

山地斜面における浸透水の挙動に関する基礎的研究

—傾斜不透水層上の自由地下水面形—

飯 田 修

Osamu IIDA

Study about Seepage Water in Mountainous Areas
— Free-Surface Groundwater Profiles over a Sloping
Impermeable Layer —

目 次

第1章 はじめに	61
第2章 傾斜不透水層上の自由地下水面形	61
第1節 ダルシー則に基づく流れ	61
第2節 傾斜不透水層上の自由地下水面形	63
第3章 定常な自由地下水面形	66
第1節 定常な自由地下水面形	66
第2節 砂モデル実験	69
第3節 斜面両端の外水位による地下水面形	71
第4節 降雨による地下水面形	73
第5節 砂モデル実験における透水係数について	75
第4章 非定常な自由地下水面形	77
第1節 差分方程式について	77
第2節 差分方程式の数値的実験	79
第3節 砂モデル実験	83
第4節 有効空げき率 (ϵ) について	91
第5章 まとめ	93
謝 辞	95
引用文献	96
Summary	97

山地斜面における浸透水の挙動に関する基礎的研究

— 傾斜不透水層上の自由地下水面形 —

第1章 はじめに

日本は地形が急峻で降水量が多いため、毎年、各地で崩壊が発生している。これらの崩壊を支配する因子の数は多い(1)が、地震時に発生するものを除けば、集中する多量の雨水に起因することは明らかである(2)。一般に、斜面に浸透降下した水は、土の単位体積重量の増加やせん断抵抗の減少などを促し、斜面を不安定にする(3)。また、滞水流動する地下水面は、地表面と交差することで崩壊を起こしたりする(4, 5)。そのため、斜面の安定を論ずる際に、斜面内の地下水面を把握する必要がある。

従来の地下水面の研究は、主として、土木構造物内の流れを対象としたため、地下水流あるいは下層となる不透水性基盤が水平もしくは緩傾斜の場合が多く(6, 7)、急傾斜地内について、あまり論じられていなかった。

そこで、本研究は、浸透水の基礎方程式であるダルシーの法則を拡張し、傾斜不透水層上の自由(不圧)地下水面形を求め(第2章)、第3章で、その定常状態を、第4章でその非定常状態について、砂モデル実験とともに、その適用性を検討し、山地斜面への応用の基礎を導きだそうとするものである。

第2章 傾斜不透水層上の自由地下水面形

第1節 ダルシー則に基づく流れ

地下水の流れの基礎は、H. Darcy が実験的に見つけたダルシーの法則に始まる。Darcy の砂の濾過層を用いた実験は、単位時間に濾過層を通過する流量(Q_0)が、濾過層の面積(A_0)および流入出口における水頭圧の差(Δh)に比例し、濾過層の厚さ(L_0)に逆比例するとしている(8)。

$$Q_0 = \frac{c_0 \cdot A_0 \cdot \Delta h}{L_0} \quad (2-1)$$

c_0 は、濾過層に用いる砂による定数である。

(2-1)式は、Dupuit, Forchheimer などによつて重力流に応用されていった。Dupuit は自由地下水面のこう配が小さい重力流について、流速は、水面こう配に比例し、その深さによらないとしている(9)。

物部は、単位長あたりの水頭消費 (dh) に着目して、水平方向の浸透流速 (v_x) を、

$$v_x = -k \sin \theta \quad (2-2)$$

で表わした。 $\sin \theta$ は、

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{dh}{\sqrt{(dx)^2 + (dh)^2}} \\ &= \frac{dh}{dx} \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{dh}{dx}\right)^2}} \\ &= \frac{dh}{dx} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{dh}{dx}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{dh}{dx}\right)^4 - + \dots \right\} \end{aligned} \quad (2-3)$$

で、 θ が小さいとき、右辺大括弧内の第2項以下は無視することができ、(2-2)式は、

$$v_x = -k \frac{dh}{dx} \quad (2-4)$$

となる。流量は、 $q = v_x \cdot h$ から、

$$q = -kh \frac{dh}{dx} \quad (2-5)$$

で、ダルシーの式となる。また、連続の式を

$$\lambda \frac{\partial h}{\partial t} + H_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} + h \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (2-6)$$

で表わし、(2-5)式と合わせて、非定常な地下水面形を求めている(図2-1参照)。

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (H_0 + h) \frac{\partial h}{\partial x} \right\} \quad (2-7)$$

ここで、 H_0 は地下滞水層の深さ、 h は水位、 λ は土砂の空けき割合、 k は透水係数、 t は時間である。そして、 H_0 が h に比べ大きいと仮定し $(H_0 + h)$ の中の h を無視して

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{\lambda} H_0 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (2-8)$$

$H_0 = 0$ のときは

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (2-9)$$

として解を求めている (10)。

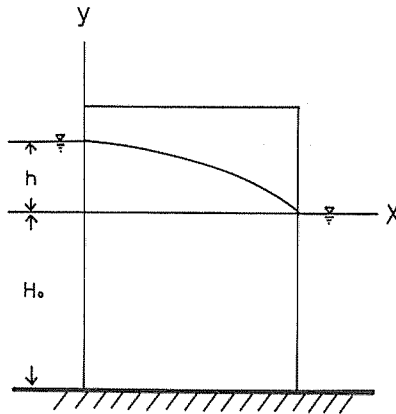


図 2-1 土壌を浸透して流れる地下水面

また、定常流の場合は、(2-7)式で $\partial h / \partial t = 0$ であるので、

$$\frac{d}{dx} \left\{ (H_0 + h) \frac{dh}{dx} \right\} = 0 \quad (2-10)$$

となる。(2-10)式を積分すれば、水平不透水層上の自由地下水面形となる。

$$(H_0 + h) \frac{dh}{dx} = c_1$$

$$\therefore H_0 h + \frac{1}{2} h^2 = c_1 x + c_2 \quad (2-11)$$

第 2 節 傾斜不透水層上の自由地下水面形

傾斜を有する不透水層上の地下水面に、ダルシーの法則を拡張してみる。前節の場合、地下水の流線は、水平あるいは、ほぼ水平であるとしているため、傾斜不透水層上の地下水面への適用は難しい。そこで、図 2-2 に示すように、深さ y の地下水面において、不透水層から a なる位置の微小流体は、微小距離 dx を移動した後の深さに対する相対的位値は変化しないものと考えた (11)。

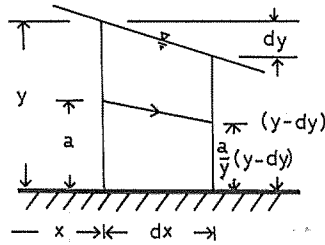


図2-2 地下水の流動方向

これは、流れが層流で漸縮流とみなしうる場合、支障はない。そして、水頭消費として dy を受けるものとすれば、位置 a の微小流体の速度 (v_a) は、

$$v_a = -k \frac{dy}{\sqrt{(dx)^2 + \left(a \cdot \frac{dy}{y}\right)^2}}$$

$$= -k \frac{dy}{dx} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{y} \frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{a}{y} \frac{dy}{dx} \right)^4 - + \dots \right\} \quad (2-12)$$

全流量は、(2-12) 式を、 a について 0 から y まで積分することで得られる。

$$q = \int_0^y v_a da$$

$$= -ky \frac{dy}{dx} \left\{ 1 - \frac{1}{6} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{3}{40} \left(\frac{dy}{dx} \right)^4 - + \dots \right\} \quad (2-13)$$

上式の右辺の大括弧内の第 2 項以下を比較的重要でないとして省略すれば、ダルシーの式となる。

このように、地下水面下の流れが、深さについて相対的位置の変化がないとしたことは、流線がある傾きをもった流れに、ダルシーの法則を拡張できることを意味し、ダルシーの法則を傾斜不透水層上の地下水面に応用することができる。また、(2-13) 式の省略による誤差は、(2-3) 式のそれより小さい。

傾斜不透水層上の地下水面形を考えるために、図 2-3 のような、 x 軸を不透水層に沿った方向水位 (y) を鉛直方向にとる斜交座標系を考える。 α は、不透水層が水平となす角である。 $\alpha = 0$ のとき、直交座標となる。

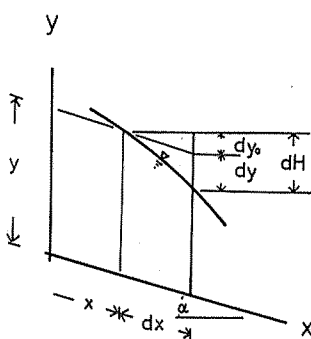


図2-3 傾斜不透水層上の地下水面

地下水が距離 dx を動くことにより、みかけの水頭消費 dH が生じたとすると、 dH は、

$$dH = dy + dy_0 \quad (2-14)$$

dy_0 は不透水層の傾斜によって生じる水頭消費で定数となる。 (dH/dx) は、

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dx} &= \frac{dy + dy_0}{dx} \\ &= \frac{dy}{dx} - \sin \alpha \end{aligned} \quad (2-15)$$

(2-15) 式を、ダルシーの式に代入する。

$$\begin{aligned} q &= -ky \frac{dH}{dx} \\ &= ky \left(\sin \alpha - \frac{dy}{dx} \right) \end{aligned} \quad (2-16)$$

上式は、傾斜不透水層上のダルシーの式となる。一方、連続の式は、 $y = H_0 + h$, $q = y \cdot v$ であるから、(2-6) 式と同じく

$$\epsilon \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = p \quad (2-17)$$

ここで、 p は、降水などによる地下水への水の供給量、 ϵ は、有効空けき率を表わす。

(2-16) 式を微分し、(2-17) 式に代入すると、傾斜不透水層上の自由地下水面形は得られる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial q}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ ky \left(\sin \alpha - \frac{\partial y}{\partial x} \right) \right\} \\ \varepsilon \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ ky \left(\sin \alpha - \frac{\partial y}{\partial x} \right) \right\} &= p \\ \therefore \varepsilon \frac{\partial y}{\partial t} + k \sin \alpha \frac{\partial y}{\partial x} &= k \frac{\partial}{\partial x} \left(y \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \right) + p\end{aligned}\quad (2-18)$$

このように、傾斜不透水層上の自由地下水面形は、物部の式に、傾斜としての項 $k \sin \alpha \times (\partial y / \partial x)$ と水の供給量の項 p が加わった非線形偏微分方程式 (2-18) 式が基本式となる。

第3章 定常な自由地下水面形

本章は、傾斜不透水層上の自由地下水面形のうち、定常な流れについて考え、砂モデル実験を行ない、その有用性を検討してみる。

第1節 定常な自由地下水面形

定常な地下水面は、時刻に関係なく一定のため $(\partial y / \partial t) = 0$ で (2-18) 式は、次式となる。

$$k \sin \alpha \frac{dy}{dx} = k \frac{d}{dx} \left(y \frac{dy}{dx} \right) + p \quad (3-1)$$

(3-1) 式を積分し

$$k \sin \alpha \cdot y = ky \frac{dy}{dx} + px + c_3 \quad (3-2)$$

両辺を k で割り、

$$a = \sin \alpha, \quad b = \frac{p}{k}, \quad c = \frac{c_3}{k} \quad (3-3)$$

とおくと、

$$\begin{aligned}y \frac{dy}{dx} - ay + bx + c &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{ay - bx - c}{y}\end{aligned}\quad (3-4)$$

