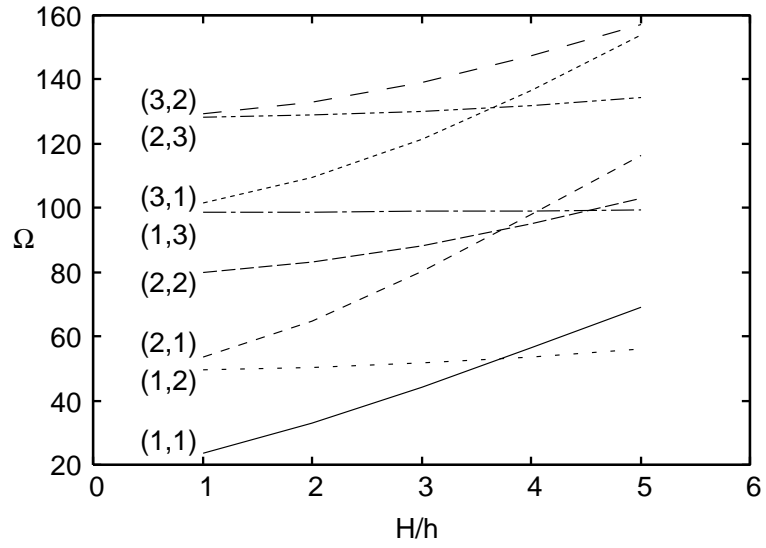
5.5 結果及び考察

5.5.1 検証

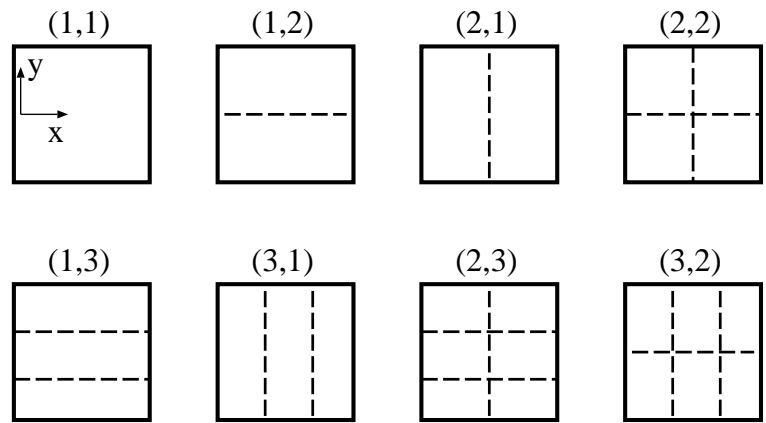
$a/b = 1, \mu/F_M = 0.1, M_\infty = 3, a/h = 1000$ の場合に対して、パネル周囲境界が単純支持された場合のフラッタ限界動圧 λ_M を求める。ここで、曲率は $H/h = 1 \sim 5$ のように変化させる。

単純支持では、面内零応力の境界条件から、

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = N_x = v = 0 \quad (x = 0, a) \quad (5.8)$$



(a) 固有振動数



(b) 固有モード

図 5.2: 固有振動数の曲率による変化

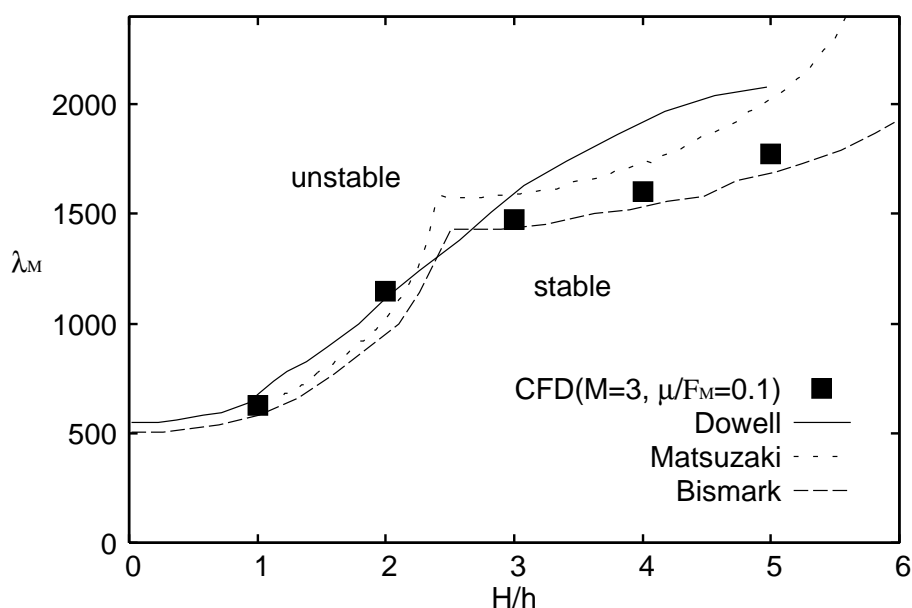


図 5.3: フラッタ限界動圧

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = N_y = u = 0 \quad (y = -b/2, b/2) \quad (5.9)$$

となる．ここで， N_x ， N_y は， x 方向， y 方向の合応力である．

この条件のもとに構造解析を行い，固有振動数 (図 5.2(a)) と固有モード (図 5.2(b)) を求めた．無次元固有振動数 Ω は，有次元振動数 ω から， $\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho_s/D}$ と表される．図 5.2(b) において，破線は固有モードの節を示しており，半波長の数が主流方向 (x 方向) に m 個，スパン方向 (y 方向) に n 個ある時は，固有モードを (m,n) としている．

基本的には，曲率が増大すると剛性が大きくなり，その結果，固有振動数は大きくなるが，その変化の仕方はモードによって異なる (図 5.2(a))．(1,2) や (1,3) 等の y 方向モードは，曲率の影響が小さい．これに対して， x 方向モードは大きく変化する．その結果，曲率が大きくなると，各モードの順序が入れ替わる．

無次元動圧 λ_M を 50 ずつ変化させて計算し，フラッタが発生する動圧 (フラッタ限界動圧) を求めた．フラッタ解析では，計算の時間刻み Δt が計算精度上，重要となる．本計算では，時間刻みを半分にしても，結果が変わらないことを確認して，解析を行った．

曲率の大きいパネルでは，高次のモードでフラッタが起こるため，低次モードから比較的高次のモードまで，初期擾乱を与えた．具体的には，初期条件として，1 次から 10 次モードまでに微小な初速度を与えた．

本計算結果と，Dowell[31]，松崎 [33]，Bismark[35] の計算結果と比較する (図 5.3)．CFD を用いた本計算結果は，曲率を大きくするほど，フラッタ限界動圧が大きくなり，安

定化する．この傾向は，他者の計算結果とも一致している．

さらに，曲面フラッタでは，フラッタ振動モードが曲率によって急激に変化し，フラッタの特性が変化する現象が起こる．図 5.3 の結果では， $H/h = 2.5$ あたりで高次モードへ遷移し，傾きが変化している．これに関して，本計算は，松崎，Bismark の結果と同じ傾向を示しており，本計算法の妥当性が確認できた．

また，CFD の代わりに空気力モデル(式 (5.2)) を用いた計算も行ったが，同じ結果が得られた．このことから，本計算結果と他者の計算結果との差は，空気力計算法の違いではなく，構造計算法の違いであると考えられる．本計算では， 29×29 要素用い，計 20 次までのモードを使用しているが，松崎の計算では，変位を主流方向に 6 次，スパン方向に 2 次のフーリエ級数で近似しており，Bismark の計算では， 4×4 要素の有限要素法で近似している．

5.5.2 質量比の影響

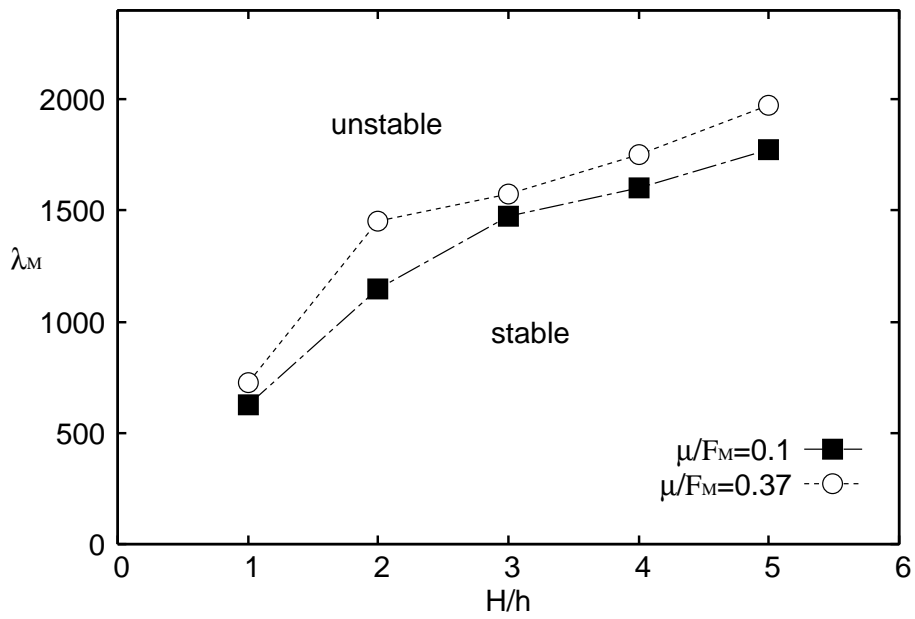
質量比 μ を変化させて，その影響を調べた．図 5.4(a) に， $M_\infty = 3$ ， $\mu/F_M = 0.1$ 及び 0.37 でのフラッタ限界動圧を示す．質量比が大きくなると，安定になり，フラッタ限界動圧が大きくなる．また，高次モードへ遷移する曲率の値も異なってくる． $\mu/F_M = 0.1$ に比べて 0.37 の方が小さい曲率で遷移している．このことは，図 5.4(b) のフラッタ振動数を見ると，より良く理解できる． $\mu/F_M = 0.1$ の場合は， $H/h = 3$ で， $\mu/F_M = 0.37$ では， $H/h = 2$ で高次のモードに遷移している．

図 5.4(b) には，固有振動数も一緒に示している．曲率が大きくなるほど，固有振動数は大きくなり，フラッタ振動数も，同様に大きくなる．遷移する場所以外では，フラッタ振動数は，固有振動数と同じ傾きで大きくなる．

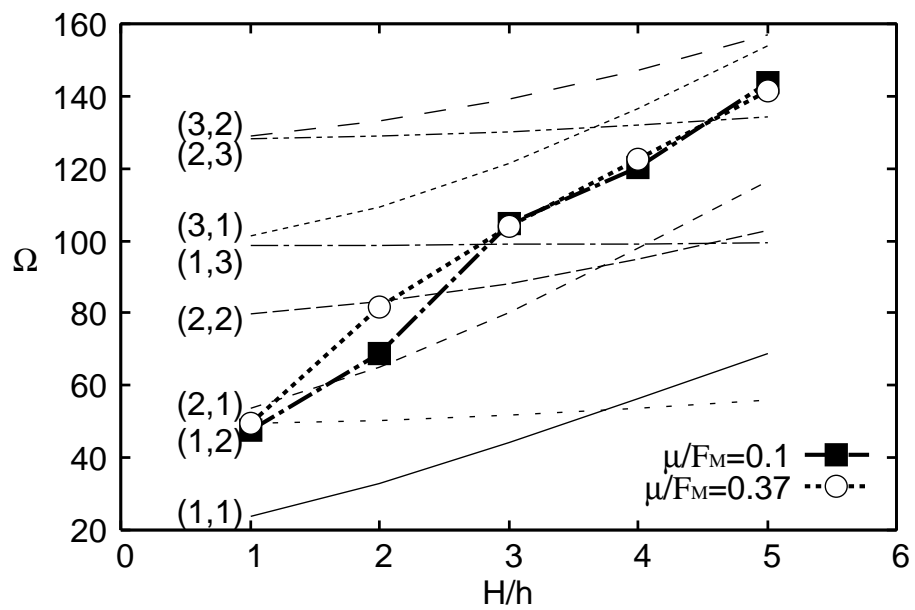
5.5.3 低超音速領域での特性

一様流マッハ数 $M_\infty = 1.2$ ，質量比 $\mu = 0.1$ の場合において，曲率を $H/h = 1 \sim 5$ のように変化させて，フラッタ限界動圧への影響を調べた．

図 5.5(a) に， $M_\infty = 1.2$ と 3 の比較を示す．比較のため，縦軸は超音速で用いられる無次元動圧 λ_M としている． $M_\infty = 1.2$ では，遷音速領域特有の不安定性により，フラッタ限界動圧が下がる．一方，曲率の影響は， $M_\infty = 3$ の場合と同様に，曲率が大きくなるほど安定化する．ただし，高次モードへの遷移は， $M_\infty = 1.2$ では，より大きい曲率で起こる．

