確率と期待効用について

渡　辺　武　志

[**抄録**] 経済学の分野で「ゲーム理論」がある。ゲーム理論は数学（確率など）を利用する教科融合型科目であり、高大連携の有効な教材でもある。この内容は、ゲーム理論で登場する ” 期待効用 ” について高等学校数学 A で学習する ” 期待値 ” を利用する ” 効用に関する期待値 ” を考える。またこの効用に、正負の値を導入する。（この授業は平成１５年度後期に学校特設科目「新教科」で行われた授業の一部である。）

[**キーワード**]　　ゲーム理論、高大の連携、教科融合

1　期待値について

1.1　定義

変量 X の期待値とは次の通り。

X:ある試行の結果によって定まる変量
$x_1, x_2, \cdots, x_n$: X のとりうる値
$p_1, p_2, \cdots, p_n$: X が $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の値をとる確率
とすると、X の期待値 E は

$$E = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$$
$$(p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1)$$

1.2　期待値の例

問題　　赤玉２個、白玉３個が入っている袋がある。この袋から玉を２個同時に取り出し、取り出された赤玉１個について賞金１００円を受け取るゲームがある。このゲームの参加料が９０円であるとき、このゲームに参加することは得であるといえるか？

（解）取り出された２個に含まれる赤玉の個数は $0, 1, 2$ のいずれかである。
・赤玉が０個となる確率は　$\dfrac{{}_2C_0 \times {}_3C_2}{{}_5C_2} = \dfrac{3}{10}$
・赤玉が１個となる確率は　$\dfrac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} = \dfrac{6}{10}$
・赤玉が２個となる確率は　$\dfrac{{}_2C_2 \times {}_3C_0}{{}_5C_2} = \dfrac{1}{10}$
よって、X の値、$0, 100, 200$ をとる確率 $\dfrac{3}{10}, \dfrac{6}{10}, \dfrac{1}{10}$

についてゲームに参加したときの賞金額の期待値 E は

$$E = 0 \times \frac{3}{10} + 100 \times \frac{6}{10} + 200 \times \frac{1}{10} = \frac{800}{10} = 80$$

よって、受け取る金額の期待値がゲームの参加料 90 円より小さいから、このゲームに参加することは得であるといえない。（この問題は収益性の尺度にはなりうるがリスクの尺度にはならない）

2　期待効用について

2.1　定義

受け取る金額の期待値でなく、金額の効用の期待値を用いる。変量 X に対する期待効用とは次の通り。

X:ある試行の結果によって定まる変量
$x_1, x_2, \cdots, x_n$: X のとりうる値
$p_1, p_2, \cdots, p_n$: X が $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の値をとる確率
$u(x_i)$: x_i の値に対する効用
($u(x_i)$ は x_i を変数とする関数)
とすると、X の期待効用 L は

$$L = u(x_1)p_1 + u(x_2)p_2 + \cdots + u(x_n)p_n$$
$$(p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1)$$

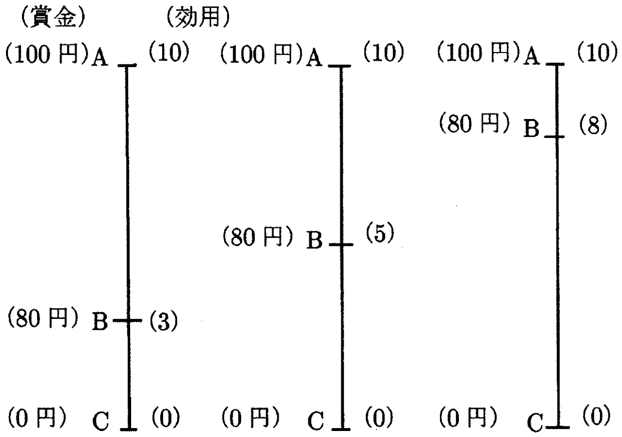
2.2　期待値との違い・問題例

違い
期待効用を用いると、抽選券のようなリスクをともなったものの価値を 主観的に 評価することができる。

問題　　赤玉２個、白玉３個が入っている袋がある。この袋から玉を２個同時に取り出し、取り出された赤玉１個について賞金１００円を受け取るゲームがある。このゲームの参加料が８０円であるとき、リスクを考えるとあなたはこのゲームに参加しますか？

