

# DUFF・NOLANの年輪幅の斜め方向の系列についての 一実験公式

吉田孝久\*・金光桂二\*\*

## An empirical formula for the oblique sequence of the annual ring width proposed by DUFF & NOLAN

Takahisa YOSHIDA\*, Keiji KANAMITSU\*\*

DUFF・NOLANが提案している年輪幅の斜め方向の系列を数式で表わすことを試みた。今回は、ガンマ分布の確率密度関数と指数関数の合成関数を作り、76年生のスギ (*Cryptomeria japonica*) に当てはめてみた。その結果、樹幹梢端部では、年輪幅の系列がガンマ分布と異なる部分が当てはまりが悪く、根際部では、年輪幅が急速に増加する場合には、当てはまりが悪いときもあったが、系列全体としてはよく適合していた。

The authors composed an empirical formula for the pattern of the oblique sequence of ring width proposed by DUFF & NOLAN. The formula was a mixed curve of the probability density function of the gamma distribution with an exponential function and fitted to the ring width of Sugi (*Cryptomeria japonica*) of 76 years old. It was poor fit at the portion where the pattern of the sequence of ring width differed from the probability density function in the tree top and there was poor fitness at the butt where the ring width increased rapidly in that place. Except such cases, The formula seemed to fit the pattern adequately throughout the sequence.

キーワード：年輪幅、斜め方向、実験公式

### I はじめに

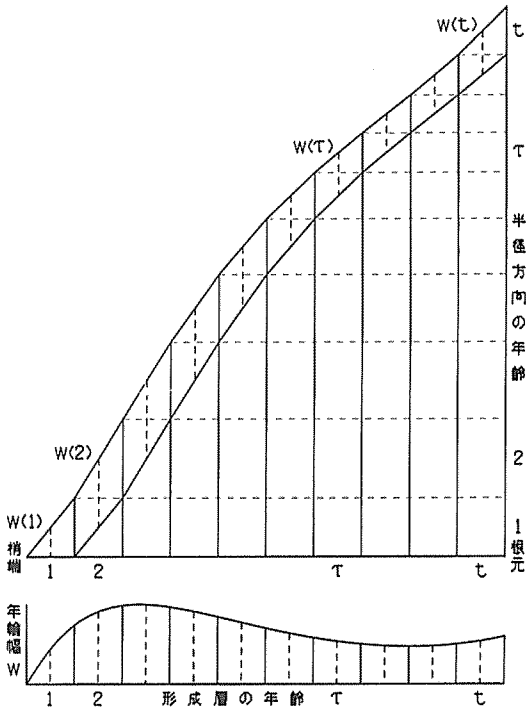
DUFF・NOLANは、レジノーサマツ (*Pinus resinosa*) の年輪幅の成長を3つの方向から研究した<sup>(1)</sup>。吉田・金光の若干の調査では、3方向のうち、垂直方向と斜め方向の系列が、施肥や害虫の被害の影響をよくとらえていた<sup>(9,10)</sup>。垂直方向の系列はランダムな変動が多いのに対して、斜め方向の系列は、ほぼ一定の形を持っていた。従って、もし斜め方向の系列を数式で表わすことができれば、外界の年輪生長におよぼす影響を、より一層はっきりと、とらえることができるであろうと考えて、この研究を試みた。

なお、斜め方向の系列  $w(t)$  とは、図-1に示

したように、ある年度における一年間の樹幹の梢端から根元にいたる年輪幅の縦断的分布に関し、各年度の樹高伸長量の中央に位置する年輪幅を順次並べたものである。tは樹高伸長量を梢端から順に1年、2年、3年等とさかのぼって数えた年数で、梢端からの距離に対応するものであるが、ここでは、DUFF・NOLANおよびFRITTSの定義に従って、形成層の年齢 (cambial age, age of cambium) と称する<sup>(1,2)</sup>。図-1の半径成長の方向に付した数値は、成長の年次である。図より、形成層の年齢1年の年輪幅は、半径方向に沿って髓から数えて年齢1年の年輪幅であり、形成層の年齢2年の年輪幅は、半径方向の年齢2年の年輪幅である。以下同様、形成層の年齢t年の年輪幅は、

\* 東京大学農学部付属愛知演習林 Tokyo University Forest in Aichi, Faculty of Agriculture, University of Tokyo, Bunkyo-ku, Tokyo 113.