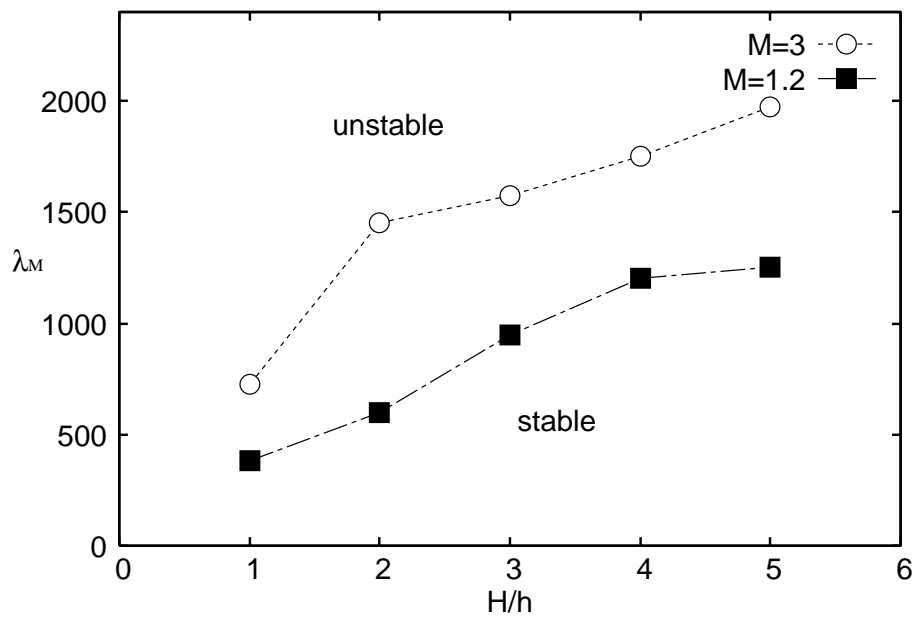


(a) フラッタ限界動圧

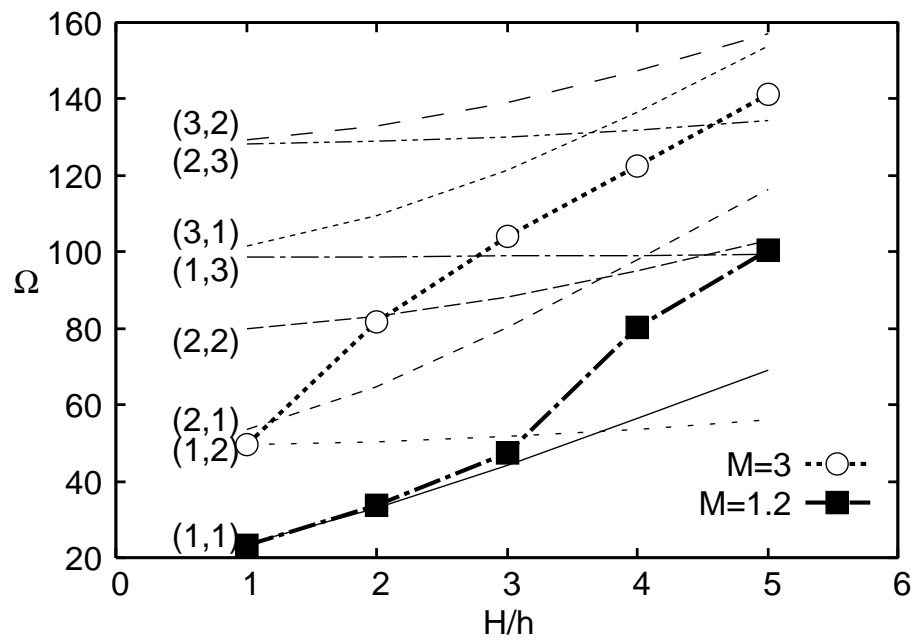


(b) フラッタ振動数

図 5.4: 質量比の影響 ($M_\infty = 3$)



(a) フラッタ限界動圧



(b) フラッタ振動数

図 5.5: $M_\infty = 1.2$ でのフラッタ特性

図 5.5(b) に、フラッタ振動数の比較を示す。平板の場合は、 $M_\infty = 1.2$ では、1 次モードが支配的なフラッタとなる [18][22]。曲面パネルの場合においても、曲率が小さい時は、モード (1,1) で振動し、平板と同じ特性を示す。しかし、 $H/h \geq 4$ では、高次のモードと連成し、周波数も増大し、平板とは異なる特性が現れる。

図 5.6 に、 $M_\infty = 1.2$ 、 $H/h = 1$ 及び 5 でのフラッタ振動モードを示す。等高線は、圧力の分布を表している。 $H/h = 1$ の場合は、モード (1,1) で振動する。図 5.6(a) は、上方に変形した時を示している。上流側は、圧縮波ができるため、圧力が増大し、下流側は、膨張波により圧力が減少する。一方、図 5.6(b) の $H/h = 5$ では、モード (2,1) と (3,1) の連成モードで振動し、下流側で大きく変形する。本計算では、初期擾乱として、(1,2) や (1,3) 等のスパン方向のモードも与えたが、それらはすぐに減衰した。発達するモードは、(1,1)、(2,1)、(3,1) 等の主流方向のモードのみである。

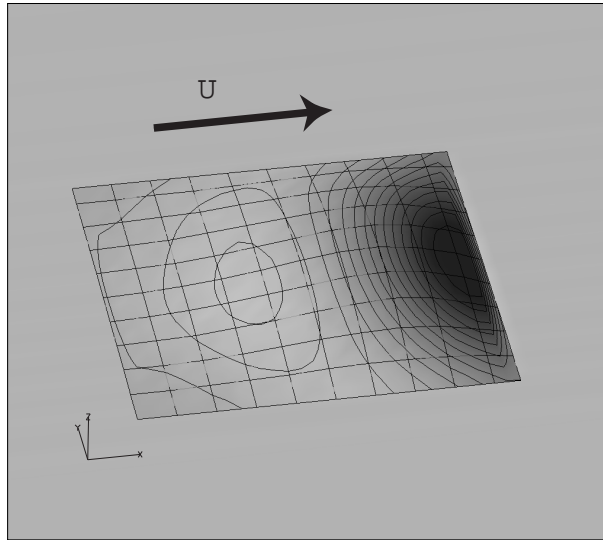
これまでは、超音速領域で用いられる動圧 λ_M で比較したが、動圧 λ で比較すると、マッハ数の影響がよく分かる。図 5.7 は、 $\mu = 0.1$ 、 $H/h = 5$ の場合のフラッタ限界動圧 λ である。図中の線は、質量比の効果を見捨て、 μ/F_M を一定とし、 $M_\infty = 3$ のフラッタ限界動圧 λ_M と式 (5.6) から求めたものである。音速からある程度離れた超音速領域では、この理論が成り立つが、音速付近では、線形超音速理論が適用できない。CFD による結果で、音速付近を補うと、音速付近からのフラッタ特性を見ることが出来る。音速付近では、遷音速領域特有の不安定性により、動圧 λ が小さい値を示すことが分かる。

5.5.4 アクセスポネルの特性

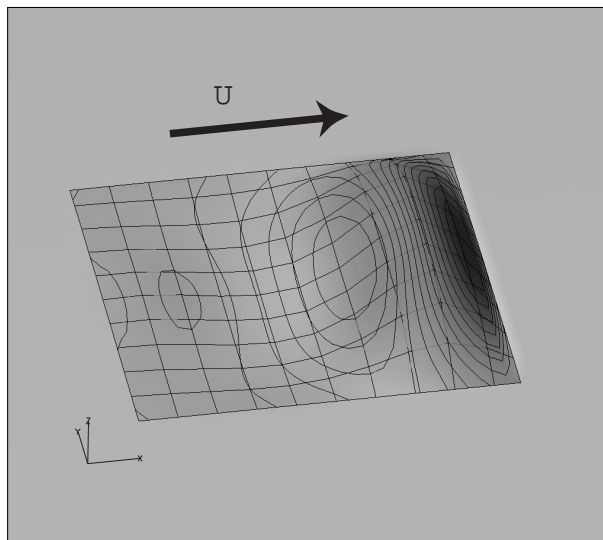
航空機には、アクセスポネル（点検用のドア）が多く存在する。ここでは、それを模擬した境界条件を用いて、フラッタ解析を行う。

図 5.8 に、その境界条件を示す。前述した計算と同様に、スパン方向に曲率がある場合を考える。リンク機構を伴う固定部を固定端とし、軸にして扉が開くヒンジ部を単純支持端とする。つまり、パネル四辺の境界条件として、上流側を固定端 (A)、スパン方向の一端を単純支持端 (B)、残りの二つの端を自由境界 (C,D) とする。

$M_\infty = 1.2$ 及び 3 の時の、フラッタ限界動圧 λ_M を計算した (図 5.9(a))。全周を単純支持した結果 (図 5.5) よりも、かなり不安定で、限界動圧は減少する。 $H/h = 5$ の場合、 $M_\infty = 3$ では、約 1/4 に、 $M_\infty = 1.2$ では、約 1/3 になる。このように、境界条件により、フラッタ境界は大きく変化する。さらに、全周単純支持の場合は、マッハ数により大きな違いが見られた (図 5.5(a)) が、アクセスポネルの場合では、その差は小さい (図 5.9(a))。このように、マッハ数の影響も、境界条件によって変化する。



(a) $H/h = 1$



(b) $H/h = 5$

図 5.6: 振動モード及び表面圧力分布 ($M_\infty = 1.2$)

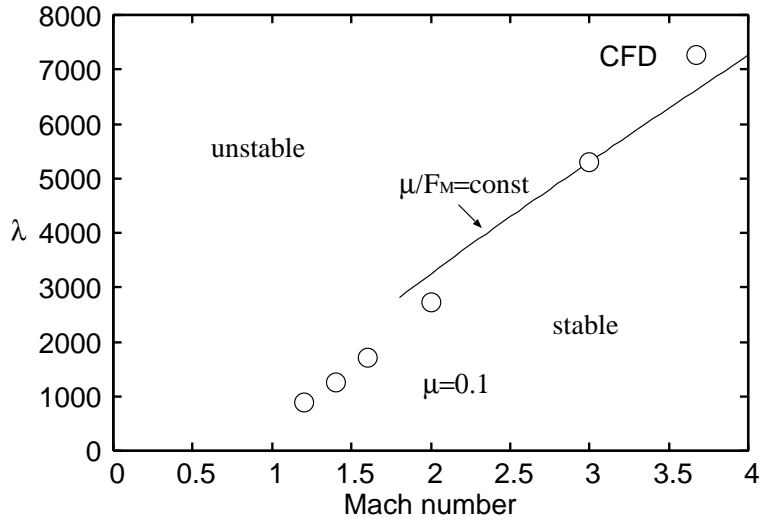


図 5.7: マッハ数の影響 ($H/h = 5$)

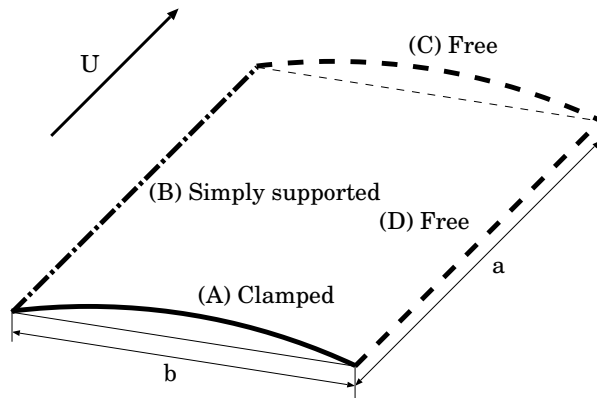
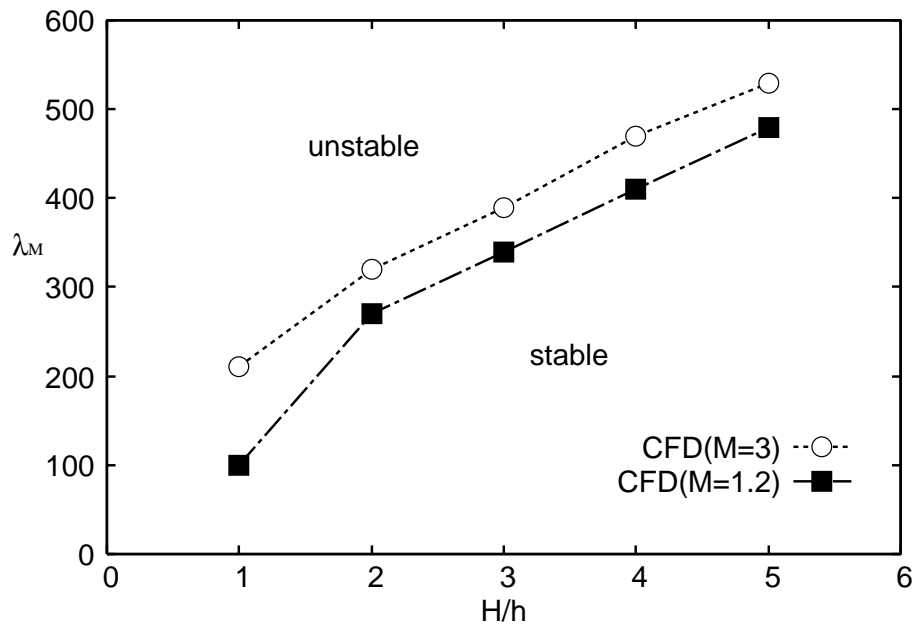
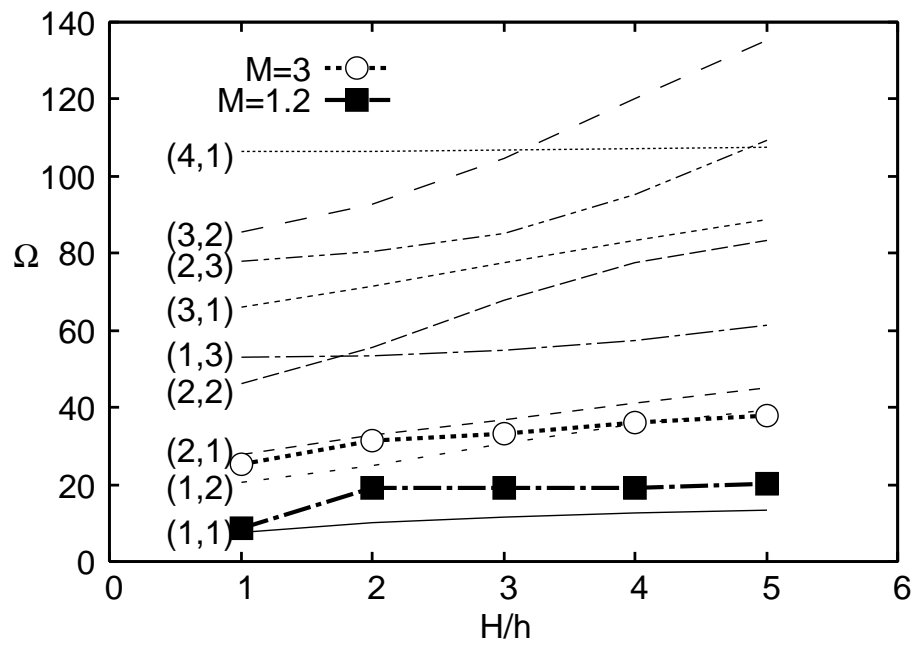


