

樹幹形に関する研究

長 嶋 郁

A study on the stem form

Iku NAGASHIMA

目 次

第1章 緒 論	196
第2章 樹幹形表現に関する研究の歴史的概観	198
第3章 モーメントによる樹幹形の表現	205
第1節 モーメント問題	205
第2節 樹幹形表現式	207
第3節 CHARLIERの直交関数系による表現	211
1. CHARLIERの直交関数系	211
2. CHARLIERの直交関数展開による樹幹形	213
第4節 まとめ	220
第4章 直交多項式による樹幹形の近似 (I)	221
— 樹幹形を離散的関数とした場合 —	
第1節 樹幹形の近似理論	221
第2節 樹幹形の直交分解	225
第3節 樹幹形正規直交多項式系	226
第4節 樹幹形の近似と再現	233
1. 樹幹形近似展開式の係数の計算	233
2. 樹幹形近似値の計算	234
3. 樹幹形直交分解における寄与率	235
4. 樹幹形の近似程度	236
第5節 まとめ	238
第5章 直交多項式による樹幹形の近似 (II)	239
— 樹幹形を連続関数とした場合 —	
第1節 連続な樹幹形の近似理論	239
第2節 樹幹形正規直交関数系	243
第3節 樹幹形の正規直交展開	249
1. 樹幹形としての直線式の決定	249
2. モーメントの計算	250
3. 樹幹形展開式の係数の計算	250
4. 樹幹形の近似値による再現	251
5. 正規直交展開による樹幹曲線の誤差	253
第4節 まとめ	255

第6章 生長過程論にもとづく樹幹形の表現	256
第1節 MITSCHERLICHの生長過程	256
第2節 生長過程にもとづく樹幹形	257
第3節 生長過程にもとづく新しい樹幹形表現式	260
第4節 樹幹形提案式の適用	264
第5節 まとめ	270
第7章 総括	271
謝辞	273
引用文献	274
Summary	278

長嶋 郁：名古屋大学農学部林学科

Iku NAGASHIMA : Department of Forestry, School of Agriculture, Nagoya University,
Nagoya 464-01

(受理：1991年8月21日)

(Accepted : Aug. 21, 1991)

樹幹形に関する研究

第1章 緒 論

樹幹形の表現方法は測樹学上の基本的な研究課題で、これまで多数の幹曲線式が提案されている。また造林学的見地からは育林効果の検証を目的として立木密度や枝打ち、あるいは土壌など環境因子と関係させた樹幹形に関する多くの研究が蓄積されている。

立地や気象にかかわって生態学的観点からの研究、また樹幹形を水分チャンネルや栄養勾配の結果としてみる生理学的観点から取り扱われた研究もある。その一方で、雪などの加重を加えたときの樹冠の重量を支える支持体として、あるいは風圧に対する抵抗体とみた場合の力学的追究も行われてきた。しかし、その様な研究努力にも拘らず、次元的にみて矛盾がなく、何らかの理論的背景をそなえかつ現実との整合性をもった樹幹形モデルをうるためには多くの困難性が残されており、いっそうの洗練された研究の発展が期待される (LARSON, 1963)。そうした背景のもとに最近、生物生産量把握の立場からの樹幹形の研究や、樹幹形の経年変化を確率過程として捉える樹幹形予測の研究が展開されている。ともかく、樹幹形に関する研究は古くて新しい研究課題である。これまでの幹曲線式が実験式あるいは経験式に類するものが一般的であったのに対して、著者が樹木の直径と樹高の生長過程にもとづいた新しい幹曲線式を誘導したのは、その発展の一つの方向をめざすものである。

本論文に入るに先立って、第2章において上述した樹幹形研究の歴史的経過を概観する。第3章以下樹幹形に関する現在の研究段階において、新しい観点から樹幹形をより合理的に表現する方法を考究する。この研究を進めるにあたって、幹曲線式が物理量として矛盾のないように、あるいは数学的に矛盾のないように論議を通じて堅持すべき基本的立場を以下のとおり明確にしておく。

1. 幹曲線式は次元的に矛盾のないように説明できること
2. 幹曲線式の定義域をはじめ係数などの定義を厳密にすること

また、導かれた樹幹形表現式は、サンプリングの誤差、あるいは何らかの因子によるゆらぎ現象としての変動に過敏に動かされることのないようなものでなければならない。

さて著者の課題の一つは多項式による樹幹形表現についての再考である。すなわち、モーメント問題にもとづいて、樹幹形を正規直交多項式系を用いて展開すること、他の一つは前述の林木の生長過程論にもとづいて構成された樹幹形モデルを記述することである。

第3章から第5章までは第1の問題すなわちモーメントと直交多項式による樹幹形表現の問題をあつかう。このうち、第3章はモーメント問題にもとづいて、半径を幹軸上に与えられた一種の重みと考えるとき、その各次のモーメントを用いて、逆に半径が定められることから樹幹形をそのモーメントで表すことができることを述べる。第4章では樹幹形を幹軸上の離散的関数と考え、モーメント問題にもとづいて樹幹形の多項式による表現に都合が良いように樹幹形近似の正規直交多項式系を誘導した。直交多項式系によって樹幹形を展開すれ

ば、その各次の項によって近似の程度が理論的に評価できる。第5章は前章と同様の議論であるが、ここでは、樹幹形を幹軸上の連続な関数として定義されたものとして取り扱う。第6章は第2の問題として生長過程論にもとづく樹幹形の表現について述べる。始めに1980年に提案した MITSCHERLICH 式を樹高生長および直径生長の両者に適用した幹曲線式について要約をし、さらにこれを改良し、樹高生長速度と直径生長速度との間に比例的な関係が存在すると仮定した、新しい樹幹形モデルを提案している。これらの幹曲線式の誤差などについても論じている。

第2章 樹幹形表現に関する研究の歴史的概観

森林経営あるいは森林計画をすすめる上で必要となる立木材積の推定方法あるいは採材可能性を追究する立場にたつて、これまで行われてきた樹幹形研究すなわち、樹幹材積のための幹曲線式あるいは樹幹形の数学的な表現方法などに関する樹幹形研究の発展経過を概観する。

1. 経験的な幹曲線式

最初に挙げる代表的なものは、我国では KUNZE 式と呼ばれる(吉田, 1930)幹曲線式(2.1)である。

$$r^2 = ax^\gamma \quad (2.1)$$

ただし

r : 半径
 x : 梢端からの距離
 γ : 形状指数
 a : 係数

周知のとおり、形状指数の如何によって次の回転体がえられる。

$\gamma=0$ 円柱
 $\gamma=1$ 放物線体
 $\gamma=2$ 円錐体
 $\gamma=3$ ナイロイド

この式は古典的であるが、簡潔であり、しばしば新しく開発された幹曲線の精度比較の規準として用いられている。全幹への適用は困難(BEHRE, 1923)とされているが、形状指数を自由にすれば現実的に適用性がある。

BEHRE (1923)によれば、HÖJERは胸高以上の樹幹に対して(2.2)式の幹曲線式を与え、JONSONはこれを改良した幹曲線式(2.3)を提案している。

$$\frac{d}{D} = C \log \frac{c+x}{c} \quad (2.2)$$

ただし

x : 梢端からの距離
 d : x における直径
 D : 胸高直径
 C, c : 係数

$$\frac{d}{D} = C \log \frac{c+x-2.5}{c} \quad (2.3)$$

ただし、記号は d , D については (2.2) 式と同じ、 x は胸高以上の幹長に対する梢端からの距離の比率（パーセント）である。定数 2.5（%）は biological constant と名付けられている。

JONSON 式は (2.2) 式が梢端付近で過大な直径を与えることに対する改良とされるが、 $x=2.5\%$ 未満の直径はゼロとの暗黙の定義の上になりたっていると考えられるから、樹幹形表現式としては不適切である。biological constant には理論性はない。

BEHRE (1923) は良く適合した樹種においてさえ HÖJER 式が梢端付近で過大評価となることを指摘し、平均的な樹幹形を与える方程式として一般の双曲線の適用を提唱した。すなわち

$$\frac{d}{D} = \frac{x}{a+bx} \quad (2.4)$$

ただし、 x は梢端から直径 d までの距離 l の胸高以上の樹幹長 L に対する百分率で表される。 a および b は係数である。そこには記載はないが $a+b=1$ の関係が要求される。SPURR (1952) は、BEHRE 式が HÖJER 式、JONSON 式よりも広範な樹種に対して良い適合性を得ているが、樹種によっては KUNZE 式の方が適合性が良かった、との報告を引用している。

PRODAN (1965) は相対幹形に対して、次式によるもう 1 次高い有理式を提案している。すなわち

$$y = \frac{x^2}{a+bx+cx^2} \quad (2.5)$$

ただし

y : 相対直径

x : 梢端を原点にした相対高

a, b, c : 係数

一般に係数の増加によって近似はよくなるが、3 係数を用いた幹曲線の例として吉田 (1930) が紹介している幹曲線式の中から 2 例を掲げる。一つは寺崎式 (2.6) で

$$d = Ae^{ax-bix} \quad (2.6)$$

である。ただし

x : 梢端からの距離

d : x における直径

A, a, b : 係数

この式は樹幹形には2個の変曲点が存在し、 x による微分係数が梢端において0となる。根元側の変曲点の位置は高くなる傾向がある。

次に和田式は

$$d^2 = a - bx^{1/4} - cx^2 \quad (2.7)$$

である。ただし

x : 地上高

a, b, c : 係数

これらに対して、単なる3次多項式の方がよい結果が得られる場合があることが吉田によって示されている。

直接直径を近似するか、直径の自乗を近似するかは、目的が単なる樹幹形か、材積かで自ら異なる。左辺に直径またはその自乗をとったとき、右辺を n 次の多項式とした幹曲線としては、次の2つの式が、古くから提案されている(吉田, 1930)。

$$(\text{SIMONY}) \quad d = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad (2.8)$$

$$(\text{KREUTZER}) \quad d^2 = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad (2.9)$$

この種の幹曲線式はしかしながら従来、定義域、必要次数および係数間の関係が明確にされていないうらみがあった。吉田の用いた多項式は3次式でこのとき常に $a_0=0$ 、 $a_1<0$ とおかれている。大隅(1959)はこれと同じ式を相対樹幹形に対し適用した。ただしこのときは $a_0=0$ 以外の係数の符号は自由なものとして適用している。

2. 直交多項式の導入と樹幹形の固有ベクトル表示

樹幹形近似に対して、直交多項式系の導入が前沢(1962)によって初めて行われている。しかし、そこでは平均値のまわりの多項式系を用いたため、直交多項式を樹幹形に対して適用することの有利な点が必ずしも明確に示されていなかった。直交関数の導入についてはFRIES and MATÉRN(1965)の報告もある。それは直交性に着目し、樹幹形について、本来の固有の樹幹形の成分とこれに独立な諸要因にもとづいて変化する形の成分とが直交するように樹幹形を解析する新しいアプローチであったが、その結果は根張りの部分の表現を考慮に入れたためと考えられるが、非常に高次の項を含んでいるため実用上問題が残された。

この研究と関連は深い、多変量解析による樹幹形の主成分分析による樹種間、樹冠長、樹高などによる樹幹形の相違を検出する方法が行われている(FRIES, 1965; LIU and KEISLER, 1977)。そこで行われている樹幹形の固有ベクトルによる表示も新しい方向である。KOZAK and SMITH(1966)はFRIESの報告にもとづいて、図解による樹幹形の固有ベクトル分析を行っている。

3. 最近の樹幹形研究の動向

近来, 米国, カナダを中心に行われている幹曲線式は胸高直径 D にたいする相対高 x における直径 d の比またはその自乗を x と樹高 H との関係式としたもので,

$$\frac{d}{D} = f(x, H) \quad (2.10)$$

または
$$\frac{d^2}{D^2} = f(x, H) \quad (2.11)$$

である。

関数 f としては相対高の 2 次式とするもの (KOZAK *et al.*, 1969), 5 次式とするもの (GOULDING and MURRAY, 1976), 対数材積式を変形し樹高或は相対高の指数関数としたもの (DEMAERSCHALK, 1972) などがある。また, 直接断面高を用いる形の幹曲線式として ORMEROD (1793) のモデル

$$d = D \left(\frac{H-h}{H-k} \right)^p \quad (2.12)$$

ただし

- d : 断面高 h における直径
- D : 胸高直径
- H : 樹高
- k : 基準高を表す係数
- p : 係数

がある。BYRNE and REED (1986) は p が形状指数に対応しているとして, p の値が根元部分では $3/2$, 中央部では $1/2$, また梢端部分では 1 に高さによって不連続に変わる形式を提案している。なお, (2.11) 形式のものには x の次元が 40 次と極めて高いもの (BRUCE *et al.*, 1968) が考えられているが, これも根張りの部分の表現を良くするためと思われるが, 実際上には疑問なものである。区分的な近似方法として材積の推定を目的としたものであるが, 低次の多項式を各断面で微分係数を等しくするという条件で, 連結する方法が行われている (MAX and BURKHART, 1976; BURKHART and WALTON, 1985)。こうしたものの中には幹軸上部 (指数関数とベキ), 下部 (ベキ形式) とで関数形の異なるものも報告されている (DEMAERSCHALK and KOZAK, 1977)。CAO ら (1980) は上記の種々なる関数形を材積との関連で比較検討している。なお, 必ずしも樹幹曲線式としての提案ではないが, 断面ごとの直径を用いて逐次上部の断面の直径を推定する方法も行われている。

GROSENBAUGH (1966) は全幹に対する幹曲線式に対しは悲観的であり, 2 次までの線形または調和関数による区分近似を提唱している。

4. 相対樹幹

樹幹の完満度を表示する目的で, 直径率, 形状商なども提案されているが, 最も一般的なものは相対直径表示する方法である (PRODAN, 1965)。梢端を原点として樹高の 10 分位における直径を $d_{0.1}$, $d_{0.2}$, ..., $d_{0.9}$ とするとき, 相対直径 $\eta_{0.1}$ は次によって定義される。

$$\eta_{0,i} = d_{0,i}/d_{0,9} \quad (i=1, 2, \dots, 9) \quad (2 \cdot 13)$$

この樹幹形表現方法は HOHENADL によって提唱され、KRENN および PRODAN によって発展をみたとされる。KRENN および PRODAN らは、 $\eta_{0,i}$ を Ausbauchungszahl, またその数値の組を Ausbauchungsreihe と呼び、これが、樹幹形を表す最も優れた手段であるとした。大隅 (1959) は、これを我国に紹介し用語のそれぞれに「相対直径」、「相対直径列」なる訳語を与え、さらにこれによって表現される樹幹形に対し「相対幹形」の用語を与えた。実際に相対幹形は正形数と密接な関連をもっている (大隅, 1974)。梶原は 1972 年相対幹形について報告し、以降、樹冠長、成立密度など造林学的要因との関連で相対幹形および正形数の関係を研究し報告を続けている。

著者 (1984) は、相対高 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9 において測定された直径 (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) を次式によって正規化した組を正規幹形ベクトルと定義して、これによって表現される樹幹形を正規幹形と定義した。

$$\zeta = (\zeta_i) = (d_i / \sqrt{\sum d_i^2}) \quad (i=1, \dots, 5) \quad (2 \cdot 14)$$

この表示によると、 ζ_i を自乗するとその値が幹軸を 5 等分したときの第 i 番目の材積の全幹材積への寄与率を表示するので都合がよい。なお、正規幹形と相対幹形との関係についても報告した (長嶋, 1984; NAGASHIMA, 1984)。

5. BIGING の幹曲線式

BIGING (1984) は、樹高生長に適用された RICHARDS の生長関数において左辺を相対高とし、右辺の時間因子を直接相対直径 (基準: 胸高直径) 生長に置き換えた形式の直径-樹高関係から、樹幹形を誘導している。すなわち

$$d = D [b_1 + b_2 \ln \{1 - c(h/H)^{1/m}\}] \quad (2 \cdot 15)$$

ただし

d : 直径

D : 胸高直径

h : 地上高

H : 樹高

m : RICHARDS 生長関数の指数

b_1, b_2 : 係数

$$c = 1 - e^{-b_1/b_2}$$

彼は、この誘導に生物学的な意味づけをしておらず、実際に生長曲線の単なる利用に終って

おり、また、その誘導の理由にも疑問がある。

著者らは、これとは別に1980年生長過程論にもとづいた幹曲線式を発表した。本論文において触れるところである。

6. 物理学的見地からの樹幹形の誘導

樹幹形を物理学的・力学的観点から説明する方法は確立されていない。樹冠への風圧に対する抵抗体(片持梁)として樹幹形を考察することはMETZGER(1893)によって行われている。その知見にもとづいて、樹幹軸上の位置と断面積の関係から

$$d = ax^{\frac{1}{3}} \quad (2.16)$$

ただし

x : 幹軸上風圧中心から下方への距離

と置く提案もある(ASSMANN, 1970)。この式は、樹冠以下の幹形に適合するとされている。一方でGRAY(1956)は、この関係を実際の樹木について図解的に検討し x に比例するのは直径の2乗であるとして次式を提案した。

$$d^2 = ax \quad (2.17)$$

ただし

a : 係数

これらの式は、風圧中心以上の部分には直径が定義されていないから全幹曲線式としては適当でない。

また、樹幹を自重を支える構造物とする観点から、樹幹形を考えることもできる。すなわちHOHENADL(1922)が示した荷重点以下の断面積を直径表示にすれば次式となる。

$$d = ae^{\frac{bx}{2}} \quad (2.18)$$

ただし

x : 荷重位置から下の幹長

a, b : 係数

同様な結果をOOHATA and SHINOZAKI(1979)がえている。この式は樹冠重を加えた幹重量を支える樹幹の下部の幹形を表現できるが、全幹にわたる樹幹形を表現することはできない。

この項に関連して、座屈理論に基づく直径と樹高との関係についてMcMAHON(1973)、山本ら(1984)の研究があり、このような物理学的な観点からの一次的に矛盾のない樹幹形の誘導は、今後の問題として残されている。

7. 樹幹形に関するその他の研究

本論文と直接関係はないが、樹幹形の新しい研究として以下のものがある。

SLOBODA and SABOROWSKY (1981) は樹幹形の経時的変化を確率過程の問題として着想し、樹幹形を曲座標で表示、その樹幹形が年々変化してゆく状況を追究している。全く新しい観点のアプローチとして注目される。ただし、樹幹形に対する曲座標表示が適切かどうかの問題がある。

Nonparametric な樹幹形表現について M'HIRIT and POSTAIRE (1985) の報告がある。相対幹形などとともに直接的に樹幹形を扱う場合に有効と考えられる。

Spline 関数による樹幹形再現については LIU (1980), HRADETZKY (1981), SABOROSKI ほか (1981) による報告がある。

三角関数展開の応用として HOHENADL (1922) の報告があるが、それは(2.16)式に相当する解のべきの指数を三角関数の展開式でおきかえたもので、その適用は必ずしも適切ではない。三角関数そのままの利用も行われている (BITTERLICH, 1976) が、三角関数展開による樹幹形表現については今後検討の余地がある。

この他、対数あるいは指数関数を含んだもの、あるいはまたそれらと多項式との線形結合形式も試みられており、根張りの表現について有効性が認められている (柴田, 1976)。

以上で概観を終るが、一般的に言って、これまでの樹幹形は経験式あるいは単なる実験式としての方程式が多い。何らかの理論的根拠に基づかない幹曲線式の適用結果は対象資料の如何によりその時々で結果が変動する。

第3章 モーメントによる樹幹形の表現

この章では、樹幹形とモーメントとの関係を論じる。まず樹幹形をその各部位の直径、例えば樹幹全長を10等分する部位の直径を成分とするベクトルと考える。ある意味では、このベクトルはそれ自身すでに一つの樹幹形と見なすこともできる。次に、このベクトルを原点（根元）から $0/10, 1/10, 2/10, \dots, 10/10$ にある質点系と見なせば、その質点系に対して各次のモーメント系 $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{10}$ が決まり、逆にこのようなモーメント系 $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{10}$ から、質点系そのものが決まる。すなわち、幹曲線はこのようなモーメント系と等価であることが知られる。これがこの論文における考え方である。

最初にモーメント問題の理論を樹幹形近似の観点から要約し(長嶋, 1981), 次いでモーメントによる樹幹形の表現方法とモーメントからの解としての樹幹形表現式について述べ、最後に各次のモーメントにもとづいて決定される係数をもつ CHARLIER の直交関数系の導入を考える。樹幹形を構成する直径は離散的であり、また樹幹形は右下がりである。一方, CHARLIER の直交関数系は右に尾を引く性質をもつ POISSON 分布に由来しているから、他の直交関数系よりも樹幹形近似に適していると考えられるからである。

第1節 モーメント問題

1. 樹幹についてのモーメント

最初に一般的な質点分布のモーメントについて述べる。一般の分布については、0次のモーメントは分布密度の総和、1次のモーメントは平均値、また平均値のまわりの2次モーメントは分散などと呼ばれている。樹幹形についてもこれと同様に半径を分布とした場合もモーメントを考えることができる。まず、幹軸を x 軸とし、根元を原点、梢端の方向を正にとる。半径が幹軸上で樹高の n 等分の位置 (n 分位) で測定されていたとする。すなわち、梢端が n となるように幹軸を変換し、半径の測定位置を便宜上離散的な整数位置 x_i ($i=0, 1, 2, \dots, n$) とし、またそこでの半径を y_i ($i=0, 1, 2, \dots, n$) とする。