（解）取り出された３個に含まれる赤玉の個数は $0, 1, 2$ のいずれかである。
・赤玉が０個となる確率は　$\dfrac{{}_2C_0 \times {}_3C_2}{{}_5C_2} = \dfrac{3}{10}$
・赤玉が１個となる確率は　$\dfrac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} = \dfrac{6}{10}$
・赤玉が２個となる確率は　$\dfrac{{}_2C_2 \times {}_3C_0}{{}_5C_2} = \dfrac{1}{10}$
ここで、X の値、$0, 100, 200$ に対する期待効用を考える。
効用の数値の決定は、主観的な距離感を正確に判断す

るもので、距離感を直線上に表し、対応を明示する。
（例）主観的距離感
リスク愛好者　　リスク中立者　　リスク回避者



上の図は主観的距離感を反映させる数直線で、AB 間の距離と BC 間の距離の比率が同じ比率となるよう効用の数値を決めている。リスク回避者の場合、B 点から見た C 点への主観的距離はとても大きくなる。つまり、各点の高さはそれぞれの賞金に対する主観的評価を表している。ここで期待値について
ゲームに参加したときの賞金額の期待値 E は

$$E = 0 \times \frac{3}{10} + 100 \times \frac{6}{10} + 200 \times \frac{1}{10} = \frac{800}{10} = 80$$

今、リスク中立者の場合は、期待値 80 円に効用 5 を、200 円に対して効用 10 を、0 円に対して効用 0 を、それぞれ対応させている。
よってそれぞれの期待効用 L は
・リスク愛好者

$$L = 0 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{6}{10} + 10 \times \frac{1}{10} = \frac{28}{10} = 2.8$$

・リスク中立者

$$L = 0 \times \frac{3}{10} + 5 \times \frac{6}{10} + 10 \times \frac{1}{10} = \frac{40}{10} = 4$$

・リスク回避者

$$L = 0 \times \frac{3}{10} + 8 \times \frac{6}{10} + 10 \times \frac{1}{10} = \frac{58}{10} = 5.8$$

となり、数値 4 を基準に数値が大きいほどリスクを回避する傾向が強く、数値が小さいほどリスクに対して挑戦的である。つまり、答えは人によって違う可能性があり、このゲームに参加をするかどうかの判断が、数値によって説明できる。
(リスク回避者は $4 < 5.8$ となるから、このゲームに参加しない。）なお、上記の場合、リスク中立者の期待効用の数値を基準として判断をする。授業では、基準を 0 とし、授業の構成を考えた。

3　授業の内容

3.1　内容

今回、新教科の目標は”未来の予測”をテーマとし、理科、社会、数学の各グループで授業（場合によっては合同授業）が行われた。数学グループはゲーム理論を学習した。この授業の内容はその準備として、確率（可能性を自分の判断で見極める）と期待効用についての学習をした。なお、効用の意味が理解できるよう授業の問題を精選した。
授業で使用したプリントは資料に掲載する。

3.1.1　期待値

期待値を復習し、生徒に問題を出題し考えた。
～確率～
未来の予測３．　確率（可能性を自分の判断で見極める）
準備：期待値
問題
ある抽選券が 1 枚ある。賞金は 1 等　10000 円、2 等　5000 円、3 等　がはずれ（0 円）とする。それぞれの賞金が当たる確率は $\frac{1}{3}$ のとき、この抽選券 C の賞金の期待値を求めよ。
（解答：生徒はこの問題を解いた）

$$C = (\frac{1}{3} \times 10000) + (\frac{1}{3} \times 5000) + (\frac{1}{3} \times 0) = \frac{15000}{3} = 5000$$