図 5.8: アクセスパネルの境界条件



(a) フラッタ限界動圧

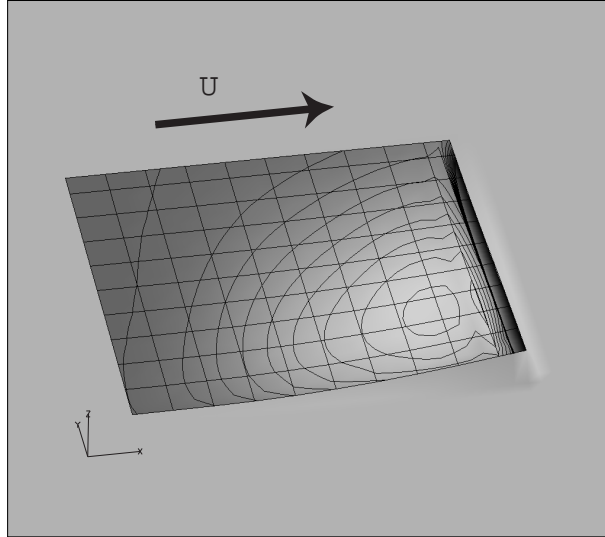


(b) フラッタ振動数

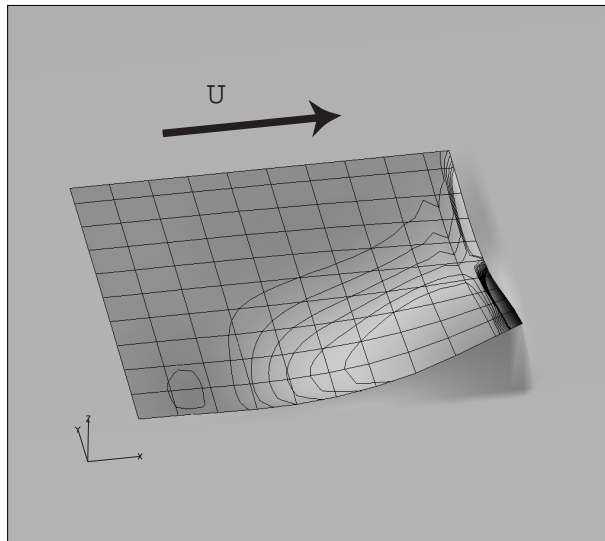
図 5.9: アクセスパネルのフラッタ特性

図 5.9(b) に、フラッタ振動数の変化を固有振動数と一緒に示す。アクセスパネルの境界条件においては、低次モードの固有振動数は曲率による変化が小さい。それゆえ、フラッタ振動数も、曲率を大きくしても、低い振動数を維持する。 $M_\infty = 1.2$ の場合、 $H/h = 1$ では、(1,1) のモードが支配的であるが、 $H/h = 2$ で遷移し、(1,2), (2,1) の成分が急に増加する。図 5.9(a) のフラッタ限界動圧が、 $H/h = 2$ で急激に変化しているのは、この影響である。

図 5.10 に、 $M_\infty = 1.2$ 、 $H/h = 1$ 及び 5 でのフラッタ振動モードを示す。等高線は圧力の分布を表している。 $H/h = 1$ では、(1,1) のモードで振動するが、 $H/h = 5$ では、(1,1), (2,1), (1,2) の連成モードで振動する。



(a) $H/h = 1$



(b) $H/h = 5$

図 5.10: 振動モード及び表面圧力分布 ($M_\infty = 1.2$)

5.6 まとめ

より実際的な形状である曲面パネルのフラッタ特性を CFD を用いて連成解析した。そして、今までに報告されていない低超音速領域でのフラッタ特性を調べた。さらに、実際の境界条件を用いて、アクセスパネルの解析を行った。得られた結果をまとめると以下のようなになる。

- CFD を用いて流体構造連成解析し、低超音速領域の曲面パネルのフラッタ特性が明らかになった。
- 曲率が小さい時は、平板パネルフラッタと同様の傾向を示すが、曲率を大きくすると、特性が変化する。 $M_\infty = 1.2$ で、全周単純支持の場合、曲率が小さい時は、1 次モードが支配的なフラッタとなるが、しかし、曲率が $H/h = 4$ 以上になると、高次のモードと連成する連成モードフラッタとなる。
- アクセスパネルを模擬した境界条件では、全周単純支持した場合に比べて、フラッタ限界動圧は、 $M_\infty = 3$ では約 $1/4$ に、 $M_\infty = 1.2$ では約 $1/3$ に減少する。このように、境界条件により、フラッタ境界は大きく変化する。また、低次モードの固有振動数は曲率による変化が小さいため、フラッタ振動数の変化も小さい。

第6章 低速デルタ翼フラッタ現象における大変形振動流れ場の解析

6.1 はじめに

CFD を用いた流体解析により，B-1 航空機 [12] や超音速機 [13][14] の解析結果に見られるように，剥離渦が干渉するような問題，つまり流体場が複雑で粘性が影響及ぼす空力弾性問題は未だに難しい．

そこで，本章では剥離渦と干渉するデルタ翼フラッタを対象とする．デルタ翼は低アスペクト比の翼に分類され，平板フラッタの一種である [15]．低アスペクト比の非線形空力弾性の研究は高アスペクト比に比べ，少なく，最近になって行われているものが多い．

本研究では，小さな振幅のみならず，大きな振幅までを考慮し，デルタ翼フラッタ現象の特性を明らかにする．また，フラッタ振動時における流れ場を，実験測定と CFD から詳細に解析する．

6.2 実験方法

本研究の実験は名古屋大学航空宇宙工学専攻のゲッチンゲン型低速風洞で行った．風洞の計測部は開放型で，吹き出し口は長径 900mm，短径 750mm の楕円である．また，風速は 0 ~ 40m/s の間で無段階に変更可能である．

本研究では後退角 $\Lambda = 45^\circ$ ，前縁切り落とし（前縁断面形状は矩形）の半載，片持ちデルタ翼模型を使用した．模型概要を図 6.1，翼の諸元を表 6.1 に示す．また，翼はアクリル製で，その物性値は表 6.2 のとおりである．翼模型は固定端をストラットで支持し，振動計測のため固定端付近に歪みゲージを貼付した．

本実験では，歪ゲージによる翼の振動計測と，後流に垂直な断面における総圧損失分布計測を行った．図 6.2 は，本実験装置の概要図である．風洞の一樣流方向を x 軸，翼模型の振動方向を y 軸，それらに垂直な鉛直上向きを z 軸とする直交座標系を採用する（図 6.2）．

歪ゲージとして，プラスチック用箔歪ゲージ（共和電業，KEP-2-120-C1-65L1M2R）

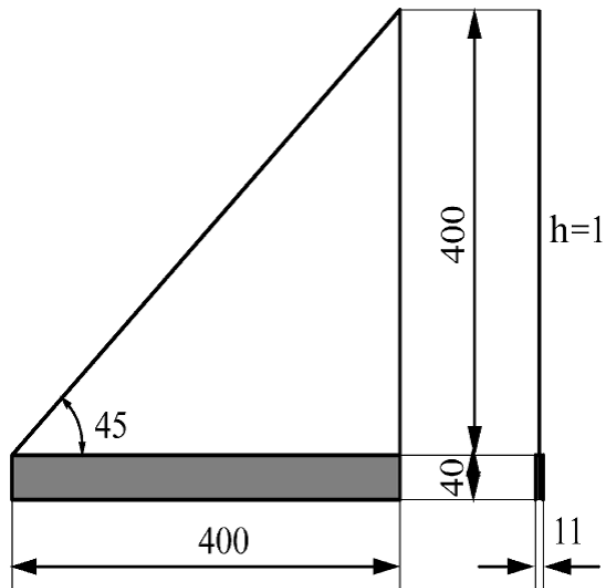


図 6.1: 模型概要

表 6.1: 諸元

アスペクト比 AR	4
半翼幅 $b[mm]$	400
最大翼弦長 $C_r[mm]$	400
厚み $h[mm]$	1
後退角 $\Lambda[deg]$	45
前縁形状	矩形

表 6.2: アクリルの物性値

密度 $\rho_{wing}[kg/m^3]$	1145
ポアソン比 ν	0.45
ヤング率 $E[N/m^2]$	3.3×10^9

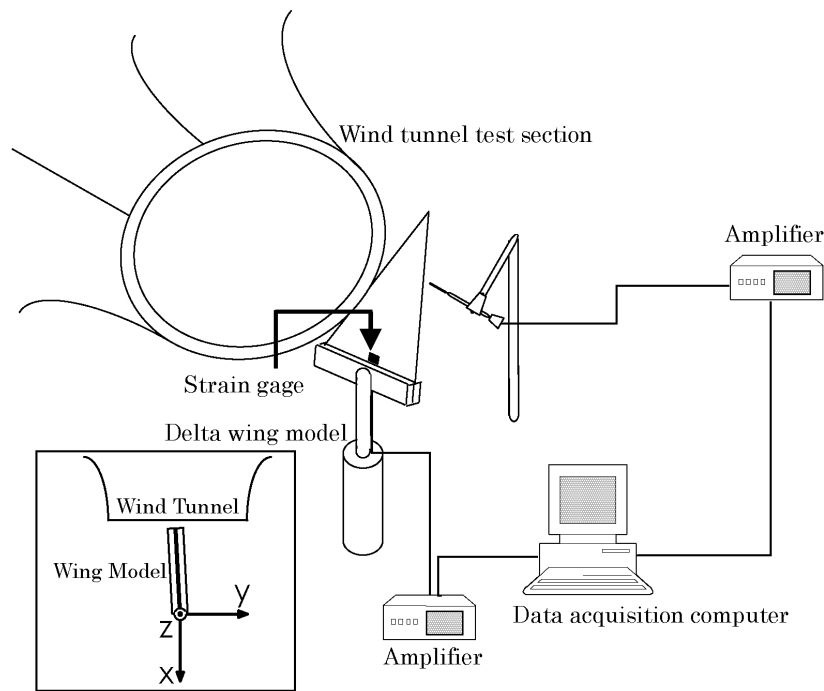


図 6.2: 実験装置

を使用し、56%翼弦の位置で、かつ、曲げモードの節である固定端付近に、2 アクティブゲージ法(曲げ歪測定法)で貼付した。歪ゲージ出力はローパスフィルタを通過後、増幅器によって増幅され、PCに内蔵されたDAQボードによりA/D変換され、PCに取り込まれる。その後、改めてデジタルフィルタを使用して、アナログフィルタと同じ通過周波数のローパスフィルタを通過させることによりノイズを遮断している。

翼模型の振動と、後流に形成される渦の大きさや位置との関係を調べるために、総圧損失分布計測を行った。測定には半導体式非定常圧力センサ(Kulite, XCS-062-15D)を使用した。センサ出力は増幅器によって増幅されたあと、歪みゲージの場合と同様に、PCに内蔵されたDAQボードによりA/D変換され、PCに取り込まれる。ちなみに、この総圧測定法の精度は、以前当該研究室で行った検定によれば、主流に対して 10° のずれで、2%の誤差である。

後流面での流れを再構築するために、圧力センサをトラバース装置で移動させ、分布データを採取した。そのとき、各計測点で位相平均を取るために、翼模型の振動を同時計測した。

総圧計測は後縁から、50mm下流の断面で行った。測定範囲として、水平方向に $y = -220 \sim 220\text{mm}$ までを10mm間隔で、鉛直方向に $z = 0 \sim 450\text{mm}$ までを30mm間隔で、

計 720 点で総圧を計測した。

6.3 計算方法

6.3.1 流体計算法

本数値解析コードにおける流体の支配方程式は、移動格子に基づく一般座標系の Euler 方程式または Navier-Stokes 方程式で、これらの方程式を擬似圧縮性法で数値的に解く (2.2.1 節参照)。時間発展には Dual Time Stepping 法を組み込んだ二次精度 LU-SGS (3.3.6.1 節及び 3.3.8.2 参照) を用いる。

非粘性流束の数値流束は、まず、セル境界での解ベクトルを Van Albada の limiter を用いた MUSCL 法により 3 次精度で計算し、それを使って Roe の近似 Riemann 解法 (3.3.8.1 節参照) により求める。粘性流束は、二次精度の中心差分で計算する。なお、本計算では乱流モデルを用いていない。

6.3.2 構造計算法

構造は、9 自由度の三角形線形板要素を用いて、有限要素法で解く (3.6.2 節参照)。また、動的解析する際にモード解析を用いて効率的に計算する。時間積分には、陰解法である Newmark 法を採用している。本計算では、10 次までのモードを用いている。

6.3.3 連成計算法

本計算では、流体と構造をともに陰解法で反復計算する強連成法を用いる (3.7.1 節参照)。

また、構造変位に合わせて格子を移動・変形させる。具体的には、物体表面近くの格子は構造変位と同じだけ移動させ、それより外側にある格子は、外部境界との間で 3 次関数 [22] とスプライン関数を用いて滑らかに分布させる。図 6.3 はグリッドの変形例で、グリッドが滑らかに変形していることが確認できる。

本計算では流体格子と構造格子が異なるため、データを受け渡す時に、B-Spline 補間を用いて補間している (3.7.3 節参照)。

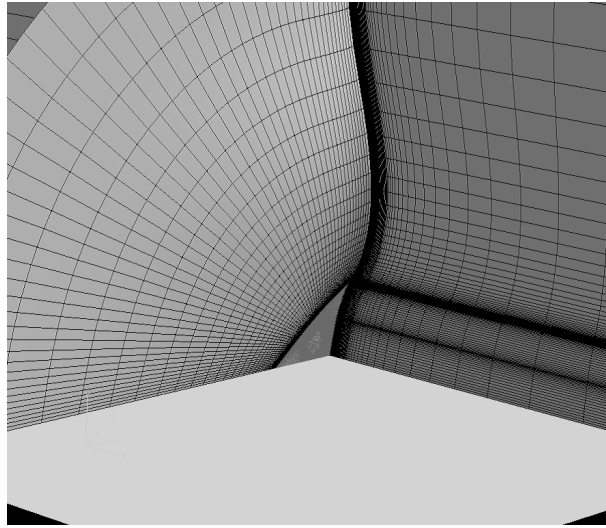


図 6.3: グリッドの変形

6.4 デルタ翼の固有振動モード

デルタ翼の固有振動モードと固有振動数を，上述した構造解析法を用いて計算した (図 6.4)．振動数の小さい順に，1 次曲げ (3.2Hz)，2 次曲げ (12.0Hz)，1 次捩り (16.5Hz)，3 次曲げ (28.7Hz) のモードとなる．図中の太線は，各モードの節を示している．実験では 1 次曲げモードで 3.3Hz で，本計算モデルによる結果と良く一致している．