この場合、半径 y については確率分布の性格を与えるため、

$$\sum_{i=0}^n y_i = 1$$

となるように規格化しておく。 $n=5$ とした場合のこのような樹幹形を図-3・1に例示する。

離散分布としての樹幹形,

$$\{y_i\} = (y_0, y_1, \dots, y_n) \quad (3.1)$$

に対するモーメント系 $\{\mu_k\}$ は次式で定義される。 k はモーメントの次数である。

$$\mu_k = \sum_{i=0}^n x_i^k y_i \quad (k=0, 1, \dots, n) \quad (3.2)$$

なお、モーメントは次数について連続にも定義できる(長嶋・竹内, 1968)。

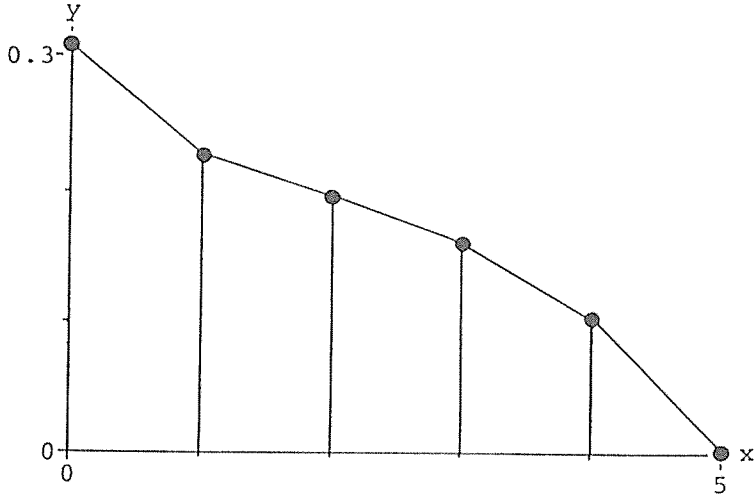


図-3・1 半径を離散分布とした樹幹形

2. モーメント問題の導入

(3・2)式は半径 y_i についての $n+1$ 本の連立方程式である。モーメント問題とは、(3・2)式の一意的な解としての半径の組、 $\{y_i\}$ が決定され、逆も成り立つことである。CHENEY (1977) の記述を参考にそれを示そう。

(3・2)式の y_i の係数 x_i でつくる行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

は VANDERMONDE の行列式で、正則すなわち $D \neq 0$ であるから (3・2) 式の解は必ず存在する。
すなわち

$$y_i = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 & \mu_0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ x_0 & \cdots & \cdots & x_{i-1} & \mu_1 & x_{i+1} & \cdots & \cdots & x_n \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ x_0^n & \cdots & \cdots & x_{i-1}^n & \mu^n & x_{i+1}^n & \cdots & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} / D \quad (i=0, 1, \dots, n)$$

(3・3)

である。右辺について、 D を構成する行列の k 行 i 列を除いた小行列式を D_{ki} で表せば、(3・3) 式の各次のモーメントの係数は

$$\alpha_{ki} = (-)^{k+i} D_{ki} / D \quad (3.4)$$

と表せるから、(3.3)式は次のとおり整理できる。

$$y_i = \sum_{k=0}^n \alpha_{ki} \mu_k \quad (i=0, 1, \dots, n) \quad (3.5)$$

すなわち、半径 y_i は (3.5) 式によってモーメントの線形結合として、一意的に決定する。以上が離散的関数についてのモーメント問題である。

第2節 樹幹形表現式

$n+1$ 個の点 $((y_0, x_0), (y_1, x_1), \dots, (y_n, x_n))$ を通る n 次の多項式が存在し (補間定理)、次の LAGRANGE の補間公式がその解であることがしめされている (CHENEY, 1977)。

$$y(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x) \quad (3.6)$$

ただし、

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

(3.6) 式の $l_i(x)$ は n 次の多項式

$$\begin{aligned} l_i(x) &= a_{i0} + a_{i1}x + a_{i2}x^2 + \dots + a_{in}x^n \\ &= \sum_{j=0}^n a_{ij}x^j \end{aligned} \quad (3.7)$$

であるが係数 a_{ij} は既知の数 x_i の関数である。

例えば、樹幹形のように $x_0=0$ である場合は、 a_{i0} は

$$a_{i0} = (-)^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{-x_j}{x_i - x_j}$$

として決まる。

モーメントによって樹幹形を表現することができるはずであるから、(3.6)式の右辺の y_i をモーメントをもって置きかえると、つぎのようなモーメント表示による補間多項式 (3.7) がえられる。

$$y(x) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=0}^n \alpha_{ki} \mu_k \right) l_i(x) \quad (3.8)$$

(3.8) 式の $l_i(x)$ に (3.6) 式を代入して、総和の順序を入れかえて整理すれば

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n \alpha_{ki} \mu_k \sum_{j=0}^n a^{ij} x^j \\ &= \sum_{j=0}^n x^j \sum_{k=0}^n \mu_k \sum_{i=0}^n \alpha_{ki} a^{ij} \end{aligned} \quad (3.9)$$

よって、 x^j の係数にモーメントを含む表示に直した目的の多項式がえられる。

ところで、(3.9)式は実際の樹幹形について連続関数としての補間に使うのではなく、単に $0 \leq x \leq n$ なる離散点にのみに定義することにする。こうすると (3.9) 式は x に x_i を与えれば観測された y_i の値を回答するという自明の結果をもたらすにすぎないが、この式の x の係数がモーメントによって特徴づけられている点で意義をもつ、すなわち、係数をモーメントの

関数として β_j で表して、

$$\beta_j = \beta_j(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n) = \sum_{k=0}^n \mu_k \sum_{l=0}^n a_{kl} a_{lj}$$

とおけば、(3.8) 式は形式的に

$$y(x) = \beta_0(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n) + \beta_1(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n)x + \dots + \beta_n(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n)x^n \quad (3.10)$$

とかけ、モーメントから決定される係数をもつ多項式によって樹幹形が示されることになる。(3.8) あるいは (3.9) 式を樹幹形表現式として定義できる。

ここで、樹幹形 $y(x)$ と各次のモーメントの期待値の関係を求めておく。k 次のモーメントの期待値を $E[\mu_k]$ で定義すれば、(3.9) 式から

$$E[y(x)] = \sum_{j=0}^{n-1} x^j \sum_{k=0}^{n-1} E[\mu_k] \sum_{l=0}^{n-1} a_{kl} a_{lj} \quad (3.11)$$

となる。すなわち、対象の林木が単木でなく、一群の樹幹形であるならば、そのグループの各 n 分位における平均の直径は各次のモーメントの平均値で表してよいことになる。

実際に $n=5$ すなわち幹軸上樹高を 5 等分した場合を考え、(3.11) 式による樹幹形表現式の係数を求めてみよう。

$$x_0=0, \quad x_1=1, \quad \dots, \quad x_{n-1}=4$$

であるから (3.11) 式は

$$y(x) = \sum_{j=0}^4 x^j \sum_{k=0}^4 \mu_k \sum_{l=0}^4 a_{kl} a_{lj}$$

ただし、 $y(5)=0$

となる。

以下順次実際の計算によってその手続きを説明しよう。

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16 \\ 0 & 1 & 8 & 27 & 64 \\ 0 & 1 & 16 & 81 & 256 \end{vmatrix} = 288$$

D についての小行列式 D_{kl} は、

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{vmatrix} = 288,$$

$$D_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 & 16 \\ 0 & 8 & 27 & 64 \\ 0 & 16 & 81 & 256 \end{vmatrix} = 0,$$

同様に,

$$D_{13}=0, D_{14}=0, D_{15}=0$$

以下同様に,

$$\begin{aligned} D_{21}=600, D_{22}=1152, D_{23}=864, D_{24}=384, D_{25}=72 \\ D_{31}=420, D_{32}=1248, D_{33}=1368, D_{34}=672, D_{35}=132 \\ D_{41}=120, D_{42}=432, D_{43}=336, D_{44}=72, D_{45}=12 \\ D_{51}=12, D_{52}=48, D_{53}=72, D_{54}=48, D_{55}=12 \end{aligned}$$

これらにそれぞれの符号をつけて, (3.5) 式を書き下ろすと,

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{288} \begin{bmatrix} 288 & -600 & 420 & -120 & 12 \\ 0 & 1152 & -1248 & 432 & -48 \\ 0 & -864 & 1368 & -576 & 72 \\ 0 & 384 & -672 & 336 & -48 \\ 0 & -72 & 132 & -72 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

となる。ここで μ_k の係数行列の要素を 288 で割ったものが (3.4) 式の a_{ki} である。一方, (3.7) 式を (3.6) 式の $l(x)$ によって計算する。

すなわち $i=0$ ならば

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{x-1}{-1} \cdot \frac{x-2}{-2} \cdot \frac{x-3}{-3} \cdot \frac{x-4}{-4} \\ &= \frac{1}{24}(x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24) \end{aligned}$$

などと計算して,

$$\begin{bmatrix} l_0 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{50}{24} & \frac{35}{24} & \frac{10}{24} & \frac{1}{24} \\ 0 & \frac{24}{6} & \frac{26}{6} & \frac{9}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{12}{4} & \frac{19}{4} & \frac{8}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{8}{6} & \frac{14}{6} & \frac{7}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{6}{24} & \frac{11}{24} & \frac{6}{24} & \frac{1}{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

がえられる。x のべきの係数行列の要素が a_{ij} である。(3.6) 式すなわち $y(x)$ ($n-1=4$) をつくる。まず(3.12)式を転置行列に直し、その係数行列と(3.13)式の係数行列との積をとって結合して、 $n=5$ の場合の表現式を次のように得る。

$$y(x) = \frac{1}{288} [\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4] \times \begin{bmatrix} 288 & -600 & 420 & -120 & 12 \\ -600 & 8980 & -10900 & 4172 & -500 \\ 420 & -10900 & 14147 & -5600 & 685 \\ -120 & 4172 & -5600 & 2260 & -280 \\ 12 & -500 & 685 & -280 & 35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

ただし、 $y(5)=0$

実例として、カナダ産 jack pine (*Pinus banksiana* LAMB.) 10 本について計算した結果を表-3.1 及び図-3.2 に示した。サンプルは 1976 年カナダ国ノースウエスト準州 Fort

表-3.1 半径とモーメントの対応
(Fort Smith Plot 1)

x	Tree No. 1			10本の平均 $E(\mu_k)$
	y	k	μ_k	
0	0.3127	0	1.0000	1.0000
1	0.2272	1	1.5133	1.5253
2	0.1976	2	4.1033	4.1479
3	0.1593	3	12.7168	12.8772
4	0.1032	4	42.7227	43.3001
5	0.0			

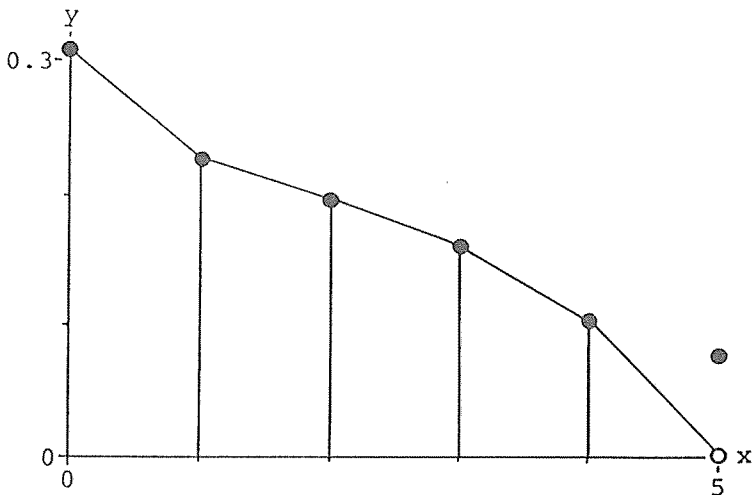


図-3.2 表現された樹幹形 (Tree No. 1)

Smith 地区において採取したものである (Nagoya Univ., 1979)。ここでは半径はすでに

$$\sum_{i=0}^5 y_i = 1$$

となるように規格化してある。表中 μ_k は (3.1) 式にもとづいて計算される。この μ_k を (3.11) 式としての (3.13) 式に入れ、求めた樹幹形が図-3.2 である。白丸が観測値、黒丸が上式による計算値である。 x が 0 から 4 までにおいては、計算値は観測値そのものを表わす。ついでだが梢端における半径を計算してみると図のように全くはずれてしまう。このことは (3.11) 式によって $n=5$ において $y(5)=0$ と定義されているのであって、このような外挿は許されないことを示している。この図と表は林木 No. 1 について例示したものであるが、表の方には各次のモーメントの期待値も最後の列に掲げた。

第3節 CHARLIER の直交関数系による表現

前節において樹幹形表現式について述べたが、各次のモーメントの値が x のべきの係数の中に含まれているため、モーメントと樹幹形との対応は視覚的には理解しにくかった。また、モーメントから樹幹形を推定する場合にはすべての次数のモーメントを計算するのでは、その手数は総ての位置の直径を総て与えることに等しいから、取り立ててモーメントを取り上げることの意味がない。したがって、できるだけ低い次数のモーメントだけをつかって、樹幹形を近似し、樹幹形を再現できることが望ましい。現在これに対する解決はえられていないが、一つの試みとして、CHARLIER の直交関数系による展開を導入した(鈴木・長嶋, 1965; 長嶋ほか, 1980)。

CHARLIER の直交関数系を導入する理由は、この関数が POISSON 分布から誘導され、そのパラメータが小さいと右下がりの分布となり、分布としてみた樹幹形と類似の形態をとるので、この直交関数を使えば収束が速いと考えられるからである。またこのとき直交関数展開式の係数は、その次数までのモーメントにもとづいて計算される。もしその現象が POISSON 分布に類似するならば一次のモーメントを知ればそれだけでもその大略の分布を決定でき、多くの応用例では 2 次までの項で足りるとされている (伏見, 1942)。

1. CHARLIER の直交関数系

POISSON 分布から出発する CHARLIER 直交関数の誘導について、伏見の記述にしたがって説明しよう。

POISSON 分布は (3.15) 式で定義される。

$$\psi_0(x) = \frac{a^x}{x!} e^{-a} \quad (x=0, 1, \dots, a>0) \quad (3.15)$$

CHARLIER の展開は $\psi_0(x)$ と、その階差から誘導される。まず、 $\psi_0(x)$ の階差を以下の通り定義する。

$$\begin{aligned}\Psi_1(x) &= \Psi_0(x-1) - \Psi_0(x) \\ \Psi_2(x) &= \Psi_1(x-1) - \Psi_1(x) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \Psi_n(x) &= \Psi_{n-1}(x-1) - \Psi_{n-1}(x)\end{aligned}$$

$\Psi_0(x)$ をパラメータ a について微分して,

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi_0(x)}{da} &= \frac{a^{x-1}}{(x-1)!} e^{-a} - \frac{a^x}{x!} e^{-a} \\ &= \Psi_0(x-1) - \Psi_0(x) = \Psi_1(x) \\ \frac{d^2\Psi_0(x)}{da^2} &= \frac{a^{x-2}}{(x-2)!} e^{-a} - 2\frac{a^{x-1}}{(x-1)!} e^{-a} + \frac{a^x}{x!} e^{-a} \\ &= \Psi_1(x-1) - \Psi_1(x) = \Psi_2(x) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \frac{d^m\Psi_0(x)}{da^m} &= \Psi_m(x)\end{aligned}$$

$\Psi_m(x)$ は $\Psi_0(x)$ にある m 次の多項式, $P_m(x)$ を掛けたものである。

$$\Psi_m(x) = P_m(x) \Psi_0(x) \tag{3.16}$$

すなわち

$$\begin{aligned}\Psi_0(x) &= 1 \cdot \Psi_0(x) \\ \Psi_1(x) &= \frac{d^2}{dx^2} \Psi_0(x) = \left(\frac{x}{a} - 1\right) \Psi_0(x) \\ \Psi_2(x) &= \left(\frac{x(x-1)}{a^2} - \frac{2x}{a} + 1\right) \Psi_0(x) \\ &\vdots \\ &\vdots\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= \frac{x}{a} - 1 \\ P_2(x) &= \frac{x(x-1)}{a^2} - 2\frac{x}{a} + 1\end{aligned}$$

この多項式を CHARLIER の多項式という。一般式は次で与えられる。

$$\begin{aligned}
 P_m(x) &= \sum_{n=0}^m (-1)^{m-n} \binom{m}{n} \binom{x}{n} \frac{n!}{a^n} \\
 &= \frac{m!}{a^m} \sum_{n=0}^m \binom{x}{m-n} \frac{(-a)^n}{n!}
 \end{aligned}
 \tag{3.17}$$

$P_m(x)$ には、次の直交性が成り立つ。

$$\sum_{x=0}^{\infty} \psi_0(x) P_m(x) P_n(x) = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ m! a^{-m} & (n = m) \end{cases}
 \tag{3.18}$$

証明については原著（伏見，1942）を見られたい。

2. CHARLIER の直交関数展開による樹幹形

樹幹形を幹軸上離散的な位置に定義して、CHARLIER の直交級数展開によって表現できたものとする。いま樹幹形を $f(x)$ で表わすならば展開式は C_m を直交展開式の係数として (3.19) 式である。

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \psi_m(x)
 \tag{3.19}$$

ここで、 C_m は $P_m(x)$ の直交性によって

$$C_m = \frac{a^m}{m!} \sum_{x=0}^{\infty} f(x) P_m(x)
 \tag{3.20}$$

によって決定される。ここで、 $P_m(x)$ は CHARLIER の x の多項式であるから、 C_m は前節と同じようにモーメント

$$\mu_k = \sum_{x=0}^{\infty} x^k f(x) \quad (k=1, \dots, m)
 \tag{3.21}$$

の一次結合として表される。 C_m の決定は、実際には、 $P_m(x)$ をつかってモーメントを求めるよりも THIELE の半不変数を用いた方が都合良い。THIELE の半不変数 λ_s はモーメント μ_k と対応がついており、また λ_s と C_m との対応がとれるからである。

THIELE の半不変数はモーメント母関数、

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k}{k!} t^k = \int e^{xt} g(x) dx$$

の対数を t の級数として展開したときの係数としてえられる。すなわち、

$$\ln \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k}{k!} t^k \right) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda_s}{s!} t^s$$

THIELE の半不変数は、このときの係数、 λ_s によって定義される。これを t で微分して、

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k}{(k-1)!} t^{k-1} = \left(\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda_s}{(s-1)!} t^{s-1} \right) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\mu_p}{p!} t^p$$

をうるが、この両辺の t の各べきの係数を比較し、

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \lambda_1 \\ \mu_2 &= \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \\ \mu_3 &= \lambda_1 \mu_2 + 2\lambda_2 \mu_1 + \lambda_3 \\ \mu_4 &= \lambda_1 \mu_3 + 3\lambda_2 \mu_2 + 3\lambda_3 \mu_1 + \lambda_4 \\ &\vdots \\ &\vdots\end{aligned}$$

うる。逆に、これを順次 λ_s について解いて半不変数とモーメントとの関係がえられる。すなわち、

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \mu_1 && \text{(平均値)} \\ \lambda_2 &= \mu_2 - \mu_1^2 && \text{(分散)} \\ \lambda_3 &= \mu_3 - 3\mu_2 \mu_1 + 2\mu_1^3 && \text{(歪度)} \\ \lambda_4 &= \mu_4 - 4\mu_3 \mu_1 - 3\mu_2^2 + 12\mu_2 \mu_1^2 - 6\mu_1^4 && \text{(尖度)} \\ &\vdots \\ &\vdots\end{aligned} \tag{3.22}$$

最後に C_m と λ_s との対応が見つかるが、誘導は伏見を見られたい。 $a = \lambda_1$ と置くことによって、その4次までのものが次のように示されている。

$$\begin{aligned}a &= \lambda_1 \\ C_0 &= 1 \\ C_1 &= 0 \\ C_2 &= (\lambda_2 - \lambda_1) / 2 \\ C_3 &= (2\lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3) / 6 \\ C_4 &= (-6\lambda_1 + 11\lambda_2 - 6\lambda_3 + \lambda_4 + 3(\lambda_2 - \lambda_1)^2) / 24 \\ &\vdots \\ &\vdots\end{aligned} \tag{3.23}$$

$m=4$ 、すなわち4次までの CHARLIER の多項式、 $P_m(x)$ を図-3.3 に、また、これに $\psi_0(x)$ を乗じた $\Psi_m(x)$ を図-3.4 に示した。結局、近似され、表現される樹幹形は、これらの C_m を係数として $\Psi_m(x)$ の係数倍の和によって与えられるものである。

実際に、CHARLIER の直交関数系による近似展開式の計算は、まず μ_1 すなわち1次モーメントを計算し、 $a = \mu_1$ とした上で $\psi_0(x)$ を決め、以下の順序で行えば良い(鈴木・長嶋, 1965)。カッコの内は方程式の番号である。