よって期待値は 5000 円

3.1.2　効用の数値決定

次に生徒でグループをつくり、この抽選券を買うとすればいくらまで出すか検討した。ところで、
ぼく・私ならこの抽選券を買うとき
（　　　　　　　　）円までなら出そう！
他の人はどう？今回は極端な例をあげると
（実際は生徒を 3 人 1 組にして考えた）
｡名前　基準　　お金　5000　円
｡名前　本人　　お金　9000　円
｡名前　A 君　　お金　6000　円
｡名前　B 君　　お金　2000　円

・効用（主観的評価の尺度）について次のステップで数値を決定した。

① 縦の直線（数直線）を用意し各賞の賞金金額を点にとる。(注意：このケースの場合、期待値と２等の賞金は同じである)

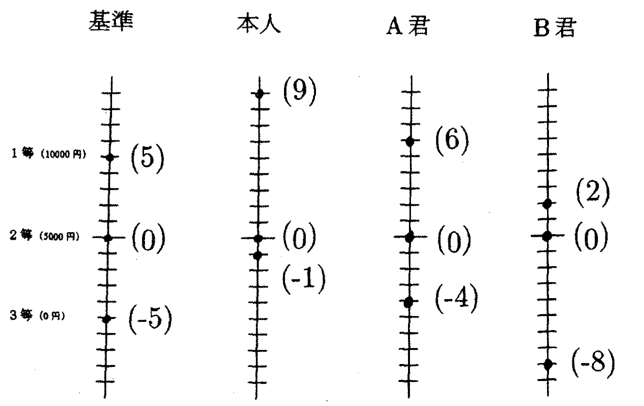
② 各点の距離をかんがえる。このとき、期待値：5000円（この場合、２等の金額と一致）を原点：0と対応させて１等と３等に対する各点の２点間の距離の長さを10となるようにきめる。

（但し、この場合はこのくじを買った金額÷1000の数値が１等に対応する効用の数値となっている）

③ 先に基準（リスク中立者）の説明をする。この例では１等（10000円）が5、２等（5000円）が0、３等(0円）が－５にそれぞれ対応している。

④ 自分の効用や他の生徒の効用をそれぞれ書き込む。

（例）　主観的距離感



3.1.3　抽選券の価値の評価：期待効用

次に抽選券の効用の期待値を計算し、生徒自身がリスク志向なのか、中立志向なのか、安全志向なのかをしらべた。またそれをグラフで示す作業を行った。(ただしグラフは連続関数で微分可能であるとする。)

最後に自分と他の人と比較して感想を書いた。

・ここで抽選券の効用の期待値（期待効用）はそれぞれ、

基準

$$L = 5 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + (-5) \times \frac{1}{3} = 0$$

本人

$$L = 9 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + (-1) \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