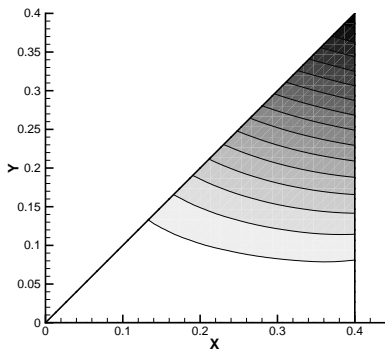
6.5 結果及び考察

6.5.1 リミットサイクル振動及び遷移

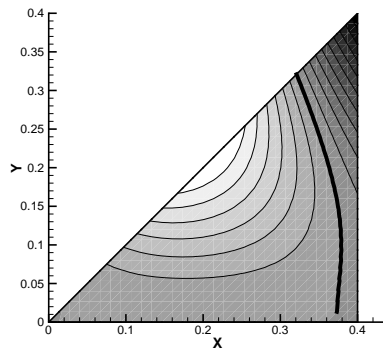
フラッタ速度と振動特性を調べるために，各流速において歪ゲージで翼の振動を計測した．迎角が $\alpha = 0 \sim 4^\circ$ ，一様流速度が $V_\infty = 0 \sim 27m/s$ における結果を図 6.5 に示す．縦軸は歪ゲージ出力で，振幅の大きさに対応する．

$\alpha = 0^\circ$ の場合，フラッタ速度は $V_F = 13m/s$ で，その後，速度を上げると小さな振幅でリミットサイクル振動となる．さらに速度を上げると， $21m/s$ 付近で急に振幅が増大し，大振幅振動に遷移する． $\alpha = 1^\circ$ の場合は，この遷移がより高速側にシフトする．さらに迎角を $\alpha = 2^\circ, 3^\circ$ と増加させると，さらに高速側にずれる．ただし，遷移後の振幅は， $\alpha = 0^\circ$ の時とほぼ同じである．

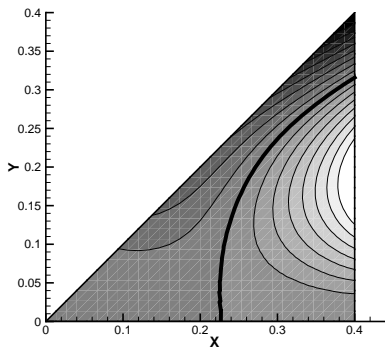
以上のことから，2つの平衡状態，つまり小振幅振動モードと大振幅振動モードが存在し，その遷移位置は，迎角とともに高速側に移動することが明らかになった．また，迎



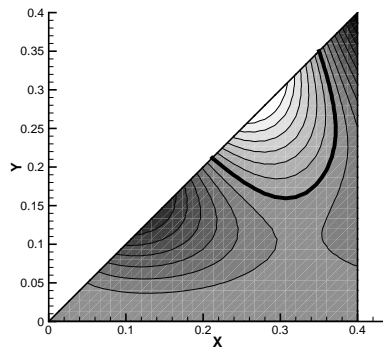
(a) 一次曲げモード (3.2Hz)



(b) 二次曲げモード (12.0Hz)



(c) 一次捩りモード (16.5Hz)



(d) 三次曲げモード (28.7Hz)

図 6.4: デルタ翼の固有振動モード

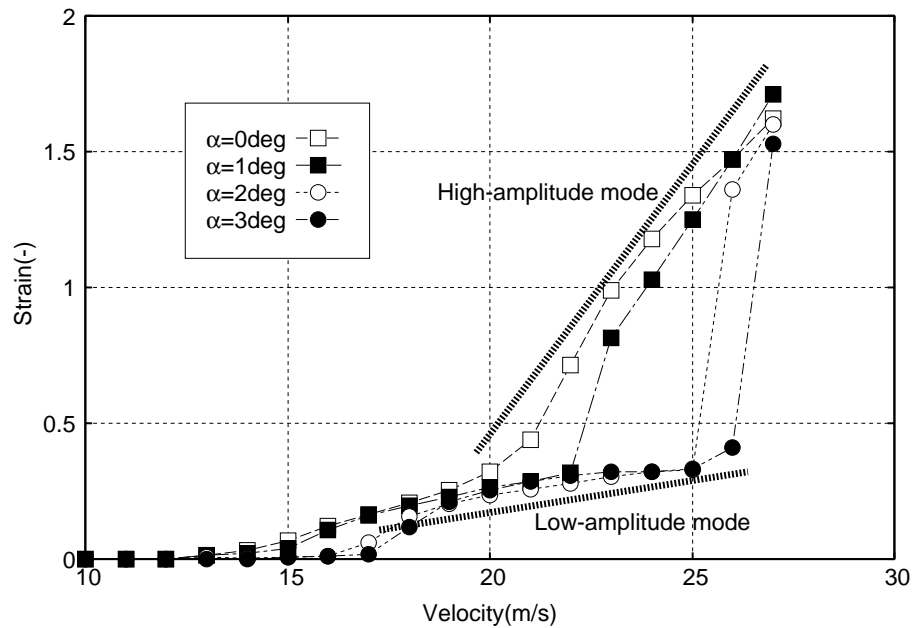


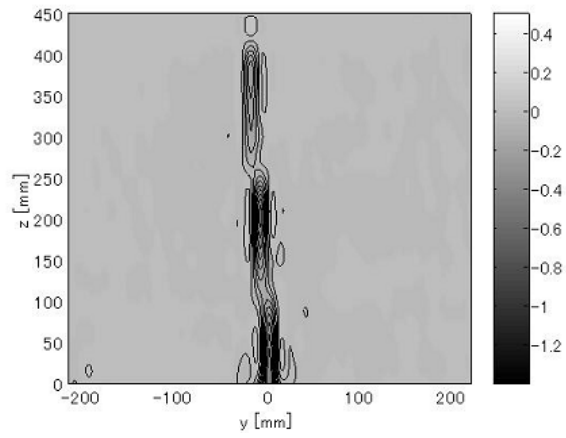
図 6.5: リミットサイクル振動及び遷移 (実験値)

角が増すほど、遷移位置での振幅増加がよりシャープになる。このような場合、大振幅への遷移は急に起こるので、翼にとっては危険な現象である。柔軟構造翼を用いる場合には、小さな振動のリミットサイクル振動は許容できるとしても、この破壊につながる大振幅振動は避ける必要がある。

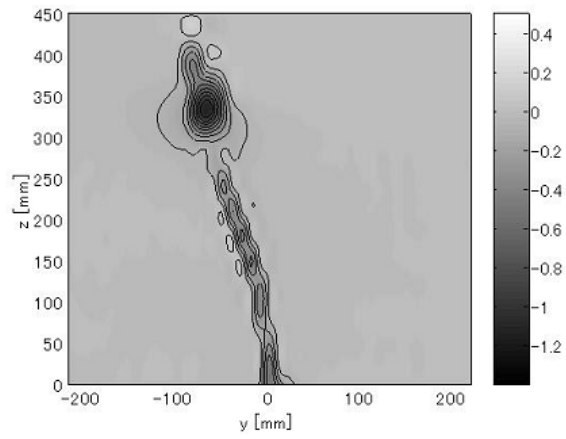
$\alpha = 0^\circ$ における後流での総圧損失分布 (実験) を図 6.6 に示す。この結果は、各速度での、デルタ翼が最大変形した時の後流である。本実験では、翼の変形量を計測していないが、この結果から変形量を見積もることができる。ちなみに、ここには示していないが、後縁から 5mm の場合も測定し [115]、ほぼ同じ結果を得ている。

流速が $V_\infty = 19\text{m/s}$ の時の振幅は $Y_{amp} = 20\text{mm}$ 、 23m/s で 90mm 、 27m/s で 180mm である。この結果から、小振幅振動モードの振幅 (図 6.5) は、 20mm 程度であると推測できる。また、このことから、 $\alpha = 3^\circ$ では、振動モード遷移時に、振幅が 20mm から 180mm まで一気に増大することになる (図 6.5)。

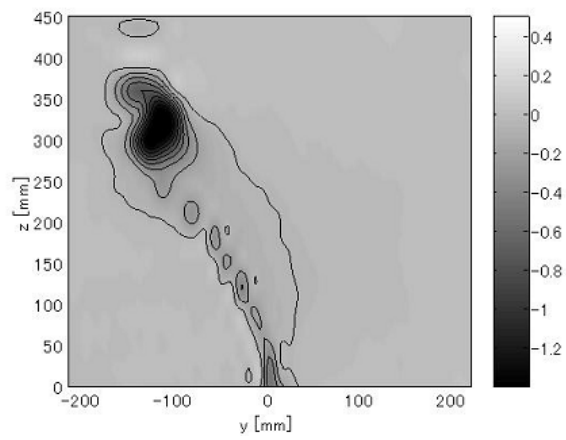
$V_\infty = 19\text{m/s}$ の場合には、大きな前縁剥離渦は見られない (図 6.6)。一方、速度を増して大振幅モードになると、大きな剥離渦が発生する。これは、翼の変形と翼の振動により、局所的な有効迎角が変化し、渦が周期的に形成されるためである。一様流速度を増すと、翼の変形量も増大し、それに伴い剥離渦も大きくなり、この渦が翼の振動に影響を及ぼすようになると考えられる。



(a) $V_\infty=19\text{m/s}$



(b) $V_\infty=23\text{m/s}$



(c) $V_\infty=27\text{m/s}$

図 6.6: リミットサイクル振動時の後流 ($\alpha = 0^\circ$)

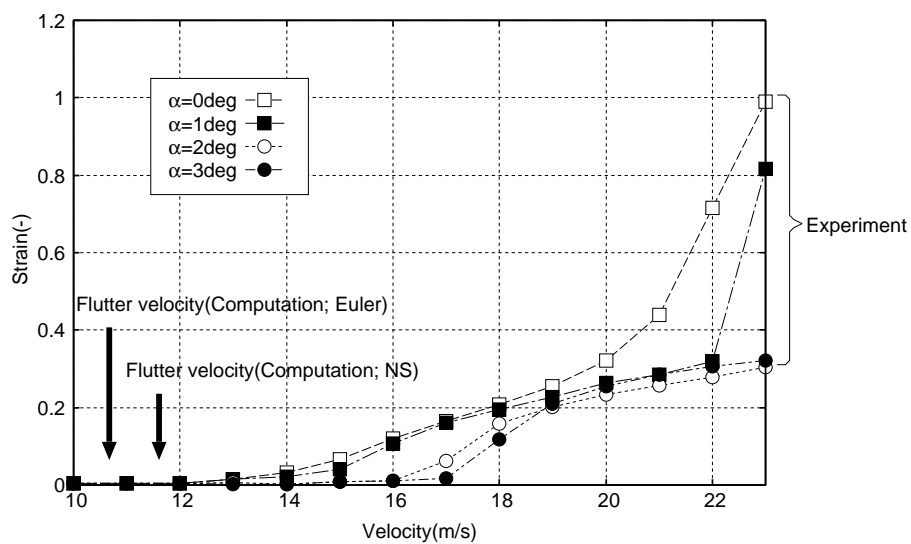


図 6.7: フラッタ速度

表 6.3: フラッタ速度指数 ($\alpha = 0^\circ$)

本実験	0.54 ~ 0.58
Doggett らの実験 [37]	0.55 ~ 0.57
本計算 (Euler)	0.45 ~ 0.49
本計算 (NS)	0.49 ~ 0.54

6.5.2 フラッタ速度

フラッタの開始速度であるフラッタ速度について考察するために、フラッタ速度付近での図 6.5 の拡大図を示す (図 6.7) . $\alpha = 0^\circ$ の時は、 $V_\infty = 13m/s$ から小さなりミットサイクル振動が発生し、迎角を増大するとともに、フラッタ速度は大きくなる。迎角があると、振動開始前に、翼は静的に変形する。この変形は板圧の数 10 倍にもなるので、構造の幾何学的非線形効果により、見かけの剛性が上昇する。これによりフラッタ速度が増加するものと思われる。

本実験で得られた $\alpha = 0^\circ$ でのフラッタ速度を他者の実験結果と比べるために、式 (6.1) のフラッタ速度指数 [37](flutter velocity index) V_I を採用する。これは、翼の物性値や寸法が異なる場合の結果を比較するときに便利である。

$$V_I = \frac{V_F}{2\pi b_{ref} f_{ref} \sqrt{\mu}} \quad (6.1)$$

V_F はフラッタ速度、 b_{ref} は平均半翼弦長、 f_{ref} は 1 次の捩りの固有モード振動数である (図 6.4) . μ は質量比で、デルタ翼の質量を、周りの空気の質量 (デルタ翼翼根翼弦長を底面直径とし、高さをデルタ翼のスパンとした円錐内の空気質量 [37]) で割ったものである。本実験および他者の実験におけるフラッタ速度指数を表 6.3 に示す。

本実験では、 $V_\infty = 13m/s$ からリミットサイクル振動が確認できたので、フラッタ速度を $V_F = 12 \sim 13m/s$ とした。これを用いて、式 (6.1) からフラッタ速度指数を計算すると、 $V_I = 0.54 \sim 0.58$ となる。これは表 6.3 から、Doggett ら [37] の結果とほぼ同じであることが確認できる。

計算に関しては、連成計算する際に、構造に 1 次モードで初速度を与え、その応答からフラッタ速度を算出した。非粘性計算の結果を図 6.8 に、粘性計算の結果を図 6.9 に示す。図の履歴は、翼先端での変位 w を板厚 h で無次元化した値 w/h の時間履歴である。非粘性計算では、 $V_\infty = 10m/s$ の時は減衰するが、 $V_\infty = 11m/s$ の時は発散する。その結果、フラッタ速度は、 $V_F = 10m/s$ と $11m/s$ の間にあると推定される。

一方、粘性計算の場合は、翼周りに境界層が存在することにより、フラッタが抑制され安定化する。この場合、フラッタ速度は $V_F = 11m/s$ と $12m/s$ の間に存在する。ちなみに、 $V_\infty = 10m/s$ の場合、翼根翼弦長を基準長としたレイノルズ数は、 $Re = 2.7 \times 10^5$ である。