(3-4) 式は、同次型なので

$$X_d = x + \frac{c}{d}, \quad Y = y \quad (3-5)$$

とおけば,

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dX_d} &= \frac{aY - bX_d}{Y} \\ &= \frac{a\left(\frac{Y}{X_d}\right) - b}{\left(\frac{Y}{X_d}\right)} \end{aligned} \quad (3-6)$$

また,

$$u = \frac{Y}{X_d} \quad \text{or} \quad Y = uX_d \quad (3-7)$$

とおけば,

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dX_d} &= X_d \frac{du}{dX_d} + u \\ X_d \frac{du}{dX_d} + u &= \frac{au - b}{u} \\ \therefore \frac{u}{u^2 - au + b} du &= -\frac{dX_d}{X_d} \end{aligned} \quad (3-8)$$

(3-8) 式は, $(a^2 - 4b)$ 値によって, 次の3式となる。

$$\begin{aligned} a^2 - 4b &> 0 \\ \frac{1}{2} \ln |u^2 - au + b| + \frac{a}{2\sqrt{a^2 - 4b}} \arctan \left| \frac{2u - a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2u - a + \sqrt{a^2 - 4b}} \right| \\ &= -\ln \frac{|X_d|}{c_5} \end{aligned} \quad (3-9)$$

$$\begin{aligned} a^2 - 4b &= 0 \\ \ln \left| u - \frac{a}{2} \right| - \frac{a}{2u - a} &= -\ln \frac{|X_d|}{c_5} \end{aligned} \quad (3-10)$$

$$\begin{aligned}
 a^2 - 4b &< 0 \\
 \frac{1}{2} \ln(u^2 - au + b) + \frac{a}{\sqrt{4b - a^2}} \arctan \frac{2u - a}{\sqrt{4b - a^2}} \\
 &= -\ln \frac{|X_d|}{c_5} \quad (3-11)
 \end{aligned}$$

(3-9) 式～(3-11) 式から、傾斜不透水層上の定常な地下水面形を求めることができる。
降水による供給がないときは、 $p = 0$ で、(3-2) 式から、

$$kay = ky \frac{dy}{dx} + c_3 \quad (3-12)$$

積分定数 c_3 は、(2-16) 式より $c_3 = q$

$$q = ky \left(a - \frac{dy}{dx} \right) \quad (3-13)$$

上式を変形し

$$\begin{aligned}
 \frac{ky}{kay - q} dy &= dx \\
 \frac{kay}{kay - q} dy &= adx \\
 \left(1 + \frac{q}{kay - q} \right) dy &= adx \\
 \left\{ 1 + \frac{q}{ka} \frac{1}{\left(y - \frac{q}{ka} \right)} \right\} dy &= adx \\
 \therefore y + \frac{q}{ka} \ln \left| y - \frac{q}{ka} \right| &= ax + c_6 \quad (3-14)
 \end{aligned}$$

(3-14) 式は、無降雨時の地下水面形を表わす。

また、水平不透水層上の定常な地下水面形は、(3-2) 式において、傾斜の項が消え、

$$ky \frac{dy}{dx} + px + c_3 = 0 \quad (3-15)$$

積分して、

$$ky^2 + px^2 + 2c_3x + c_4 = 0 \quad (3-16)$$

となり、2次曲線で表わされることがわかる。

第2節 砂モデル実験

地下水の流れを実験的に求めようとする方法は、砂モデル、電気相似モデル、Hele-Shawモデルなどがあり(12)、どのモデルを使用するかは、目的によって異なってくる。砂モデルは、簡単に作ることができるため、数多くの実験に供されてきた。そして、砂モデルの結果から自然現象への対応は成立すべき相似律を与えることでつき(13)、砂モデル実験は意義あるものになっている。

傾斜不透水層上の定常な自由地下水面形を検討するために、次の3種類の砂質斜面をつくり、その中に、形成する地下水面形を調べた。実験に使用した砂は、A砂、B砂、C砂、D砂の4種類とし、その粒径加積曲線を図3-1に、その性質を表3-1に示す。

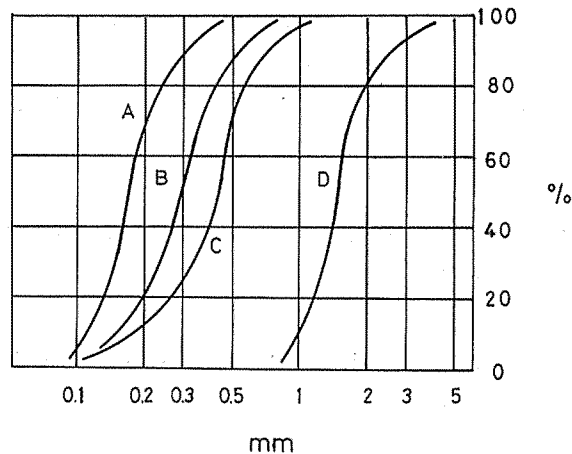


図3-1 実験砂の粒径加積曲線(定常実験)

表3-1 実験砂の性質

	A 砂	B 砂	C 砂	D 砂
真比重	2.60	2.63	2.64	2.63
透水係数 (cm/sec)	0.0147	0.0223	0.0220	0.154

(1) 実験(I)

実験(I)は、図3-2に示す、幅20cm、高さ30cm、長さ100cmの砂質斜面において、斜面両端に異なる高さの外水位を与えたときの水位を測定する。

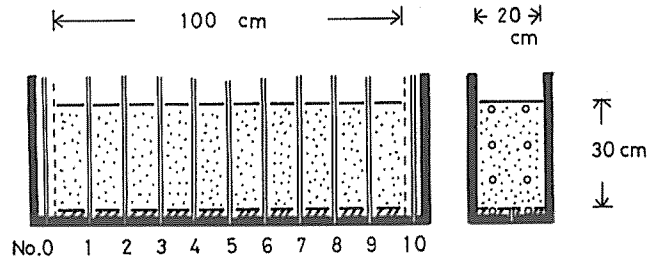


図3-2 砂モデル斜面（定常実験Ⅰ）

斜面は、2.0 cm厚の紙粘土で不透水層を敷き、その上に、水中沈降で砂をつめ、斜面が均質になるよう心がけた。

水位は、底面の中央部に斜面左端から、10 cm (No. 1), 20 cm (No. 2) …… 90 cm (No. 9) と10 cm 間隔で水位測定用の孔をあけ、内径5 mmのガラス管を接続し、マンロー方式で測定した。斜面両端の外水位 (No. 0 と No. 10) は側面の20 mm孔の開閉によって、高さを調節することができる。

実験は、斜面に $\alpha = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ$ の3段階の傾斜を与え、ある高さの外水位で生じる斜面内水位を測定した。

各実験は、同じ外水位で3回ずつ行ない、その平均をもって実験結果とした(14)。

使用砂は、A砂、B砂、D砂である。

(2) 実験(Ⅱ)

実験(Ⅱ)は、図3-3に示す、幅50 cm、高さ40 cm、長さ200 cmの砂質斜面に、傾斜と外水位を与え、そのときの水位を測定する。

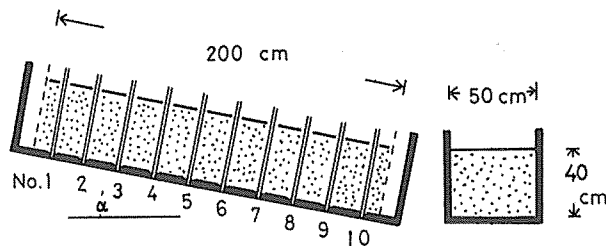


図3-3 砂モデル斜面（定常実験Ⅱ）

斜面は、A砂とB砂について、それぞれ3~5 cm厚毎に突き固めてつくった。

水位は、底面中央部に、斜面左端から10 cm (No. 1), 30 cm (No. 2), 50 cm (No. 3) …… 190 cm (No. 10) の20 cm間隔で水位測定用の孔をあけ、内径5 mmの亚克力管を接続し、マンロー方式で測定した。

実験は、 $\alpha = 10^\circ, 20^\circ$ の2段階の傾斜を与え、定常な外水位 (h_0) によって生じる斜面内水位を

測定し、各実験について3回ずつ行ないその平均をもって実験結果(15)とした。

(3) 実験(Ⅲ)

実験(Ⅲ)は、図3-4に示す、幅50cm、高さ30cm、長さ140cmの砂質斜面に、降雨を与え、そのときの水位を測定する。

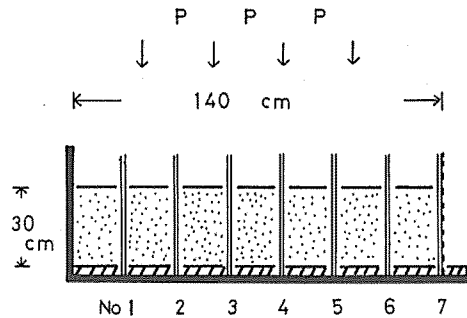


図3-4 砂モデル斜面(定常実験Ⅲ)

斜面は、C砂を用い、3~5cm厚毎に、突き固めてつくった。

水位は、斜面底部に、左端から、20cm(No.1)、40cm(No.2)、………140cm(No.7)に20cm間隔で水位測定用の孔を取り付け、内径7mmのガラス管に接続し、マンメーター方式で測定した。

降雨は、高速動力噴霧装置を用い、3個の降雨ノズルから霧状の雨を降らせる。このため、斜面表面に侵食は生じない。降雨強度は定常な流出量から換算して求めた。

実験は、 $\alpha = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ$ の傾斜を与えた斜面に、異なる降雨強度によって生じる水位を測定し、各実験について、2~3回行ないその平均をもって実験結果(16)とした。

なお、実験(Ⅰ)~(Ⅲ)において 流出量は、メスシリンダーを用いて測定した。

第3節 斜面両端の外水位による地下水面形

降水量がなく、斜面両端の外水位による地下水面形は、 $\alpha \cong 0$ のとき、

$$y + \frac{q}{ka} \ln \left| y - \frac{q}{ka} \right| = ax + c_6 \quad (3-14)$$

$\alpha = 0$ のとき、(3-16)式および $c_3 = q$ から

$$ky^2 + 2qx + c_4 = 0 \quad (3-17)$$

となる。

砂モデル実験は、実験(Ⅰ)と実験(Ⅱ)に相当する。

(3-14)式と(3-17)式は、ともに1つの積分定数を含み、これらの定数は、1組の水位測

定値があれば、定まり、地下水面は決定されることになる。

しかし、図3-5の例のように、1組の水位から求めた地下水面形（図中の点線）は、実験水位を表わすことができない。

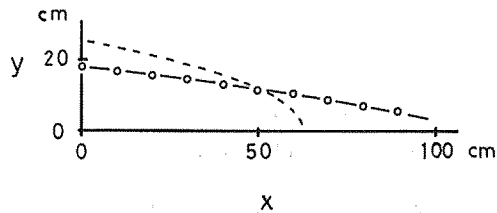


図3-5 両端外水位による斜面内水位（A-2実験）

丸印は実測水位，点線は一組の水位から求めた地下水面，実線は
No. 1～No. 9の水位から求めた地下水面

他の場合も同様な結果を得た。これらの結果は、後述するが、定水位透水試験から求めた透水係数が、実験中の透水係数と異なったためと考えられる。そこで、透水係数を未知数とすると、未知数は、透水係数と積分定数の2つとなり、2組以上の水位測定値から定めることができる。