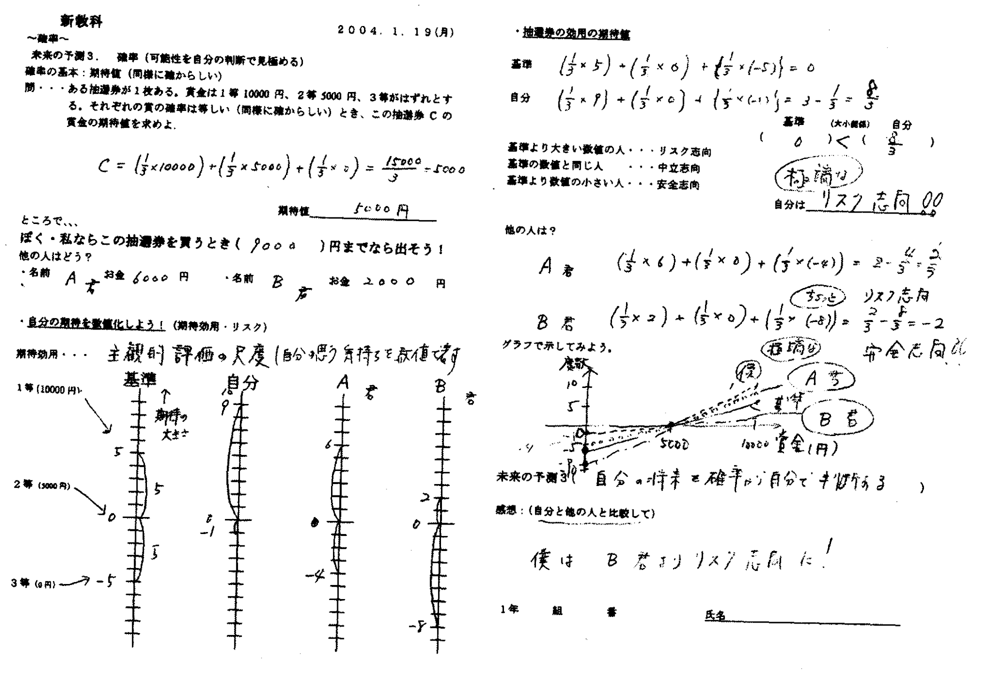
A君

$$L = 6 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + (-4) \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

B君

$$L = 2 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + (-8) \times \frac{1}{3} = -2$$

となる。今の場合、リスク愛好者の値は正、リスク回避者の値は負となる。B君は負の値をとり、基準より安全志向であることがわかる。授業では生徒が他の生徒と比較したりするなど、生徒自身を基準として議論をした。(特に数値による議論ができることを強調した)なお、今回の題材は中立志向の値をとる生徒が多かったため、２.であげた題材を、数値化するとさらによい反応があったと思われる。その教材をまた作ろうと考えている。



4　期待効用を基礎としたゲーム理論の授業について

今回は期待効用などを基礎としながら、渡辺グループでは半年をかけてゲーム理論を学習した。ゲーム理論の中でゲームの到達点（ナッシュ均衡）については、大学で学ぶ厳密な数学的な議論が必要なため、直感的な部分としての認識にとどめた。具体的な学習内容は

1. 需要曲線と供給曲線について
2. 期待効用について
3. 戦略型ゲームとナッシュ均衡について
4. 展開型ゲームについて

であった。最後に新教科のグループ別の発表ではその内容の成果を発表した。生徒自身は高校1年生の確率をすでに学習済みであるため、生徒は興味をもち、授業を受けていた。

新教科　　2004. 1. 26(月)

～ゲーム理論1～

問）
やったことがあるゲームをあげてみよう。

モノポリー　オセロ　将棋，7並べ.

ゲームをするときに最低限必要なことは？

・プレーヤー
・戦略
・利得

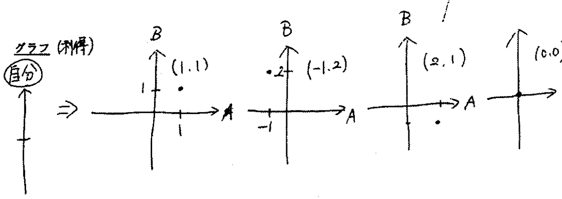
・ゲーム理論は　上の3つを数値化し,数学的に　学ぶ理論のこと。
一人での予測から相手がいる予測に！

1．非協力型ゲーム理論（まずは二人から）
・利得表（期待効用）
利得・・・プレーヤーが獲得できる利益
例1）林間学校でレクをする。二人（A,B）でみんなを笑わせることになりそうだ。
・二人がとることができる行動は　出る　出ない.　する
・起こりうる行動は（　4　）通り
具体的には

A	出る	出る	出ない	出ない
B	出る	出ない	出る	出ない

さぼる

グラフ（利得）　自分

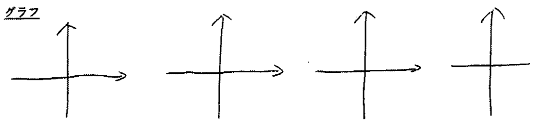


(0.0)（注意）・・でも社会通念上,許されない　←そのような研究もある

感想

問・・・あるクラスでは授業後、二人で教室掃除をする。今日は A,B の担当であった。
・二人がとることができる行動は　　掃除を　する　さぼる
・起こりうる行動は　（　4　）　通り　　(自分の主観を入れる)　数値化する
具体的には、