本計算で得られたフラッタ速度をフラッタ速度指数に変換したものを表 6.3 に示す。計算結果は実験結果に近い値となり、本連成計算法の妥当性が検証された。

また、図 6.7 にも矢印で $\alpha = 0^\circ$ の場合の計算結果を示している。この図からも、計算結果がフラッタ速度を精度良く予測していることがわかる。

6.5.3 大振幅振動について

以下では、デルタ翼の大振幅振動における特徴的な現象を説明する。

6.5.3.1 後流

6.5.1 節で述べたように、デルタ翼フラッタでは、小振幅モードと大振幅モードの2つのモードが存在する。ここでは、大振幅振動時の流れ場を調べるために、 $V_\infty = 25m/s$ 、 $\alpha = 0^\circ$ の場合について、後流の流れ場を測定した。

図 6.10 は実験で得られた総圧損失分布で、計測場所は、翼後縁から 50mm 下流の断面である。一様流動圧で無次元化した総圧損失 $(p_t - p_{t\infty}) / (\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2)$ の分布を -1.1 ~ 0.2 の範囲で示している。また、図中に示した時刻は、翼端が $y=0$ の時を $t=0$ とし、一周期 T で無次元化している。これらは翼を下流側から見た図で、翼は振動中心 $y=0$ から y 軸の正の方向に曲がり、その後中心 $y=0$ に戻ってくる場合を表している。

図 6.10(a) では翼端付近に小さな渦が形成され、図 6.10(b), (c) では、その渦が大きくなり、渦中心が下方に移動している。さらに、(d) では、翼がより中心方向に移動し、変形量も小さくなっているが、渦はまだ翼表面近くに残っている。

ここで、リミットサイクル振動している $V_\infty = 14m/s$ の場合の計算結果を参考にしながら、流れ場を考察していく。図 6.11 に翼先端での振動履歴を示す。本計算では、構造解析のモデルとして線形モデルを用いているが、翼が大変形した場合には、流体力の非線形性により、リミットサイクル振動が発生している。

本計算では線形モデルを採用したため、大振幅振動の振幅予測ができない。よって、 $V_\infty = 14m/s$ という比較的低速で大変形振動となっているが、計算での振動モードは、実験での振動モードと定性的に同じである(図 6.13)。さらに、フラッタ振動数を一様流速度と翼根翼弦長で無次元化した無次元周波数 $S_t (\equiv f_{flutter} L_{chord} / V_\infty)$ は、実験 ($V_\infty = 25m/s$) では $S_t = 0.19$ 、計算 ($V_\infty = 14m/s$) では $S_t = 0.16$ となり、そんなにかけ離れていない。以降、この計算結果をもとに、実験での流れ場を考察する。

図 6.12 に計算での総圧損失分布を示す。実験結果よりも渦の挙動が鮮明であるが、定性的に実験と一致している。図 6.12(a) の状態では、翼先端付近に小さな渦が発生し、図 6.12(b), (c) では、渦が大きくなり、渦中心が下方に移動している。さらに、(d) になると、多少総圧損失が減少している。また、(a) では、翼が右方向に移動しているため、翼の右側で全体的に圧力が高くなり、総圧も増大する。この傾向は、実験と計算で一致している(図 6.10, 6.12)。

6.5.3.2 翼形状の時間変化

図 6.14 から、デルタ翼の大振幅振動時における形状の時間変化を見ることができる。また、図 6.15 は、図 6.14(a) に示されている翼先端 (点 A) と前縁中間点 (点 B) における変位の時間履歴である。翼先端部は、1 次モードの影響が、また、前縁中間部は、2 次のモードの影響が大きい (図 6.4)。計算としては 10 次まで考慮したが、1 次と 2 次の曲げモードが支配的な結果となっている。翼先端部と前縁中間部で振動に位相差が生じているのは、この 1 次モードと 2 次モードの位相が異なるためである。

図 6.14(a) から (b) に進む時、翼先端部は、 y 軸の正の方向に変形するが、前縁中間部は、逆の方向に変形する。(c) になると、これらの変形量が最大となる。さらに時間が進み、(d) になると、翼先端部は中心側に戻ってきて、その変形は小さくなる。しかし、前縁中間部では、位相の異なる 2 次モードの影響で、その変形はまだ比較的大きい。

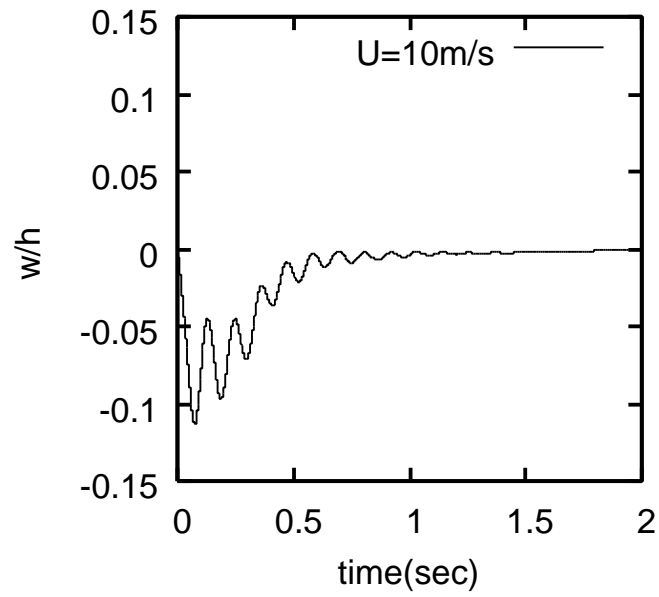
6.5.3.3 翼面上に発生する渦

図 6.14 には、デルタ翼の表面圧力分布と後流断面における圧力分布が描かれている。この図から、上述した各時刻における形状に対する、渦の発生過程を知ることができる。

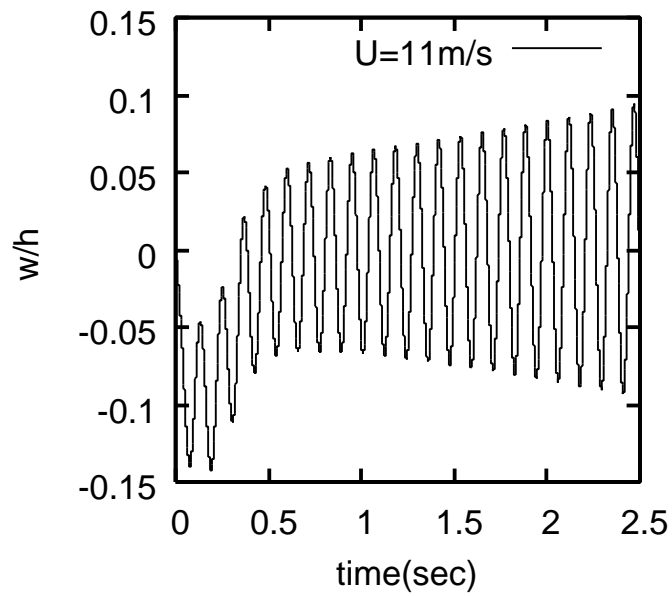
図 6.14(a) では、翼先端付近で流れが剥離し、そこで小さな縦渦が発生している。また、(b),(c) では、時間とともにその縦渦が成長し、inboard 側に移動している。これは、図中に矢印 C で示した縦渦の先端が時間とともに、デルタ翼の頂点方向に移動することと関連している。

図 6.14(d) では、翼先端部の変形量は小さくなり、かつ、 y 軸の負の方向の速度も大きいので、翼先端部付近の有効迎角は減少する。しかし、前縁中間部では、その変形が残っているため、縦渦が維持されている。

これらの縦渦がある場所は、渦の特性から負圧領域となり、翼に対して空気力を誘起する。デルタ翼が振動中心から離れて変形していくときには、この空気力は変形に対して抵抗となる。一方、翼が中心側に戻ってくるときには、逆に振動を助長する働き、つまり、翼を y 軸の負の方向に引っ張る作用がある (図 6.14(c), (d))。このようにして、デルタ翼の大振幅振動が維持されていると考えられる。

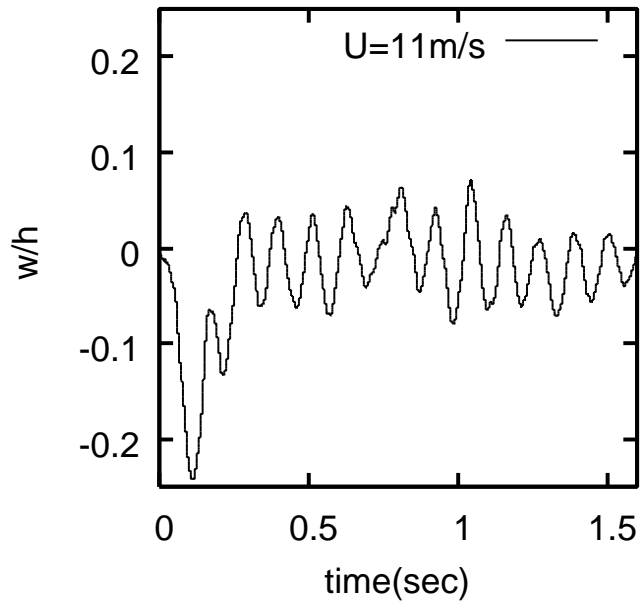


(a) $V_\infty=10\text{m/s}$ (減衰)

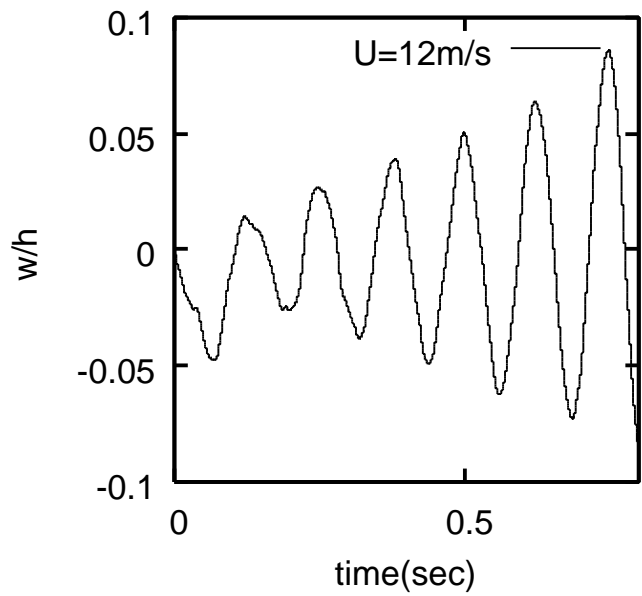


(b) $V_\infty=11\text{m/s}$ (発散)

図 6.8: インパルス応答 (Computation; Euler)

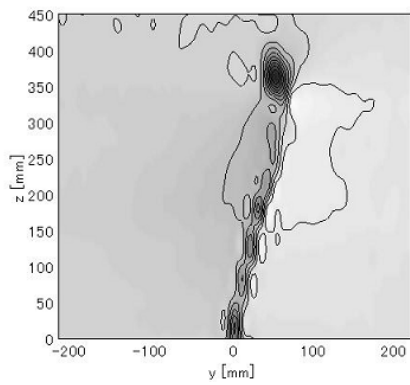


(a) $V_{\infty}=11\text{m/s}$ (減衰)

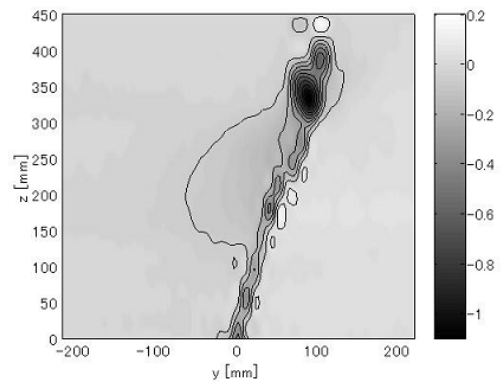


(b) $V_{\infty}=12\text{m/s}$ (発散)

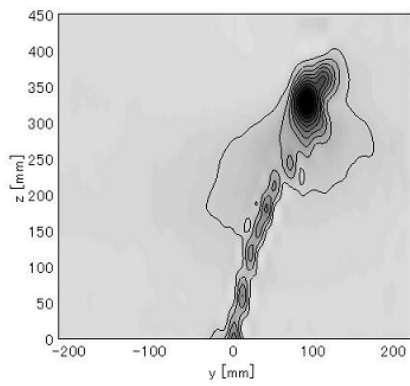
図 6.9: インパルス応答 (Computation; NS)



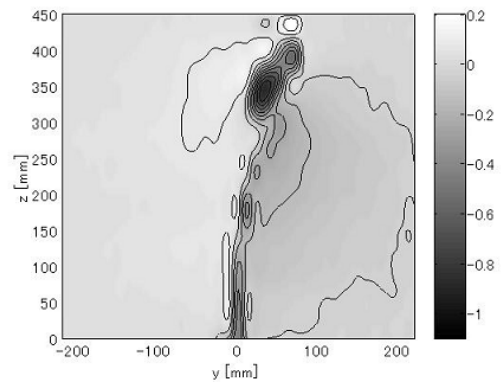
(a) $t/T=0.09$



(b) $t/T=0.21$



(c) $t/T=0.32$



(d) $t/T=0.44$

図 6.10: 後流での総圧損失実験結果 ($V_\infty = 25m/s, \alpha = 0^\circ$)