\*\* 名古屋大学農学部付属演習林 University Forest, School of Agriculture, Nagoya University, Chikusa-ku, Nagoya 464-01.



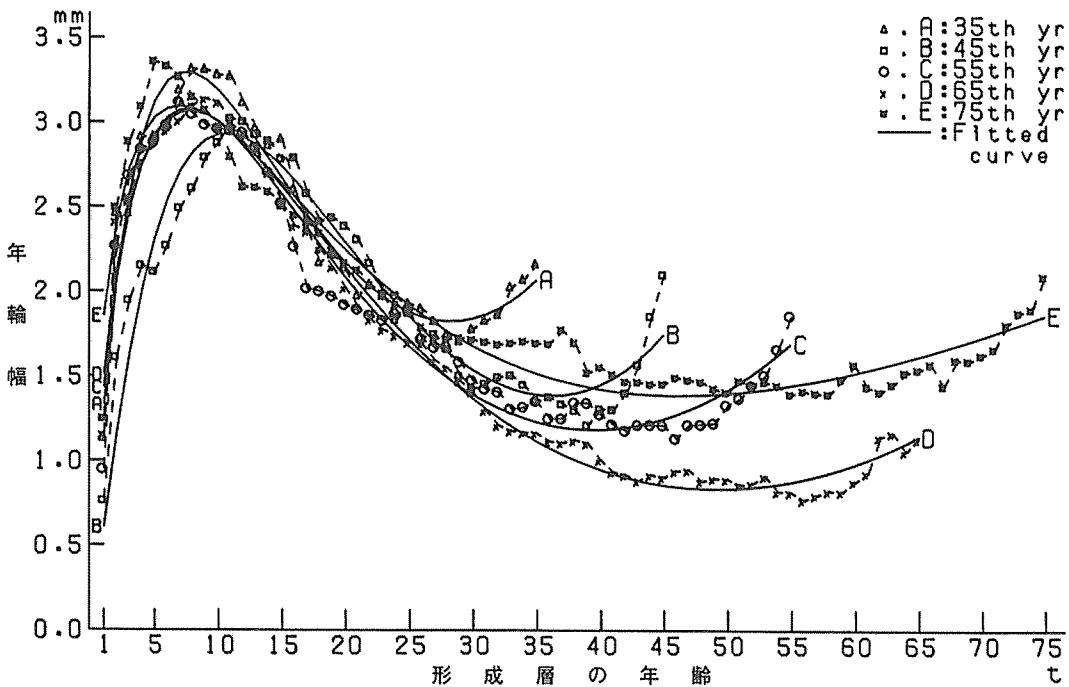
図一 樹幹縦断面図と年輪幅の斜め方向の系列

半径方向の年齢  $t$  年の年輪幅である。従って、斜め方向の系列はある年度の1年間の成長量であるが、形成層の年齢と半径方向に沿って髄から数えた年齢は1対1に対応しているから、形成層の年齢を一般の時間と同じ取扱いをした。

なお、本論文をとりまとめるにあたり、名古屋大学農学部長嶋郁博士から有益な助言をいただいた。深く謝意を表す。また、この研究における計算は名古屋大学大型計算機センターを利用した。

II 資料

供試木は、東京大学千葉演習林仙石33林班C-1小班より1978年8月に伐倒したスギ (*Cryptomeria japonica*) 3本である。供試木を採取した林分は面積が3.19 haでスギとヒノキ (*Chamaecyparis obtusa*) の混植造林地である。伐倒時の全体の立木密度は700本/haで、スギとヒノキの本数割合は5対5であった。伐倒時のスギの樹齢は76年で、その平均胸高直径は30.3cm、平均樹高は21.14 mであった。この地区より平均