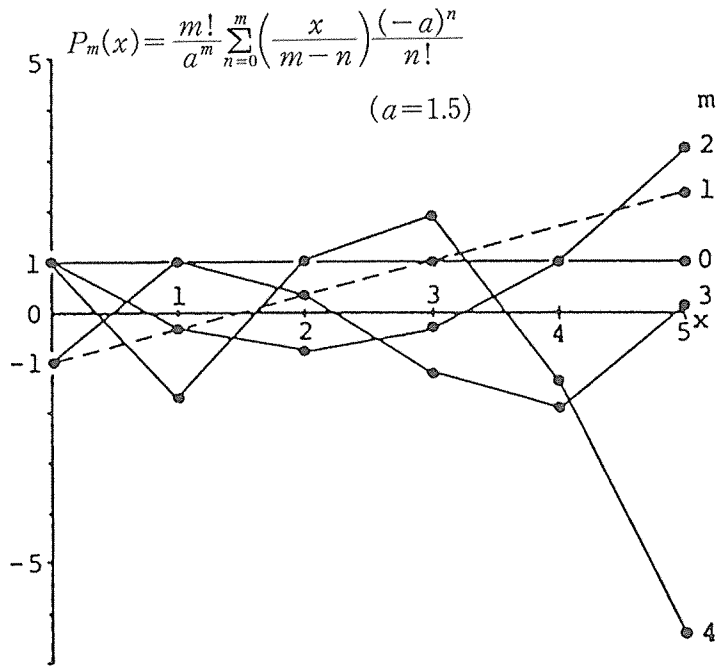


図-3・3 CHARLIER の多項式

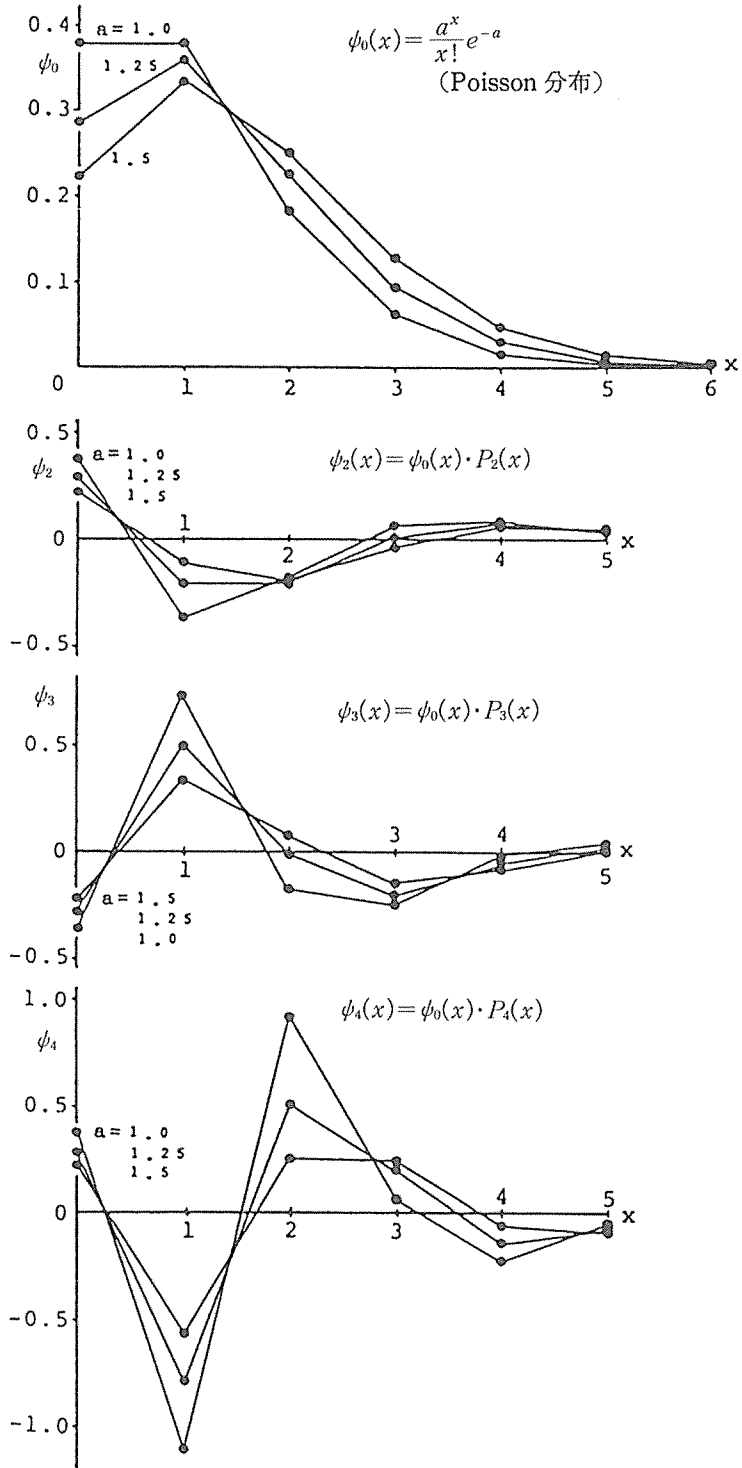
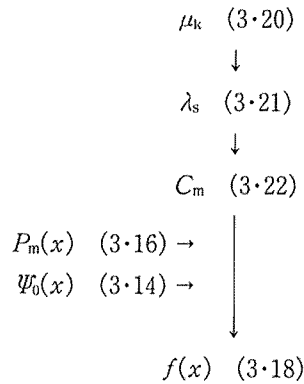


図-3・4 CHARLIER の直交関数



1977年に行った名古屋大学亜寒帯林調査 (Nagoya Univ., 1979) によってえられた jack pine (*Pinus banksiana* LAMB.) について, 3地区 (Horseshoe Lake, Fort Smith, Cherry Mountain) から年令のあまりちがわない林分を1つずつ選び, 近似を行った。目的変数 $f(x)$ を直径とした場合と断面積とした場合を実行した。近似した結果のうち, 各林分で最も適合の良かったものについて表-3.2, 表-3.3 および図-3.5 にかかげた (長嶋・山本・渡辺,

表-3.2 直径に対する近似の結果

x	Horseshoe Lake		Fort Smith		Cherry Mountain	
	y	$f(x)$	y	$f(x)$	y	$f(x)$
0	0.354	0.359	0.358	0.362	0.311	0.316
1	0.244	0.225	0.220	0.206	0.226	0.209
2	0.187	0.206	0.197	0.210	0.206	0.221
3	0.134	0.143	0.142	0.153	0.155	0.170
4	0.081	0.056	0.083	0.059	0.101	0.071
5	0.000	0.012	0.000	0.011	0.000	0.015
C_2		0.1727		0.1787		0.1402
C_3		-0.1780		-0.2026		-0.2248
C_4		0.0283		0.0450		0.0643

表-3.3 断面積に対する近似の結果

x	Horseshoe Lake		Fort Smith		Cherry Mountain	
	y^2	$f(x)$	y^2	$f(x)$	y^2	$f(x)$
0	0.513	0.515	0.528	0.529	0.430	0.432
1	0.244	0.238	0.200	0.196	0.228	0.222
2	0.143	0.148	0.160	0.164	0.189	0.194
3	0.073	0.074	0.083	0.085	0.107	0.113
4	0.027	0.021	0.028	0.023	0.046	0.035
5	0.000	0.003	0.000	0.003	0.000	0.005
C_2		0.1577		0.1890		0.1683
C_3		-0.0586		-0.0861		-0.1253
C_4		-0.0032		0.0050		0.0176

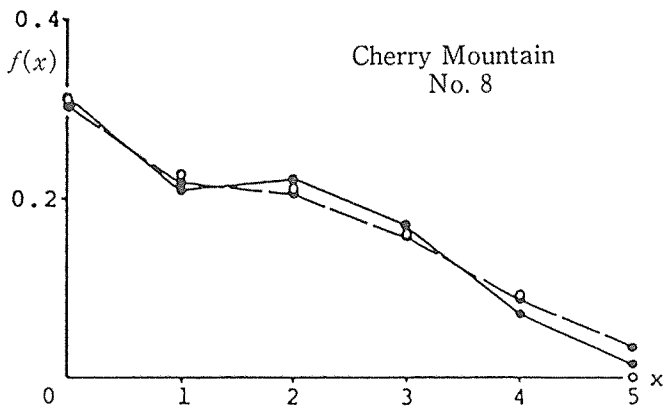
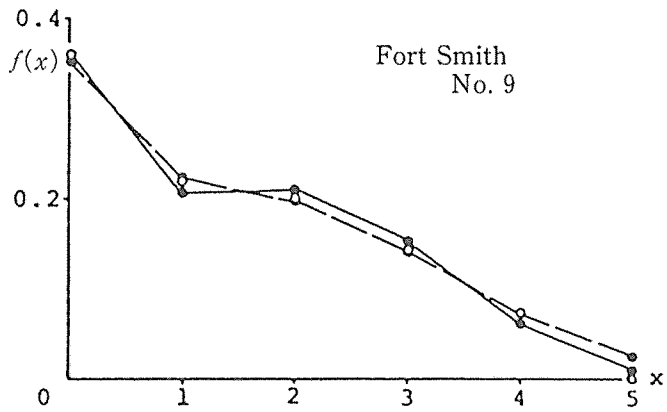
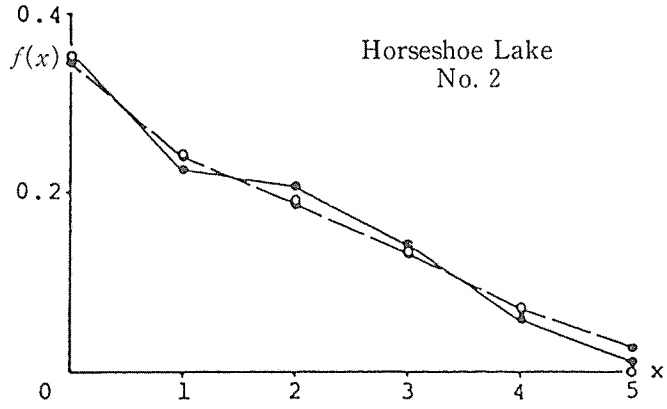


図-3・5 近似による樹幹形

- : 実測値
- : 近似値 (実線) : 直径
(点線) : 断面積

1980)。何れの地域の樹幹形も CHARLIER の直交関数系により概ね良好に近似されたが、図-3・5 に見るとおり、直径を近似した場合には再現された樹幹形が $x=1$ において若干のくびれを生じている。断面積について近似を行った場合は、このような問題は生じない。したがって、樹幹形表現のためには直径の自乗を目的変数とすればこの欠点を回避できる。また梢端において正の偏差が生じている。これはこの関数系の定差域が 0 から ∞ であることによる。したがって、実用上は梢端における誤差が微少であることを確認して適用することが望ましい。

計算に供したモーメントについては、直径について近似した場合のみを図-3・6 に示した。

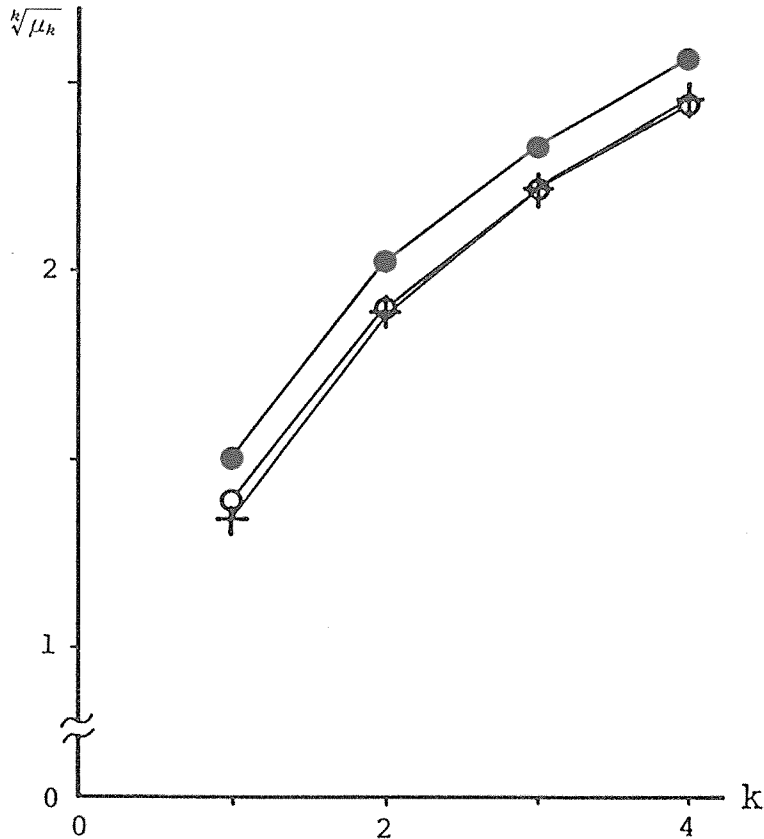


図-3・6 規格化直径のモーメント

- : Horseshoe Lake
- + : Fort smith
- : Cherry Mountain

Cherry Mountain 地区の樹幹形は他の 2 地区のものより明確に異なることがわかる。どの部分がどう異なるかは図-3・5 の樹幹形について、他の 2 者に重ねて比較すれば明らかであるが、表-3・2 において係数 C_2 の値が小さく、したがって図-3・4 の ψ_2 の成分が少なく、また C_3 の値はマイナス、したがって同図の ψ_3 の成分が逆に働き、 C_4 すなわち ψ_4 の成分と

もに樹幹形の $x=1$ におけるカタヨリを大きく生ずる原因となっている。ただし、 C_4 の値は、何れの地区においても小さな値であり、効果は小さいと云える。断面積を目的とした場合は、Cherry Mountain 地区の樹幹形は他の 2 本に比し、 C_3 が小さく、 C_4 が大きいので、 x が 2 から 3 にかけて、 Ψ_2 , Ψ_4 が働いて、完満性が大きくなっている。Horseshoe Lake のサンプルは、目的変数が直径、断面積何れの場合も C_4 の値は小さかった。

第 4 節 まとめ

樹幹形はモーメント問題の示すところにより、その各次のモーメントをもちいて完全に表現できる。従来のように直径の組 (y_0, y_1, \dots, y_n) で樹幹形を表わすことにくらべ、モーメントの組 $(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ によって樹幹形を表現する意義は、それによって、樹幹形の性格を分析できることにある。すなわち与えられた林木群について、1 次のモーメント (平均の値)、2 次のモーメント (ちらばり方) などのモーメントの値によって、樹幹形を比較する指標とすることができることにある (長嶋, 1967; 長嶋ほか, 1979)。

樹幹形を表現するための多項式は、直径が n 個所で測定されているならば、総ての測定点を通る式としては多項式の次数がたかだが $n-1$ 次であれば十分である。ところで、多項式の係数は $n-1$ 次までのモーメントによって決められる。したがって $n-1$ 次までのモーメントによって、総ての測定点を通る多項式が決定される。

樹種、生育状況、林齢などの属性・要因にもとづいて区分されているグループ別の樹幹形の比較をモーメントによって行う場合は、モーメントの線形性を仮定して、各次のモーメントの期待値の組 $(E[\mu_0], E[\mu_1], E[\mu_2], \dots, E[\mu_{n-1}])$ で行うことができる。

比較的低次のモーメントだけを用いて樹幹形を近似するために CHARLIER の直交関数系の導入を行った。CHARLIER の多項式は POISSON 分布から出発しており、樹幹形が右下がりであるため、その形態の類似性が認められ近似の収束が良いものと考えられる。近似の結果は概ね良好であった。ただし、直径に対して近似した結果は、根元付近で若干くびれを生じた。断面積を目的変数として近似を行えば、支障ないものと考えられる。また梢端における値がゼロとならない。これは CHARLIER の直交関数系の定義域が $0 \leq x \leq \infty$ であることに由来するが、実用上はその値が僅少であることを確認して用いる必要がある。直交関数系による近似展開式における各項は、直交性により互いに独立であるから、どの項が樹幹形のどの部分の表現に貢献しているかを、近似展開式による係数の大きさにて判定できる。これは直交関数系を用いて樹幹形を表現する上での利点である。

第4章 直交多項式による樹幹形の近似 (I)

— 樹幹形を離散的関数とした場合 —

この章では選点直交多項式を用いて、樹幹形に対する離散的な幹曲線のあてはめについて論ずる。この近似展開式の各次の係数も離散データのモーメントからそれぞれ独立に計算され、いわゆる最小自乗法の正規方程式は必要ないことが示される(長嶋, 1981)。

FRIESら(1965)は多変数法により樹幹形を本来の形と諸要因にもとづいて変化する形の部分が直交するように樹幹形を構成する方法を報告している。しかし、これは事実上樹幹形を直交分解することと同値である。また、そこでえられた最終的な方程式には近似理論上からみて高次すぎる項を含んでいる。この問題は本論の中で自ら明らかになるであろう。

最初に選点正規直交多項式系展開による樹幹形近似の理論をのべる。次に選点直交多項式系を、樹幹形近似にあたって梢端で半径がゼロになるように変形した樹幹形近似用の正規直交多項式系を提案する。

第1節 樹幹形の近似理論

樹幹の半径 y が幹軸上で n 個所で測定されているとする。半径の測定位置を x_1, x_2, \dots, x_n とし、各々の半径を y_1, y_2, \dots, y_n とする。このように考えると離散的な関数 y_1, y_2, \dots, y_n そのものを幹曲線と考えることができる。

ところで離散的な樹幹形を選点正規直交関数系によって近似展開することを問題としよう。最初に選点正規直交関数系の誘導について述べる。

多項式

$$P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots, P_{n-1}(x) \quad (4.1)$$

をとって離散的な点 x_l における関数値の間に

$$\sum_{k=1}^n P_k(x_l) P_l(x_l) = \begin{cases} 0 & (k \neq l) \\ \lambda_k \neq 0 & (k = l) \end{cases} \quad (4.2)$$

を成り立たせることができる。

まず

$$P_0(x) = 1 \quad (4.3)$$

を定める。1次の多項式

$$P_1(x) = x + a_1 \quad (4.4)$$

をとって

$$\sum_{l=1}^n 1 \cdot (x_l + a_1) = 0 \quad (4.5)$$

を満足させるには

$$a_1 = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (4.6)$$

とおけばよい。さらに2次の多項式

$$P_2(x) = x^2 + b_2x + a_2 \quad (4.7)$$

をとって

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + b_2x_i + a_2) &= 0 \\ \sum_{i=1}^n (x_i^2 + b_2x_i + a_2)(x_i + a_1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

を満足するように a_2 , b_2 を求めることができる。計算の煩雑さをいとわなければ、以下同様にして $P_{n-1}(x)$ まで順次にそれを決定して (4.2) 式を満足させることができる。ここに述べた関数系 $P_0(x)$, $P_1(x)$, \dots , $P_{n-1}(x)$ を点 x_i ($i=1, \dots, n$) に関する選点直交関数系という。ただし、実際にそれを求めるには、ここに述べたような方法を用いず、以下のような漸化式が用いられる。ここでは伏見・赤井 (1981) の記載によって、漸化式について述べるが、説明は同書に見出される。

まず

$$P_{-1} = 0, \quad P_0(x) = 1 \quad (4.9)$$

を定め、以下は

$$P_k(x) = (x + \beta_k)P_{k-1}(x) - \gamma_k P_{k-2}(x) \quad (k=2, \dots, n-1) \quad (4.10)$$

によって順次 $P_k(x)$ を定める。ただし

$$\left. \begin{aligned} \lambda_k &= \sum_{i=1}^n \{P_k(x_i)\}^2 \\ \beta_k &= (-1/\lambda_{k-1}) \sum_{i=1}^n x_i \{P_{k-1}(x_i)\}^2 \\ \gamma_k &= (1/\lambda_{k-2}) \sum_{i=1}^n x_i P_{k-1}(x_i) P_{k-2}(x_i) \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

である。この漸化式 (4.10) を用いて $P_2(x)$, $P_3(x)$, \dots をつくる時、計算のステップごとに λ_k , β_k および γ_k の値を (4.11) によって計算する必要があるが計算機を利用する場合には、このことは大きな負担にならない。

選点直交多項式による樹幹形近似のためには、その選点直交多項式の理論式が、陽な形を与えられることが望ましい。厳密な証明は例えば伏見・赤井 (1981) に見られるが、ここではそれを類推させる事実に触れておくにとどめよう。

まず、LEGENDRE の多項式 $P_n(x)$ ($n=0, 1, \dots$) が区間 $(-1, 1)$ において直交系をなしている

ことは周知のこととしよう。すなわち、

$$\int_{-1}^1 P_l(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0 & (l \neq m) \\ 2/(2l+1) & (l=m) \end{cases} \quad (4.12)$$

が成立しているとする。ここで変数変換

$$x = 1 - \frac{2z}{n} \quad (4.13)$$

を行うと

$$\int_0^n P_l\left(1 - \frac{2z}{n}\right)P_m\left(1 - \frac{2z}{n}\right)dz = \begin{cases} 0 & (l \neq m) \\ n/(2l+1) & (l=m) \end{cases} \quad (4.14)$$

となって、関数系 $P_l(1-2z/n)$ が区間 $(0, n)$ 上で直交することになる。しかるに RODRIGUES の公式

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} \cdot \frac{d^m}{dx^m} (x^2-1)^m \quad (4.15)$$