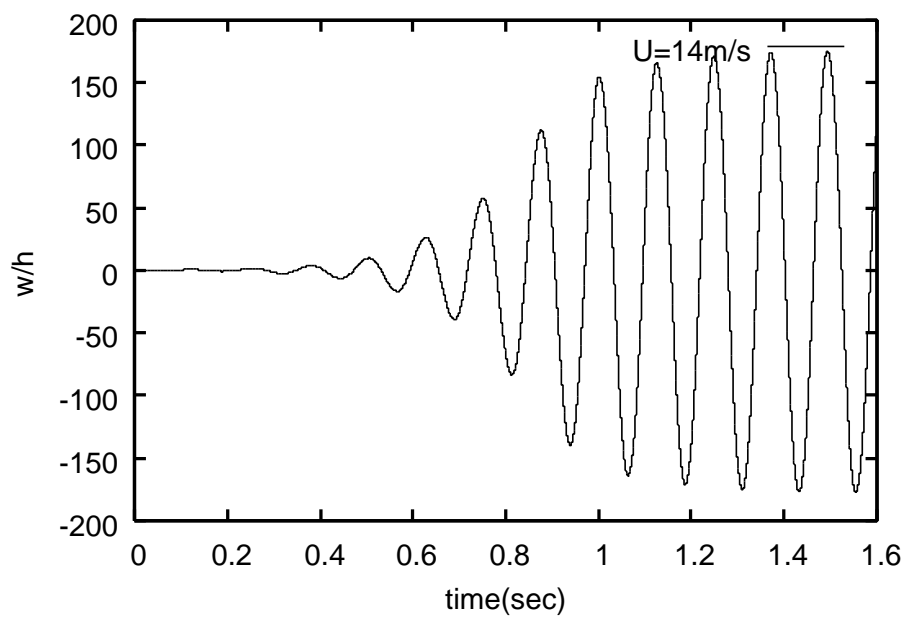
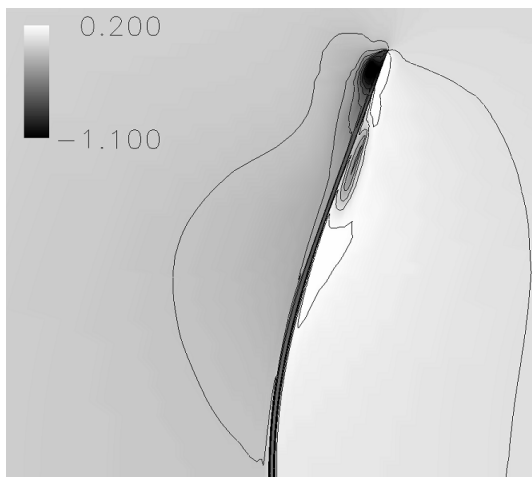
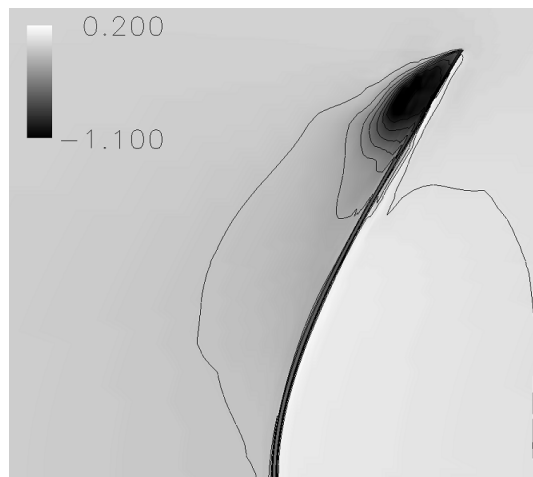


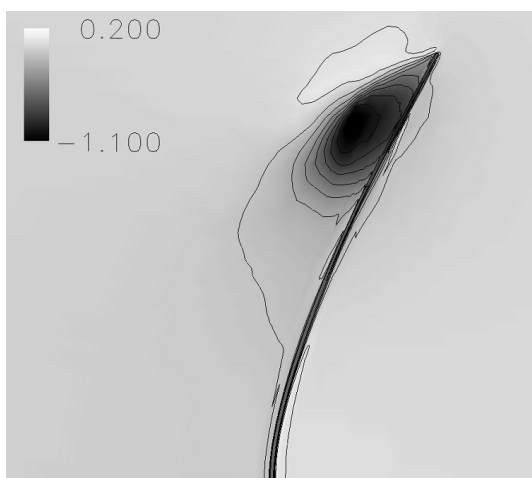
図 6.11: リミットサイクル振動



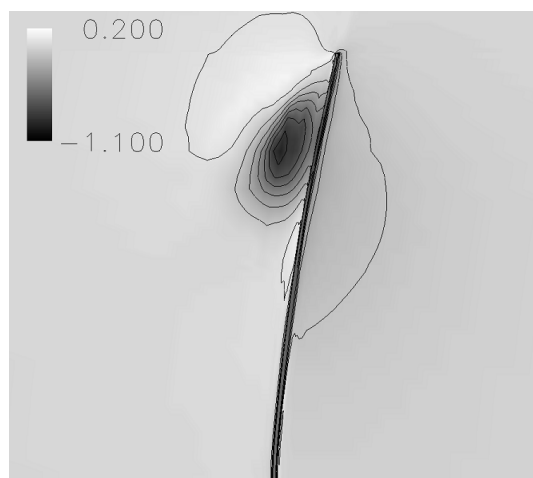
(a) $t/T=0.09$



(b) $t/T=0.21$

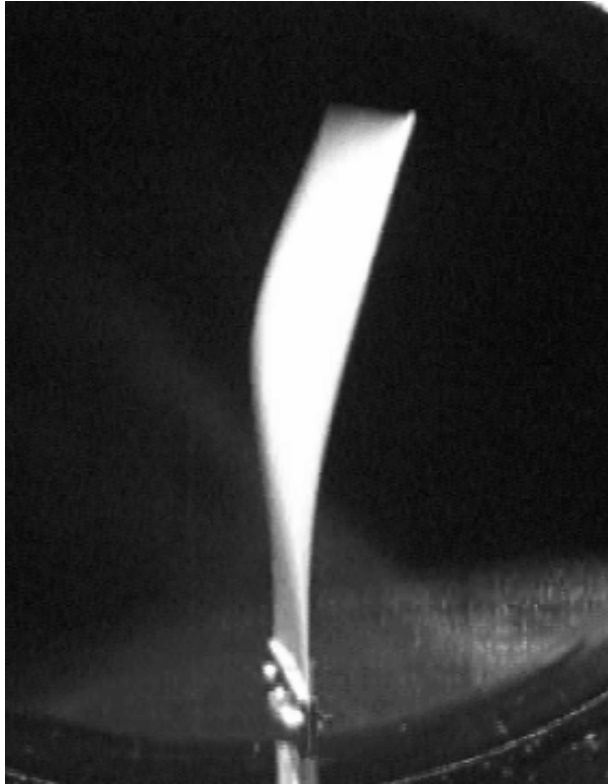


(c) $t/T=0.32$

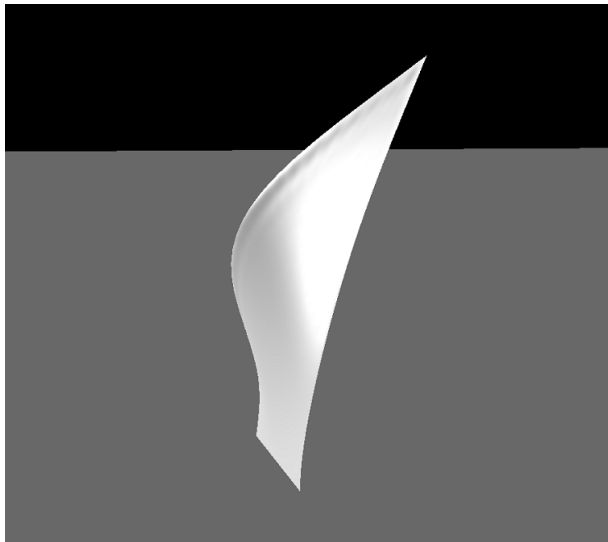


(d) $t/T=0.44$

図 6.12: 後流での総圧損失計算結果 ($V_\infty = 14m/s, \alpha = 0^\circ$)

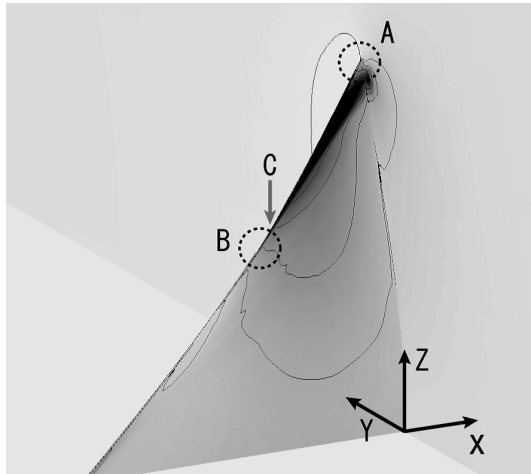


(a) 実験

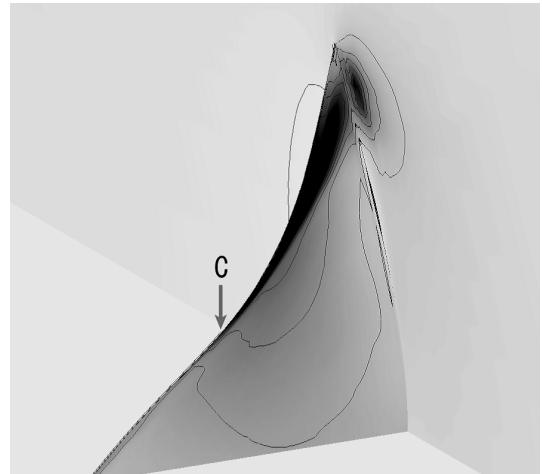


(b) 計算

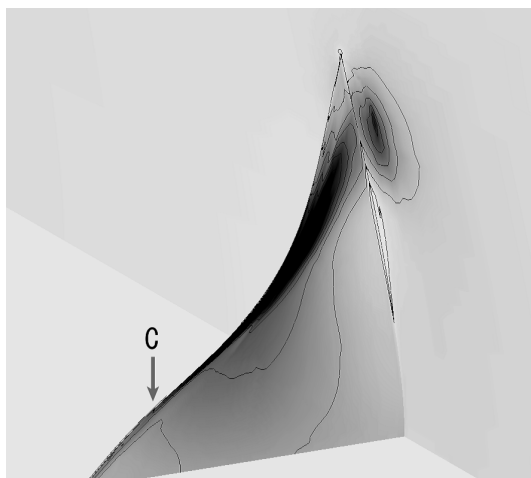
図 6.13: 振動モードの比較



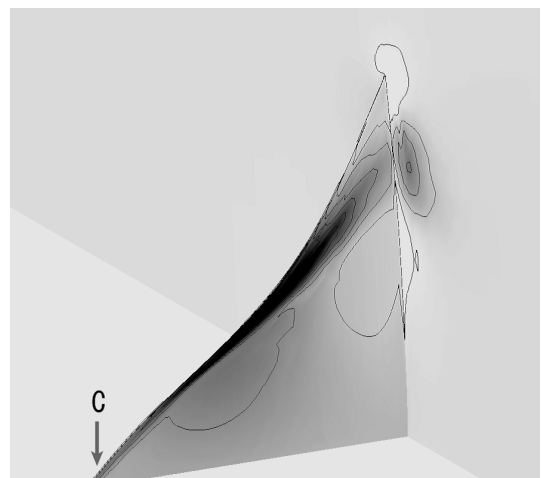
(a) $t/T=0.09$



(b) $t/T=0.21$



(c) $t/T=0.32$



(d) $t/T=0.44$

図 6.14: デルタ翼の変形と渦の発生・発達

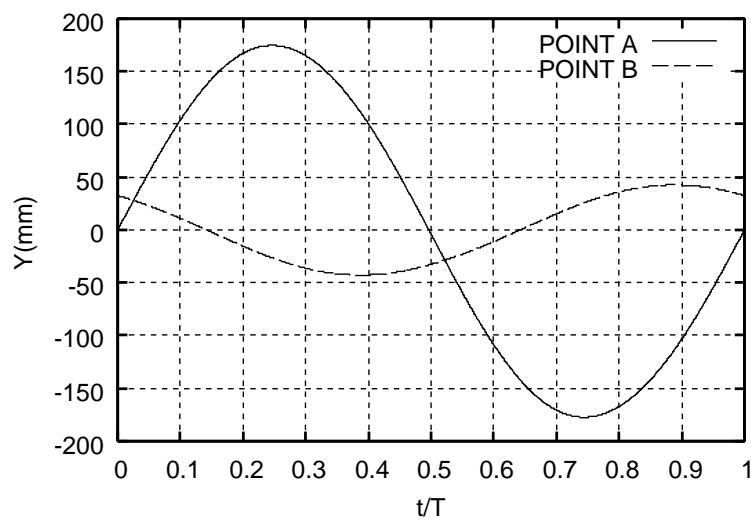


図 6.15: デルタ翼上の点 A , B での変位の時間変化

6.6 まとめ

本章では，剥離渦が干渉するような問題として低速デルタ翼フラッタを取り上げ，実験と計算により解析した．得られた結果をまとめると以下ようになる．

- デルタ翼のフラッタモードに，小振幅振動モードと大振幅振動モードが存在することが明らかになった．小振幅振動モードから大振幅振動モードへの遷移速度は，迎角に依存し，迎角の増加とともに，遷移速度は増大する．遷移後，振幅が不連続的に増大するので，実機でこのような現象が起こると危険である．
- フラッタ速度に関する本計算結果は，本実験結果や他者の実験結果と良い一致を示した．これにより，本研究で開発された流体構造連成数値計算法の妥当性が検証された．
- 大振幅振動時には，振動するデルタ翼前縁付近に縦渦が発生する．この縦渦の発生は，翼の振動モードと密接に関連している．また，渦の負圧による空気力がデルタ翼大振幅振動の原動力となっている．

本計算では，構造に線形モデルを使用しているため，振幅の予測をすることができなかった．非線形モデルを使用し，フラッタ解析することが今後の課題である．

第7章 結論

本博士論文研究では、CFDに基づき、高精度・高効率な流体構造連成計算コードを開発した。流体を有限体積法で、構造を有限差分法や有限体積法を用いて解いた。両者ともに陰解法を用い、データの授受を繰り返し、時間発展させる強連成法を採用した。

検証として、この方法をパネルフラッタ問題に適用した。CFDを用いた流体・構造の連成計算を行い、フラッタ限界動圧とリミットサイクル振動に関して計算コードの検証を行った。また、境界層のフラッタ現象への効果を調べた。得られた結果をまとめると、以下のようなになる。