そして、(3-14)式および(3-17)式の地下水面形の適合度を、有意水準5%の χ^2 検定で調べる(17)と、上端外水位が高く、下端外水位が低くなると適合は悪く、さらに、傾斜が急で、粗砂になると悪くなる傾向がある。

各実験の平均水位(\bar{y})と平均水頭勾配($\Delta\bar{y}$)を次のようにおいてみる。 L は斜面区間長である。

実験(I)

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_9}{2} \quad (3-18)$$

$$\Delta\bar{y} = \frac{y_1 - y_9}{L}$$

実験(II)

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_{10}}{2} \quad (3-19)$$

$$\Delta\bar{y} = \frac{y_1 - y_{10}}{L}$$

また、レイノズル数(R_e)は、

$$R_e = \frac{d \cdot v}{\nu} \quad (3-20)$$

で表わされる。 d は粒径、 ν は動粘性係数、 v は浸透流速となる。ここで、粒径はそれぞれの50%径、動粘性係数は常温値 $0.01\text{cm}^2/\text{sec}$ 、流速は流量を平均水位で割った値を用いて、各実験のレイノルズ数を求め、レイノズル数と平均水頭勾配との関係で(3-14)式と(3-17)式の適合度をみる。

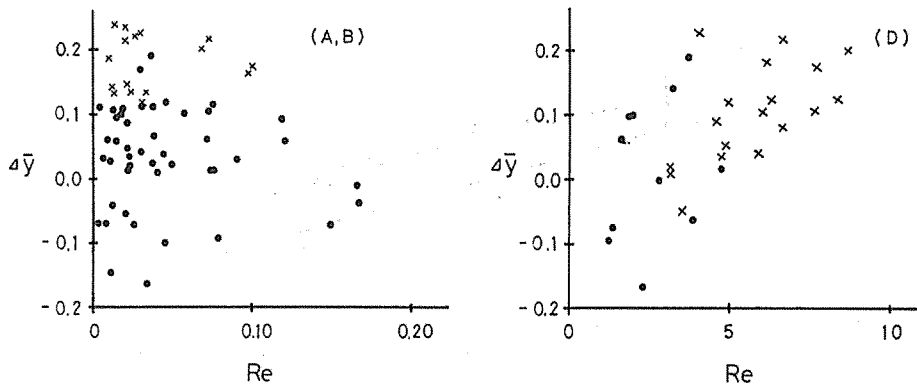


図3-6 レイノズル数(Re)と平均水頭勾配($\Delta\bar{y}$)とからみた地下水面の適合性について
丸印は適合したもの、掛印は適合しなかったもの。

図から、レイノズル数が4近くなると、適合は極端に悪くなる。これは、流れが層流から乱流へ遷移すると考えられ、均質球(Shot)内の流れの層流域が $Re < 4$ 、砂では、それより低い値で遷移する(18)といわれているものと一致する。つまり、砂の粒径が粗になったり、傾斜が急になったりすることで、地下水流が速くなり、適合は悪くなる。

また、平均水頭勾配が、およそ0.1を境にして、適合は悪くなっている。これは(2-13)式の右辺大括弧内の第2項以下の省略による誤差が、平均水頭勾配が大きになると無視できず、急激な水面変化に対して、流量と水頭勾配とが比例する関係が満たされなくなるためと考えられる。

第4節 降雨による地下水面形

降雨による地下水面形は、 (a^2-4b) 値の符号によって、(3-9)式~(3-11)式に分かれた。実験(Ⅲ)の結果ならびに簡単な数値計算から $(a^2-4b) < 0$ の場合の(3-11)式を用いればよく、 $\alpha \neq 0$ のとき

$$\frac{1}{2} \ln(u^2 - au + b) + \frac{a}{\sqrt{4b - a^2}} \arctan \frac{2u - a}{\sqrt{4b - a^2}} = -\frac{|X_d|}{c_s} \quad (3-11)$$

$\alpha = 0$ のとき

$$ky^2 + px^2 + 2qx + c_1 = 0 \tag{3-21}$$

となる。

(3-11) 式の適用例を図3-7に示す。

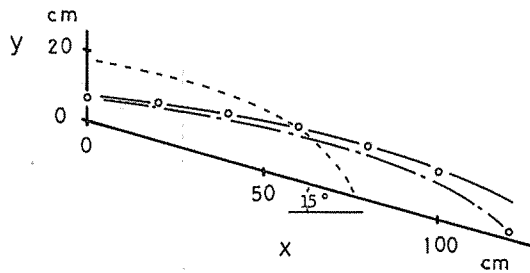


図3-7 降雨による地下水面 (C-12実験)
 丸印は実測水位, 点線は $p = 0.0273 \text{ cm/sec}$, $k = 0.023 \text{ cm/sec}$ のときの地下水面,
 一点鎖線は両端水位から求めた地下水面, 実線はNa. 1 ~ Na. 6 の水位から求めた地下
 水面

図から急激な水位低下が起きている斜面右端部を除けば, 適用は可能となる。その適合度をレイノルズ数と平均水頭勾配との関係でみる (図3-8) と, レイノズル数は小さく, 層流域にあるが, 平均水頭勾配がおよそ0.1以上になると適合は悪く, 降雨の場合も, 両端外水位による地下水面形と同様な傾向を示している。

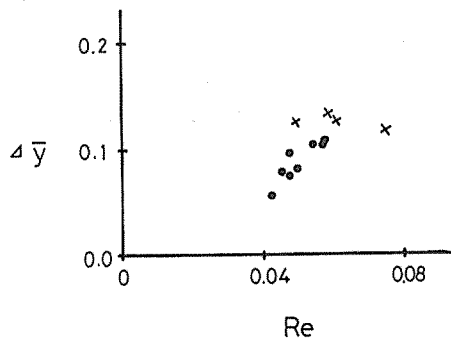


図3-8 レイノルズ数 (Re) と平均水頭勾配 ($\Delta \bar{y}$) とからみた地下水面の適合性について
 丸印は適合したもの, 掛印は適合しなかったもの。

次に $\alpha = 0$ の場合, (3-21) 式は, 上流側からの流入量がないので, $x = 0$ で, $q = 0$ となる。

$$ky^2 + px^2 + c_1 = 0 \quad (3-22)$$

(3-22) 式の適用例を図3-9に示す。

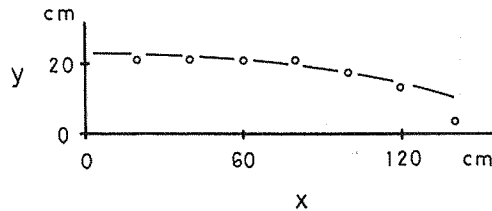


図3-9 降雨による地下水面 (C-2 実験)
丸印は実測水位, 実線は (3-22) 式による
地下水面

図から、水位は、(3-22) 式に適合しているように見えるが、検定の結果は棄却された。これは3回行なった実験の水位のバラツキが小さかったことにもよるが、降下浸透する雨水が地下水の流れのために彎曲浸透すること(19)、および、降雨むらによって、 $x = x_i$ の流量 q_i が、 $q_i = px_i$ とならないで、流量を零とみなしうる位置が斜面左端から右方へ移動したためと考えられ、(3-22) 式は、流量が零となる地点を移動すれば、実験水位に適合することになる。

このように、降雨による地下水面は、地下水流が層流で、流量が水頭勾配に比例する範囲、つまり、ダルシーの法則が成立することが必要である。

前節と本節の結果から、傾斜不透水層上の定常な地下水面形は、(3-11) 式と (3-14) 式で表わすことができる。そして、その適用範囲は、レイノズル数にして4以下の流れで、水頭勾配として約0.1以下であることを実験的に確認した。

第5節 砂モデル実験における透水係数について

地下水面形の実験水位への適合は、定水位透水試験値を用いた場合、良くなかった。この理由として、透水試験がある種の被圧状態の流れの測定で、自由地下水面のような不圧面を含む流れの透水係数を表わせるかどうか明らかでないことがあげられる。そこで、透水係数を未知数とおき、地下水面形を求め、透水係数について検討してみた。なお、実験(Ⅲ)は、降雨のバラツキや彎曲浸透のため、流動的に不安定であるので除き、実験(Ⅰ)、(Ⅱ)について考える。

各実験の透水係数は、両端外水位が高くなると小さくなる傾向がある。これは、水位が低い場合、地下水は不圧面に依存する流れの割合が多く、さらに、水面上に毛管層流が存在し、それらの流量が全流量に対して無視できないために透水係数が大となる。水位が高い場合、不圧面下の被圧されている浸透水が流れを支配するようになり、毛管層流も全流量に比べ無視できるために透水係数が小さくなると考えられる。

(3-14) 式, (3-17) 式に適合した地下水面形の透水係数とそのときの平均水位との関係をみる (図3-10)。

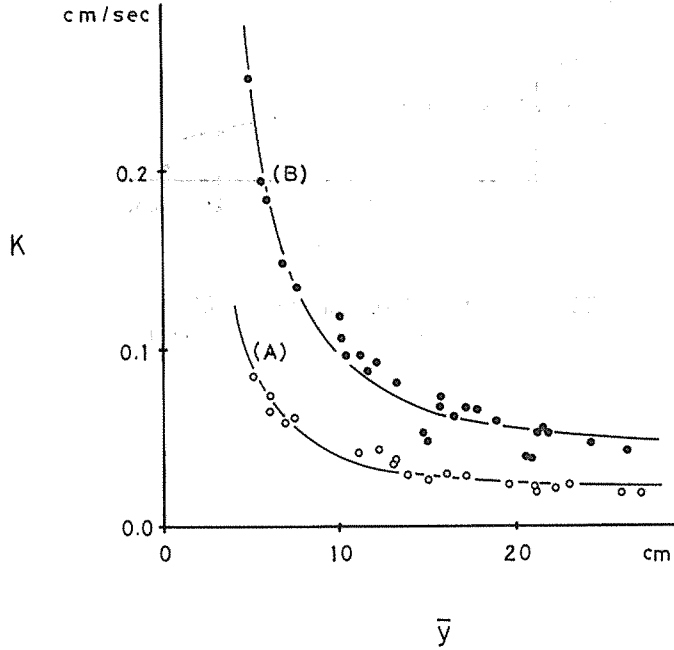


図3-10 平均水位 (\bar{y}) と透水係数 (k) との関係

$$\text{A砂: } k = 0.0206 + (1.86/\bar{y}^2)$$

$$\text{B砂: } k = 0.0402 + (5.41/\bar{y}^2)$$

図から, 平均水位が増加していくと, 透水係数がある値 (仮に, k_0 とする) に近づいている。この関係を実験的に求めてみる (20) と, 次式となる。

$$k = k_0 + \frac{a_0}{\bar{y}^2} \quad (3-23)$$

そして, k_0 値を, 透水試験による透水係数 (k_c とする。) および, k_c を実験中の水温と空げきをもつ値に補正した透水係数 (k_m とする。) と比べてみる。