を用いれば

$$P_m\left(1 - \frac{2z}{n}\right) = \frac{1}{m!} \cdot \frac{d^m}{dz^m} z^m \left(1 - \frac{z}{n}\right)^m \quad (4.16)$$

$$= \sum_{r=0}^m (-1)^r \binom{m}{r} \binom{m+r}{r} \left(\frac{z}{n}\right)^r \quad (4.17)$$

となるから、(4.17) 式は区間 $(0, n)$ において直交関数系をつくることが知られた。

ところで、連続関数 x_m の導関数が

$$\frac{dx^m}{dx} = mx^{m-1}$$

となることに対応して、階乗多項式

$$(k)^{(p)} = k(k-1)\cdots(k-p+1) \quad (4.18)$$

は差分 Δ に関して

$$\begin{aligned} \Delta(k)^{(p)} &= (k+1)^{(p)} - (k)^{(p)} \\ &= p(k)^{(p-1)} \end{aligned} \quad (4.19)$$

を満足する。すなわち離散的な関数関係には、べき乗に対して階乗方程式を、また微分に対して差分を用いてよいことが知られているので、上述の (4.17) 式の最後の項を階乗式に改め

$$P_{m,n}(z) = \sum_{r=0}^m (-1)^r \binom{m}{r} \binom{m+r}{r} \frac{(z)^{(r)}}{(n)^{(r)}} \quad (4.20)$$

をつくれれば、離散的 $z=1, 2, \dots, n$ に対する選点直交関数系がえられることを推測することができる。事実その正しいことは、差分の計算によって厳密に証明されている。

さて選点直交多項式による最小自乗法について述べる。

n 個の標本点 $1, 2, \dots, n$ で与えられた値 f_1, f_2, \dots, f_n に m 次の多項式

$$f_m(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m \quad (4.21)$$

を当てはめるとき、係数 a_0, a_1, \dots, a_m を適当に選んで

$$S_m = \sum_{i=1}^n \{f_i - f_m(x_i)\}^2 \quad (4.22)$$

を最小にするのが離散的な最小自乗法であるが、そのため

$$\frac{\partial S_m}{\partial a_l} = 0 \quad (l=0, 1, \dots, m) \quad (4.23)$$

なる正規方程式をつくって係数を計算しようとするとき、 m が少し大きいときは、(4.23) 式はいわゆる悪性の方程式となって使用に耐える近似式がえられないことがしばしば起こる。こうした場合に選点直交多項式

$$P_0(x), P_1(x), \dots, P_m(x)$$

をとって

$$f_m(x) = C_0P_0(x) + C_1P_1(x) + \dots + C_mP_m(x) \quad (4.24)$$

をつくり

$$S_m = \sum_{i=1}^n \left\{ f_i - \sum_{k=0}^m C_k P_k(x_i) \right\}^2 \quad (4.25)$$

を最小ならしめる条件

$$\frac{\partial S_m}{\partial C_l} = 0 \quad (l=0, 1, \dots, m) \quad (4.26)$$

から

$$\sum_{k=0}^m \left\{ \sum_{i=1}^n P_k(x_i) P_l(x_i) \right\} C_k = \sum_{i=1}^n P_l(x_i) f_i \quad (4.27)$$

をうるが、ここで、関数系 $P_l(x)$ の選点直交性に注目すれば

$$C_l = \frac{1}{\lambda_l} \sum_{i=1}^n P_l(x_i) f_i \quad (4.28)$$

のように係数 C_l を簡単に求めることができる。これは、直交関数系を用いる方法の利点である。ただし、ここで、 m を大きくとって $n-1$ に等しくすると、 $n-1$ 次の多項式で n 個のすべてを通過するものがえられるが、それは当然のことながら LAGRANGE の補間公式の結果と一致してしまう。すなわち、この当てはめは LAGRANGE の階差法による近似とまったく同じような性質をもっており、当てはめの多項式の次数をむやみに大きくとって測定点での近似を高めようすると逆に、測定点の存在範囲の両端近くで曲線の振幅が急激に増大してしまう。いわゆる RUNGE の現象を生じる欠点を持っている (SAWYER 1978)。

第2節 樹幹形の直交分解

前節における結論は、幹軸上 n 個所で測定されている半径を m 次の多項式によって近似する場合にその係数決定にあたっては (4.28) 式を計算すれば良いことを示した。樹幹形を示す半径が幹軸上で n 分位の位置でだけ測定されていたとし、それぞれの位置を $0, 1, 2, \dots, n$ とすれば、それぞれの半径は $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n=0$ となる。いま多項式の次数を n 次まで高めれば離散点に対して測定されている樹幹形 $f(x)$ はすべての $n+1$ 個の測点を通るようにできる。ところで、直交多項式系が、区間 $(0, n)$ の離散点において、次の性質をもつならば、正規直交多項式系 $P_l(x)$ といわれる。ここで左辺は内積である。

正規直交性：

$$(P_l(x), P_m(x)) = \begin{cases} 0 & (l \neq m) \\ 1 & (l = m) \end{cases} \quad (4.29)$$

樹幹形を $y(x)$ とし、これに対し n 次までの離散的正規直交多項式 $P_k(x)$ による展開式を用いれば

$$\begin{aligned} y(x_i) &= y_i \\ &= C_0 P_0(x_i) + C_1 P_1(x_i) + C_2 P_2(x_i) + \dots + C_k P_k(x_i) + \dots + C_n P_n(x_i) \end{aligned} \quad (i=0, 1, 2, \dots, n) \quad (4.30)$$

として、まったく誤差なしに表示することができる。

ただし

$$C_k = \sum_{i=0}^n P_k(x_i) y_i \quad (4.31)$$

である。

ここで、(3.30) 式の両辺を自乗し、 $x=0, 1, 2, \dots, n$ について加え合わせると $P_k(x)$ の正規直交性により

$$\sum_{i=0}^n y_i^2 = \sum_{k=0}^n C_k^2 \quad (4.32)$$

が成り立つ。もし右辺を n 次より小さい m 次多項式 $P_m(x)$ で打ち切って近似展開式を、

$$f_m(x_i) = C_0 P_0(x_i) + C_1 P_1(x_i) + C_2 P_2(x_i) + \dots + C_m P_m(x_i) \quad (4.33)$$

とすれば、その打ち切りによる誤差の大きさを、誤差平方和にして評価することができる。すなわち (4.31) 式の誤差は

$$y_i - f_m(x_i) = C_{m+1} P_{m+1}(x_i) + \dots + C_n P_n(x_i) \quad (i=0, 1, 2, \dots, n) \quad (4.34)$$

であるから、その大きさを係数の平方和

$$\sum_{i=0}^n \{y_i - f_m(x_i)\}^2 = C_{m+1}^2 \dots + C_n^2 \quad (4.35)$$

で評価できる。またこれを (4.32) に対比して誤差平方和率とし

$$\frac{-\sum_{k=m+1}^n C_k^2}{\sum_{k=0}^n C_k^2} = \frac{\sum_{k=0}^n C_k^2 - \sum_{l=0}^n y_l^2}{\sum_{l=0}^n y_l^2} \quad (4.36)$$

で評価すればよいことになる。左辺は直接求まらないので、実際の計算は右辺によって求める。

また同じ考え方によって展開式中、ある次数の項としての直交多項式が近似にどれだけ寄与しているかを知るには係数 C_k を自乗し、その値を (4.36) 式の分母と比較してみれば良いのである。寄与率については後に述べる。

以上の結果は、幹曲線 $y(x)$ を $P_k(x)$ に直交分解したことを意味し、 $P_k(x)$ はその分解における単位ベクトルの性格をもち、 C_k は $P_k(x)$ の方向の成分の大きさを与えている。したがって、展開係数の自乗は、 $P_k(x)$ の方向におけるノルムの自乗を意味しており、 n 次元ユークリッド空間における距離として意味を持っている。したがって C_k の値の組で樹幹形を合理的に表現することができる。もし、2つのグループの樹幹形の相違を検討する場合には、 C_k の値の組を比較検討すればよい。

第3節 樹幹形正規直交多項式系

樹幹形表現のためには、選点直交多項式の原形そのままでは梢端における直径をゼロとするという条件を満足させにくいので、若干の変換を行った。

始めに (4.20) 式で定義された選点直交多項式

$$P_{m,n}(x) = \sum_{r=0}^m (-1)^r \binom{m}{r} \binom{m+r}{r} \binom{x}{r} \binom{n}{r}^{-1} \quad (4.37)$$

をとる。ただし、 n は定義域の上限、 m は多項式の次数である。

(4.37) 式は前述のように定義域 $(0, n)$ で次の直交性をもつが、それは次式で与えられている (森口ら 1977)。

直交性：

$$(P_{l,n}(x), P_{m,n}(x)) = \begin{cases} 0 & (l \neq m) \\ \frac{(m+n+1)!(n-m)!}{(2m+1)(n!)^2} & (l=m) \end{cases} \quad (4.38)$$

直交多項式の次数 m の低いものの幾つかは次式のとおりである。定義域の上限を $n=10$ とした場合を図-4.1 に示す。

$$P_{0,n}(x) = 1$$

$$P_{1,n}(x) = 1 - \frac{2x}{n}$$

$$P_{2,n}(x) = 1 - \frac{6x}{n} + \frac{6x(x-1)}{n(n-1)}$$

$$P_{3,n} = 1 - \frac{12x}{n} + \frac{30x(x-1)}{n(n-1)} - \frac{20x(x-1)(x-2)}{n(n-1)(n-2)}$$

$$P_{4,n}(x) = 1 - \frac{20x}{n} + \frac{90x(x-1)}{n(n-1)} - \frac{140x(x-1)(x-2)}{n(n-1)(n-2)} + \frac{70x(x-1)(x-2)(x-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \quad (4.39)$$

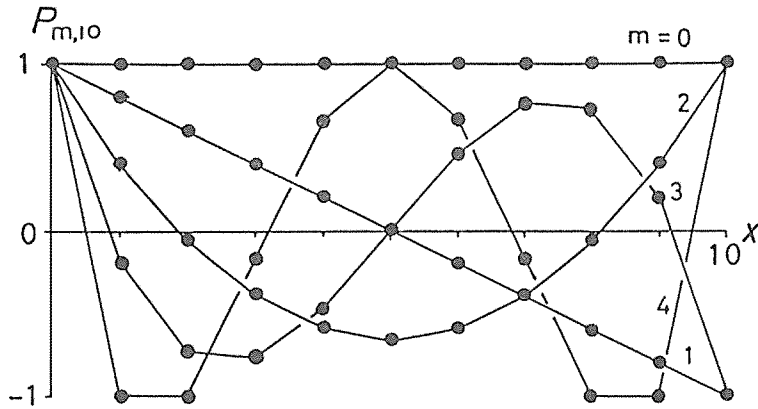


図-4.1 選点直交多項式

明らかに、この直交多項式はすべて $(0, 1)$ を通る。

さて、樹幹形に対応するように $(n, 0)$ を通る正規直交多項式に誘導する。それには、この関数を $x=n/2$ を軸として左右裏返して 1 から引いた関数の系を作り、これを正規直交化してゆけばよい。

まず、裏返しによって $P_{m,n}(x)$ は $P_{m,n}(n-x)$ に変換される。この変換を $P_{m,n}^*(x)$ で表そう。 $P_{m,n}(x)$ は m が偶数ならば軸 ($x=n/2$) に関して対象、また奇数ならば点 $(n/2, 0)$ に対して対象であるから次が成り立つ。

$$P_{m,n}^*(x) = P_{m,n}(n-x) = (-1)^m P_{m,n}(x) \quad (4.40)$$

この関数は森口ら (1977) によって得られている。これを改めて $P_{m,n}(x)$ とおき、次のように書くことにする。

$$P_{m,n}(x) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{m}{r} \binom{m+r}{r} \binom{n-x}{r} \binom{n}{r}^{-1} \quad (4.41)$$

(4.40) 式の直交性は単に左右裏返しであるから明らかに (4.38) 式と同様の結果になる。すなわち、

直交性：

$$(P_{l,n}(x), P_{m,n}(x)) = \begin{cases} 0 & (l \neq m) \\ \frac{(m+n+1)!(n-m)!}{(2m+1)(n!)^2} & (l=m) \end{cases} \quad (4.42)$$

次に 1 から (4.41) 式を引いた関数を $U_m(x)$ とおき、 $U_m(x)$ をつかって新しい正規直交多項式系 $\psi_{m,n}(x)$ を作り上げる。添字は $P_{m,n}(x)$ のものと同じである。 $P_{0,n}(x)=1$ であるから、 U_m を次式で定義しておけば、後の誘導に際して $P_{m,n}(x)$ の直交性がうまく使えて便利であ

る。

$$U_m(x) = P_{0,n}(x) - P_{m,n}(x) \quad (4.43)$$

これから、GRAM-SCHMIDT の正規直交化の方法(篠原, 1978)の離散の場合に適用して目的の正規直交多項式系 $\{\Psi_{m,n}(x)\}$ をつくる。ただし、以下の議論に於て混乱のない限り表示を簡単にするため記号を

$$\sum_{i=0}^n (\quad)^2 = (\quad, \quad), \quad P_{m,n}(x) = P_m, \quad \Psi_{m,n}(x) = \Psi_m, \quad U_m(x) = U_m$$

などとし、また (4.42) 式の右辺の P_m のノルムを k_m とおく。すなわち、

$$k_m = \frac{(m+n+1)!(n-m)!}{(2m+1)(n!)^2} \quad (4.44)$$

低次のものをかかげると

$$\begin{aligned} (P_0, P_0) &= (n+1) = k_0 \\ (P_1, P_1) &= \frac{(n+2)(n+1)}{3n} = k_1 \\ (P_2, P_2) &= \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{5n(n-1)} = k_2 \\ (P_3, P_3) &= \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{7n(n-1)(n-2)} = k_3 \\ (P_4, P_4) &= \frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{9n(n-1)(n-2)(n-3)} = k_4 \end{aligned} \quad (4.45)$$

また、 a_m を次によって定義しておく。

$$\begin{aligned} a_1 &= k_0 + k_1 \\ a_2 &= k_0 k_1 + k_0 k_2 + k_1 k_2 \\ a_3 &= k_0 k_1 k_2 + k_0 k_1 k_3 + k_0 k_2 k_3 + k_1 k_2 k_3 \\ a_4 &= k_0 k_1 k_2 k_3 + k_0 k_1 k_2 k_4 + k_0 k_1 k_3 k_4 + k_0 k_2 k_3 k_4 + k_1 k_2 k_3 k_4 \end{aligned} \quad (4.46)$$

正規直交化を始める。 P_0 は 1 と書く。

$m=1$ について、

$$\Psi_1 = a_1 U_1 = a_1(1 - P_1)$$

とする。

$$(\Psi_1, \Psi_1) = a_1^2(1 - P_1, 1 - P_1) = 1$$

とおいて, P_m の直交性によって

$$(1-P_1, 1-P_1) = (P_0, P_0) + (P_1, P_1) = k_0 + k_1$$

であるから

$$a_1 = \sqrt{\frac{1}{k_0 + k_1}} = \sqrt{\frac{1}{\alpha_1}}$$

とおけばよい。こうして正規直交多項式 Ψ_1 がきまる。すなわち,

$$\Psi_1 = \sqrt{\frac{1}{\alpha_1}}(1-P_1) \tag{4.47}$$

$m=2$ について,

$$\Psi_2 = a_{21}\Psi_1 + a_{22}U_2$$

とする。

$$(\Psi_2, \Psi_1) = a_{21} + a_{22}(U_2, \Psi_1) = 0$$

とおいて,

$$\begin{aligned} a_{21} &= -a_{22}(U_2, \Psi_1) \\ &= -a_{22}\sqrt{\frac{1}{\alpha_1}}(1-P_2, 1-P_1) = -a_{22}\sqrt{\frac{1}{\alpha_1}}k_0 \end{aligned}$$

a_{21} を Ψ_2 の右辺に代入して

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= a_{22}\left(-\sqrt{\frac{1}{\alpha_1}}k_0\Psi_1 + U_2\right) \\ &= a_{22}\left(\frac{k_1}{\alpha_1} + \frac{k_0}{\alpha_1}P_1 - P_2\right) \end{aligned}$$

両辺の内積をとって 1 とおき a_{22} をきめる。すなわち,

$$(\Psi_2, \Psi_2) = a_{22}^2\left\{\left(\frac{k_1}{\alpha_1}\right)^2 k_0 + \left(\frac{k_0}{\alpha_1}\right)^2 k_1 + k_2\right\} = 1$$

$$a_{22} = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$$

ゆえに Ψ_2 は,

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\left(-\sqrt{\frac{1}{\alpha_1}}k_0\Psi_1 + U_2\right) \\ &= \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\left(\frac{k_1}{\alpha_1} + \frac{k_0}{\alpha_1}P_1 - P_2\right) \end{aligned} \tag{4.48}$$

として決まる。

$m=3$ の場合,

$$\Psi_3 = a_{31}\Psi_1 + a_{32}\Psi_2 + a_{33}U_3$$

とする。

$$(\Psi_3, \Psi_1) = a_{31} + a_{33}(U_3, \Psi_1) = 0$$

とおいて、

$$\begin{aligned} a_{31} &= -a_{33}(U_3, \Psi_1) = -a_{33}\sqrt{\frac{1}{\alpha_1}}k_0 \\ (U_3, \Psi_1) &= \sqrt{\frac{1}{\alpha_1}}(1-P_2, 1-P_1) = \sqrt{\frac{1}{\alpha_1}}k_0 \\ (\Psi_3, \Psi_2) &= a_{31} + a_{33}(U_3, \Psi_2) = 0 \end{aligned}$$

とおいて、

$$a_{32} = -a_{33}(U_3, \Psi_2) = -a_{33}\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\frac{k_0k_1}{\alpha_1}$$

これを Ψ_3 に代入し、 P_m について整理すれば、

$$\begin{aligned} \Psi_3 &= a_{33}\left(\frac{k_1k_2}{\alpha_2} + \frac{k_0k_2}{\alpha_2}P_1 + \frac{k_0k_1}{\alpha_2}P_2 - P_3\right) \\ (\Psi_3, \Psi_3) &= a_{33}^2\left\{\left(\frac{k_1k_2}{\alpha_2}\right)^2k_0 + \left(\frac{k_0k_2}{\alpha_2}\right)^2k_1 + \left(\frac{k_0k_1}{\alpha_2}\right)^2k_2 + k_3\right\} = 1 \end{aligned}$$

とおいて、

$$a_{33} = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}}$$

よって、 Ψ_3 が決まる。すなわち、

$$\Psi_3 = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}}\left(\frac{k_1k_2}{\alpha_2} + \frac{k_0k_2}{\alpha_2}P_1 + \frac{k_0k_1}{\alpha_2}P_2 - P_3\right) \quad (4.49)$$

$m=4$ の場合も同様に、

$$\Psi_4 = a_{41}\Psi_1 + a_{42}\Psi_2 + a_{43}\Psi_3 + a_{44}U_4$$

とする。

$$\begin{aligned} (\Psi_4, \Psi_1) &= 0 \\ (\Psi_4, \Psi_2) &= 0 \\ (\Psi_4, \Psi_3) &= 0 \end{aligned}$$

とおいて、

$$\begin{aligned} a_{41} &= -a_{44}\sqrt{\frac{1}{\alpha_1}}k_0 \\ a_{42} &= -a_{44}\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\frac{k_0k_1}{\alpha_1} \\ a_{43} &= -a_{44}\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}}\frac{k_0k_1k_2}{\alpha_2} \end{aligned}$$

となり、これを Ψ_4 に代入し P_m について整理すれば、

$$\Psi_4 = a_{44} \left(\frac{k_1 k_2 k_3}{\alpha_3} + \frac{k_0 k_2 k_3}{\alpha_3} P_1 + \frac{k_0 k_1 k_3}{\alpha_3} P_2 + \frac{k_0 k_1 k_2}{\alpha_3} P_3 P_4 \right)$$

$$(\Psi_4, \Psi_4) = 1$$

とにおいて、

$$a_{44} = \sqrt{\frac{\alpha_3}{\alpha_4}}$$

をうる。よって Ψ_4 が決まる。すなわち、

$$\Psi_4 = \sqrt{\frac{\alpha_3}{\alpha_4}} \left(\frac{k_1 k_2 k_3}{\alpha_3} + \frac{k_0 k_2 k_3}{\alpha_3} P_1 + \frac{k_0 k_1 k_3}{\alpha_3} P_2 + \frac{k_0 k_1 k_2}{\alpha_3} P_3 - P_4 \right) \quad (4.50)$$

以下、必要に応じて m 次のものが同様に誘導できる。

これらの式を実際の林木に適用するために樹高を n とし、これに対応させて、 $n=10$ の場合について、 x のべき表示に整理する。まず、選点直交多項式系 (4.39) 式に $(-)^n$ を乗じ (4.41) 式をつくる。 $n=10$ とおけば、

$$n=10$$

$$P_0 = 1$$

$$P_1 = -1 + \frac{1}{5}x$$

$$P_2 = 1 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{15}x^2$$

$$P_3 = -1 + \frac{143}{90}x - \frac{5}{12}x^2 + \frac{1}{36}x^3$$

$$P_4 = 1 - \frac{125}{36}x + \frac{125}{72}x^2 - \frac{5}{18}x^3 + \frac{1}{72}x^4 \quad (4.51)$$