- 非粘性計算で、フラッタ限界とリミットサイクル振動を解析し、線形ポテンシャル理論を用いた計算結果と比較し、良い一致を得られ、本計算法の妥当性が確認された。本研究での非粘性計算結果は、他の計算結果よりも実験に近い値が得られ、CFDを用いた流体構造連成計算法の有効性が示された。
- 粘性計算を行い、境界層のフラッタ限界に与える影響を調べた。境界層が厚くなると、フラッタ発生が抑制されることが分かった。特に、 $M=1.2 \sim 1.35$ の範囲において、境界層効果によるフラッタ限界の大きな変化が存在する。
- 今回の計算条件下では、下面圧力のフラッタ限界への影響は、せいぜい $h/a = 0.001$ 程度である。下面圧力の影響よりも、上面での境界層の影響が大きく反映される。
- 2次元問題では不十分であったが、3次元問題では、実験と計算との定量的一致が得られた。2次元問題を模擬した実験は、自由端の影響が大きく、3次元的な影響を含んでいる可能性がある。
- 3次元問題でマッハ数効果を解析し、実験と良い一致を得た。マッハ数 $M = 1.4$ ではフラッタ限界が非粘性流解析と乱流解析で逆転し、乱流計算では、より早く不安定になることが示された。境界層厚さを0に外挿して得たフラッタ限界は、非粘性計算の解に一致するとは限らない。

次に、実用的な問題である曲面パネルのフラッタ特性を CFD を用いて連成解析した。得られた結果をまとめると以下ようになる。

- CFD を用いて、低超音速領域の解析が可能なツールを作製した。これを適用した結果、音速付近のフラッタ特性が明らかにされた。
- 曲率が小さい場合は、平板パネルフラッタと同様の傾向を示すが、曲率が大きくなると、特性が変化する。 $M_\infty = 1.2$ で、全周単純支持の場合には、曲率が小さい時は、1次モードフラッタが支配的であるが、曲率が $H/h = 4$ 以上になると、高次モードと連成する連成モードフラッタとなる。
- 実際のアクセスパネルを模擬した境界条件では、全周単純支持した場合に比べて、フラッタ限界動圧は、 $M_\infty = 3$ では約 $1/4$ に、 $M_\infty = 1.2$ では約 $1/3$ に減少する。このように、境界条件により、フラッタ境界は大きく変化する。また、低次モードの固有振動数は曲率による変化が小さいため、フラッタ振動数の変化も小さくなる。

最後に、剥離渦と干渉するフラッタ現象として、低速デルタ翼のフラッタを解析した。実験と計算から、得られた結果をまとめると以下ようになる。

- デルタ翼のフラッタモードに、小振幅振動モードと大振幅振動モードが存在することが明らかになった。小振幅振動モードから大振幅振動モードへ遷移する速度は、迎角に依存し、迎角の増加とともに、遷移速度は増大する。遷移するとき、振幅が不連続的に増大するので、実機でこのような現象が起こると危険である。
- フラッタ速度に関する本計算結果は、本実験結果や他者の実験結果と良い一致を示した。
- 大振幅振動時には、振動するデルタ翼前縁付近に縦渦が発生する。この縦渦の発生は、翼の振動モードと密接に関係している。また、渦の負圧による空気力がデルタ翼大振幅振動の原因となっている。

本研究では、実際的な問題というよりも、流体粘性のフラッタに対する影響を調べるため、基礎的な研究に重点を置いた。本研究の様に、乱流境界層の効果を詳細に論じた論文は他にはなく、これが本研究の成果である。また、デルタ翼の大振幅流れ場の解析は、最近話題になってる剥離を含む流れ場を伴うフラッタ現象に対応するもので、流れ場に特化し、剥離渦の非定常運動を詳細に論じた点に新しさがある。しかしながら、本研究で行ったデルタ翼の連成解析では、構造に線形モデルを使用しているため、振幅の予測が困

難であった。今後の課題として、非線形モデルを使用したフラッタ解析を行い、現在困難な問題の1つである、デルタ翼の大振幅リミットサイクルの振幅予測や、迎角の効果を調べる必要がある。

参考文献

- [1] J. Dugundji: Personal Perspective of Aeroelasticity During the Years 1953-1993, *Journal of Aircraft*, **40** (2003), pp. 809-812.
- [2] T. M. Harris, L. J. Huttzell: Aeroelasticity Research at Wright-Patterson Air Force Base (Wright Field) from 1953-1993, *Journal of Aircraft*, **40** (2003), pp. 813-819.
- [3] S. R. Cole, T. E. Noll, B. Perry: Transonic Dynamics Tunnel Aeroelastic Testing in Support of Aircraft Development, *Journal of Aircraft*, **40** (2003), pp. 820-831.
- [4] R. Yurkovich: Status of Unsteady Aerodynamic Prediction for Flutter of High-Performance Aircraft, *Journal of Aircraft*, **40** (2003), pp. 832-842.
- [5] D. M. Schuster, D. D. Liu; L. J. Huttzell: Computational Aeroelasticity: Success, Progress, Challenge, *Journal of Aircraft*, **40** (2003), pp. 843-856.
- [6] E. Dowell, J. Edwards, T. Strganac: Nonlinear Aeroelasticity, *Journal of Aircraft*, **40** (2003), pp. 857-874.
- [7] K. G. Bhatia: Airplane Aeroelasticity: Practice and Potential, *Journal of Aircraft*, **40** (2003), pp. 1010-1018.
- [8] P. P. Friedmann: D. H. Hodges: Rotary Wing Aeroelasticity - A Historical Perspective, *Journal of Aircraft*, **40** (2003), pp. 1019-1046.
- [9] E. Livne, T. A. Weisshaar: Aeroelasticity of Nonconventional Airplane Configurations - Past and Future, *Journal of Aircraft*, **40** (2003), pp. 1047-1065.
- [10] E. Livne: Future of Airplane Aeroelasticity, *Journal of Aircraft*, **40** (2003), pp. 1066-1092.
- [11] <http://www.top500.org/>

- [12] P. Hartwich, S. K. Dobbs, A. E. Arslan, S. C. Kim: Navier-Stokes Computations of Limit-Cycle Oscillations for a B-1-Like Configuration, *Journal of Aircraft*, **38** (2001), pp. 239-247.
- [13] R. C. Scott, W. A. Silva: Pitch Oscillation Data and Analysis for a Large HSCT semispan Wing, *AIAA/CEAS International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics*, IFASD-US-38 (2003).
- [14] R. C. Scott, W. A. Silva, J. R. Florance, D. F. Keller: Unsteady Pressures Associated with Vortical Flows and Forced Oscillation, *Journal of Aircraft*, **41** (2004), pp. 186-189.
- [15] E. H. Dowell, D. Tang: Nonlinear Aeroelasticity and Unsteady Aerodynamics, *AIAA Journal*, **40** (2002), pp. 1697-1707
- [16] M. J. Patil, D. H. Hodges, C. E. S. Cesnik: Limit-Cycle-Oscillations in High-Aspect-Ratio Wings, *Journal of Fluids and Structures*, **15** (2001), pp. 107-132.
- [17] R. Chen, M. Blosser , Metallic thermal protection system panel flutter study , AIAA paper 2002-501 (2002).
- [18] E. H. Dowell: A Review of the Aeroelastic Stability of Plate and Shells, *AIAA Journal*, **8** (1970), pp. 385-399.
- [19] E. H. Dowell: Aeroelasticity of plates and shells, Noordhoff International Pub. (1974).
- [20] C. Mei, K. Abdel-Motagaly and R. Chen: Review of Nonlinear Panel Flutter at Supersonic and Hypersonic Speeds, *Appl. Mech. Rev.*, **52** (1999), pp. 321-332.
- [21] G. A. Davis, O. O. Bendiksen: Transonic Panel Flutter, AIAA paper 93-1476 (1993).
- [22] R. E. Gordnier and M. R. Visbal: Development of a Three-dimensional Viscous Aeroelastic Solver For Nonlinear Panel Flutter, *Journal of Fluids and Structure*, **16** (2002), pp. 497-527.
- [23] I. R. Dixon, C. Mei: Finite element analysis of large-amplitude panel flutter of thin laminates, *AIAA Journal*, **31** (1993), pp. 701-707.

- [24] K. N. Koo, W. S. Hwang: Effects of hysteretic and aerodynamic damping on supersonic panel flutter of composite plates, *Journal of Sound and Vibration*, **273** (2004), pp. 569-583.
- [25] R. C. Zhou, Z. Lai, D. Y. Xue, J.-K. Huang, C. Mei: Suppression of nonlinear panel flutter with piezoelectric actuators using finite element method, *AIAA Journal*, **33** (1995), pp. 1098-1105.
- [26] K. D. Frampton, R. L. Clark, E. H. Dowell: Active control of panel flutter with piezoelectric transducers, *Journal of Aircraft*, **33** (1996), pp. 768-774.
- [27] L. Librescu, P. Marzocca: Advances in the linear/nonlinear control of aeroelastic structural systems, *Acta Mechanica*, **178** (2005), 147-186.
- [28] D. Y. Xue, C. Mei: Finite element nonlinear panel flutter with arbitrary temperatures in supersonic flow, *AIAA Journal*, **31** (1993), pp. 154-162.
- [29] Y. C. Fung: Some Recent Contribution to Panel Flutter Research, *AIAA Journal*, **1** (1963), pp. 898-909.
- [30] E. H. Dowell: Aerodynamic Boundary Layer Effects on Flutter and Damping of Plates, *AIAA Journal*, **10** (1973), pp. 734-738.
- [31] E. H. Dowell: Nonlinear Flutter of Curved Plates, *AIAA Journal*, **7** (1969), pp. 424-431.
- [32] E. H. Dowell: Nonlinear Flutter of Curved Plates II, *AIAA Journal*, **8** (1970), pp. 259-261.
- [33] Y. Matsuzaki: Natural Vibration and Panel Flutter of Cylindrically Curved Panels, NAL TR-315T (1973)
- [34] W. J. Anderson and K. H. Hsu: Engineering Estimates for Supersonic Flutter of Curved Shell Segments, *AIAA Journal*, **8** (1970), pp. 446-451.
- [35] M. N. Bismark-Nasr: Supersonic Panel Flutter Analysis of Shallow Shells, *AIAA Journal*, **31** (1993), pp. 1349-1351.
- [36] I. Gursul, R. Gordnier, and M. Visbal: Unsteady aerodynamics of nonslender delta wings, *Progress in Aerospace Sciences*, **41** (2005), pp. 515-557.

- [37] R. V. Doggett and D. L. Soistmann: Low-Speed Flutter Characteristics of Some Simple Low-Aspect-Ratio Delta-Wing Models, *Journal of Aircraft*, **29** (1992), pp. 273-279.
- [38] D. Tang, J. K. Henry and E.H. Dowell: Limit Cycle Oscillations of Delta Wing Models in Low Subsonic Flow, *AIAA Journal*, **37** (1999), pp. 1355-1362.
- [39] D. Tang and E. H. Dowell: Effects of Angle of Attack on Nonlinear Flutter of a Delta Wing, *AIAA Journal*, **39** (2001), pp. 15-21.
- [40] P. J. Attar, E. H. Dowell, D. M. Tang: A Theoretical and Experimental Investigation of the Effects of a Steady Angle of Attack on the Nonlinear Flutter of a Delta Wing Plate Model, *Journal of Fluids and Structures*, **17** (2003), pp. 243-259.
- [41] T. H. Pulliam, J. L. Steger: Implicit Finite-Difference Simulations of Three-Dimensional Compressible Flow , *AIAA Journal*, **18**, 2 (1980), pp. 159-167.
- [42] P. D. Thomas, C. K. Lornbard : Geometric Conservation Law and Its Application Flow Computations Moving Grid, *AIAA Journal*, **17**,10 (1979), pp. 1030-1037.
- [43] M. R. Visval, R. E. Gordnier : A High-Order Flow Solver For Deforming and Moving Meshes, AIAA paper 2000-2619 (2000).
- [44] 藤井 孝蔵 : 流体力学の数值計算法 , 東京大学出版会 (1994).
- [45] A. J. Chorin: Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations, *Mathematics of Computation*, **22**, Oct (1968), pp.742-762.
- [46] S. E. Rogers, D. Kwak : Upwind Differencing Scheme for the Time-Accurate Incompressible Navier-Stokes Equations, *AIAA Journal*, **28** (1990), pp. 253-262.
- [47] S. E. Rogers, D. Kwak, C. Kiris: Steady and Unsteady Solutions of the Incompressible Navier-Stokes Equations, *AIAA Journal*, **29** (1991), pp. 603-610.
- [48] E. Turkel : Preconditioned Methods for Solving the Incompressible and Low Speed Compressible Equations, *Journal of Computational Physics*, **72** (1987), pp.277-298.
- [49] 大宮 司久明, 三宅 裕, 吉澤 徹, ”乱流の数值流体力学,” 東京大学出版会.
- [50] C.-Y. Chia: Nonlinear Analysis of Plates, McGRAW-HILL (1980).

- [51] 数值流体力学編集委員会：格子形成法とコンピュータグラフィックス, 東京大学出版会 (1995).
- [52] M. Vinokur: On one-dimensional stretching functions for finite-difference calculations, *Journal of Computational Physics*, **50**,2 (1983), pp. 215-234.
- [53] L. E. Eriksson: Generation of boundary-conforming grids around wingbody configurations using transfinite interpolation , *AIAA Journal*, **20**,10 (1982), pp. 1313-1320.
- [54] B. van Leer: Toward the Ultimate Conservative Difference Scheme 4, A New Approach to Numerical Convection, *Journal of Computational Physics*, **23** (1977), pp.276-299.
- [55] B. van Leer: Toward the Ultimate Conservative Difference Scheme 5, A Second-Order Sequel to Godunov's Method, *Journal of Computational Physics*, **32** (1979), pp.101-136.
- [56] W. K. Anderson, J. L. Thomas, B. van Leer: Comparison of Finite Volume Flux Vector Splitting for the Euler Equations, *AIAA Journal*, **24**, (1986) pp. 1453-1460.
- [57] A. Harten, B. Enquist, S. Osher, S. R. Chakravathy: Uniformly High Order Accurate Essentially Non-oscillatory Schemes 3, *Journal of Computational Physics*, **71** (1987), pp.231-303.
- [58] C. W. Shu, S. Osher: Efficient Implementation of Essentially Non-oscillatory Shock-Capturing Schemes: *Journal of Computational Physics*, **77** (1988), pp.439-471.
- [59] C. W. Shu, S. Osher: Efficient Implementation of Essentially Non-oscillatory Shock-Capturing Schemes 2: *Journal of Computational Physics*, **83** (1989), pp.32-78.
- [60] J. Casper and H. L. Atkins : A Finite-volume High-order ENO Schemes for Two-dimensional Hyperbolic Systems, *J. Comp. Phys.*,**106** (1993), pp. 62-76.
- [61] K. Itoh, H. Tanno, M. Takahashi: A Pointwise Non-oscillatory Shock Capturing Scheme , Proc. of *The 5th Int. Symp. on Compt. Fluid Dynamics*, **3** (1993), pp. 370-375.
- [62] 前田: 圧縮性せん断層における擾乱の成長に関する研究, 博士論文, 名古屋大学大学院工学研究科 (1996).