図二 年輪幅の斜め方向の系列

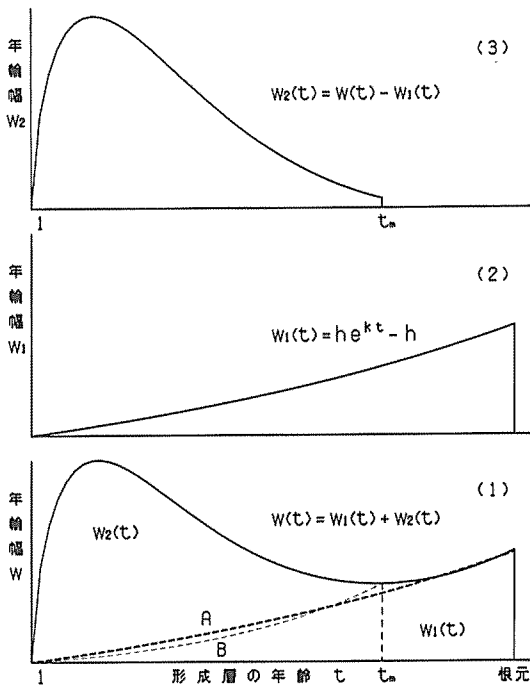


図-3 年輪幅の斜め方向の系列の分割方法

胸高直径を持つスギ、平均胸高直径より若干大きなスギ、若干小さなスギ各1本づつを供試木とした。円板を地ぎわより、順次50cmごとに採取し、毎年の樹幹縦断面図を描き、各年度の樹高伸長量の中央に位置する年輪幅を推定し、上記3本の平

均値を年輪幅の値として用いた。

### Ⅲ 実験式

樹齢が若い時を除いて、斜め方向の系列は、樹幹の梢端から根元に向かって、樹幹上部では最初増加した後減少し、樹幹中央部以下または下部で再び増加する曲線であることは、これまでの多くの研究報告で指摘されており<sup>(4,6,8,9)</sup>、本供試木においてもこのような動きを示した(図-2)。

大島・篠崎は、樹幹形の枝下部分に関して、静力学的観点から指數的増加曲線を導いている<sup>(7)</sup>。しかし、年輪成長と密接な関係がある連年の幹形の成長量については証明されていない。そこで、年輪幅の系列の樹幹中央部以下または下部で再び増加していく部分(図-3, (1):再び増加が始まる時点をもし、 $t = t_m$ から根元までの部分)の資料の各年輪幅の値を $w_{D1}(t)$ とし、この $w_{D1}(t)$ が実際に指數的増加をしているかどうかを調べてみた。図-4にみられるように年輪幅の対数は、ほぼ直線とみなされるといえる。従って、資料 $w_{D1}(t)$ は、 $h, k$ を正の定数とする

$$w(t) = he^{kt} \quad (1)$$

で表わせる。次に、樹幹上部の最初増加した後減少する部分を表わす曲線式を考え、この曲線式と(1)式を連結させれば、当てはめの精度は良くなる

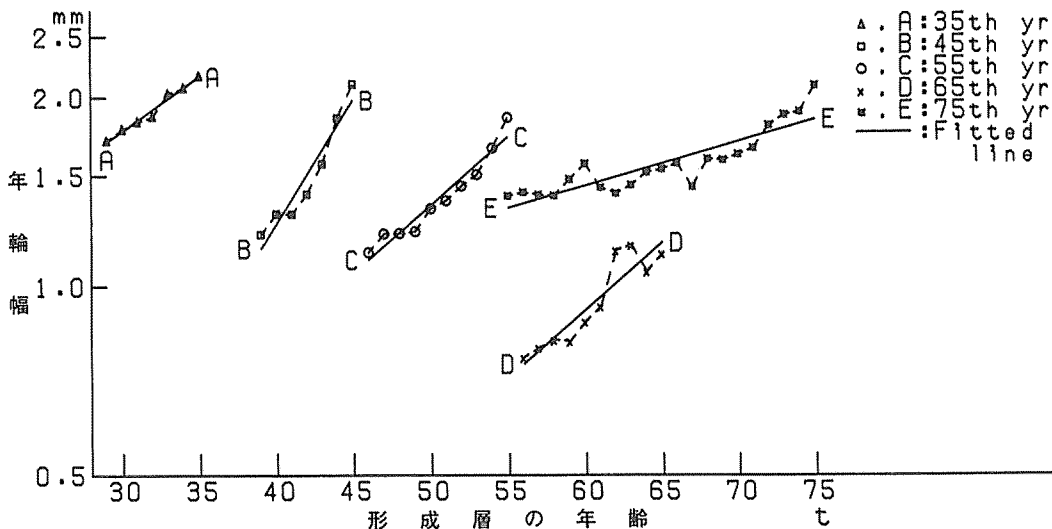


図-4 樹幹中央部以下の増加していく年輪幅の系列( $w_{D1}(t)$ , 対数目盛)