となる。これらを (4.45) から (4.48) 式に代入する。この場合、

$$k_0 = 11, \quad k_1 = \frac{22}{5}, \quad k_2 = \frac{286}{75}, \quad k_3 = \frac{143}{30}, \quad k_4 = \frac{143}{18} \quad (4.52)$$

となる。 a_m はこれらにもとづいて (4.46) 式により計算される。

大型計算機を使用する場合には、 P_m のこれらの値を用いて (4.57) 式以降の Ψ_m を計算すればよい。もし、卓上 (ポケット) 計算機を利用する場合には、以下のように x のべき表示にしておけばすぐ使える。 $m=5$ までのものを示した。

$$\Psi_{1,10}(x) = \sqrt{\frac{5}{77}} \left(2 - \frac{1}{5}x \right)$$

$$\Psi_{2,10}(x) = \sqrt{\frac{525}{3652}} \left(-\frac{10}{7} + \frac{17}{21}x - \frac{1}{15}x^2 \right)$$

$$\Psi_{3,10}(x) = \sqrt{\frac{2490}{16159}} \left(\frac{101}{83} - \frac{6767}{3735}x + \frac{445}{996}x^2 - \frac{1}{36}x^3 \right)$$

$$\Psi_{4,10}(x) = \sqrt{\frac{2034}{18733}} \left(-\frac{125}{113} + \frac{15175}{4068}x - \frac{14845}{8136}x^2 \right) + \frac{290}{1017}x^3 - \frac{1}{72}x^4$$

$$\Psi_{5,10}(x) = \sqrt{\frac{2751}{50687}} \left(\frac{137}{131} - \frac{190841}{23580}x + \frac{41630}{6288}x^2 - \frac{17461}{9432}x^3 + \frac{661}{3144}x^4 - \frac{1}{120}x^5 \right)$$

$$(4.53)$$

当然であるが、これらは $(10-x)$ を因数にもっている。 $m=4$ までのものを示せば、図-4・2のとおりである。 Ψ_m への誘導は非常に煩雑であるが、一旦 Ψ_m を計算しておけば樹幹形近

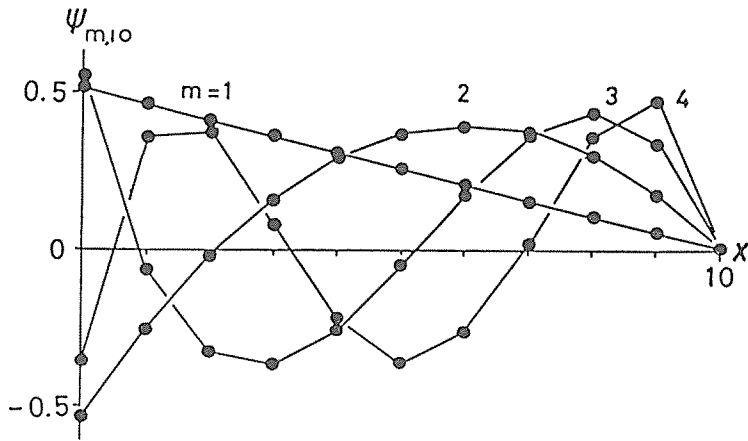


図-4・2 樹幹形近似直交多項式

似の計算にいつでも利用できる。この関数系を樹幹形正規直交多項式系と呼ぶことにする。(4.53) 式は、後の計算の説明のために (4.53) 式の係数を対応させて次の形式で示しておく。

$$\Psi_{m,n}(x) = a_m(b_{m0} + b_{m1}x + \dots + b_{mm}x^m) \quad (m=1, 2, \dots, n) \quad (4.54)$$

(4.30) 式に対応する樹幹形直交多項式による樹幹形の直交分解式は、次の展開式で与えられる。

$$y(x) = C_1 \Psi_1 + C_2 \Psi_2 + \dots + C_m \Psi_m + \dots + C_n \Psi_n \quad (4.55)$$

係数は (4.53) 式の Ψ_m と y との内積

$$C_m = (y(x), \Psi_m(x)) \quad (4.56)$$

によって決められる。 Ψ_m は次の多項式 (4.54) の形式であるから、(4.56) 式の内積は、次の通りのモーメント

$$\mu_k = \sum_{l=0}^n x^k y_l \quad (4.57)$$

の線形結合

$$C_m = a_m(b_{m0}\mu_0 + b_{m1}\mu_1 + \dots + b_{mk}\mu_k + \dots + b_{mm}\mu_m) \quad (4.58)$$

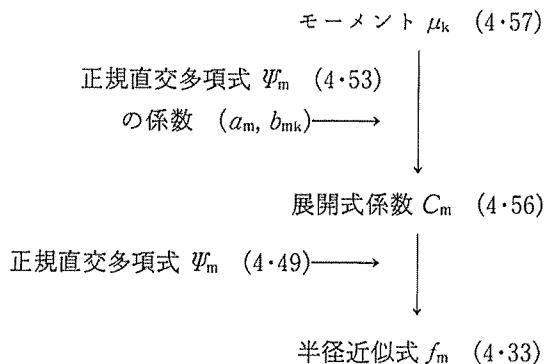
によって計算できる。これにより、 C_m は長さの次元をもつことになる。

以上の記述において、展開項の係数 C_k がすべて、樹幹半径の1組 y_l のモーメントによって決定される事実は、前章のモーメント問題に対応する。よって直交関数系を幹形の表示に使うことの根拠として裏付けられている。

第4節 樹幹形の近似と再現

実際に半径が測定された林木について樹幹形直交多項式によって樹幹形を近似した結果を示す。資料は樹種スギ (*Cryptomeria japonica* D. DON), 場所は名古屋大学演習林宿舍付近(演舎と略す) 4本, 稲橋地区(稲橋と略す) 4本の2組である。樹幹半径は根元も含めて、樹高の10等分の位置(10分位)で測定されている。すなわち $n=10$ である。近似展開式の次数は5次までを採用して近似した結果である。

半径の近似計算の手順を示す。



1. 樹幹形近似展開式の係数の計算

近似展開式係数 C_m の計算の順序を一連の表にしたがって説明する。ただし表中で単木についてのものは演舎 No. 1 の林木がサンプルである。

まず、モーメント μ_k を (4.57) 式によって計算する。表-4.1 中で一番右の欄のように半径の k 乗と y_l の積和をとって求める。

表-4.2 で近似展開式係数 C_m が計算される。表中の a_m および b_{mk} の値は (4.54) 式すなわち、 $\psi_{m,10}(x)$ (4.53) 式の中の係数である。 C_m は表-4.2 によって μ_k と b_{mk} の積和に a_m を掛けて求められる。この過程は直交分解に対応している。

表-4・1 モーメントの計算 (例)
(演舎 No. 1, 樹高11.1m 20年生)

$x_i=i$	半径 y (cm)	モーメント $\mu_k = \sum_{i=0}^n x_i^k y_i$ (cm)
0	10.045	x_i^k を計算し,
1	6.46	y_i との積和をとる
2	6.00	
3	5.30	$\mu_0 = 46.225$
4	5.00	$\mu_1 = 138.83$
5	4.43	$\mu_2 = 708.69$
6	3.57	$\mu_3 = 4232.45$
7	3.10	$\mu_4 = 27730.65$
8	1.68	$\mu_5 = 19153.73$
9	0.64	
10	0.00	

表-4・2 近似展開式の係数 (例)

(演舎 No. 1)

k	μ_k (cm)	係 数					
		ψ_1 の	ψ_2 の	ψ_3 の	ψ_4 の	ψ_5 の	
0	46.225	b_{m0}	2.000000	-1.428571	1.216867	-1.106195	1.045802
1	138.830	b_{m1}	-0.200000	0.809524	-1.8117805	3.7303343	-8.093341814
2	708.690	b_{m2}	—	-0.066667	0.4467871	-1.8246067	6.620547074
3	4232.450	b_{m3}	—	—	-0.0277777	0.2851524	-1.851251060
4	27730.65	b_{m4}	—	—	—	-0.0138889	0.210241730
5	193153.73	b_{m5}	—	—	—	—	-0.008333333
		a_m	0.254824	0.379153	0.392548	0.329512	0.232968
展開式係数	C_m		16.483036	-0.339534	1.486076	-1.511364	0.432619

2. 樹幹形近似値の計算

樹幹形近似式 $f_m(x)$ (4・33) は、係数 C_m が求められ、決定された。各測定高における半径の近似値は、まず正規直交多項式 $\psi_{m,10}(x)$ (4・53) 式の値を計算しておき (表-4・3)、この表の行方向に C_m との積和をとれば、各測定高における半径の近似値 $f_m(x)$ が求められる (表-4・4)。

$C_m \psi_m$ が樹幹形を直交分解した際の m 次の成分である。近似の立場からは、第1近似でよいならば $C_1 \psi_1$ だけでよい。すなわち、再現される樹幹形は $f_1 = C_1 \psi_1$ となる。(5・36) 式のように、 C_1^2 の値を y の自乗和と比較してもしその値が不満足ならば第2項までの和、すなわち $f_2 = C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2$ というように前節の誤差平方和を検討しつつ、 m を高めてゆき $C_m \psi_{m+1}$ を f_m につけ足せばよい。

表-4・3 樹幹形正規直交多項式の値

x_i	$\psi_1(x)$	$\psi_2(x)$	$\psi_3(x)$	$\psi_4(x)$	$\psi_5(x)$
0	0.509648	-0.541647	0.477679	-0.364505	0.243638
1	0.458683	-0.259990	-0.069051	0.352840	-0.483720
2	0.407718	-0.028888	-0.330434	0.367420	-0.086548
3	0.356754	0.151661	-0.371896	0.078247	0.319516
4	0.305789	0.281657	-0.258861	-0.225507	0.328408
5	0.254824	0.361098	-0.056754	-0.364505	0.010671
6	0.203859	0.389986	0.169000	-0.269247	-0.319515
7	0.152894	0.368320	0.352978	0.019926	-0.337298
8	0.101930	0.296100	0.429753	0.352840	0.059875
9	0.050965	0.173327	0.333902	0.469481	0.159292
10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

n=10

表-4・4 半径の近似値(例)

(演舎 No. 1)

x_i =i	$C_1\psi_1$ f_1	$C_2\psi_2$	$\sum_{k=1}^2 C_k\psi_k$ f_2	$C_3\psi_3$	$\sum_{k=1}^3 C_k\psi_k$ f_3	$C_4\psi_4$	$\sum_{k=1}^4 C_k\psi_k$ f_4	実測値 y
0	8.40	0.18	8.58	0.71	9.29	0.55	9.85	10.045
1	7.56	0.09	7.65	-0.10	7.55	-0.53	7.01	6.46
2	6.72	0.01	6.73	-0.49	6.24	-0.56	5.68	6.00
3	5.88	-0.05	5.83	-0.55	5.28	-0.12	5.16	5.30
4	5.04	-0.10	4.94	-0.38	4.56	0.34	4.90	5.00
5	4.20	-0.12	4.08	-0.08	3.99	0.55	4.54	4.43
6	3.36	-0.13	3.23	0.25	3.48	0.41	3.89	4.57
7	2.52	-0.13	2.40	0.52	2.92	-0.03	2.89	3.10
8	1.68	-0.10	1.58	0.64	2.22	-0.53	1.68	1.68
9	0.84	-0.06	0.78	0.50	1.28	-0.71	0.57	0.64
10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

展開式の係数 $C_1=16.483036$ $C_2=-0.339534$ $C_3=1.486076$ $C_4=-1.511364$
 表中の数値は、作表時に切り捨てを行ったため、末尾は必ずしも一致しない。
 単位：cm (xを除く)

3. 樹幹形直交分解における寄与率

2節で触れたように係数 C_m の自乗は樹幹形 y_1 を構成するのに ψ_k がどの程度寄与しているかを示す指標となっている。y の自乗和に対する ψ_k の寄与率をパーセント表示で次式により定義される。すなわち、直交分解における k 次正規直交関数の y への自乗誤差の意味での寄与率である。

$$\text{寄与率 (\%)} = \frac{C_k^2}{\sum_{i=0}^n y^2(x_i)} \times 100 \quad (4.59)$$

寄与率の計算例を表-4・5 に示す。なお、この表には(4.36)による誤差平方和率が掲げられている。

表-4・5 直交分解の寄与率 (例)
(演舎 No. 1)

k	C_k	C_k^2	$\sum_{k=1}^m C_k^2$	寄与率	平方和誤差率
1	16.4830	271.69	271.69	98.2%	-1.89%
2	-0.3395	0.12	271.81	0.0	-1.85
3	1.4861	2.21	274.01	0.8	-1.05
4	-1.5114	2.28	276.30	0.8	-0.23

$y_1 = y(x_1)$; C_k, y_1 の単位: cm 分母: $\sum_{i=0}^n y_i^2 = 276.74$

4. 樹幹形の近似程度

表-4・6に、スギの2つのグループについて、樹幹形の正規直交展開による係数 C_k と (4・59) 式による各 ψ_m の樹幹形自乗和に対する寄与率を示した。この表に対応する再現された樹幹形, $f_m(x)$ を図-4・3に掲げた。ただし、表・図とも演舎については第4項まで、稲橋については第5項まで計算した。表-4・6, 図-4・3および図-4・2の樹幹形直交多項式を検討すると、第1項で平方和寄与率が演舎スギにおいては97~99%、稲橋スギにおいては95~98%をしめている。このことは樹幹形を近似の立場からは、それがだいたい三角形とみてもよいことを示している。 C_2 の値は林木によって正のもの、負のものとも出現しており、その絶対値は小さい。したがって2次の項はほとんど樹幹形に影響していないことがわかる。3次の項はつねに正であり、図-4・2から梢端に近い部分のふくらみと幹軸上中央より下部へのへこみに寄与している。4次の項は稲橋の1例(図-4・3(b))を除いて負である

表-4・6(a) 樹幹形の近似結果 (演舎 4本)
(寄与率: %)

展開式 の 第k項	林				木			
	1		2		3		4	
	C_k	寄与率	C_k	寄与率	C_k	寄与率	C_k	寄与率
1	16.48	98.1	17.68	96.9	16.91	99.4	17.28	97.5
2	-0.34	0.0	-1.09	0.4	0.12	0.0	-1.00	0.3
3	1.49	0.8	1.70	0.9	0.77	0.2	1.66	0.9
4	-1.51	0.8	-1.97	1.2	-0.93	0.3	-1.76	1.0

C_k の単位: cm

表-4・6(b) 樹幹形の近似結果 (演舎 4本)
(寄与率: %)

展開式 の 第k項	林				木			
	1		2		3		4	
	C_k	寄与率	C_k	寄与率	C_k	寄与率	C_k	寄与率
1	43.13	96.5	32.32	96.8	37.47	98.2	45.48	95.1
2	-0.01	0.0	1.36	0.2	2.19	0.3	-2.11	0.2
3	6.01	2.0	4.62	2.0	3.79	1.0	7.70	2.7
4	2.72	0.4	-2.57	0.6	-2.12	0.3	11.08	1.2
5	-3.78	0.8	1.84	0.3	1.26	0.1	3.42	0.5

C_k の単位: cm

から梢端付近の過度の凸出を減少し、中央部のふくらみを与え、根元よりの部分を減少させる効果が与えられているように考えられる。稲橋 No.1 においては C_4 は正であり、図-4・2 における ψ_4 が働いたことが図-4・3(b)から読み取れる。樹幹形正規直交展開における係数の符号とその大きさによって樹幹形のおよその特徴を知ることができる。

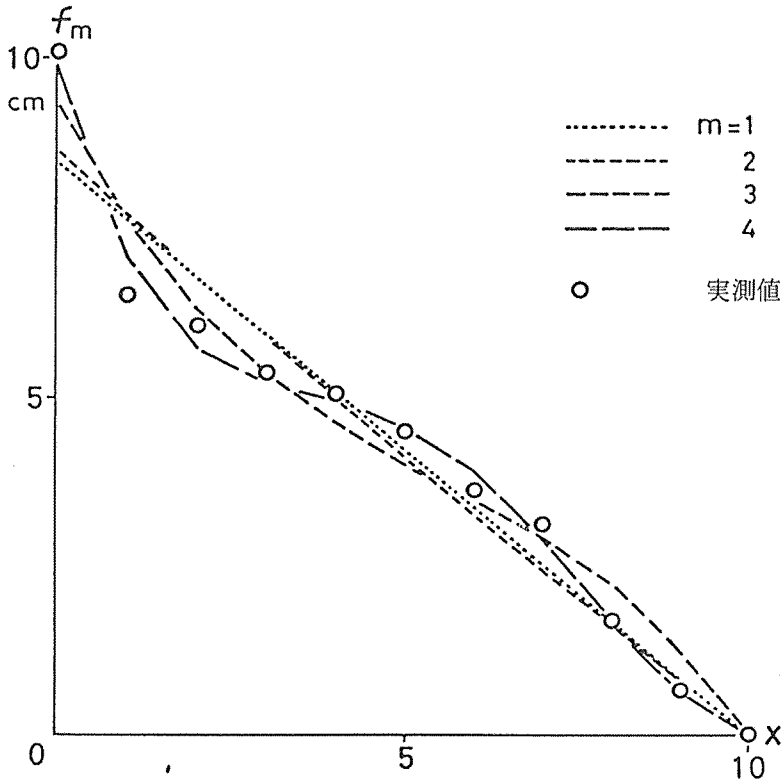


図-4・3 (a) 近似樹幹形 (演舎 No. 1)
m: 展開式の次数

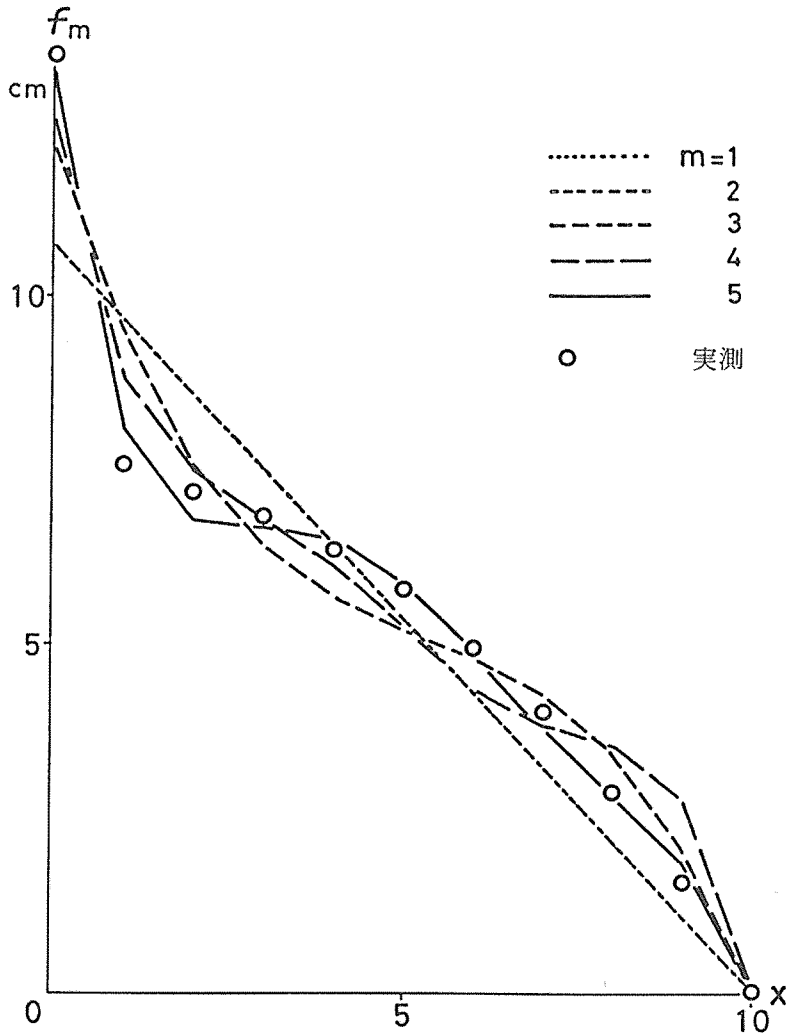


図-4・3 (b) 近似樹幹形 (稲橋 No.1)
m: 展開式の次数

第5節 まとめ

正規直交多項式系を用いた樹幹形表現について検討した結果を以下のとおり要約できる。

- 1) 樹幹形を選点直交関数を用いて表示した。
- 2) このとき得られる展開式は最小自乗法によって決められるものと同じであるが、近似にあたって最小自乗法の正規方程式を用いる必要はない。展開式の係数は各次のモーメントにもとづいて計算される。なお、展開式の係数は長さの次元をもつ。
- 3) 樹幹形直交展開式は、樹幹形を展開式の各項に直交分解したことを意味している。したがって、展開式各項の係数の自乗値を幹軸上の半径自乗和に比較すれば、その項が樹幹形表現にどれだけ寄与しているか評価することができる。
- 4) 樹幹形正規直交多項式系の定義域は $0 \sim n$ である。

第5章 直交多項式による樹幹形の近似 (II)