透水係数の補正は, 次式で行なった (21)。

$$k_m = \beta_0 U_c (0.7 + 0.03t) \left(\frac{n}{1-n} \right)^2 D_{10}^2 \quad (3-24)$$

β_0 は砂による定数, U_c は均等係数, D_{10} は Hazen の有効径, n は空げき率, t は実験中の温度である。

表 3-2 透水係数について

	A	B	C
k_c	0.0147	0.0223	0.154
k_m	0.0205	0.0367	0.350
k_o	0.0206	0.0402	1.01

k_c : 透水試験による値

k_m : k_c を実験中の値に補正したもの

k_o : (3-23) 式における値

表 3-2 より、 k_o と k_m との関係は、A 砂と B 砂で、ほぼ似た値を示している。D 砂は、適合した地下水面のレイノズル数が 1~4 の間で A 砂、B 砂におけるそれより大きな値をとり透水係数が流速の関数となる乱流あるいは乱流に近い流れになっていると考えられ、 k_o と k_m とが離れた値をとったと推定できる。しかし、A 砂と B 砂において、流れが層流状態にあり、 k_o と k_m がほぼ等しいことから、定水位透水試験による透水係数は、地下水面形を決定する要因として意義あるものとなっている。

以上、本章において、傾斜不透水層上の定常な自由地下水面形は、(3-11) 式、(3-14) 式、(3-16) 式、(3-17) 式によって表わされることがわかった。そして、砂モデル実験から、求めた式の適用は、レイノズル数にして 1~4 以下、水頭勾配にして 0.1 以下であれば、可能となることが判明した。

第 4 章 非定常な自由地下水面形

第 1 節 差分方程式について

前述のように、傾斜不透水層上の非定常自由地下水面形は、(2-18) 式で表わされる。

$$\epsilon \frac{\partial y}{\partial t} + ka \frac{\partial y}{\partial x} = k \frac{\partial}{\partial x} \left(y \frac{\partial y}{\partial x} \right) + p = k \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + ky \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + p \quad (2-18)$$

(2-18) 式は、非線形偏微分方程式のため、厳密解を見つけることができないので、網目法 (mesh method) による近似を行なう。その前に、

$$X = \frac{x}{L}, \quad F = \frac{y}{L}, \quad T = \frac{kt}{\epsilon L}, \quad P_0 = \frac{p}{k} \quad (4-1)$$

とおき、(2-18) 式の変量を無次元なものに改める。 L は長さの次元をもつもので、斜面長を考えればよい。(2-18) 式は、次式となる。

$$\frac{\partial F}{\partial T} + a \frac{\partial F}{\partial X} = \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right)^2 + F \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} + P_0 \quad (4-2)$$

一般に, mesh method とは, 横軸をX軸に, 縦軸をT軸にとる2次元平面を格子網(mesh)で覆い, 各格子点におけるFを逐次数値計算して, 偏微分方程式の解を得ようとするものである。

X方向の格子の間隔を*l*, T方向の格子の間隔を*τ*とすれば, 各格子点は

$$\begin{aligned} X_i &= il \quad (i = 0, 1, 2, \dots, M) \\ T_j &= j\tau \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (4-3)$$

と表わされる。これらの交点(*ij*, *jτ*)を(*i*, *j*)で表わし, (*i*, *j*)格子点と呼ぶ。また, *l*, *τ*を階差と呼ぶ。

(*i*, *j*)格子点におけるFの値を*f_{i,j}*として, 偏導関数 $\partial F/\partial X$, $\partial^2 F/\partial X^2$, $\partial F/\partial T$ を近似するのに, それぞれ

$$\begin{aligned} \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2l} \\ \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{l^2} \\ \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\tau} \end{aligned} \quad (4-4)$$

とする。これらを用いると, (4-2)式を近似する差分方程式は,

$$\begin{aligned} f_{i,j+1} &= f_{i,j} - \frac{a}{2} (f_{i+1,j} - f_{i-1,j}) \frac{\tau}{l} + \frac{1}{4} (f_{i+1,j} - f_{i-1,j})^2 \frac{\tau}{l^2} \\ &\quad + f_{i,j} (f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}) \frac{\tau}{l^2} + P_0 \tau \end{aligned} \quad (4-5)$$

となる。この方程式に, 初期条件

$$f_{i,0} = \varphi(i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, M) \quad (4-6)$$

境界条件

$$f_{0,j} = \varphi_0(j), \quad f_{M,j} = \varphi_M(j) \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (4-7)$$

を与えれば, (4-5)式から, 逐次数値解を計算することができる。

さて, 差分方程式の解が対応する偏微分方程式の解の適当な精度の近似になるには, 差分方程式の解(*f*)が微分方程式の解(*F*)へ収束すること(収束性)と, 差分方程式を解くときの算術演

算の誤差によって不安定成長しないこと（安定性）が必要である。しかし、収束性と安定性の関係が確立している差分方程式は、ほんの限られた数の微分方程式であって、例えば、定数係数の線形方程式、陽差分で近似されたある種の一次元双曲線あるいは方物型方程式ならびに少数の準線形2階方程式に過ぎない（22）。その他の偏微分方程式の mesh method による数値解が収束性や安定性をもつかどうかは、未解決の問題であり、特に（4-5）式のような非線形方程式については、ほとんど何もわかっていない。

そこで、この差分方程式において、

- (1) ある任意の格子点で発生した誤差が、それ自身に差分方程式を適用したとき、どのように伝播するか。
- (2) 境界値をある値に固定したとき得られる差分方程式の数値解が、（4-2）式で $\partial F/\partial T = 0$ とおいて求められる定常な解に近づくかどうか。

の2点について、数値計算によって、その安定性と収束性とを実験的に確かめようと考えた。

第2節 差分方程式の数値的実験

差分方程式（4-5）式は、格子点 $(i, j+1)$ の未知の値を第 j 行上の既知の値で表わした式である（図4-1）。

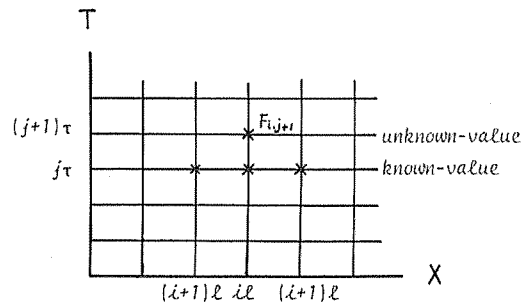


図4-1 mesh method

したがって、第1行 $T = \tau$ 上の未知の格子点の値 f を、 $T = 0$ 上の既知の境界値と初期値から計算することができ、さらに、第2行上の未知の格子点の値を既に計算済みの第1行上の格子点の値と既知の境界値から計算できる。というように順次繰り返す。

このように、すべての格子点の値を既知の格子点での値で直接表わす差分公式を陽公式という。

(1) 任意の位置に発生した誤差の伝播について

陽公式を利用するとき、誤差が伝播する模様は、誤差自身に差分方程式を適用してみると容易にわかる。

簡単のために、(4-2)式で $P_0 = 0$ とおいて、

$$\frac{\partial F}{\partial T} + a \frac{\partial F}{\partial X} = \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right)^2 + F \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \quad (4-2')$$

その差分方程式は次式となる。

$$f_{i,j+1} = f_{i,j} - \frac{a}{2} (f_{i+1,j} - f_{i-1,j}) \frac{\tau}{l} + \frac{1}{4} (f_{i+1,j} - f_{i-1,j})^2 \frac{\tau}{l^2} \\ + f_{i,j} (f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}) \frac{\tau}{l^2} \quad (4-5')$$

両端の境界値は、 $X = 0.0$ と $X = 1.0$ とで与える。

X方向の階差として、例えば、 $X = 1.0$ を10等分し $l = 0.1$ を定めれば、それに応じて $M = 10$ となり、100等分すれば、 $l = 0.01$ で $M = 100$ となる。

今、誤差 l が $i = 5$ or 50 の格子点に発生したとする。

初期値は

$$f_{i,0} = H (i = 0 \sim 10, i \neq 5 \text{ or } i = 0 \sim 100, i \neq 50) \\ f_{5,0} = f_{50,0} = H + |e| \quad (4-6')$$

および、境界値を

$$f_{0,j} = f_{M,j} = H \quad (4-7')$$

これらの条件のもとで、(4-5')式を解くとき、誤差が分散消滅するならば、(4-5')式は数値的に安定であると考ええる。

$|e| = 0.01$, $a = 0.34202$ ($\alpha = 20^\circ$) のときの (τ/l^2) と H との関係を図4-2に示す。図中の丸印は誤差が分散消滅し安定な場合、掛印は誤差が発散し不安定な場合である。

図から、安定領域が近似的に

$$\frac{\tau H}{l^2} \leq \frac{1}{2} \quad (4-8)$$

であることがわかる。但し、 $H = 0$ のとき、誤差は発散する傾向をもつ。ゆえに、近似すべき $f_{i,j}$ に対して

$$0 < \frac{\tau f_{i,j}}{l^2} \leq \frac{1}{2} \quad (4-9)$$

を満足する階差を定めれば、(4-5')式は安定になると考えられる。

$a = 0.0$ ($\alpha = 0^\circ$), $a = 0.17365$ ($\alpha = 10^\circ$), $a = 0.5$ ($\alpha = 30^\circ$) の場合も同様である。

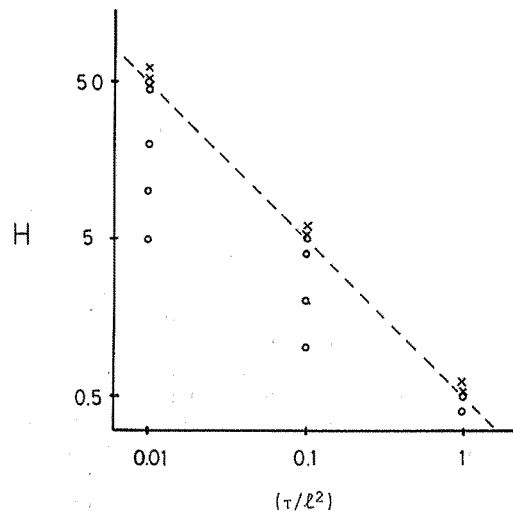


図4-2 (4-5')式の誤差(e)の安定性について
 $a = 0.34202, |e| = 0.01$
 丸印は誤差が分散消滅し安定なとき, 掛印は誤差が
 発散し不安定なとき。

(2) 差分方程式の数値解の定常解への収束, (4-2')式において, $\partial F/\partial T = 0$ とおけば, これは常微分方程式となり, その解は,

$a = 0$ のとき

$$F^2 + C_1 X + C_2 = 0 \quad (4-10)$$

$a \neq 0$ のとき

$$F + C_3 \ln |F - C_3| = aX + C_4 \quad (4-11)$$

である。

いま, 初期値を

$$f_{i,0} = H \quad (i = 0 \sim 10 \text{ or } 0 \sim 100) \quad (4-12)$$

境界値を

$$\begin{aligned} f_{0,j} &= H + 0.1 \\ f_{M,j} &= H \end{aligned} \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (4-13)$$