と思われるが、次の二つの問題が生ずる。すなわち、連結点で二つの曲線を一致させることと、資料により必ずしも必要でないともいえるが、連結点の近傍でなめらかであるように接合させるという問題が生ずる。そこで、今回は、精度は若干悪くなるが、簡単な方法を用いることにした。すなわち、図-3に示してあるように、梢端から下部の増加し始める時点  $t_m$  までの各年輪幅を縦断的に二つに分け、各々を表わす二つの曲線式を考え、この二つの曲線式を考え、この二つの曲線式を足し合わせて近似的に年輪幅の斜め方向の系列を表わすことにした。以下にこの方法を述べる。

(1)式を、時点  $t = 0$  の時、 $w(0) = 0$  となるように、 $w(t)$ 軸の下方へ平行移動したものを  $w_1(t)$ とすると

$$w_1(t) = he^{kt} - h \quad (2)$$

となる。この(2)式を用いて、増加していく部分(資料では上記の  $w_{D1}(t)$ )を近似的に表わすことにした。そのために、(1)式を用いて  $h, k$  を求め、この値を初期値として(2)式に対して逐次近似法、NELDER・MEAD法<sup>(5)</sup>を用いた(図-3、(1):鎖線A)。次に、樹幹上部の最初増加した後減少する部分(図-3、(1):時点  $t = 1$  から  $t = t_m$  まで

の部分)の各年輪幅の値を(2)式で分割し、(2)式より上の部分と下の部分に分ける。ここで、時点  $t = 1$  から  $t = t_m$  までの資料の各年輪幅の値を  $w_{D2}(t)$ とし、この  $w_{D2}(t)$ から、上記のようにして数値が定められた  $h, k$  を持つ(2)式の値を差し引いた値を  $w_2(t)$ とする(図-3、(1):時点  $t = 1$  から  $t = t_m$  までの年輪幅を鎖線Aの上部と下部の部分に分ける。同図(3)は上部の部分を変更して書き直したものである)。この  $w_2(t)$ の形を次のようにして調べてみた。すなわち、スプライン関数を使用して数値微分し  $w_2(t)$ の相対成長速度  $\frac{1}{w_2} \frac{dw_2}{dt}$  を描いてみた。図-5は、このようにしてえられた曲線である。これらの曲線に対して、関数の形およびパラメータの数を考慮して、初等的で簡単な式である双曲線の減衰曲線で表わすことを試みた。すなわち、 $a, b$  を正の定数とし、