— 樹幹形を連続関数とした場合 —

前章では、樹幹形を離散的関数と仮定し、選点正規直交多項式系展開を用いた樹幹形展開について述べたが、この章では樹幹形を連続な関数と仮定して正規直交関数系展開式によって表現する方法を述べる。ただし、ここでいう連続な樹幹形とは、樹幹縦断面図において、半径測定高に対応する半径の点を根元から梢端まで順次直線で連結した図形である。最初に連続な正規直交関数系による連続な樹幹形近似の理論を要約し、ついで LEGENDRE の多項式に若干の変形を施し、樹幹形近似用の正規直交多項式系とした。正規直交関数系による近似の長所として展開式中の係数が互いに独立に決定できること、またその係数の自乗値によってその項がどの程度近似に役立っているか、したがってまた樹幹形の再現にどの程度寄与しているのかを知りうることは、樹幹形を離散的関数とした場合と同様である (長嶋, 1982)。

以上の観点に立って、本章では樹幹形を連続な正規直交関数系によって表現する方法を論じる。なお、モーメントは次数について連続にも定義できる (長嶋・竹内, 1968)。

第1節 連続な樹幹形の近似理論

連続な樹幹形は、幹軸を x 軸にとり、地上高 x で測定された半径を y 座標にとり、それらをグラフ上に点 (半径測定高, 半径) としてプロットしこれらの点を根元から梢端まで連結して描かれる図形によって定義される (図-5・1)。すなわち、連続な樹幹形として定義したも

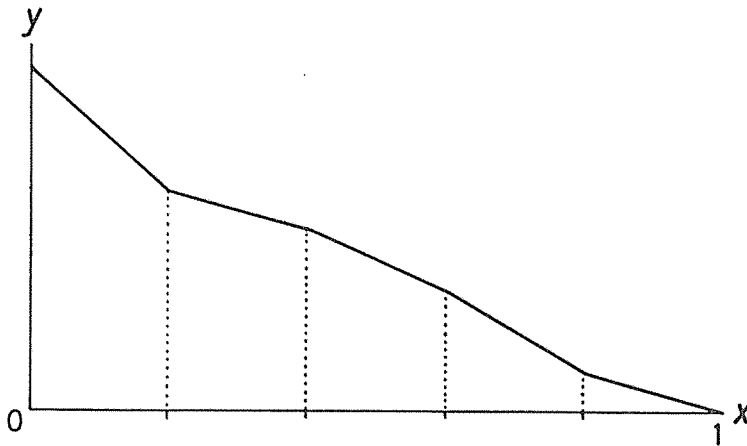


図-5・1 連続な樹幹形

のはいくつかの測定された半径の間を直線で連結した樹幹形である。すでに定義された連続な樹幹形は区分的に直線の関数であるが、この場合樹高は規格化して1にする。こうすると樹幹曲線は区間 $(0, 1)$ で定義されることになる (図-5・1)。樹幹形近似の一般論に先立って、関数の内積とノルムを次のとおり定義しておく。すなわち、2つの関数 $y(x)$ と $z(x)$ の内積を

$$(y, z) = (z, y) = \int_0^1 y(x)z(x)dx \quad (5.1)$$

によって、またそのノルムを

$$\|y\| = \sqrt{(y, y)} = \left(\int_0^1 y^2(x)dx\right)^{1/2} \quad (5.2)$$

によって定義する。

ここで、正規直交関数系 $\psi_i(x)$ ($i=0, 1, 2, \dots$) には次の正規直交性が成りたっているような関数系である。すなわち

$$(\psi_i, \psi_j) = \int_0^1 \psi_i(x)\psi_j(x)dx \quad (5.3)$$

ただし

$$= \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}$$

以上のもとで、次の最小自乗近似の定理が成りたっている。この定理および証明は、一松(1963)にもとづく。

最小自乗近似の定理：

$\{\psi_i(x)\}$ を正規直交系とするとき

$$\|f - \sum_{i=0}^n \alpha_i \psi_i\| = \left\{ \int_0^1 (f(x) - \sum_{i=0}^n \alpha_i \psi_i(x))^2 dx \right\}^{1/2} \quad (5.4)$$

を最小にするには

$$\alpha_i = (f, \psi_i) \quad (5.5)$$

のとき、かつそのときに限る。

[証明]

$\psi_i(x)$ の正規直交性により

$$\|f - \sum_{i=0}^n \alpha_i \psi_i\|^2 = \|f\|^2 - 2 \sum_{i=0}^n \alpha_i (f, \psi_i) + \sum_{i=0}^n \alpha_i^2$$

そこで

$$(f, \psi_i) = \beta_i, \quad f^* = f - \sum_{i=0}^n \beta_i \psi_i$$

とおくと

$$(f^*, \psi_j) = (f, \psi_j) - \sum_{i=0}^n \beta_i (\psi_i, \psi_j) = (f, \psi_j) - \beta_j = 0$$

したがって

$$f - \sum_{i=0}^n \alpha_i \psi_i = f^* + \sum_{i=0}^n \beta_i \psi_i - \sum_{i=0}^n \alpha_i \psi_i = f^* - \sum_{i=0}^n (\alpha_i - \beta_i) \psi_i$$

として上の式に代入すると

$$\|f - \sum_{i=0}^n \alpha_i \psi_i\|^2 = \|f^* - \sum_{i=0}^n (\alpha_i - \beta_i) \psi_i\|^2$$

$$\begin{aligned} &= \|f^*\|^2 - 2\sum_{i=0}^n (\alpha_i - \beta_i)(f^*, \psi_i) + \sum_{i=0}^n (\alpha_i - \beta_i)^2 \\ &= \|f^*\|^2 + \sum_{i=0}^n (\alpha_i - \beta_i)^2 \end{aligned}$$

となる。これが最小となるのは $\alpha_i = \beta_i$ ($i=0, \dots, n$) かつそのときに限る。 [証明終り]

この定理の示す内容は、与えられた連続の樹幹形 $y(x)$ を正規直交関数系 $\psi_i(x)$ の展開式を用いて最小自乗の意味で近似するためには展開式の係数 C_i を $y(x)$ と $\psi_i(x)$ の内積によって決定し、それを用いて近似式とすればよいことを示している。この事情は樹幹形を離散的な関数とした場合と同様である。

また、 $\psi_i(x)$ が x についての i 次の多項式

$$\psi_i(x) = a_{i0} + a_{i1}x + \dots + a_{ir}x^r + \dots + a_{ii}x^i \quad (5.6)$$

である場合には、係数 C_i はモーメント系 $\{\mu_r\}$

$$\mu_r = \int_0^1 x^r y(x) dx \quad (r=0, 1, \dots, i) \quad (5.7)$$

の線形結合である。すなわち、係数 C_i を決定するには、(5.6) と (5.7) 式を用いて求めればよい。 $y(x)$ は、

$$y = C_0 \psi_0 + C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2 + \dots + C_i \psi_i + \dots \quad (5.8)$$

の形に直交展開されるから、 C_i は

$$\begin{aligned} C_i &= (y, \psi_i) \\ &= a_{i0}\mu_0 + a_{i1}\mu_1 + \dots + a_{ir}\mu_r + \dots + a_{ii}\mu_i \end{aligned} \quad (5.9)$$

によって求められる。なお、 C_i は (5.7) 式により長さの次元をもつ。

樹幹形 $y(x)$ の近似値 $f_n(x)$ は (5.8) 式の n 項まで、すなわち次式で与えられる。

$$f_n(x) = C_0 \psi_0 + C_1 \psi_1 + \dots + C_i \psi_i + \dots + C_n \psi_n \quad (5.10)$$

C_i の求め方は (5.9) 式と同じである。

ただし、その係数決定のためのモーメント計算方法は離散の場合の和をとる代わりに積分で行うので若干異なる。半径の測定は x 軸上で必ずしも等間隔の位置で行われている必要はないが、ここでは樹高の 10 等分の各位置、すなわち相対高で

$$x=0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1.0$$

であるとする。樹幹形は区分的に直線で連結されるのであるから、各区分に根元から順番、 j をつけその区分に属する y の添字とすれば、直線で連結された樹幹形は次式によって定義できる。

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) + \cdots + y_j(x) + \cdots + y_{10}(x) \quad (5.11)$$

ただし

$$y_j(x) = \begin{cases} a_j x + b_j & ((j-1)/10 \leq x \leq j/10) \\ 0 & (x < (j-1)/10, x > j/10) \end{cases} \quad (j=1, \dots, 10) \quad (5.12)$$

連続な樹幹についてのモーメントは (5.11) 式を用いて、(5.7) 式により

$$\begin{aligned} \mu_r &= \sum_{j=1}^{10} \int_{(j-1)/10}^{j/10} x^r (a_j x + b_j) dx \\ &= \sum_{j=1}^{10} \left\{ \frac{a_j}{r+2} [x^{r+2}]_{(j-1)/10}^{j/10} + \frac{b_j}{r+1} [x^{r+1}]_{(j-1)/10}^{j/10} \right\} \end{aligned} \quad (5.13)$$

として計算する。樹幹形展開式の係数 C_i は (5.9) 式より次によって決定される。

$$C_i = \sum_{r=1}^i a_{ir} \sum_{j=1}^{10} \left\{ \frac{a_j}{r+2} [x^{r+2}]_{(j-1)/10}^{j/10} + \frac{b_j}{r+1} [x^{r+1}]_{(j-1)/10}^{j/10} \right\} \quad (5.14)$$

(5.10) 式は $\Psi_i(x)$ の n 項までの展開式であるが、近似理論によれば、完備な正規直交関数系 $\{\Psi_n(x)\}$ が与えられているならば、 y は平均収束の意味で次の級数に展開できる (RIESZ and NAGY, 1973)。すなわち $f_\infty(x) = f(x)$ とかけば、

$$f(x) = y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i \Psi_i(x) \quad (5.15)$$

ただし、 $C_i = (y, \Psi_i)$

犬井(1948)によれば、WEIERSTRASS の定理により、有限閉区域において定義された任意の連続関数はベキ級数系によって任意に近似でき、またその線形結合の関数によっても成立する。

次に近似誤差を ε で表し、(5.10) と (5.15) 式の差をとって

$$\varepsilon = f_n(x) - y(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} C_i \Psi_i(x) \quad (5.16)$$

とすれば、誤差平方和はそのノルム自乗をとって、

$$\|\varepsilon\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} C_i^2 \quad (5.17)$$

となるが、これを

$$\sum_{i=0}^{\infty} C_i^2$$

と比較すれば近似の程度の評価ができる。すなわち

$$\frac{-\sum_{i=n+1}^{\infty} C_i^2}{\sum_{i=0}^{\infty} C_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^n C_i^2 - \int_0^1 y^2(x) dx}{\int_0^1 y^2(x) dx} \quad (5.18)$$

として計算される。左辺は直接には求まらないが、右辺によってその値を求めることができる。(5.18)式を計算して、あらかじめ設定した誤差率よりも大きな値となったならば近似展開式に、より高次の項をつけ加えて近似を改善できる。

ところで、林業上の応用において重要なことは、有限項の近似関数 $f_n(x)$ を積分して材積を求めると、その推定値には(5.18)式により明らかに常にマイナスのバイアスが与えられているという事実である。もちろん、この結果は樹幹形が直線的に連続な形として定義されているという前提のもとに言えることであるが、正規直交分解による材積推定は常に過小評価の危険を持つということに注意しなければならない。

第2節 樹幹形正規直交関数系

前節で論じた正規直交関数系は梢端に対応する $x=1$ で値はゼロとなることは保証されていないので、樹幹形近似のためにはそのままの形では適当でない。そこで $x=1$ において半径がゼロとなるような樹幹形を近似する目的で都合のよい正規直交関数系を得たい。そのため直交関数系のうち LEGENDRE の正規直交多項式系を選び、樹幹形近似に適するよう変換を行った。

本来の LEGENDRE の多項式 $P_n(x)$ は、区間 $(-1, 1)$ において、

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (\text{RODRIGUES の公式}) \quad (5.19)$$

で与えられる。

この多項式の定義域 $(-1, 1)$ を樹幹の定義域 $(0, 1)$ に適合させるために変数変換

$$x = -1 + 2z \quad (5.20)$$

を行う。これにより、(5.19)式は

$$P_n(-1 + 2z) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{dz^n} z^n (1 - z)^n \quad (5.21)$$

$$= (-1)^n \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} \binom{n+r}{r} z^r \quad (5.22)$$

となる。

(5.22)式には、 z について次の直交性がある。

$$(P_m, P_n) = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 1/(2n+1) & (m=n) \end{cases} \quad (5.23)$$

この直交性は LEGENDRE の多項式の直交性、すなわち

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 2/(2n+1) & (m=n) \end{cases} \quad (5.24)$$

に変換(5.20)を行えば直ちに

$$\int_0^1 P_m(-1 + 2z) P_n(-1 + 2z) dz = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 1/(2n+1) & (m=n) \end{cases} \quad (5.25)$$

が得られる。

以下、記述を簡単にするために $P_n(-1+2z)$ を改めて $P_n(x)$ とかくこととする。すなわち

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} x^n (1-x)^n \quad (5.26)$$

$$= (-1)^n \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} \binom{n+r}{r} x^r \quad (5.27)$$

この直交式の4次までのものを以下と、図-5・2にかかげる。

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= -1+2x \\ P_2(x) &= 1-6x+6x^2 \\ P_3(x) &= -1+12x-30x^2+20x^3 \\ P_4(x) &= 1-20x+90x^2-140x^3+70x^4 \end{aligned} \quad (5.28)$$

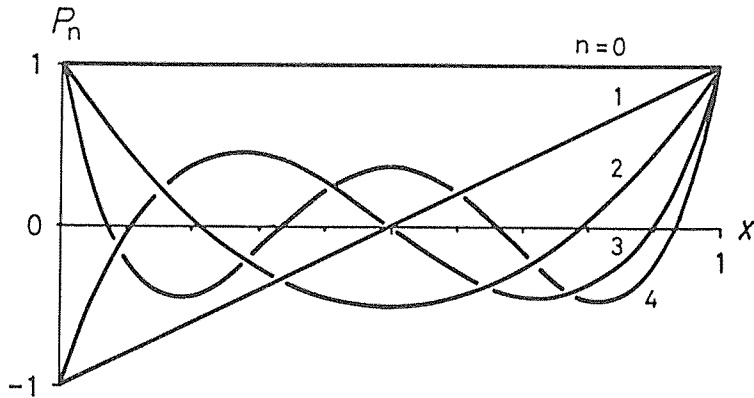


図-5・2 定義域を変換した直交多項式

これから、 P_n をつかって樹幹形の表現に適合するような正規直交関数系を導く。まず、梢端で半径がゼロとなるように $P_n(x)$ を $P_0(x)=1$ から引いた $U_n(x)$ をつくる。

$$U_n(x) = P_0(x) - P_n(x) \quad (5.29)$$

この $U_n(x)$ を GRAM-SCHMIDT の正規直交化の方法 (篠原, 1978) を用いて正規直交多項式系 $\{\Psi_n(x)\}$ をつくりあげていく。以下記号について混乱のないかぎり

$$P_n(x) = P_n, \quad \Psi_n(x) = \Psi_n, \quad U_n(x) = U_n$$

などと略記する。また (5.27) 式のノルム自乗 (5.25) 式を k_n

$$1/(2n+1)=k_n$$

とおく。n の小さいもののいくつかは以下の通り表せる。

$$\begin{aligned} (P_0, P_0) &= 1 = k_0 \\ (P_1, P_1) &= 1/3 = k_1 \\ (P_2, P_2) &= 1/5 = k_2 \\ (P_3, P_3) &= 1/7 = k_3 \\ (P_4, P_4) &= 1/9 = k_4 \end{aligned} \tag{5.30}$$

ここで α_n を次のように定義しておく。

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= k_0 + k_1 \\ \alpha_2 &= k_0 k_1 + k_0 k_2 + k_1 k_2 \\ \alpha_3 &= k_0 k_1 k_2 + k_0 k_1 k_3 + k_0 k_2 k_3 + k_1 k_2 k_3 \\ \alpha_4 &= k_0 k_1 k_2 k_3 + k_0 k_1 k_2 k_4 + k_0 k_1 k_3 k_4 + k_0 k_2 k_3 k_4 + k_1 k_2 k_3 k_4 \end{aligned} \tag{5.31}$$

正規化を始める。ただし、 P_0 は 1 とかく。

n=1 の場合

$$\Psi_1 = a_{11} U_1$$

とする。内積をとって 1 とおき a_{11} を定める。すなわち

$$(\Psi_1, \Psi_1) = a_{11}^2 (1 - P_1, 1 - P_1) = a_{11}^2 (k_0 + k_1) = 1$$

$$a_{11} = \sqrt{\frac{1}{k_0 + k_1}} = \sqrt{\frac{1}{\alpha_1}}$$

よって、 Ψ_1 が定まる。すなわち

$$\Psi_1 = \sqrt{\frac{1}{\alpha_1}} (1 - P_1) \tag{5.32}$$

n=2 の場合

$$\Psi_2 = a_{21} \Psi_1 + a_{22} U_2$$

とする。

$$(\Psi_2, \Psi_1) = a_{21} + a_{22} (U_2, \Psi_1) = 0$$

とおいて

$$\begin{aligned} a_{21} &= -a_{22}(U_2, U_4) \\ &= -a_{22}\sqrt{\frac{1}{\alpha_1}}(1-P_2, 1-P_1) \\ &= -a_{22}\sqrt{\frac{1}{\alpha_1}}k_0 \end{aligned}$$

これを Ψ_2 に代入して

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= a_{22}\left(-\sqrt{\frac{1}{\alpha_1}}k_0\Psi_1 + 1 - P_2\right) \\ &= -a_{22}\left(\frac{k_1}{\alpha_1} + \frac{k_0}{\alpha_1}P_1 - P_2\right) \\ (\Psi_2, \Psi_2) &= a_{22}^2\left\{\left(\frac{k_1}{\alpha_1}\right)^2k_0 + \left(\frac{k_0}{\alpha_1}\right)^2k_1 + k_2\right\} = 1 \end{aligned}$$

とにおいて

$$\left(\frac{k_1}{\alpha_1}\right)^2k_0 + \left(\frac{k_0}{\alpha_1}\right)^2k_1 + k_2 = \frac{k_1k_0(k_1+k_0)}{\alpha_1^2} + k_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

となるから

$$a_{22} = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$$

よって Ψ_2 が定まる。すなわち

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\left(-\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}k_0\Psi_1 + 1 - P_2\right) \\ &= \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\left(\frac{k_1}{\alpha_1} + \frac{k_0}{\alpha_1}P_1 - P_2\right) \end{aligned} \tag{5.33}$$

n=3 の場合

$$\Psi_3 = a_{31}\Psi_1 + a_{32}\Psi_2 + a_{33}U_3$$

とする。

$$(\Psi_3, \Psi_1) = 0$$

とにおいて,

$$a_{31} = -a_{33}\sqrt{\frac{1}{\alpha_1}}k_0$$

$$(\Psi_3, \Psi_2) = 0$$

とにおいて

$$\begin{aligned} a_{32} &= -a_{33}\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \cdot \frac{k_1}{\alpha_1}k_0 \\ \Psi_3 &= a_{33}\left(-\sqrt{\frac{1}{\alpha_1}}k_0\Psi_1 - \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \cdot \frac{k_0k_1}{\alpha_1}\Psi_2 + 1 - P_3\right) \end{aligned}$$

$$= a_{33} \left(\frac{k_1 k_2}{\alpha_2} + \frac{k_0 k_2}{\alpha_2} P_1 + \frac{k_0 k_1}{\alpha_2} P_2 - P_3 \right)$$

となるから

$$(\Psi_3, \Psi_3) = a_{33}^2 \left(\left(\frac{k_1 k_2}{\alpha_2} \right)^2 k_0 + \left(\frac{k_0 k_2}{\alpha_2} \right)^2 k_1 + \left(\frac{k_0 k_1}{\alpha_2} \right)^2 k_2 + k_3 \right) = 1$$

とにおいて

$$\left(\frac{k_1 k_2}{\alpha_2} \right)^2 k_0 + \left(\frac{k_0 k_2}{\alpha_2} \right)^2 k_1 + \left(\frac{k_0 k_1}{\alpha_2} \right)^2 k_2 + k_3 = \frac{k_0 k_1 k_2 + k_0 k_1 k_3 + k_0 k_2 k_3 + k_1 k_2 k_3}{\alpha_2} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2}$$

となるから

$$a_{33} = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}}$$

ゆえに

$$\Psi_3 = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}} \left(\frac{k_1 k_2}{\alpha_2} + \frac{k_0 k_2}{\alpha_2} P_1 + \frac{k_0 k_1}{\alpha_2} P_2 - P_3 \right) \quad (5 \cdot 34)$$

として、 Ψ_3 が定まる。

$n=4$ の場合

$n=3$ までの場合と同様に、

$$\Psi_4 = a_{41} \Psi_1 + a_{42} \Psi_2 + a_{43} \Psi_3 + a_{44} U_4$$

とする。

$$(\Psi_4, \Psi_1) = 0$$

$$(\Psi_4, \Psi_2) = 0$$

$$(\Psi_4, \Psi_3) = 0$$

とにおいて

$$a_{41} = -a_{44} \sqrt{\frac{1}{\alpha_1}} k_0$$

$$a_{42} = -a_{44} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \cdot \frac{k_0 k_1}{\alpha_1}$$

$$a_{43} = -a_{44} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}} \cdot \frac{k_0 k_1 k_3}{\alpha_2}$$