表4-1 差分方程式による数値解 ($a=0.34202$)

		X												
		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9		1.0	
T	0.1	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	①
		0.200	0.166	0.130	0.108	0.102	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	②
			0.167	0.133	0.111	0.103	0.101	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	③
			0.168	0.134	0.111	0.102	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	④
	0.2	0.200	0.179	0.155	0.131	0.114	0.105	0.101	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	①
			0.179	0.155	0.133	0.116	0.106	0.102	0.101	0.100	0.100	0.100	0.100	②
			0.179	0.156	0.133	0.116	0.106	0.102	0.101	0.100	0.100	0.100	0.100	③
			0.180	0.156	0.134	0.116	0.106	0.102	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	④
	0.3	0.200	0.184	0.166	0.147	0.129	0.115	0.107	0.102	0.101	0.100	0.100	0.100	①
			0.184	0.166	0.147	0.130	0.116	0.108	0.103	0.101	0.100	0.100	0.100	②
			0.185	0.166	0.147	0.130	0.116	0.108	0.103	0.101	0.100	0.100	0.100	③
			0.185	0.167	0.148	0.131	0.116	0.107	0.103	0.101	0.100	0.100	0.100	④
	0.4	0.200	0.187	0.173	0.157	0.141	0.126	0.115	0.107	0.103	0.101	0.100	0.100	①
			0.188	0.173	0.157	0.141	0.127	0.115	0.108	0.104	0.101	0.100	0.100	②
			0.188	0.173	0.157	0.141	0.127	0.116	0.108	0.104	0.101	0.100	0.100	③
			0.188	0.173	0.158	0.142	0.127	0.116	0.108	0.103	0.101	0.100	0.100	④
	0.5	0.200	0.190	0.177	0.164	0.149	0.135	0.123	0.114	0.107	0.103	0.100	0.100	①
		0.190	0.177	0.164	0.150	0.136	0.124	0.114	0.108	0.103	0.100	0.100	②	
		0.190	0.177	0.164	0.150	0.136	0.124	0.114	0.108	0.103	0.100	0.100	③	
		0.190	0.178	0.164	0.150	0.136	0.124	0.115	0.108	0.103	0.100	0.100	④	
0.8	0.200	0.193	0.185	0.176	0.165	0.154	0.143	0.133	0.122	0.112	0.100	0.100	①	
		0.193	0.185	0.176	0.165	0.155	0.144	0.133	0.123	0.112	0.100	0.100	②	
		0.193	0.185	0.176	0.165	0.155	0.144	0.133	0.123	0.112	0.100	0.100	③	
		0.193	0.185	0.176	0.166	0.155	0.144	0.133	0.123	0.113	0.100	0.100	④	
1.0	0.200	0.194	0.188	0.180	0.172	0.162	0.152	0.142	0.130	0.117	0.100	0.100	①	
		0.194	0.188	0.180	0.172	0.162	0.152	0.142	0.131	0.118	0.100	0.100	②	
		0.194	0.188	0.180	0.172	0.162	0.152	0.142	0.131	0.118	0.100	0.100	③	
		0.194	0.188	0.180	0.172	0.163	0.153	0.142	0.131	0.118	0.100	0.100	④	
2.0	0.200	0.197	0.193	0.188	0.183	0.177	0.169	0.159	0.146	0.128	0.100	0.100	①	
		0.197	0.193	0.188	0.183	0.176	0.169	0.159	0.146	0.128	0.100	0.100	②	
		0.197	0.193	0.188	0.183	0.176	0.169	0.159	0.146	0.128	0.100	0.100	③	
		0.197	0.193	0.188	0.183	0.177	0.169	0.159	0.146	0.128	0.100	0.100	④	
5.0	0.200	0.197	0.194	0.190	0.185	0.179	0.171	0.161	0.148	0.129	0.100	0.100	①	
		0.197	0.194	0.190	0.185	0.179	0.171	0.161	0.148	0.129	0.100	0.100	②	
		0.197	0.194	0.190	0.185	0.179	0.171	0.161	0.148	0.129	0.100	0.100	③	
		0.197	0.194	0.190	0.185	0.179	0.171	0.161	0.148	0.129	0.100	0.100	④	
	Fs	0.200	0.197	0.194	0.190	0.185	0.179	0.171	0.161	0.148	0.129	0.100		

初期条件: $f_{i,0} = 0.1$ ($i = 0 \sim M$)

境界条件: $f_0, j = 0.2, f_m, j = 0.1$ ($j = 1, 2, \dots$)

Fs : $\partial F / \partial T = 0, P_0 = 0$ のときの(4-1)式の解

階 差: ① $l = 0.1, \tau = 0.01$

② $l = 0.1, \tau = 0.001$

③ $l = 0.1, \tau = 0.001$

④ $l = 0.01, \tau = 0.0001$

とおき、(4-5') 式の数値解が (4-10) 式、あるいは (4-11) 式の解 (F_s) との関係をみる (図4-3, 表4-1) と、 f は F_s に近づくことがわかる。

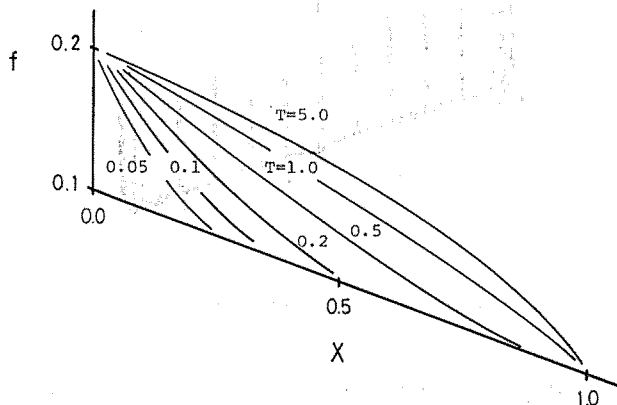


図4-3 急上昇する地下水面の差分方程式による数値解
($l = 0.1$, $\tau = 0.01$)

また、(4-13) 式の境界値の代りに、

$$f_{0,j} = H + \frac{0.1}{J} j, \quad f_{M,j} = H \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (4-13')$$

とおき、 J を十分に大きな値をとると、任意の j における f 値は、境界値 $f_{0,j}$ 値と $f_{M,j}$ 値とを通る (4-10) 式あるいは (4-11) 式の曲線となる。このことから、各格子点において、 f が未知の厳密解 (f_u) に対して、過大あるいは過小の値を与えることもあるが、 f と f_u との差は無視できる程度の大きさで、近似的に $f \doteq f_u$ とみなすことができる。

このように差分方程式 (4-5') 式の安定性と収束性について、数値的に検討した結果、(4-9) 式を満足する階差を用いれば、(4-5') 式、そして、定数項を伴う (4-5) 式が非定常状態 (4-2) 式の有効な近似方程式となる。

第3節 砂モデル実験

(1) 実験装置及び実験方法

実験装置は、長さ210cm、幅20cm、高さ60cmの亚克力製の箱に、紙粘土で2.0cm厚の不透水を敷き、その上に、長さ200cm、幅20cm、高さ50cmの砂斜面を作り、庭面中央に、20cm間隔で、水位測定用の孔をあけ、ガラス管 (No.0, No.1, No.2, …, No.10) を接続しマンメーター方式で水位を測定した (図4-4)。

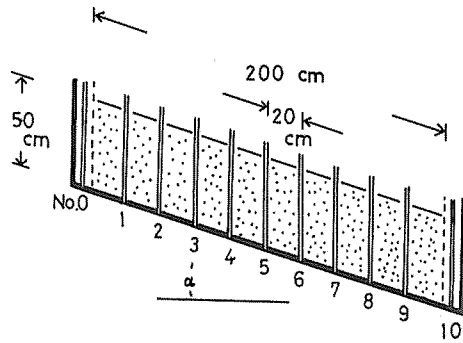


図 4—4 砂モデル斜面（非定常実験）

使用砂は、E砂（真比重 2.64，透水係数 2.17×10^{-3} cm/sec）と F砂（2.64， 1.23×10^{-3} cm/sec）の 2 種類で、それらの粒径加積曲線を図 4—5 に示す。

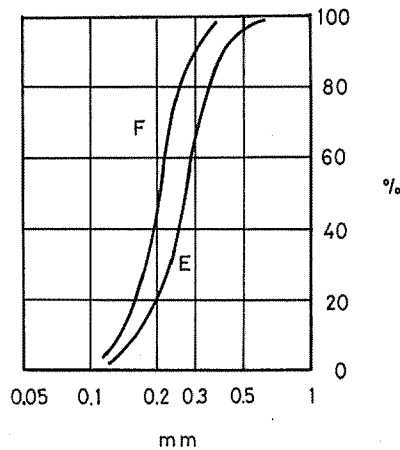


図 4—5 実験砂の粒径加積曲線（非定常実験）

斜面は、予め、箱に傾斜（ 0° 、 10° 、 20° ）を与え、砂をできる限り水中沈降で充填し、均質になるよう心がけた。

実験は、両端の外水位（No. 0 と No. 10）を 20 cm に保ち、安定な水位を得たのち、No. 0 の水位を 40 cm に上昇した。上昇は、緩慢な上昇（以下、緩上昇という。）と急激な上昇（以下、急上昇という。）との 2 通り行なった。緩上昇は、上昇後の定常な水位時の流出量を少し上回る流量を定水位タンクを用い供給し、水位を上昇した。急上昇は、それに、別の流量を加え、水位上昇を早めた。また、上昇後の定常な水位を得た後、水の供給を停止し、降下する水位を測定した。

なお、No.0の外水位側は、約2.0mm径の砂をつめた。

水位の変化は、写真撮影し、引伸し写真から求めた。水位測定値は、測定上、 ± 2 mmの誤差は避けられなかった。

実験は、それぞれの砂と傾斜について、3回ずつ行ない、その平均をもって実験結果とした。定常時の流出量はメスシリンダーを用いて測定した。

なお、実験における初期水位20cmは、前章の実験において、透水係数と平均水位との関係から、透水係数がほぼ一定となる水位を、上昇後の40cmは、(3-14)式、(3-17)式に適合した地下水面の平均水頭勾配0.1を参考に、斜面長200cmに対し、20cmと定め40cmとした。

(2) 実験結果および考察

図4-6～図4-8に緩上昇する水位(丸印)を示す。図中の点線は、(3-14)式、(3-17)

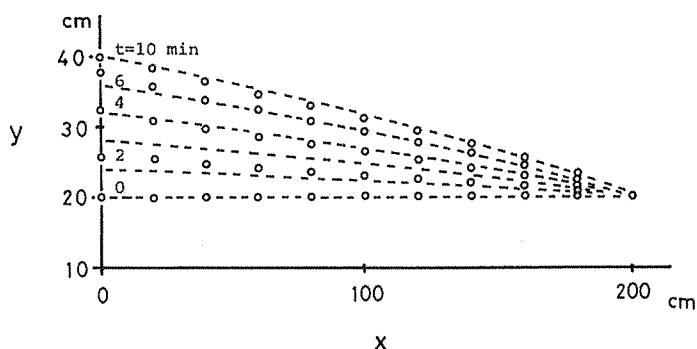


図4-6 緩上昇する水位 ($\alpha=0^\circ$, F砂)