グラフ



利得表

A＼B	出る $\frac{1}{2}$	出ない $\frac{1}{2}$
出る $\frac{1}{2}$	(1,1)	(-1,2)
出ない $\frac{1}{2}$	(2,-1)	(0,0)

ちなみに期待利得は

$\pi_A = 1\times\frac{1}{4} + (-1)\times\frac{1}{4} + 2\times\frac{1}{4} + 0\times\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$\pi_B = 1\times\frac{1}{4} + 2\times\frac{1}{4} + (-1)\times\frac{1}{4} + 0\times\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$\pi_A = \pi_B$　大きい方が期待高い.

ではお互いにとって一番よい選択とは？

2人ともさぼる.　←均衡点

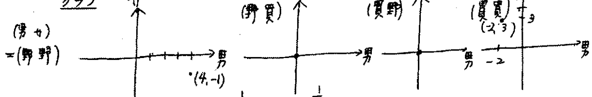
1年　組　番　氏名

新教科　　2004. 2. 9(月)

～ゲーム理論2～　ナッシュ均衡

<前回の復習>
問題・・・カップルで、遊びに行くことにした。しかし、どこに行くかでもめている。男性はナゴヤドームで野球観戦をしたくて、女性は百貨店で買い物をしたい。但し、二人とも一緒に行動しなければいけない。
（1）この状況に適切と思われる利得を与えたうえで、自分で利得表を完成せよ。
・二人がとることができる行動は　　男性　野球にいく　買いものをする
　　　　　　　　　　　　　　　　　女性　野球にいく　買いものをする
・起こりうる行動は（　4.　）通り

グラフ



利得表

男＼女	野 $\frac{1}{2}$	買 $\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$ 野	(4,-1)	(0,0)
$\frac{1}{2}$ 買	(0,0)	(-2,3)

（2）それぞれの確率が2分の1のとき、期待効用を求めよ。（利得の期待値）　前回との注意！

男　$E_1 = 4\times\frac{1}{4} + 0\times\frac{1}{4} + 0\times\frac{1}{4} + (-2)\times\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

女　$E_2 = -1\times\frac{1}{4} + 0\times\frac{1}{4} + 0\times\frac{1}{4} + 3\times\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

このゲームのことを　戦略型ゲーム　という。

（2）の期待効用で、男性と女性では

上の場合は，両方期待は同じ（どちらの思いも）

○　どのようにして他人の行動を予測するか？

STEP1
仮の予想 S_2

STEP2
S_2の条件での
S_1の選択

STEP3
S_1の下での
S_2の最適な選択 S_2'

$S_2 = S_2'$　　修正

o.k
予想の確定.

例）

A＼B	パソコン	電機
パソコン	(2,2)	(5,4)
電機	(4,5)	(1,1)

ナッシュ均衡　・・・ゲームの到達点.

ゲームに参加するすべてのプレイヤーの予想が
互いに的中している状態.

練習問題

A＼B	戦略1	2
戦略1	(1,1)	(2,4)
2	(2,-1)	(5,6)
3	(4,3)	(-3,5)

予想

ナッシュ均衡は？

感想

1年　組　番　氏名

新教科 2004. 2. 16(月)

～ゲーム理論３～　ナッシュ均衡

＜前回の復習＞

次の利得表にナッシュ均衡が存在するか？あれば答えよ。(Aが自分の店とする)

（1）

A＼B	パソコン	家電
パソコン	(1, 1)	(4, 6)
家電	(6, 4)	(2, 2)

存在する。(2つ)