となり、これらを Ψ_4 に代入して、

$$\Psi_4 = a_{44} \left(-\sqrt{\frac{1}{\alpha_1}} k_0 \Psi_1 - \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \cdot \frac{k_0 k_1}{\alpha_1} \Psi_2 - \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}} \cdot \frac{k_0 k_1 k_3}{\alpha_2} \Psi_3 + 1 - P_4 \right)$$

P_n について整理すれば

$$\Psi_4 = a_{44} \left(\frac{k_1 k_2 k_3}{\alpha_3} + \frac{k_0 k_2 k_3}{\alpha_3} P_1 + \frac{k_0 k_1 k_3}{\alpha_3} P_2 + \frac{k_0 k_1 k_2}{\alpha_3} P_3 - P_4 \right)$$

$$(\Psi_4, \Psi_4) = 1$$

とおいて

$$a_{44} \sqrt{\frac{\alpha_3}{\alpha_4}}$$

をうる。よって Ψ_4 が定まる。すなわち

$$\Psi_4 = \sqrt{\frac{\alpha_3}{\alpha_4}} \left(\frac{k_1 k_2 k_3}{\alpha_3} + \frac{k_0 k_2 k_3}{\alpha_3} P_1 + \frac{k_0 k_1 k_3}{\alpha_3} P_2 + \frac{k_0 k_1 k_2}{\alpha_3} P_3 - P_4 \right) \quad (5.35)$$

同様に、必要な次数までの Ψ_n を作ればよい。この系を連続な樹幹形正規直交多項式系と呼ぶことにする。

大型計算機を使用する場合には、 P_n の結合形式のまま Ψ_n を計算すればよい。卓上(ポケット)計算器を使用する場合には、以下のように x のべきについて整理しておいたほうがよい。

α_n (5.31) に k_n (5.30) の値を入れると

$$\alpha_1 = \frac{4}{3}, \quad \alpha_2 = \frac{9}{15}, \quad \alpha_3 = \frac{16}{105}, \quad \alpha_4 = \frac{25}{945}$$

となる。これらの値や、 k_n の値および (5.28) 式の P_n を (5.32), (5.33), (5.34) 式へ代入して x のべきについて次の通り整理できる。4 次までの Ψ_n をここに並べ、図-5.3 に示した。

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \sqrt{3}(1-x) \\ \Psi_2 &= \sqrt{5}(-1+5x-4x^2) \\ \Psi_3 &= \sqrt{7}(1-11x+25x^2-15x^3) \\ \Psi_4 &= \sqrt{9}(-1+19x-81x^2+119x^3-56x^4) \end{aligned} \quad (5.36)$$

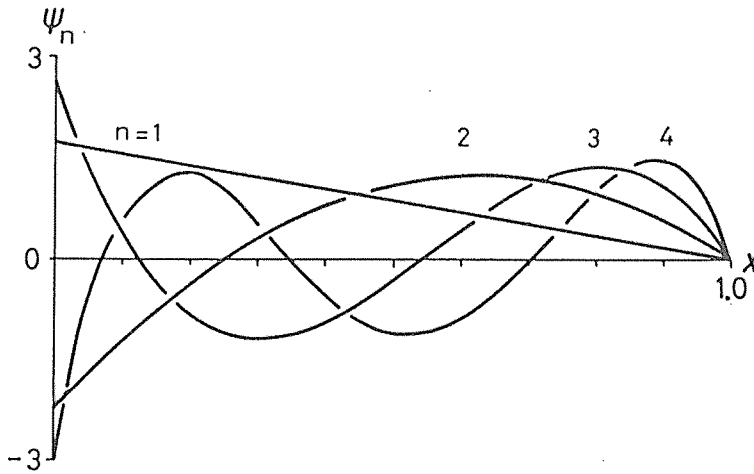


図-5.3 樹幹形正規直交多項式

なお、当然のことであるが $\Psi_n(x)$ の右辺は因数 $(1-x)$ を含んでいる。

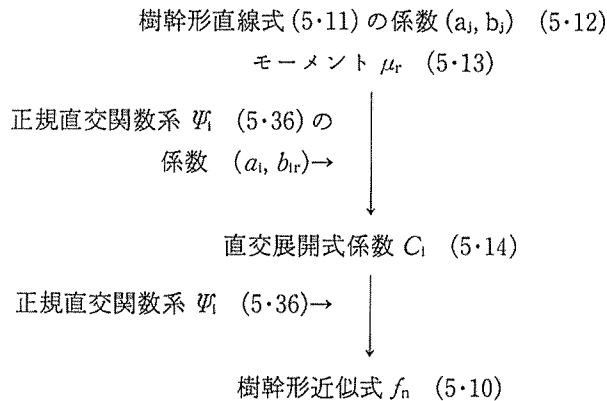
Ψ_n はここに並べたように共通な係数を括りだした形式の方が実用的である。後述の計算手順を説明するときのために、係数を対応させて次式で表す。

$$\Psi_n(x) = a_n(b_{n0} + b_{n1}x + b_{n2}x^2 + \dots + b_{nn}x^n) \quad (5.37)$$

第3節 樹幹形の正規直交展開

樹幹形近似の直交多項式系 $\{\Psi_n(x)\}$ を各項にもつ正規直交系展開によって、樹幹形を近似する方法を実際の林木について例示する。対象の資料は前章に用いたものと同じである。すなわち、スギの2地区（演舎、稲橋）で採られた4本ずつである。

樹幹形近似の方法について計算の手順を示す。計算に用いた資料は No. 1 の標本である。樹幹形近似式を計算する流れは次の通りである。



1. 樹幹形としての直線式の決定

樹幹形は区分的に直線とした各区分ごとに直線の勾配 a_j と切片 b_j を計算する。樹幹の下のほうから第 j 番目の区分について、(5.12) 式すなわち $y_j = a_j x + b_j$ における2つの係数を決定する。樹高方向は梢端が1になるように変換しておけば

$$a_j = 10(y_j(x_j) - y_{j-1}(x_{j-1}))$$

$$b_j = (1-j)y(x_j) + jy_{j-1}(x_{j-1})$$

ただし、 $x_j = j/10$ ($j=1, \dots, 10$)

この2つの係数の計算結果を表-5.1の中に示した。

例えば、第1番目の区間 ($j=1$) については

$y_0(0/10) = 10.045$ cm, $y_1(1/10) = 6.46$ cm をつかって $a_1 = -35.85$ と $b_1 = 10.045$ が計算されている。

表-5・1 モーメントの計算

次数 r=2 の例 (例：演舎 No. 1, 樹高11.1m, 20年生)

区間 j	$\frac{x_j}{j/10}$	y_j (cm)	a_j	b_j	$10^4 x_j^4$ j^4	$a_j \{j^4 - (j-1)^4\}$ (cm)	$10^3 x_j^3$ j^3	$10b_j \{j^3 - (j-1)^3\}$ (cm)
1	0.0	10.045	-35.85	10.045	0	-35.85	0	100.45
2	0.1	6.46	-4.60	6.92	1	-69.00	1	484.40
3	0.2	6.00	-7.00	7.42	16	-455.00	8	140.60
4	0.3	5.30	-3.00	6.20	81	-525.00	27	2,294.00
5	0.4	5.00	-5.70	7.28	256	-2,103.30	64	4,440.80
6	0.5	4.43	-8.60	8.73	625	-5,770.60	125	7,944.30
7	0.6	3.57	-4.70	6.38	1,296	-5,193.50	216	8,115.30
8	0.7	3.10	-14.20	13.04	2,401	-24,069.00	343	22,037.60
9	0.8	1.68	-10.40	10.00	4,096	-25,636.00	512	21,700.00
10	0.9	0.64	-6.40	6.40	6,561	-22,009.60	729	1,734.40
	1.0	0.00			10,000		1,000	

$$(1/4) \Sigma = -21,466.71 \quad (1/3) \Sigma = 28,622.28$$

$$\mu_2 = 10^{-4} \{ (1/4) \Sigma + (1/3) \Sigma \} = 0.715537$$

2. モーメントの計算

(5・13)式によってモーメント μ_r を計算する。例えば r=2, すなわち 2 次モーメント μ_2 を計算しようとする場合には, (5・13)式から

$$\mu_2 = \frac{1}{10^4} \left[\frac{1}{4} \sum_{j=1}^{10} a_j \{j^4 - (j-1)^4\} + \frac{10}{3} \sum_{j=1}^{10} b_j \{j^3 - (j-1)^3\} \right]$$

によって計算すればよい。表-5・1 は $\mu_2 = 0.7157$ が計算される過程を説明するために掲げた。実際には必要な次数まで計算できるように処理すればよい。

3. 樹幹形展開式の係数の計算

正規直交系展開式による樹幹形近似式 (5・10) の i 次の係数 C_i すなわち (5・14) 式を計算する。n=4 までの樹幹形正規直交多項式 Ψ_n の x のべきの係数は (5・37) 式の形においては, $a_i b_i$ であるが, その値は (5・36) 式のものである。

展開式中の C_i の求め方を表-5・2 によって説明する。この表のタテ方向に各次のモーメント μ_r と Ψ_n の係数 b_i との積和をとり, 最後に a_i をかけて C_i が求まる。たとえば展開式中 Ψ_4 にかかる係数 C_1 を求めるには

$$\{4.120250 \times 1 + 1.405041(-1)\} \times \sqrt{3} = 4.7029$$

表-5・2 近似展開式係数の計算
(例：演舎 No. 1)

r	μ_r (cm)	係 数				
		ψ_1 の	ψ_2 の	ψ_3 の	ψ_4 の	
0	4.120250	b_{10}	1	-1	1	-1
1	1.405042	b_{11}	-1	5	-11	19
2	0.715557	b_{12}	—	-4	25	-81
3	0.430237	b_{13}	—	—	-15	119
4	0.284421	b_{14}	—	—	—	-56
		a_1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{9}$
展開式の係数		C_1	4.7029	0.0956	0.2650	-0.3418

単位：cm

として計算される。同様に表-5・2によって、必要とされる各次の係数がきめられる。以上によって、この標本（演舎 No. 1）について4次までの樹幹形近似式(5・10)が

$$f_4(x) = 4.7029 \psi_1(x) + 0.0956 \psi_2(x) + 0.26504 \psi_3(x) - 0.418 \psi_4(x)$$

として求まった。

4. 樹幹形の近似値による再現

展開式の n=4 までの各項を掲げると

$$C_1 \psi_1 = 4.7029 \sqrt{3}(1-x)$$

$$C_2 \psi_2 = 0.0956 \sqrt{5}(-1+5x-4x^2)$$

$$C_3 \psi_3 = 0.2650 \sqrt{7}(1-11x+25x^2-15x^3)$$

$$C_4 \psi_4 = -0.3418 \sqrt{9}(-1+19x-81x^2+119x^3-56x^4)$$

x に実際の値をいれて半径の近似値 $f_4(x)$ を計算し、表-5・3 に示した。

表-5・3 半径の近似値
(例：演舎 No. 1)

x	$C_1 \psi_1$ f_1	$C_2 \psi_2$	f_2	$C_3 \psi_3$	f_3	$C_4 \psi_4$	f_4	y
0.0	8.15	-0.12	7.94	0.72	8.64	1.03	9.67	10.045
0.1	7.33	-0.12	7.21	0.09	7.30	-0.21	7.09	6.46
0.2	6.52	-0.03	6.49	-0.22	6.27	-0.43	5.84	6.00
0.3	5.70	0.03	5.73	-0.32	5.41	-0.17	5.24	5.30
0.4	4.89	0.08	4.97	-0.25	4.72	0.18	4.90	5.00
0.5	4.07	0.11	4.18	-0.09	4.09	0.30	4.47	4.43
0.6	3.26	0.12	3.38	0.11	3.49	0.32	3.81	3.57
0.7	2.44	0.12	2.56	0.28	2.84	0.02	2.86	3.10
0.8	1.63	0.09	1.72	0.36	2.08	-0.51	1.72	1.68
0.9	0.81	0.06	0.87	0.29	1.16	-0.51	0.65	0.64
1.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

単位：cm (x を除く)

1 次の近似, $n=1$ でよければ $C_1 \psi_1$ だけで, すなわち $f_1(x)=C_1 \psi_1$ により, 2 次までの近似, $n=2$ ならば, $f_2(x)=C_1 \psi_1+C_2 \psi_2$ により近似値が計算される。

近似の結果と再現された樹幹形を表-5・3 と図-5・4 (a)に示した。

なお稲橋 No. 1 についても結果を図-5・4 (b)に示した。図-5・4 に示したように離散と異なる点は再現される樹幹形が連続な曲線として与えられることでもある。もし次数 n を高めて $C_n \psi_n$ の項数をふやしていけば, $f_n(x)$ は次第に直線を連結した幹形に近づくであろう。ただし, すでに述べたように樹幹の区分数よりも大きい次数においては RUNGE の現象に類する微少な変動 (波形あるいは凹凸) が介入することが懸念される。

(5・18) 式の誤差平方和を計算して, 近似が精度的に不満足ならば, 表-5・3 のように新しい $i=n+1$ について $C_{n+1} \psi_{n+1}$ を計算し, $f_n(x)$ につけ加えて $f_{n+1}(x)$ として改良してゆける。一般の最小自乗法のように, 近似が不満なときに, ベキの次数を上げて最初から近似計算をやりなおす必要がなく, $C_{n+1} \psi_{n+1}$ をつけ加えてゆけばよいことは, 直交関数系による近似の利点である。

正規直交系による樹幹形展開式の係数 C_n は, その次数 n までのモーメントから計算され, C_n の組と μ_n の組が 1 対 1 の対応をすることは樹幹形を離散的とした場合と同様である。

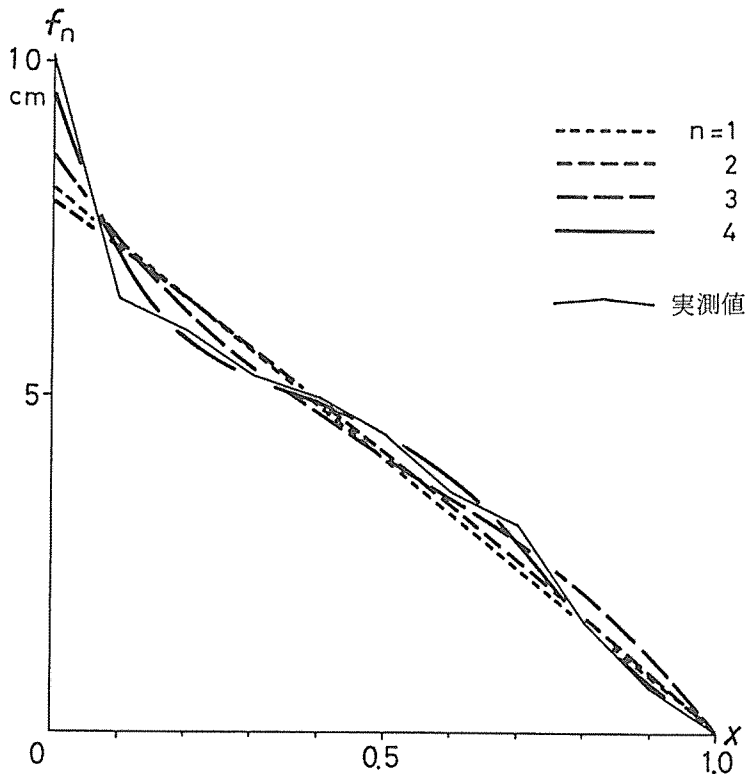


図-5・4 (a) 近似樹幹形 (演舎 No. 1)

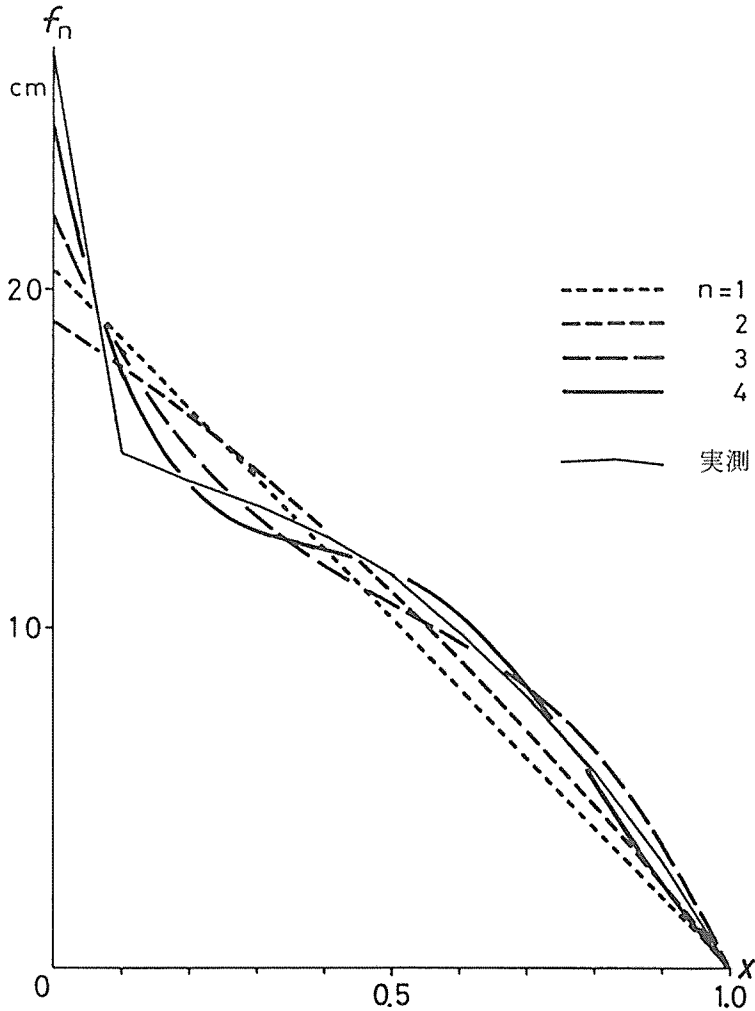


図-5・4 (b) 近似樹幹形 (稲橋 No. 1)

5. 正規直交展開による樹幹曲線の誤差

正規直交展開によって近似された樹幹半径の誤差を誤差平方和によって評価する (表-5・4)。

誤差平方和は (5・18) は連続な樹幹形の半径の自乗 y^2 の積分値から正規直交展開式による樹幹形近似式の係数の自乗和を引いて与えられる。まず, y^2 の積分は (5・10) 式を, 3 節の係数を使って積分し

$$\int_0^1 y^2(x) dx = \frac{1}{10^3} \sum_{j=1}^{10} \left\{ \frac{a_j^2}{3} (3j^2 - 3j + 1) + 10a_j b_j (2j - 1) + 10^2 b_j^2 \right\}$$

によって計算する。表-5・1 の数値をつかって, 演舎 No. 1 の例を計算すれば

$$\int_0^1 y^2(x) dx = 22.3414$$

が得られる。一方、樹幹形の直交展開の係数 C_i (5・14) の自乗和を求める。 C_i は表-5・2の最後の行から、表-5・4の第2列に転記してある。 i は直交展開における第 i 項を示している。

表-5・4 誤差平方和率

(例：演舎 No. 1)

i	C_i	C_i^2	$\sum_{i=1}^n C_i^2$	誤 差 率
				$(\sum_{i=1}^n C_i^2 - \int_0^1 y^2 dx) / \int_0^1 y^2 dx$
				%
1	4.7029	22.16	22.12	-1.00
2	0.0956	0.01	22.13	-0.96
3	0.2650	0.07	22.20	-0.65
4	-0.3418	0.12	22.32	-0.12

$\int_0^1 y^2 dx = \sum_{i=1}^{\infty} C_i^2 = 22.3414$ C_i, y の単位 : cm

次の列で C_i^2 が計算され、さらに総和の上限 n すなわち目的の i 項までの係数自乗和が第4列に求められている。最後に (5・18) 式に対応して誤差平方和率が第5列に計算されている。 C_i^2 の値は樹幹形を離散的関数とした場合と同様に y^2 の積分値に比較するとき、寄与の程度を示す指標としての資格がある。この表から、近似結果をみると、演舎スギ No. 1 の場合は、1 次の展開すなわち第 1 項のみで、誤差率 1%，すなわち y^2 の積分値 = 22.3414 に対して $C_1^2 = 22.16$ と第 1 項が樹幹形表現に大きく寄与していることが示されている。第 2 項の寄与率は非常に小さく、4 次までの近似をとれば誤差率はほぼ 0.1% となり、したがって第 4 項までとれば、樹幹形のほとんどは再現できることになる。

ところで前節で触れたが、誤差平方和率が常にマイナスで与えられるので材積推定値にはマイナスのバイアスもたらされることを示唆するものである。

表-5・5 に 2 グループのすべてのサンプルについて誤差平方和比率がまとめてある。演舎グループについては、第 1 項のみでほぼ 1% になっており第 1 項が樹幹形の構成に大きく寄与していることがわかる。稲橋グループについては、第 2 項までで 2% 前後の誤差平方和率、第 4 項までとれば 1% 以下となっている。この 2 グループについていえば、演舎のグループの方が近似は少し良い結果になっている。この差異は、立地条件、樹幹の相違その他の要因によって生じていると考えられるが、このように両グループの樹幹形に若干の相違が検出されている。