丸印は実測水位、点線は(3-17)式による定常な地下水面

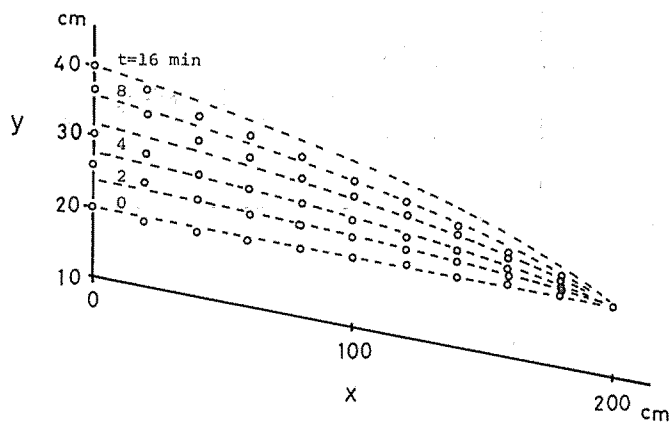


図4-7 緩上昇する水位 ($\alpha=10^\circ$, F砂)

丸印は実測水位、点線は(3-14)式による定常な地下水面

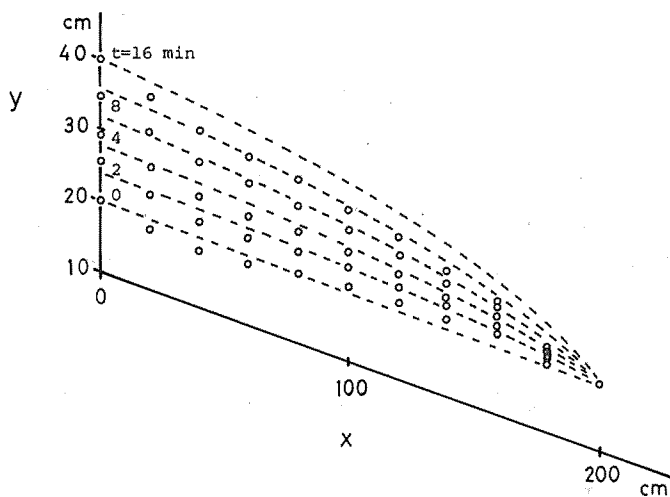


図4—8 緩上昇する水位 ($\alpha = 20^\circ$, F砂)

丸印は実測水位, 点線は(3—14)式による定常な地下水面

式より求められる定常な地下水面形(以下, 定常形という。)である。図から, $\alpha = 0^\circ$ のとき, 水位はほぼ定常形のまま上昇していることがわかる。 $\alpha = 10^\circ, 20^\circ$ のとき, 斜面上端において, 水位は低下し定常形と一致しないが, 斜面中部・下部において, 水位は定常形に沿って上昇する傾向がある。

次に, 図4—9～図4—11に降下する水位を示す。

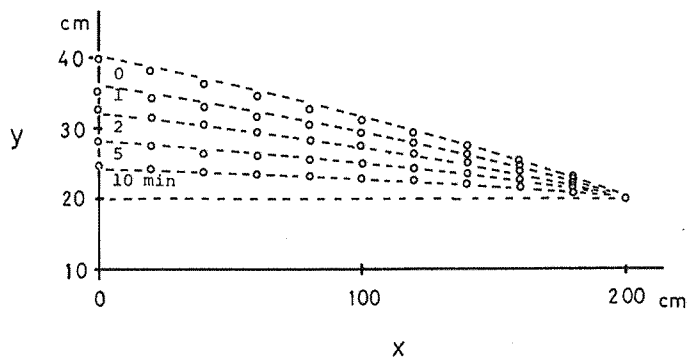


図4—9 降下する水位 ($\alpha = 0^\circ$, F砂)

丸印は実測水位, 点線は(3—17)式による定常な地下水面

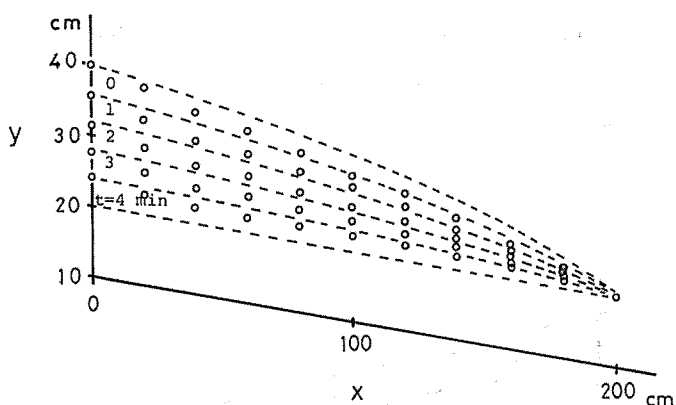


図4-10 降下する水位 ($\alpha=10^\circ$, F砂)
丸印は実測水位, 点線は(3-14)式による定常な地下水面

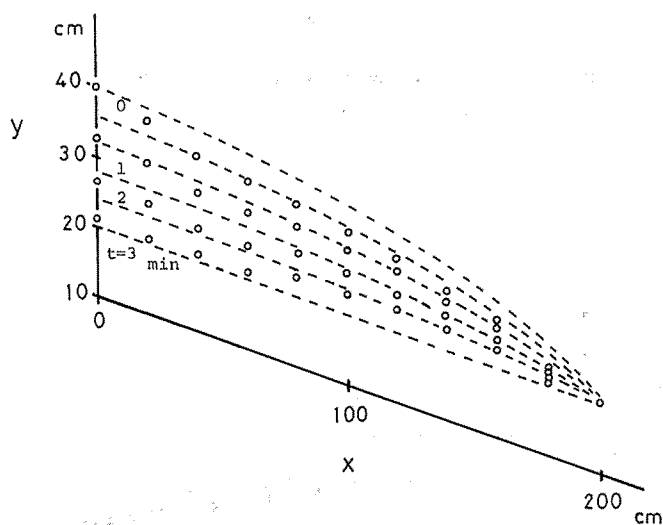


図4-11 降下する水位 ($\alpha=10^\circ$, F砂)
丸印は実測水位, 点線は(3-14)式による定常な地下水面

図から、 $\alpha=10^\circ$ 、 20° のとき、斜面上部において、緩上昇と同じく、水位低下をおこしている。また、水位は、上端側から早めに降下する傾向がある。これは、水の供給の停止に伴ない。水位は、より安定な水平状になりながら降下するため、斜面上端の水位から早めに降下すると考えられる。

このように、斜面上部において、流入等の影響によって、浸透状態が、斜面中部あるいは下部のそれと異なり、そのために水位低下が生じたとみなし、斜面中・下部の水位変動に着目すると、降下のときも、緩上昇と同じく、水位が定常形に沿って降下していることがわかる。これらの結

果は、差分方程式の数値解で、境界値を十分に遅く上昇あるいは降下したとき、解が定常形と
なつて昇降する水位を与えることと一致している。

次に、急上昇する水位を、図4-12～図4-14に示す。

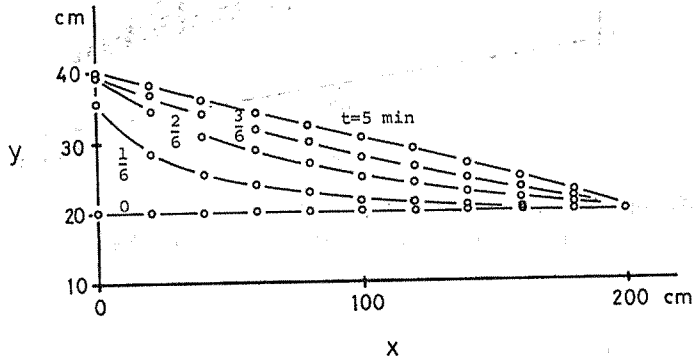


図4-12 急上昇する水位を連続的につないだ地下水面
($\alpha = 0^\circ$, F砂)

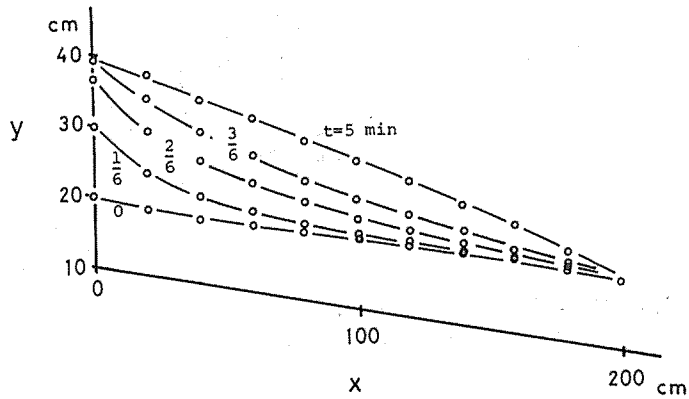


図4-13 急上昇する水位を連続的につないだ地下水面
($\alpha = 10^\circ$, F砂)

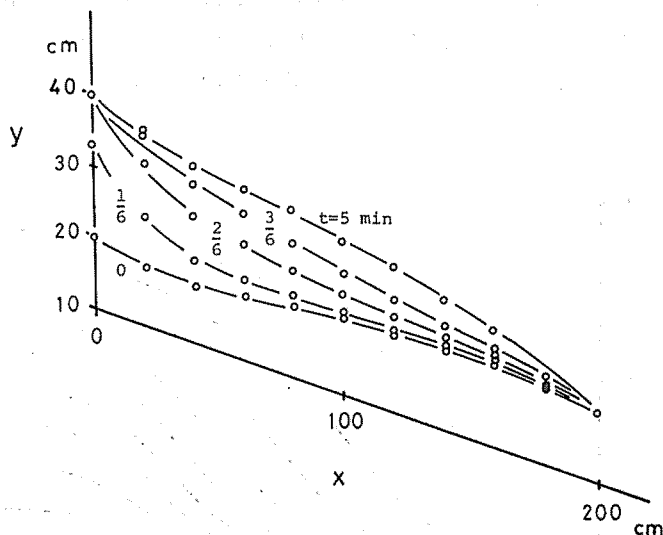


図4—14. 急上昇する水位を連続的につないだ地下水面
($\alpha = 20^\circ$, F砂)

図から、 $\alpha = 10^\circ$, 20° のとき、上昇前後の定常な水位を連続的につないだ水面は、斜面上部で凹形を示しており、緩上昇や降下のとときと同じく、何らかの形で水位低下がおきていると考えられる。

急上昇する水位は、外水位に近いほうから上昇し、外水位が40cmに達した後は、各測点において、安定な水位になるまで上昇するこの安定な水位は、 $\alpha = 0^\circ$ のとき定常形に等しく、 $\alpha = 10^\circ$, 20° のとき定常形より低い値となっている。

さて、地下水面に、差分方程式を適用してみる。 L を斜面長200cmにとれば、 $X = 1.0$ となる。 f は、0.1～0.2の値域となり、差分方程式(4—5')式が安定・収束である階差は、 $\ell = 0.1$, $t = 0.01$ で十分となる。