$$\frac{1}{w_2} \frac{dw_2}{dt} = \frac{a}{t} - b \quad (3)$$

とした。図-5の実線は当てはめた双曲線であるが、ほぼ適合しているといえる。(3)式を書きなおすと

$$\frac{dw_2}{dt} = \frac{a}{t} w_2 - b w_2 \quad (4)$$

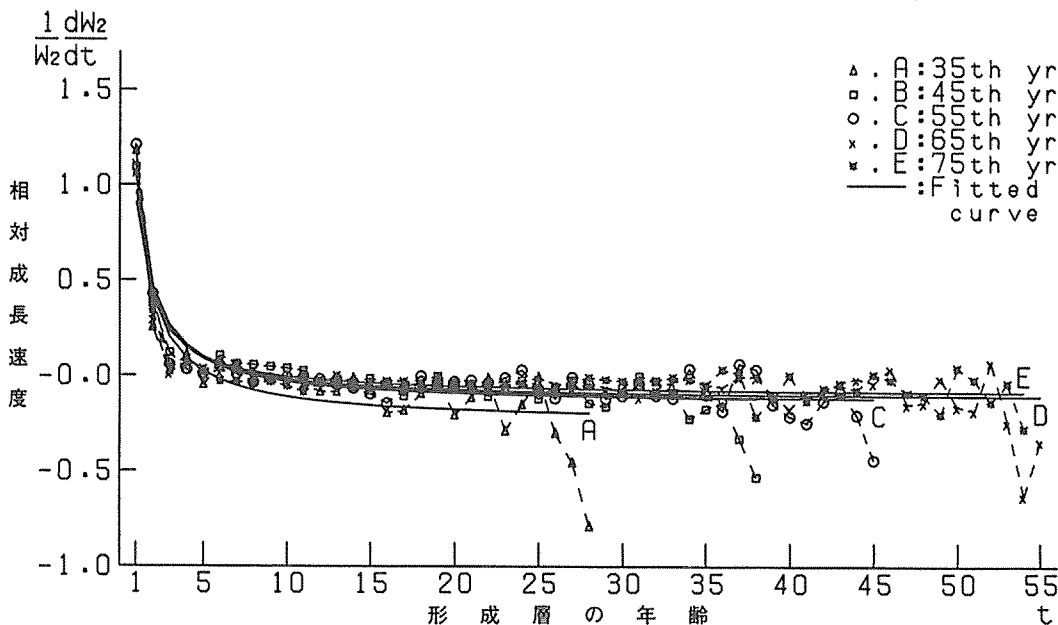


図-5 年輪幅の相対成長速度  
年輪幅は図-3、(1)の鎖線Aの上の部分の値、すなわち、同図(3)の年輪幅である

となる。この式の右辺の第一項は年輪幅  $w_2(t)$  を増加させる項であり、第二項は減少させる項である。(4)式を解くと

$$w_2(t) = ct^a e^{-bt} \quad (5)$$

となる。但し、 $c$  は積分定数である。この式のべき関数  $t^a$  は無限に増加するが、指数曲線よりもゆるやかに増加するため、 $t^a$  に指数的減衰曲線  $e^{-b}$  を掛け合わせた(5)式は、曲線全体として、最初増加した後減少する曲線となる。従って、(2)式と(5)式の和は、曲線全体として、最初増加した後減少し再び増加する曲線となる。なお、資料  $w_2(t)$  が実際に(5)式で表わされることは次のようにして確認できる。すなわち、 $t$  を公比  $r$  の等比数列にとれば ( $t_i = r^{i-1}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ )、(5)式は

$$\log_e \{ w_2(t_{i+1}) / w_2(t_i) \} = a \log_e r - b(r-1)t_i \quad (6)$$

となり、 $\log_e \{ w_2(t_{i+1}) / w_2(t_i) \}$  が  $t_i$  について直線となるという特徴をもっている<sup>(3)</sup>。そこで、 $r=2$  として、これを図-6に描いてみた。図-6において、各点は直線を形成しているとみなしてよいといえる。従って、資料  $w_2(t)$  が(5)式の右辺で表わされると推定できる。以上により、年輪幅の斜め方向の系列の近似式  $w(t)$  として、

(2)式と(5)式の和

$$w(t) = ct^a e^{-bt} + he^{kt} - h \quad (7)$$

が得られる。なお、このような方法を用いれば、パラメータ  $h, k$  をどのようにして定めればよいかという問題があるものの、梢端から根元までの年輪幅の縦断的分布が最初増加した後減少するような場合でも(7)式を用いることができる(図-3, (1): 細い鎖線 B は  $he^{kt} - h$  を表わす)。

(7)式はパラメータについて線形ではないので NELDER・MEAD 法を用い、 $h, k$  の初期値は前述の値を使用した。 $a, b, c$  に関しては、上記の資料  $w_2(t)$  を用いて、(5)式対数をと

$$\log_e w_2(t) = \log_e c + a \log_e t - bt \quad (8)$$

として、 $a, b, c$  を求めることが一般的であるが、ここでは(5)式が、上記のように  $t$  を等比数列にとると(6)式の直線が得られるという性質を用いて、 $a, b$  を求め、さらに  $c$  は

$$\log_e w_2(t) + bt = \log_e c + a \log_e t \quad (9)$$

より求めた。しかし、このようにして求めた  $a, b, c$  は、三者同時に総合した最小自乗法により得たものではなく、若干不完全な値であるから<sup>(3)</sup>、これを初期値として、ここでもまた、NELDER・MEAD 法によって得た値を(7)式の初期