- [63] G. S. Jiang and C. W. Shu: Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes, *Journal of Computational Physics*, **126** (1996), pp.202-228.
- [64] X. D. Liu, S. Osher and T. Chan: Weighted Essentially Non-oscillatory Scheme, *Journal of Computational Physics*, **115** (1994), pp.200-212.
- [65] Y. Wada, M. S. Liou: A Flux Splitting Scheme with High-Resolution and Robustness for Discontinuities, NAL SP-27, (1994) pp. 117-122.
- [66] Roe, P. L. : Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes, *Journal of Computational Physics*,**43** (1981), pp. 357-372.
- [67] Steger, J. L., Warming, R. F. : Flux Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamics Equations with Application to Finite Difference Methods,*Journal of Computational Physics*, **40** (1981), pp. 263-293.
- [68] B. van Leer:Flux Vector Splitting for the Euler Equation, *Lecture Notes in Physics*, **170**, *Eighth International Conference of Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Springer-Verlag (1981), pp. 507-512.
- [69] M. S. Liou: A Sequel to AUSM: AUSM+, *Journal of Computational Physics*, **129** (1996), pp. 364-382.
- [70] M. S. Liou: A Further Development of the AUSM+ Scheme Towards Robust and Accurate Solutions for All Speeds, AIAA paper 2003-4116 (2003).
- [71] E. Shima, T. Jounouchi: Role of CFD in Aeronautical Engineering (No. 14) -AUSM Type Upwind Schemes-, 第14回航空機計算空気力学シンポジウム論文集, 航空宇宙技術研究所特別資料34号, NAL SP-34 (1997).
- [72] B.S. Baldwin, H. Lomax: Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows, AIAA paper 78-257 (1978).
- [73] 大宮, 三宅, 吉澤: 乱流の数値流体力学 モデルと計算法, 東京大学出版会 (1998).
- [74] D. C. Wilcox: Turbulence Modeling for Cfd (2nd edition), D C W Industries, (2002)
- [75] A. Jameson, W. Schmidt, E. Turkel: Numerical Simulation of the Euler Equations by Finite Volume Method Using Runge-Kutta Time Stepping Schemes, AIAA paper 81-1259 (1983).

- [76] C. B. Laney: Computational Gasdynamics, Cambridge University Press (1998).
- [77] R. M. Beam, R. F. Warming: An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations, *AIAA Journal*, **16** (1976), pp. 393-402.
- [78] S. Yoon, A. Jameson: Lower-upper Symmetric-Gauss-Seidel method for the Euler and Navier-Stokes equations , *AIAA Journal*, **26** (1988), pp. 1025-1026.
- [79] S. Yoon, D. Kwak: Implicit Navier-Stokes Solver for Three-Dimensional Compressible Flows, *AIAA Journal*, **30** (1992), pp. 2653-2659.
- [80] K. Fujii, S. Obayashi: High-Resolution Upwind Scheme for Vortical-Flow Simulations, *Journal of Aircraft*, **26** (1989), pp. 1123-1129.
- [81] I. Menshov, Y. Nakamura: An Implicit advection upwind splitting scheme for hyperbolic air flows in thermochemical nonequilibrium, 6th International Symposium on CFD (1995).
- [82] H. Luo, J. D. Bauma, R. Lohnerb: An accurate, fast, matrix-free implicit method for computing unsteady flows on unstructured grids, *Computers&Fluids*, **30** (2001) pp. 137-159.
- [83] D. Sharov, H. Luo, J. D. Baum, R. Lohner: IMPLEMENTATION OF UNSTRUCTURED GRID GMRES+LU-SGS METHOD ON SHARED-MEMORY, CACHE-BASED PARALLEL COMPUTERS, AIAA paper 2000-0927 (2000).
- [84] 嶋：構造/非構造格子 CFD のための簡単な陰解法，第 29 回流体力学講演会講演集 (1997) , pp. 325-328.
- [85] S. Obayashi, K. Kuwahara: An Approximate LU Factorization Method for the Compressible Navier-Stokes Equations, *Journal of Computational Physics*, **63** (1986), pp. 157-167.
- [86] 泉, 谷口: 移動境界を含む流動解析の研究, 日本機械学会論文集 (B 編) 第 60 巻, 第 572 号 (1994), pp. 1218-1225.
- [87] 中村, 賈, 水野: 任意に運動する物体周りの非圧縮性流れの計算法, 日本航空宇宙学会誌, 第 41 巻, 第 469 号 (1993), pp. 96-103.

- [88] 数値流体力学編集委員会: 移動境界流れ解析, 東京大学出版会, 1995.
- [89] G. V. Candler, M. J. Wright: Data-Parallel Lower-Upper Relaxation Method for Reacting Flows, *AIAA Journal*, **32** (1994), pp2380-2386.
- [90] D. Sharov, H. Luo, J. D. Baum, R. Lohner: IMPLEMENTATION OF UNSTRUCTURED GRID GMRES+LU-SGS METHOD ON SHARED-MEMORY, CACHE-BASED PARALLEL COMPUTERS, AIAA paper 2000-0927 (2000).
- [91] 嶋: HSCT 模型の数値解析 (その2), 航空宇宙数値シミュレーション技術シンポジウム論文集, 航空宇宙技術研究所特別資料 41 号 (NAL SP-41) .
- [92] J. C. Brown, J. M. Harvey: Large Deflections of Rectangular Plates Subjected to Uniform Lateral Pressure and Compressive Edge Loading, *J. Mech. Eng. Sci.*, **11** (1969), pp. 305-317.
- [93] 戸川: 有限要素法による振動解析, サイエンス社 (1975).
- [94] 鷺津, 宮本, 山田, 山本, 川井: 有限要素法ハンドブック I 基礎編, 培風館 .
- [95] 鷺津, 宮本, 山田, 山本, 川井: 有限要素法ハンドブック II 基礎編, 培風館 .
- [96] Maurice Petyt: Introduction to finite element vibration analysis, Cambridge University Press (1990).
- [97] 栖原: コンピュータによる構造工学講座 平板の曲げ理論, 培風館, (1972).
- [98] 川股: コンピュータによる構造工学講座 シェル構造解析, 培風館, (1974).
- [99] O. C. Zienkiewicz : The finite element method, McGraw-Hill (1977).
- [100] L. Djayapertapa and C. B. Allen : Numerical Simulation of Active Control of Transonic Flutter, ICAS 2002 Congress CD-ROM (2002), 411.
- [101] D. M. Schuster, D. D. Liu, L. J. Huttzell: Computational Aeroelasticity: Success, Progress, Challenge, *Journal of Aircraft*, **40** (2003), pp. 843-856.
- [102] J. Reuther, J. Jameson, J. Farmer, L. Martinelli, D. Saunders: Aerodynamic Shape Optimization of Complex Aircraft Configurations via an Adjoint Formulation, AIAA paper 96-0094 (1996).

- [103] R. E. Bartels: Mesh Strategies for Accurate Computation of Unsteady Spoiler and Aeroelastic Problems, *Journal of Aircraft*, **37** (2000), pp. 521-525.
- [104] C. Degand, C. Farhat: A three-dimensional torsional spring analogy method for unstructured dynamic meshes, *Computers & Structures*, **80** (2002), pp.305-316. **80** (2002), pp.305-316.
- [105] M. J. Smith, D. H. Hodges, C. E. S. Cesnik: Evaluation of Computational Algorithms Suitable for Fluid-Structure Interactions, *Journal of Aircraft*, **37** (2000), pp. 282-294.
- [106] G. S. L. Goua, K. J. Badcock, M. A. Woodgate, B. E. Richards: Extrapolation Effects on Coupled Fluid Dynamics/Computational Structural Dynamics Simulations, *AIAA Journal*, **41** (2003), pp. 312-313.
- [107] C. H. Tai, Y. Zhao: Parallel unsteady incompressible viscous flow computations using an unstructured multigrid method, *Journal of Computational Physics*, **192** (2003), pp. 277-311.
- [108] M. R. Visbal, R. E. Gordnier: A High-Order Flow Solver for Deforming and Moving Meshes, AIAA paper 2000-2619 (2000).
- [109] 鈴木，山田，成田，齊藤：シェルの振動入門，コロナ社
- [110] 石井，柳沢：遷音速パネルフラッタの研究，NAL TR-74 (1964).
- [111] 中井，橋爪，中村：航空技術研究所 (60cm × 60cm) 遷音速フラッタ試験設備の計画と整備試験，NAL TR-5 (1960).
- [112] M. A. Sylvester: Experimental Studies of Flutter of Buckled Rectangular Panels at Mach Number 1.2 to 3.0 Including Effect of Pressure Difference and of Panel Width-Length Ratios, NACA-RM-L55 I 30 (1955).
- [113] L. Muhlstein, P. A. Gaspers and D. W. Riddle: An Experimental Study of The Influence of The Turbulent Boundary Layer on Panel Flutter, NASA TN D-4486 (1968).

- [114] P. A. Gasper, L. Muhlstein, D. N. Petroff: Further Experimental Results on The Influence of The Turbulent Boundary Layer on Panel Flutter, NASA TN D-5798 (1970).
- [115] 古田, 中村: フラッタ運動するデルタ翼の非定常後流解析, 第 37 回流体力学講演会講演集 (2005), pp.195-198.

謝辞

本研究は指導教官である中村佳朗教授の指導のもと遂行してきました。バルブ振動問題の共同研究をしていた時、手探りで始めた流体構造連成解析の研究ですが、最終的に様々なフラッタ現象を計算し、私の博士論文としてまとめることができました。流体力学の基礎から研究の進め方にいたるまで、終始熱心にご指導していただきました中村佳朗教授に心から感謝いたします。メンショフ助教授には、数値計算手法に関して数々の助言を頂きました。心より感謝いたします。

また、計算環境の整備に御尽力いただいたシステム管理者の方々、数々の助言、激励をしていただいた流体力学講座の諸兄にもこの場をかりて御礼を申し上げます。特に、2005年までに助手を勤めていた、現在(株)本田技術研究所の金子宗嗣博士には、多くの助言を頂きました。また、共に空力弾性の研究をした東京電力(株)の八木直人君、日本ガイシ(株)の古田泰之君には、お世話になりました。ありがとうございました。

本研究は、文部科学省21世紀COEプログラム「計算科学フロンティア」に支援して頂きました。その支援に感謝いたします。

そして、アクセスパネル流体構造連成解析の共同研究の話を頂いた三菱重工(株)名古屋航空宇宙システム製作所の海田武司博士、伊藤文博氏に感謝いたします。

研究業績

原著論文

1. 橋本 敦, 古田 泰之, 八木 直人, 中村 佳朗: 低速デルタ翼フラッタ現象における大変形振動流れ場の解析, 日本航空宇宙学会論文集, Vol 55, No. 637 (2007).
2. 橋本 敦, 八木 直人, 中村 佳朗: 層流境界層の超音速パネルフラッタへの影響, 日本航空宇宙学会論文集 (掲載決定).
3. 橋本 敦, 八木 直人, 中村 佳朗, 伊藤 文博, 海田 武司: 曲面パネルの流体構造連成計算法によるフラッタ解析, 日本航空宇宙学会論文集 (掲載決定).

国際学会発表

1. Atsushi Hashimoto, Igor Men'shov, Yoshiaki Nakamura: Panel Flutter Analysis with a Fluid-Structure Coupled Scheme, AIAA-2003-3721, 33rd AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibits, Orlando, Florida, 23-26 June 2003.
2. Atsushi Hashimoto, Igor Men'shov, Yoshiaki Nakamura: Sound Emission from the Helical Mode of Supersonic Jet, AIAA-2004-2656, 34th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit, Portland, Oregon, June 28-1, 2004
3. Atsushi Hashimoto, Yasuyuki Furuta, Naoto Yagi, Yoshiaki Nakamura: Experimental and Numerical Investigation of Delta Wing Flutter in Low Subsonic Flow, AIAA-2006-3215, 36th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit, San Francisco, California, June 5-8, 2006

国内学会発表

1. 橋本敦, メンショフ・イゴール, 中村佳朗: 遷音速パネルフラッタの連成数値解析, 第16回数値流体力学シンポジウム講演論文集, D27-3 (CD-ROM) (2002).
2. 橋本敦, メンショフ・イゴール, 中村佳朗: 流体と構造の連成計算によるパネルフラッ

- タ解析, 第 34 回流体力学講演会講演論文集, pp. 355-358 (2002).
3. 橋本敦, メンショフ・イゴール, 中村佳朗: 流体と構造の連成計算によるパネルフラッタ解析, 航空宇宙数値シミュレーション技術シンポジウム論文集, SP-57, pp.112-117 (2002).
 4. 橋本敦, イゴールメンショフ, 中村佳朗: 流体と構造の連成問題に対する計算法について, PLAIN センターシンポジウム, 2003 年 2 月 10 日 (月) 宇宙科学研究所
 5. 橋本敦, メンショフイゴール, 中村佳朗: 流体・構造連成スキームによる遷音速パネルフラッタ解析, 第 34 回日本航空宇宙学会年会講演会講演集, pp.256-259 (2003)
 6. 橋本敦, メンショフイゴール, 中村佳朗: 遷音速領域におけるパネルフラッタの解析, 第 35 回流体力学講演会講演論文集, pp. 65-68 (2003)
 7. 橋本敦, メンショフ・イゴール, 中村佳朗: 超音速ジェットから発生するスクリーチ音の直接計算, 流体力学会年会講演論文集, pp.662-663 (2004).