初期条件、境界条件は、(4—12)式、(4—13)式において、 $H = 0.1$ とおき、実験の外水位の急上昇に対応させれば、数値解は、求めることができる。

また、 T と t との関係は、(4—1)式より、

$$T = kt/\epsilon L$$

$$\therefore \ln T = \ln\left(\frac{t}{L} \cdot I\right) + \ln\left(\frac{k}{\epsilon} \cdot \frac{1}{I}\right) \quad (4-14)$$

ここで、 I は、大きさ1で、(4—14)式の右辺のそれぞれの真数部分を無次元にする量である。

そこで、実験値 T , t について、 (Y/L) を縦軸に、 (tI/L) の対数を横軸にとれば、そ

の関係は、横軸に $-\ln(k/\epsilon I)$ だけ平行移動すれば、差分方程式の数値解 f と $\ln T$ との関係 (図4-15参照) に等しくなるはずである。いま、 $\alpha = 0^\circ$ の $(y/L) - \ln(t I/L)$ 図に、最もよく適合するように $f - \ln T$ 曲線を平行移動したものが、図4-16となる。図中の

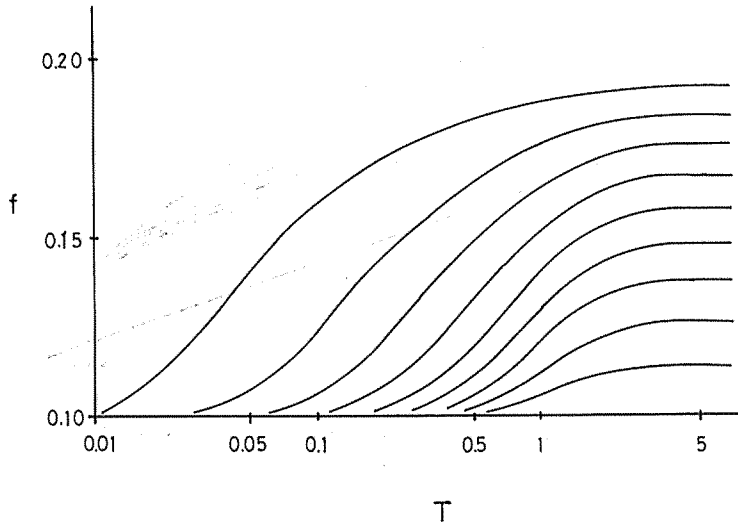


図4-15 差分方程式による急上昇するときの数値解 f と T との関係
($\alpha = 0.0$, $\ell = 0.1$, $I = 0.01$)

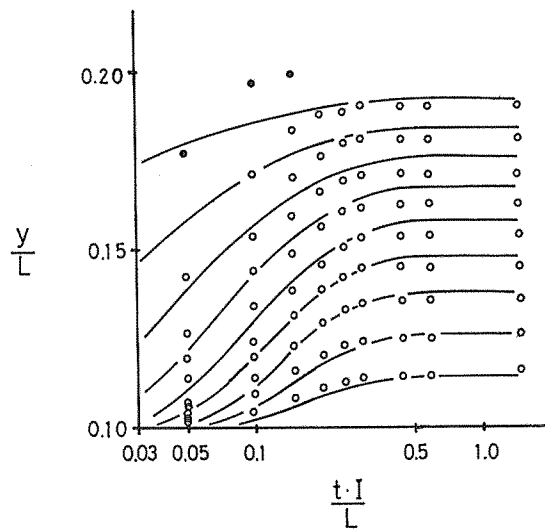


図4-16 急上昇する水位と数値解
丸印は実験値、実線は数値解 ($\alpha = 0^\circ$, F砂)

黒丸は、外水位の上昇を示す。外水位の上昇は、数値解より遅いため、上昇初期において、数値解より低い。しかし、上昇に伴ない、各測点の水位が数値解に近づいて行き、急上昇する水位を差分方程式で近似できることがわかる。そのときの $\ln(k/\epsilon I)$ は、 $\ln 6.2$ (E)、 $\ln 7.0$ (F) となり、 k/ϵ は、6.2 (E) と 7.0 (F) となった。また、 $\alpha=10^\circ$ 、 20° の場合、斜面上部の水位低下のため、各測点の水位は数値解より低い値となり、 $(y/L) - \ln(tI/L)$ の関係は、 $\alpha=0^\circ$ のように、うまくいかない。そこで、各水位の上昇傾向から k/ϵ を求めたところ、 $\alpha=10^\circ$ で 5.5 (E) と 6.0 (F)、 $\alpha=20^\circ$ で 3.0 (E) と 5.8 (F) とであった。これらの値から、有効空げき率を求めると、E砂で、0.7% ($\alpha=0^\circ$)、0.8% ($\alpha=10^\circ$)、1.9% ($\alpha=20^\circ$)、F砂で、0.4% ($\alpha=0^\circ$ 、 10° 、 20°) となり、非常に小さい値となったが、これについては、次節で検討する。

以上、砂モデル実験において、傾斜不透水層上の斜面上部を除けば、緩上昇あるいは降下する地下水水面は、定常形のまま昇降する傾向があり、その解は、差分方程式 (4-5') 式で、境界値を十分に遅く昇降すれば、求めることができる。また、急上昇する地下水水面 ($\alpha=0^\circ$) に対して、(4-5') 式は、解を与えることができ、非定常な自由地下水水面形は、(4-5') 式あるいは (4-5) 式で近似的に表わされることになる。

しかし、定常および非定常実験において、傾斜不透水層上の斜面上部で生じた水位低下が、砂モデル特有の現象なのかどうか、今後、検討しなければならない。

第4節 有効空げき率 (E) について

(4-5') 式を用いた数値解を、実験あるいは山地の地下水水面の変動に適用する場合、透水係数と有効空げき率が問題となる。透水係数は、定常の章で述べたように、透水試験でその概略値を得ることはできる。しかし、有効空げき率は未知である。そこで、E砂とF砂の有効空げき率を検討してみる。

図4-17に示す、直径15.0 cm、高さ30 cmの円筒に、砂をつめ、下部から水を流入出し、そのときの水位の昇降を測定し、水位の昇降と流入出量の関係から有効空げき率を定める。

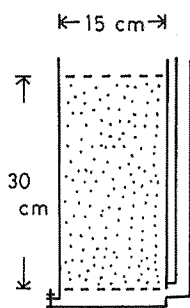


図4-17 有効空げき率の測定装置

E砂とF砂の乾そう砂をそれぞれ円筒に充填し、下部から水を流入する。流入初期の水は、毛管上昇し、水位として現われない。水位が現われるまでの流入量は、E砂で約2,000 ml、F砂で約2,600 mlで、そのとき、円筒壁面に現われた浸潤高は、E砂で約23.0 cm、F砂で約30.0 cmとなり、F砂の毛管上昇がE砂より高い。このように、乾そう砂の場合、水位上昇に到るまでに多量の水がいることがわかる。

そこで、一度、水位をあげて、砂を飽和し、その後の水位の昇降と流入出量から、水位の昇降に関係する空げきを、砂柱の位置との関係でみると図4-18となる。図中の白丸は、水位を上昇したとき、黒丸は、水位を降下したときのものである。

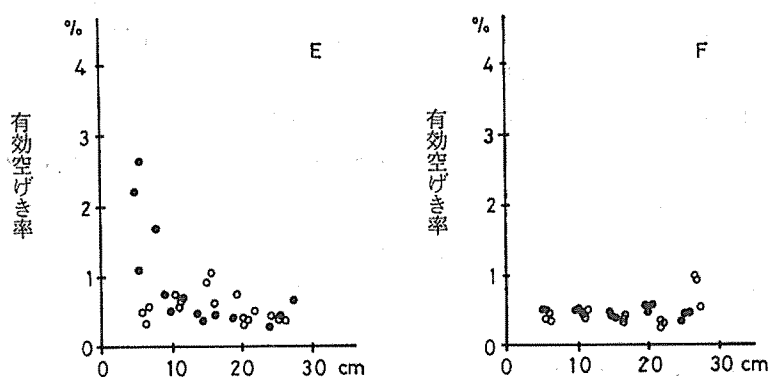


図4-18 水位の昇降に関する有効空げき率
白丸は上昇のとき、黒丸は降下のとき

図から、E砂で若干バラツクが、ほぼ0.5%前後の空げきが水位の昇降に関係すると考えられる。また、このときの砂の全空げき率は、E砂で約44.4%、F砂で約48.6%と大きい、水分測定より、全空げきの約81% (E) 約87% (F) が水で満たされていたこと、さらに、サンプリングの際の水の逃げを考えれば、全空げきのほとんどが、水で満たされている状態に近く、有効空げき率は、小さな値であることがわかる。

非定常実験の斜面は、気泡による水位低下を防ぐため、砂を水中沈降でつめたため、初期水分量は多く、実験斜面の全空げき率は、E砂で約43.5%、F砂で約46.7%、そのうち、約86% (E)、約91% (F) が水で占められていた。これから、実験斜面の有効空げき率は、0.5%前後と推定することができる。そして、急上昇する水位と差分方程式の数値解から求めた有効空げき率が、 $\alpha = 20^\circ$ 、E砂の1.9%を除けば、0.4 ~ 0.8%となり、妥当な値を示していることがわかる。

このように、有効空げき率が、全空げき率よりはるかに小さいことは、空げきに保留される水分量によって、水位上昇速度が異なってくることが考えられ、水分量が少ない場合、空げきに保留される水分の供給をも含めて、水位上昇を考えねばならないことがでてくる。そのため、上昇時と降下時において、有効空げき率が異なる場合がでてくるので、有効空げき率の決定は、慎重に行わなければならない。

第5章 ま と め

山地で降る雨水が、地中に浸透し、崩壊発生に関係すると考え、従来、水平不透水層上で論じられていた地下水面形を山地斜面の傾斜不透水層上に拡張し、さらに、砂モデル実験を通じて、その有用性を検討したのが本研究である。

ダルシーの法則に基づく地下水理論を、傾斜面上に拡張した。

$$q = ky \left(\sin \alpha - \frac{dy}{dx} \right) \quad (2-16)$$

連続の式は、

$$\varepsilon \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = p \quad (2-17)$$

(2-16) 式、(2-17) 式から、傾斜不透水層上の地下水面の基本式は、次式となる。

$$\varepsilon \frac{\partial y}{\partial t} + k \sin \alpha \frac{\partial y}{\partial x} = k \frac{\partial}{\partial x} \left(y \frac{\partial y}{\partial x} \right) + p = k \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + ky \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + p \quad (2-18)$$

ここで、 ε は有効空けき率、 α は不透水層が水平となす角、 k は透水係数、 p は降雨による水の供給量、 t は時間、 q は流量、 x は不透水層に沿った方向の距離、 y は鉛直方向の水位である。