Ⓐ　B パ → A 家 → B パ　Bがパソコンにすると予想

Ⓐ　B 家 → A パ → B 家　Bが家電にすると予想

（2）

A＼B	戦略1	戦略2
戦略1	(1, 1)	(2, 4)
戦略2	(2, 2)	(5, 6)
戦略3	(4, 3)	(-3, 5)

存在する。(1つ)

Ⓐ　B 1 → A 3 → B 2　~~Bが1をとる~~

Ⓐ　B 2 → A 2 → B 2　Bが2をとると予想

○ナッシュ均衡が存在しない例

じゃんけん　（二人で）　A，B

勝ったら、　お菓子をもらう　　負けたら　お菓子をあげる

問）じゃんけんの利得表を作成し、ナッシュ均衡があるか調べよ。

A＼B	ぐ	ち	ぱ
ぐ	(0, 0)	(10, -10)	(-10, 10)
ち	(-10, 10)	(10, 0)	(10, -10)
ぱ	(10, -10)	(-10, 10)	(0, 0)

ゼロ和ゲーム

ナッシュ均衡は存在しない

実際にやってみよう

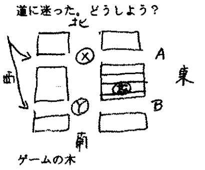
Ⓐ Ⓑ Ⓐ Ⓑ

ぐ → ぱ → ち →

展開型ゲーム

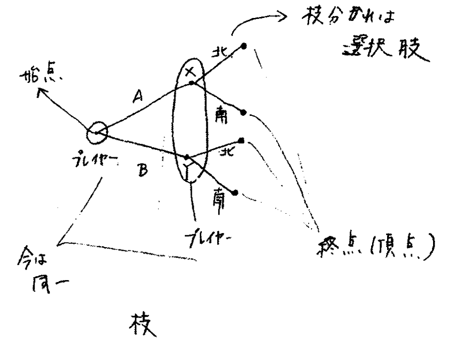
道に迷った。どうしよう？

自分が右通りか左通りかどちらを歩いているかわからない



東に曲がるべきか、西に曲がるべきか？

ゲームの木



感想

1年　　組　　番　　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

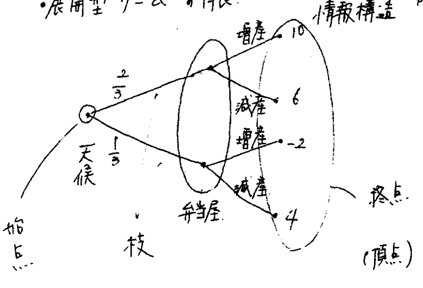
新教科 2004. 2. 23(月)

～ゲーム理論４～　展開型ゲーム

練習問題１：

遊園地でお弁当を販売することになった。お弁当は晴れのときはとてもよく売れて、雨のときはあまり売れない。お弁当の販売は天候により左右され、今３分の２の確率で晴れて３分の１の確率で雨がふると仮定する。晴れのとき、増産すると、利益は１０減産すると利益は６　雨のとき、増産すると－２、減産すると利益は４とするときの展開型ゲームを記述せよ。

・展開型ゲームの特長 … 時間構造 情報構造 が明示される



○　展開型ゲームから戦略型ゲームへの変換

例）結婚に向けてのかけひき　　　　A．B：カップル（男　女）

利得

A：プロポーズする → B：O.K　(2, 3) = (A, B)

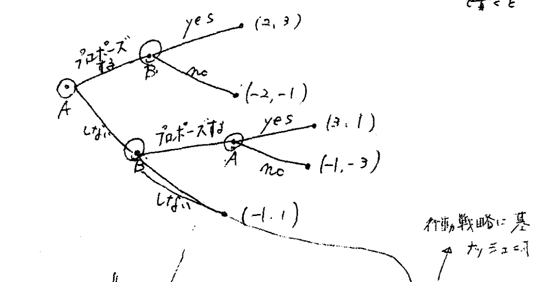
A：　〃　→ B：no　(-2, -1)