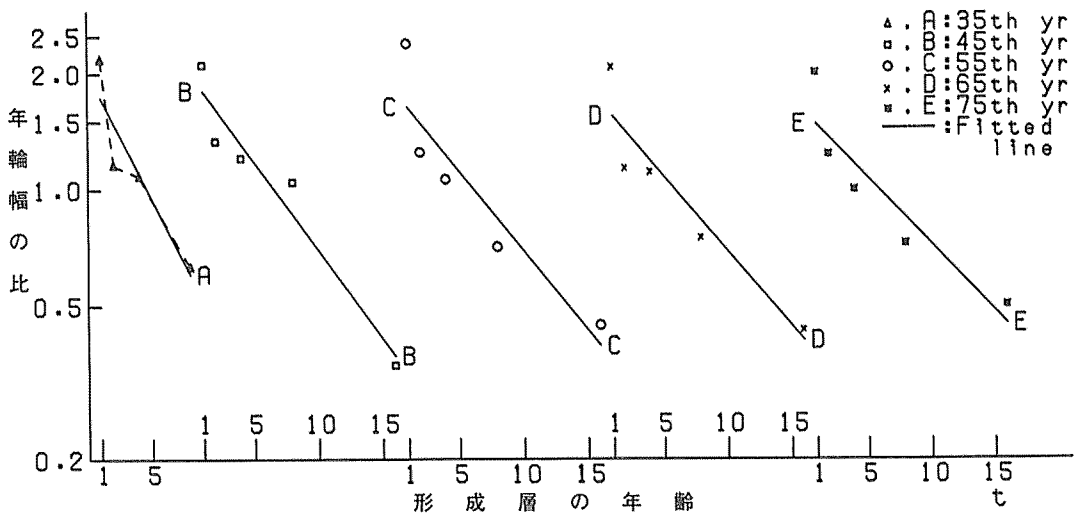


図-6 年輪幅の比 (対数目盛)  
年輪幅は図-3, (1)の鎖線 A の上の部分の値, すなわち, 同図(3)の年輪幅である

値とした。このようにして求めた初期値を用いて、上記のように分割していないもの年輪幅の資料に(7)式を当てはめた。その結果を図-2に示した。

#### IV 結果と考察

上記の方法を用いて樹幹下部の増加傾向がはっきりと現われる樹齢30年から75年までの資料に(7)式を当てはめてみた。(7)式の第一項  $ct^a e^{-bt}$  の  $c$  は定数であるが、 $c = b^{a+1}/\Gamma(a+1)$  とすれば、(7)式の第一項はガンマ分布の確率密度関数となる。従って、(7)式の第一項はガンマ分布と本質的に同じ式とみなすことができる。このような分布形の観点にたつて、樹幹上部の最初増加し、ある最大値に達した後減少する部分の数年を詳細に調べると、実際の年輪幅は、ガンマ分布とほぼ同じ形をしているものの、最初の増加がガンマ分布より急速に増加する形のもの、ガンマ分布より急速に減少する形のもの、またその両者の形のもの、あるいは、ある種の分布形というよりもむしろ台形や三角形に近いものなどがある。このような場合、(7)式の当てはまりは悪いといえる。年輪幅の上記の最大値以降減少する部分は当てはまりが良いといえる。しかし、樹幹下部の増加する部分において、年輪幅が急速に増加するような場合には、(7)式は当てはまりが悪いときがあった。それは、この部分の年輪幅  $w(t)$  は(7)式の第二項  $h e^{kt}$  の指数的増加曲線で表わされるが、(7)式の第一項  $ct^a e^{-bt}$  は  $t$  が大きくなると急速に0に近づくときと急速には0にならないで減少傾向がつづくときがある。後者の場合には、指数的増加曲線を加えても、 $t$  の大きなところでも、結局ゆるやかにしか増加しない曲線となるからである。詳細にみれば以上のような当てはまりの悪い部分もあるが、全体として良く当てはまっていたといえよう。

#### 引用文献

- (1) DUFF, G. H. and NOLAN, N. G. : Growth and morphogenesis in the Canadian forest species. I. The controls of cambial and apical activity in *Pinus resinosa* AIT. Can. J. Bot. 31 : 471~513, 1953
- (2) FRITTS, H. C. : Tree rings and climate. 567 pp, Academic press, New York, 1976
- (3) 一瀬正巳 : 誤差論. 131 pp, 培風館, 東京, 1986
- (4) KOZLOWSKI, T. T. : Growth and development of trees. I I. 514 pp, Academic press, New York, 1971
- (5) NELDER, J. A. and MEAD, R. : A simplex method for function minimization. The Comput. J. 7 : 308~313, 1965
- (6) 尾中文彦 : 樹木の肥大生長の縦断的配分. 京大演報18 : 1~54, 1950
- (7) OOHATA, S. and SHINOZAKI, K. : A statical model of plant form-further analysis of the pipe model theory. Jap. J. Ecol. 29 : 323~335, 1979
- (8) 高原末基 : 枝打の基礎と実際. 149 pp, 地球出版, 東京, 1961
- (9) 吉田孝久・金光桂二 : ヒノキの高さ別年輪幅に現われる生長のパターン. 日林誌60 : 169~172, 1978
- (10) YOSHIDA, T. and KANAMITSU, K. : Growth patterns appearing in annual ring width at different heights in *Picea abies* KARST. and effects of defoliation by *Cephalcia issihikii* TAKEUCHI. Bull. Tokyo Univ. For. 75 : 33~43, 1986