定常の場合、 $\partial y / \partial t = 0$ から、(2-18) 式は、

$$k \sin \alpha \cdot y = ky \frac{dy}{dx} + px + c_3 \quad (3-2)$$

となる。

$\alpha \neq 0$, $p \neq 0$ のとき

$$a = \sin \alpha, \quad b = \frac{p}{k}, \quad c = \frac{c_3}{k} \quad (3-3)$$

$$X_d = x + \frac{c}{b}, \quad Y = y \quad (3-5)$$

$$Y = u X_d \quad (3-7)$$

とおけば、(3-2) 式は、 $(a^2 - 4b) < 0$ で、

$$\frac{1}{2} \ln(u^2 - au + b) + \frac{a}{\sqrt{4b - a^2}} \arctan \frac{2u - a}{\sqrt{4b - a^2}} = -\ln \frac{|X_d|}{c_5} \quad (3-11)$$

$\alpha \neq 0, p \neq 0$ のとき

$$y + \frac{q}{ka} \ln \left| \frac{q}{ka} - y \right| = ax + c_0 \quad (3-14)$$

$\alpha = 0, p \neq 0$ のとき,

$$ky^2 + px^2 + 2c_3x + c_4 = 0 \quad (3-16)$$

$\alpha = 0, p = 0$ のとき

$$ky^2 + 2c_3x + c_4 = 0 \quad (3-17)$$

となり、定常状態の傾斜不透水層上の地下水面は求めることができる。

非定常の場合、(2-18)式は、非線形偏微分方程式のため、そのまま解を得ることは難しい。そこで、

$$X = \frac{x}{L}, \quad F = \frac{y}{L}, \quad T = \frac{kt}{\epsilon L}, \quad P_0 = \frac{p}{k} \quad (4-1)$$

とおき、(2-18)式を無次元量に改める。

$$\frac{\partial F}{\partial T} + a \frac{\partial F}{\partial X} = \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right)^2 + F \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} + P_0 \quad (4-2)$$

そして、 $\partial F / \partial X$, $\partial^2 F / \partial X^2$, $\partial F / \partial T$ を近似するのに、それぞれ、

$$\begin{aligned} & \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2l} \\ & \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{l^2} \\ & \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\tau} \end{aligned} \quad (4-4)$$

を用いると、(4-2)式は、次の差分方程式となる。

$$\begin{aligned} f_{i,j+1} = & f_{i,j} - \frac{a}{2} (f_{i+1,j} - f_{i-1,j}) \frac{\tau}{l} + \frac{1}{4} (f_{i+1,j} - f_{i-1,j})^2 \frac{\tau}{l^2} \\ & + f_{i,j} (f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}) \frac{\tau}{l^2} + P_0 \tau \end{aligned} \quad (4-5)$$

ここで、 $f_{i,j}$ は、mesh method における格子点上の値、 l, τ は、X方向、T方向の階差である。

(4-5)式が(4-2)式の近似式になるには、差分方程式の解が、微分方程式の解に収束すること(収束性)。および差分方程式を解くときに算術演算の誤差によって不安定成長しないこと(安定性)が必要である。しかし、収束性と安定性の関係が確立している差分方程式は、定数係数の線形方程式、陽差分で近似されたある種の一次元双曲型あるいは方物型方程式、ならびに、少数の準線形2階方程式などのほんの限られた微分方程式であって、(4-5)式のような非線形方程式については、ほとんどわかっていない。そこで、この差分方程式において、

- (1) ある格子点で発生した誤差が、それ自身に差分方程式を適用したとき、どのように伝播するか。
- (2) 境界値をある値に固定したとき得られる差分方程式の解が(4-2)式で $\partial F/\partial T = 0$ おいて求められる解に近づくかどうか。

の2点について、数値計算を行ない、(4-5)式の安定性と収束性について数値的に求めることにした。

簡単のため、 $P_0 = 0$ とおき、数値的に安定性と収束性を満たす階差を求めた結果、階差 ℓ 、 t は、近似する E 値、つまり、 f の値域に応じて定めなければならないことがわかった。

一方、砂モデル斜面によって、地下水面を検討した結果、定常の場合、レイノルズ数が4あるいはそれ以下であって、水頭勾配が約0.1以下の地下水面に対して、(3-11)式、(3-14)式、(3-16)式、(3-17)式を適用できることがわかった。また、非定常の場合、緩上昇する地下水面および降下する地下水面は、定常な地下水面形のまま昇降する傾向をもち、そのときの数値解は、(4-5')式で求めることができる。急上昇する地下水面は、 $\alpha = 0^\circ$ の場合、(4-5')式で解を得ることができた。ゆえに、非定常地下水面形は、(4-5')式あるいは(4-5)式で表わされることがわかった。

そして、地下水面形を決定する透水係数と有効空げき率は、透水係数を透水試験値から、有効空げき率を流入出する水量とそのときの水位の昇降量とから、斜面における概略値を得ることができる。

これらの結果から、山地斜面の比較的浅い地下水面の形態を、傾斜、土壌の物理性、降雨条件から推定することができ、地下水面からみた斜面の危険度を表わすことができると考えられる。

謝 辞

終りに臨み、本論文をまとめるにあたり、懇篤な指導と校閲の労をとられた名古屋大学農学部片岡 順教授・鈴木太七教授・堀 高夫教授・名古屋大学名誉教授(故)西畑勇夫博士に心から拝謝する。また、種々助言をしていただいた名古屋大学名誉教授河田五郎博士に御礼を申しあげる。

引用文献

- (1) 遠藤・河田他：砂防工学。49～53，朝倉書店，1969
- (2) 竹下敬司：北九州市門司・小倉地区における山地崩壊の予知とその立地解析。48～71，福岡県林務部，1971
- (3) 武居有恒：山くずれの力学的研究。京大演報，32：43～97，1961
- (4) 久保田敬一：浸透水流による築堤斜面の崩壊について —凝集力のない場合—。土木学会誌，37(10)：12～16，1952
- (5) 赤井浩一：浸透水流による盛土裏法面の局部崩壊について。土木学会論文集，36：44～49，1956
- (6) 内田茂男：自由境界を有する非定常浸透流について。土木学会誌，37(2)：10～14，1952
- (7) 赤井浩一・宇野尚雄：土中の準一次元非定常浸透流に関する研究。土木学会論文集，127：14～17，1966
- (8) M. Muskat: The flow of homogeneous fluid through porous media. 55 - 56, McGraw-Hill, New York and London, 1937.
- (9) M. Muskat: 前掲(8), 359 - 360.
- (10) 物部長穂：浸出作用に対する土堤の安定に就いて。土木学会誌，4(2)：10～15，1918
- (11) 飯田 修：Darcy 則に基づく自由地下水面についての一考察。日林誌，56(5)：155～159，1974
- (12) David K. Todd: Ground Water Hydrology, 309 - 310. John Wiley & Sons, New York. (Reprint Toppan), 1959.
- (13) 最上武雄：土質力学。161～162，技報堂，1969
- (14) 飯田 修：砂質斜面における自由地下水面形(Ⅱ)。日林中支講，19：104～107，1970
- (15) 飯田 修：砂質斜面における自由地下水面形(Ⅲ)。83回日林講：380～382，1972
- (16) 飯田 修：砂質斜面における自由地下水面形。日林中支講，18：97～100，1969
- (17) 岸根卓郎：理論応用統計学。365～367，養賢堂，1965
- (18) M. Muskat：前掲(8)，59～60
- (19) 田中 茂：豪雨による砂質斜面の崩壊機構。新砂防，22：3～9，1954
- (20) 増山元三郎：実験公式の求め方。44～49，竹内書店，1962
- (21) 佐々木八郎：滲透係数を表わす諸式について。水道協会雑誌，237：7～10，1954
- (22) G.D. Smith (藤川洋一郎訳)：サイエンス情報電算機=3 電算機による偏微分方程式の解法。57～93，サイエンス社，1971

Summary

This paper describes the applicability of the set of equations expressing free-surface groundwater profiles over a sloping impermeable layer.

The equations of groundwater profiles over a sloping impermeable layer are given by

$$q = ky \left(\sin \alpha - \frac{dy}{dx} \right) \quad (2-16)$$

and the equation of continuity

$$\epsilon \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = q \quad (2-17)$$

where q is the discharge, α is the angle of the sloping impermeable layer, x is the distance along the impermeable layer, t is the time, $y = y(x, t)$ is the groundwater profile, ϵ is the effective porosity and p is the rate of replenishment due to vertical infiltration. From eq. (2-16) and eq. (2-17)

$$\epsilon \frac{\partial y}{\partial t} + k \sin \alpha \frac{\partial y}{\partial x} = k \frac{\partial}{\partial x} \left(y \frac{\partial y}{\partial x} \right) + p = k \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + ky \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + p \quad (2-18)$$

(1). Steady state of groundwater profiles

Because of steady state, $\partial y / \partial t = 0$. Therefore eq. (2-18) is reduced

$$ky \sin \alpha = ky \frac{dy}{dx} + px + q \quad (3-2)$$

For $\alpha \neq 0$, $p \neq 0$ and $(a^2 - 4b) < 0$, eq. (3-2) is

$$\frac{1}{2} \ln(u^2 - au + b) - \frac{a}{\sqrt{4b - a^2}} \arctan \frac{2u - a}{\sqrt{4b - a^2}} = - \ln \frac{|Xd|}{c_1} \quad (3-11)$$

for $\alpha \neq 0$, $p = 0$

$$y + \frac{q}{ka} \ln \left| y - \frac{q}{ka} \right| = ax + c_2 \quad (3-14)$$

for $\alpha \neq 0$, $p \neq 0$

$$ky^2 + px^2 + 2qx + c_3 = 0 \quad (3-16)$$

for $\alpha = 0, p = 0$

$$ky^2 + 2qx + c_4 = 0 \quad (3-17)$$

where $a = \sin \alpha, b = (p/k), Xd = x + (q/p), y = uXd$ and c_i is constants.

(2). Unsteady state of groundwater profiles

Substituting

$$X = \frac{x}{L}, F = \frac{y}{L}, T = \frac{kt}{\epsilon L}, P_0 = \frac{p}{k} \quad (4-1)$$

eq. (2-18) is

$$\frac{\partial F}{\partial T} + a \frac{\partial F}{\partial X} = \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right)^2 + F \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} + P_0 \quad (4-2)$$

where L is dimension of length (ex. length of slope).

The unsteady state profiles are given by the finite difference equation, eq. (4-5) which was derived from eq. (4-2).

$$\begin{aligned} f_{i,j+1} = & f_{i,j} - \frac{a}{2} (f_{i+1,j} - f_{i-1,j}) \frac{\tau}{l} + \frac{1}{4} (f_{i+1,j} - f_{i-1,j}) \frac{\tau}{l^2} \\ & + f_{i,j} (f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}) \frac{\tau}{l^2} + P_0 \tau \end{aligned} \quad (4-5)$$

where l is the step along X-axis, τ is the step along T-axis and i, j is the numerical value at (i, j) lattice of mesh method.

The equations of eq. (3-11), eq. (3-14), eq. (3-16) and eq. (3-17) for steady state groundwater profiles satisfied the experimental data which were obtained by using a model sand slope for $Re < 4$ and $\bar{y} < 0.1$, where Re is Reynolds number and \bar{y} is an average hydraulic gradient by eq. (3-18) and eq. (3-19).

The equations of eq (4-5) and eq. (4-5') in case of $P_0 = 0$ express unsteady state groundwater profiles.