A：プロポーズしない → B：プロポーズする → A ok　(3, 1)

A：　〃　→ B：プロポーズする → A no　(-1, -3)

A：　〃　→ B：プロポーズしない　(-1, 1)

展開型ゲーム　　↓ 展開型ゲームで書くと



行動戦略に基 ナッシュ均

戦略型ゲーム　⇓　戦略型ゲームに書きかえ、ナッシュ均衡を求め。

A　　A（本当はいらない）

戦1	プロポーズする	yes
2	プロポーズする	no
3	プロポーズしない	yes
4	しない	no

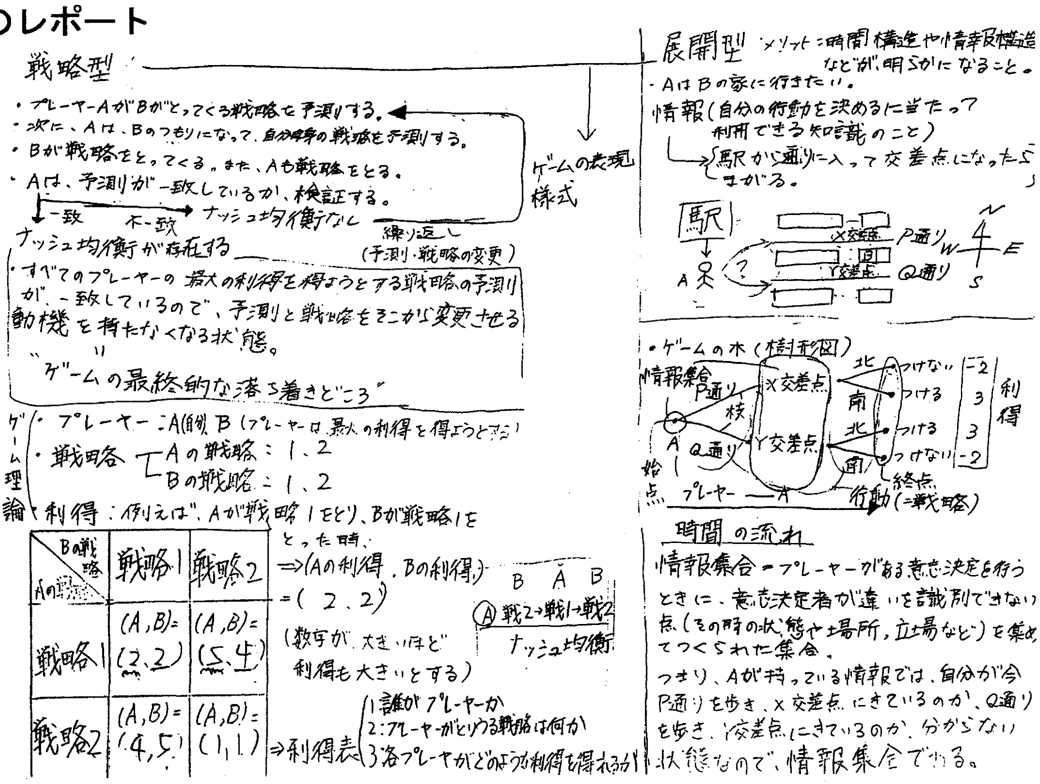
B　　B

戦1	yes	プロポーズする
2	yes	プロポーズしない
3	no	する
4	yes	しない

→ 値は次

組　　番　　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

生徒のレポート



5　おわりに

期待値は確率の応用として数学Aで学習している。この授業の中で、期待効用は本校の理科（物理）の教諭 竹内　史央先生からご助言いただいた。なお、今回は大学との連携がなかった。しかし、今回は高大連携にからむ内容を精読することで、授業をおこなうことも一つの高大連携になるのではないかと考える。

6　参考文献

ゲーム理論について

・入門　ゲーム理論　戦略的思考の科学　佐々木　宏夫　日本評論社　2003

確率について

・数学A　　数研出版　2003