表-5・5 誤差平方和率による近似結果

グループ	演 舎				稲 橋			
	1	2	3	4	1	2	3	4
林木 NO.								
1 項のみ	-1.00	-1.33	-0.37	-1.15	-2.13	-2.49	-1.63	-2.57
2 項まで	-0.96	-1.32	-0.28	-1.13	-1.80	-1.62	-0.79	-2.52
3 項まで	-0.65	-1.06	-0.22	-0.18	-0.85	-0.57	-0.26	-1.13
4 項まで	-0.12	-0.40	-0.05	-0.18	-0.34	-0.24	-0.08	-0.49

数値 : %

第4節 まとめ

連続な樹幹形に対する正規直交関数系展開による表現の問題をまとめる。直交性にかかわる部分では前章の離散的関数の場合と共通の事項も含まれている。

1) 最初に、連続な樹幹形の近似理論が要約された。つぎにこの理論のもとに樹幹形を表現する上で都合が良いように連続な樹幹形正規直交多項式系 $\{\psi_n(x)\}$ が (5.36) 式によって構成された。その定義域は $(0, 1)$ である。

2) 樹幹形正規多項展開式の係数が (5.10) 式によって決定される。すなわち、近似式あるいは樹幹形表現式としての展開式の係数は、 $\psi_n(x)$ の直交性により互いに他の係数と独立に決定される。それぞれの係数は、その次数までのモーメントの線形結合として計算される。直線的に連続なモーメントの計算は区分ごとに $x^r y(x)$ を積分した上で全区分について総和する点が離散の場合と異なる。係数は長さの次元をもつ。

3) この近似の方法は最小自乗法であって、係数はいわゆる一般フーリエ係数である。展開式 (5.10) で与えられる樹幹形は n が小さいうちは滑らかな曲線であるが、 n を限りなく大きくすれば、直線的に連続な樹幹形に近づく。ただし、平均収束である点で離散の場合と変わらない。

4) 半径の近似の程度を知るためには、正規直交展開式における係数の自乗和を、連続な樹幹形 (半径) の自乗を積分した値と比較すればよい。すなわち、誤差平方和の比率 (5.18) 式を計算し、前もって設定した目的精度に収まっているかどうかを調べ、目的の誤差平方和の比率がクリアされていなければ、近似式の次数を高めて $\psi_{n+1}(x)$ をつけ加えて、近似を改善できる。これは直交関数系を用いた近似の利点である。

5) 樹幹形表現の立場から言えば、連続な樹幹形は正規直交展開式の各項に直交分解されるのであり、各項の係数の自乗 C_i^2 の y^2 積分値に対する比率が樹幹形を構成する寄与率になっていることである。

6) 近似半径を用いて幹材積を積分した場合には、材積推定値は過小評価となるので、注意が必要である。

第6章 生長過程論にもとづく樹幹形の表現

この章では、これまで用いられている経験的な幹曲線式から離れて生長過程論に基礎をおいて幹曲線式を導き、その性質について論ずる。この場合、樹幹形表現を用いる生長関数として、MITSCHERLICH 式を選択する。選択の理由は第2節において詳述するが、一般的に直径生長および樹高生長が MITSCHERLICH 式にしたがうことが示されている(鈴木, 1961; 南雲・佐藤, 1965)からである。MITSCHERLICH 式は複利式とともにその年の連年生長量が前年のそれに年々比例してゆく過程のものである。

著者らは、1980年に生物生長理論にもとづく一つの幹曲線を提案した。それは、樹高生長および直径生長とともに MITSCHERLICH の生長過程にしたがうという仮定のもとに誘導された。この幹曲線は jack pine (*Pinus banksiana* LAMB.) によく適合したが、樹齢が無限大に至ると樹幹形が方形になるという問題点を持っている。この適切でない結果は、樹幹形モデルの中に各断面高における直径生長極限值と断面高すなわち樹高生長が独立であるとの暗黙の仮定にもとづいていることから生じた。

本論では、直径生長の極限值を高さの関数として、究極の樹幹形を設定しておき、現実の樹幹形は現在の樹幹形から、究極の樹幹形へむけて生長すると仮定するものである。この場合、究極の樹幹形として単純に三角形を仮定する。すなわち樹齢を無限大とした極限の幹曲線式は直線である。

なお、樹高生長、直径生長ともに MITSCHERLICH 式を適用することは前のモデルの場合と同様である。

第1節 MITSCHERLICH の生長過程

MITSCHERLICH 式は、ある年度の生長速度が、その前年度の生長速度に比例するという性質をもつものである。この性質をもついま一つのは生長過程としてみた複利式である。最初に、この様な意味で生長速度が年々比例する生長曲線について検討する。

一定期間前後(1年ごと)の生長速度が比例する関係は(6.1)式で示される。すなわち、生長年 t 、生長量 $y(t)$ とするとき

$$\frac{dy(t+1)}{dt} = \alpha \frac{dy(t)}{dt} \quad (6.1)$$

ただし

α : 比例定数

である。鈴木(1961)および権・鈴木(1973)は、一階の定差方程式が線形ならば生長関数として MITSCHERLICH 式か複利式が導かれることを明らかにしている。

そこで(6.1)式を積分し、 t を年度とおけば、その定差方程式

$$y(t+1) = \alpha y(t) + \beta$$

を得るから、1年後の生長速度 $dy(t+1)/dt$ が $dy(t)/dt$ に比例するならば、その生長は MITSCHERLICH 式か複利式にしたがうことになる。また逆に生長速度が MITSCHERLICH 式か複利式にしたがうならば、これを t について微分すれば明らかに (6.1) 式が成り立つ。この法則 (6.1) にしたがう生長を生長速度比例の生長と定義しよう (長嶋・栗田, 1987)。

これにより生長速度比例の生長関数は形式的に (6.2) 式によって与えられる。

$$y(t) = a - be^{-ct} \quad (6.2)$$

係数の値によって

$$\begin{aligned} a > 0, b/a > 0, c > 0 \text{ ならば } & \text{MITSCHERLICH 式} \\ a < 0, b = 1/a, c < 0 \text{ ならば } & \text{複利式} \end{aligned}$$

である。

(6.2) 式については、実際に生長速度の比が一定、すなわち

$$\frac{dy(t+1)/dt}{dy(t)/dt} = e^{-c} = \text{const.} \quad (6.3)$$

が成り立っている。Logistic 式および GOMPertz 式においては、生長速度の比はその中に 2 つのパラメータを残し、しかも複雑となる (長嶋・栗田, 1985)。

RICHARDS 式の一般式

$$y(t) = a(1 - be^{-ct})^m$$

についても、同様に

$$\frac{dy(t+1)/dt}{dy(t)/dt} = \left(\frac{1 - be^{-c(t+1)}}{1 - be^{-ct}} \right)^{m-1} e^c$$

となり、パラメータは 3 個残り、関係も複雑である。

この論文においては、樹幹形表現式を誘導するために用いる生長過程として MITSCHERLICH 式を導入する。

第 2 節 生長過程にもとづく樹幹形

新しい樹幹形を誘導するに先立って、すでに発表した生長過程論にもとづいた幹曲線式 (NAGASHIMA *et al.*, 1980) について要約する。樹高生長および各断面高における直径生長の関係は図-6.1 を参照されたい。

樹高生長および直径生長ともに MITSCHERLICH 生長過程にしたがうものとする。樹齢 t 、樹高 h である林木の断面高 x における直径生長を考える。樹高の生長が MITSCHERLICH 式の過程とすると、樹高は

$$h = H(1 - e^{-ht}) \quad (6.4)$$

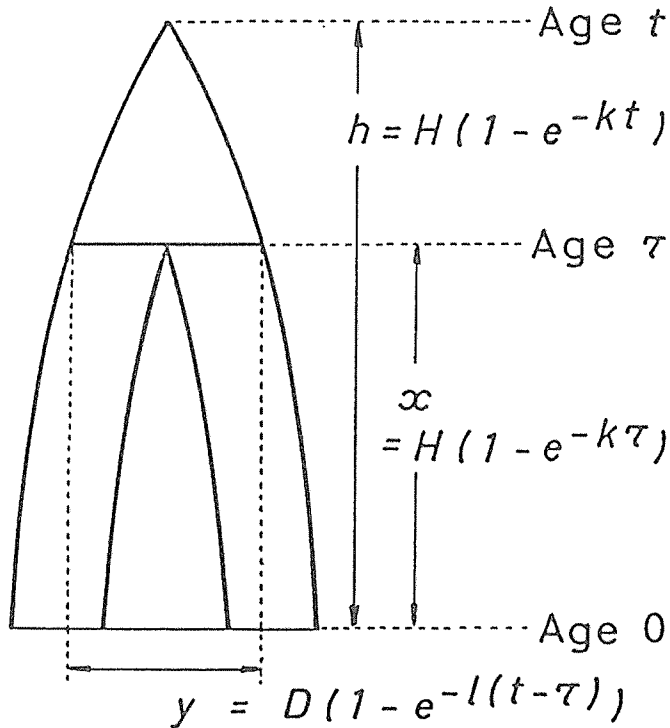


図-6・1 樹高と直径の生長関係

ただし

H : 樹高生長の極限值

k : 樹高生長係数

で与えられる。これが、樹齡 τ であったとき、樹高が x に達していたとすれば

$$x = H(1 - e^{-k\tau}) \quad (6.5)$$

である。断面高 x における直径生長 y は、林齡 τ から現在の林齡 t まで $t - \tau$ 年間の生長をしているからそれがまた MITSCHERLICH の生長をしたとすれば、その直径 y は

$$y = D(1 - e^{-l(t-\tau)}) \quad (6.6)$$

で与えられる。

ただし

D : 直径生長の極限值

l : 直径生長係数

である。 t と τ とを消去するため、(6.4) および (6.5) 式から

$$e^{-kt} = \frac{H-h}{H}$$

$$e^{-k\tau} = \frac{H-x}{H}$$

を求め、さらに

$$e^{-(t-\tau)} = \left(\frac{H-h}{H-x}\right)^{1/k}$$

として、これを (6.6) 式に代入して

$$y(x) = D \left[1 - \left(\frac{H-h}{H-x} \right)^m \right] \tag{6.7}$$

ただし

$$m = l/k$$

が導かれる。これは一つの幹曲線を表す。(6.7) 式による樹幹形の模式図を図-6.2 に掲げる。

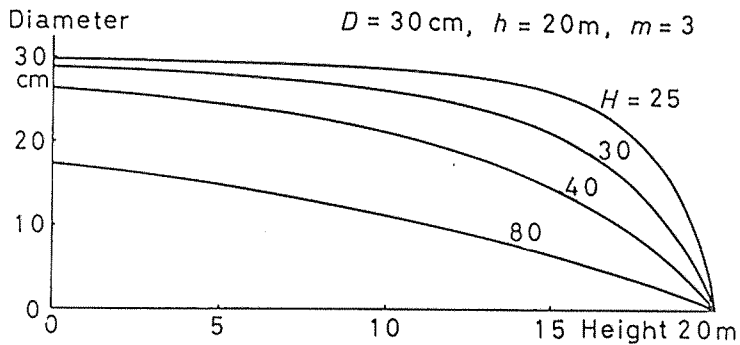


図-6.2 (a) 生長過程にもとづく幹曲線
 H を変化させた場合

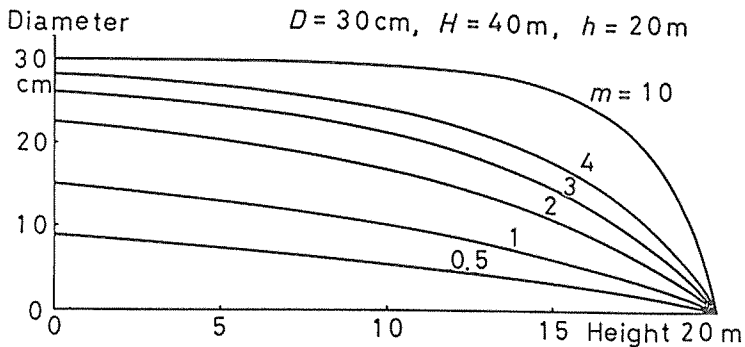


図-6.2 (b) 生長過程にもとづく幹曲線
 m を変化させた場合

この幹曲線について、その性格を調べてみる。

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{D(H-h)}{(H-x)^{m+1}} < 0$$

であるから、樹高について単調減少関数である。

また

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -m(m+1)\frac{D(H-h)^m}{(H-x)^{m+2}} < 0$$

であるから、上に凸の関数である。したがって、この式は根張り部分の表現には適さない。ゆえに、この幹曲線式は根張り部分には適用できない。また、上部に変曲点が存在する樹幹に対しても適当ではない。しかし、50本のjack pineについて、根元部分を除外して、相対高10分位の各位置における直径を近似した結果は良好であった。この場合、適用性の比較のために、8次までの多項式

$$y = \sum_{i=1}^n a_i (h-x)^i \quad (n=1, \dots, 8)$$

および、形状指数 r を自由にした KUNZE 式すなわち

$$y = a(h-x)^r$$

を提案式に対比させ近似の程度を調べた結果、残差平方和で見て、4次ないし5次の多項式と同等の結果を示し、また KUNZE 式よりも良好な近似を示した。

提案された幹曲線式(6.7)にたいし、やや類似したものに次の式で与えられる ORMEROD (1973) のモデルがある。

$$y = D' \left(\frac{h-x}{h-k} \right)^p$$

ただし

y : 直径

x : 断面高

D' : 完頂体の低部の直径

k : 基準高を示す係数

p : 係数

提案した(6.7)式は、上記のモデルよりも柔軟性をもつが、一方で、一つの理論上の問題点を持っている。それは、林齢を無限大としたとき究極の樹幹形が方形となり、したがってその回転体は円柱となることである。この理由は直径の極限值が断面高 x にかかわらず一定であることによる。

第3節 生長過程にもとづく新しい樹幹形表現式

前節において導かれた幹曲線式のもつ問題点は、すべての断面高における直径生長の上限値 D を一定としたことから生じている。そこで、直径生長の上限値を断面高 x の関数 $D(x)$

とし、(6.7)式に対応する樹幹形を

$$y(x) = D(x) \left[1 - \left(\frac{H-h}{H-x} \right)^m \right] \quad (6.8)$$

の形式にすることを考えてみる。

いま、この極限の樹幹形を直線的な細りをもっていると単純に仮定し、極限の直径を次式によって仮定する。すなわち

$$D(x) = a(H-x) \quad (6.9)$$

ただし

a : 係数

(6.8)式に(6.9)式を用いれば、新しい幹曲線式

$$y(x) = a(H-x) \left[1 - \left(\frac{H-h}{H-x} \right)^m \right] \quad (6.10)$$

が得られる。

ここで、ある年度における梢端から幹軸に直角に生長するときの直径の生長速度と、その年度の樹高生長速度との関係を調べてみよう。

断面高における樹高の生長速度は(6.5)式から

$$\frac{dx}{d\tau} = k(H-x) \quad (6.11)$$

一方、その年齢での梢端における直径生長速度は(6.6)に対応する直径生長

$$y = D(x) \{ 1 - e^{-l(t-\tau)} \} \quad (6.12)$$

の生長速度は

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=\tau} = D(x) \cdot l \quad (6.13)$$

この2つの生長速度の比を α とすれば、(6.13)、(6.11)式から

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=\tau} / \frac{dx}{d\tau} = \alpha \quad (6.14)$$

ここにおける比例定数 α は次となる。

$$\alpha = D(x) \frac{l}{k(H-x)} \quad (6.15)$$

これにより、最初に仮定した極限の樹幹形(6.9)式を代入すると

$$\alpha = a \frac{l}{k} = am \quad \text{または} \quad \alpha = \frac{\alpha}{m} \quad (6.16)$$

となる。すなわち $D(x)$ を直線とした場合には、 a は、 α に比例し m に反比例していることになる。

前節で述べた樹幹形に新しく提案された樹幹形を対比するために、(6.7)式を生長過程による樹幹形提案式1とし、また(6.10)式を提案式2と呼ぶことにする。とりあえず図-6.3

に提案式 2 による樹幹形を，図-6・4 に提案式 1 による樹幹形を，それぞれ模式的に掲げた。比較の意味で，共通するパラメータは同じ値をとった。詳細な比較は次節にゆずるが，両者の相違が図から読みとれる。

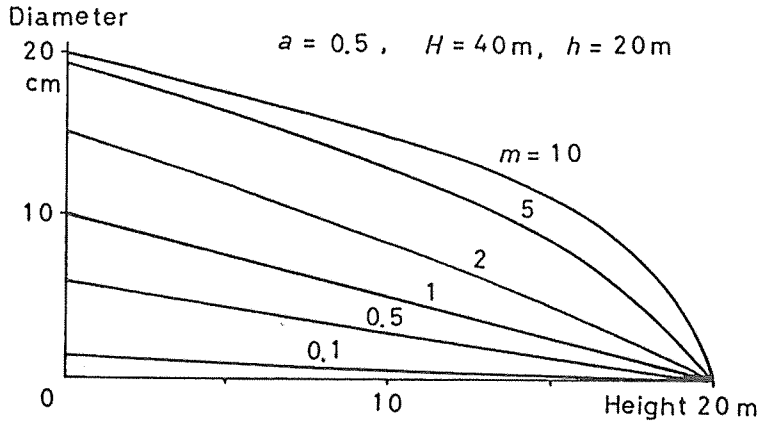


図-6・3 提案式 2 による幹曲線

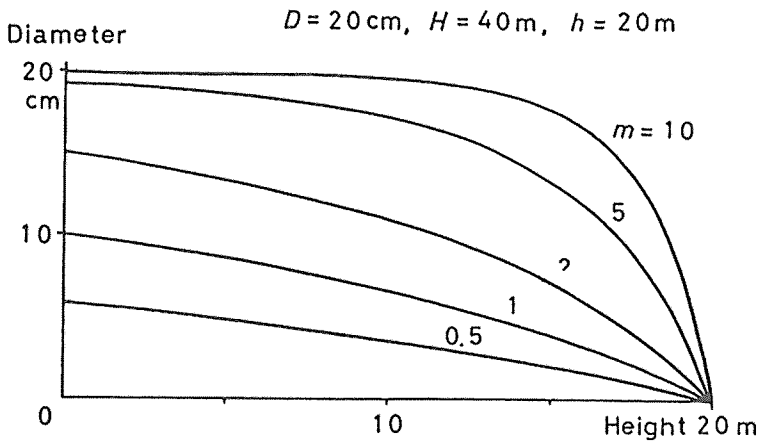


図-6・4 提案式 1 による幹曲線

提案式 2 による幹曲線の性格について検討する。まず既述のように，極限の樹幹形が提案式 1 によれば方形となることに対し，提案式 2 においては三角形になることが仮定されている。さらに仮定により，提案式 2 には，提案式 1 に対して重要な相違が出てくる。

パラメータ k および l の値は MITSCHERLICH 生長過程の性質から正である。

(6・10) 式を断面高 x で微分すれば

$$\frac{dy}{dx} = a \left[-1 + (1-m) \left(\frac{H-h}{H-x} \right)^m \right] \quad (6.17)$$

となる。 m は，樹高生長，直径生長とも MITSCHERLICH 式を仮定したので，正である。また $(H-h)/(H-x)$ が正で 1 より小さいことを考慮して次の関係が成り立つ。

$$\frac{dy}{dx} < 0 \quad (6.18)$$

これは、 $y(x)$ が提案式 1 と同様に単調減少関数であることを示している。

(6.16) 式をもう一度微分する。 $a=am$ であるから次となる。

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha \frac{1-m}{H-x} \left(\frac{H-h}{H-x} \right)^m \quad (6.19)$$

つぎにパラメータの値によって 3 つの場合がある。

i) $m > 1$

すなわち、樹高生長係数 k よりも直径生長係数 l の方が大きい場合であり、次の関係 (6.20) 式が成り立つ。

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0 \quad (6.20)$$

これは、 $y(x)$ が上に凸の関係であり、したがって樹幹形の完満性を示すものである。

ii) $m = 1$

すなわち、樹高生長係数 k が直径生長係数 l と等しい場合であり、次の関係が成り立つ。

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad (6.21)$$

これは、 $y(x)$ が直線であり、したがって、林齢が無限大にならなくとも三角形になりうることを示している。

iii) $m < 1$

すなわち、樹高生長係数 k が直径生長係数 l よりも大きい場合である。

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0 \quad (6.22)$$

これは、 $y(x)$ が下に凸の関係であり、したがって樹幹形の梢殺性を示すものである。なお、2 次微分係数についてのこれらの結果は、この幹曲線式が変曲点をもたないことを意味している。以上の結果は、樹高生長、直径生長とも MITSCHERLICH 式の過程にしたがうと仮定したから、 $m > 0$ の場合のものであるが、樹高生長か直径生長のいずれかが複利式の過程の場合には $m < 0$ となる。また両者が複利式のとき $m > 0$ となる。これらの場合も現実には有りうるが本論文ではとりあつかわない。

以上、樹高生長と直径生長とのかかわり方にしたがって、(6.20) から (6.22) 式の関係がえられ、提案式 2 による樹幹形が柔軟に表現できることは、提案式 1 による樹幹形が上に凸の樹幹形しか表現できないことに対比して顕著に異なる点である。この点も図-6.3 と図-6.4 と対比すれば、その差異がよく理解できる。

なお、著者は、(6.14) 式から出発して、極限の樹幹形が三角形になることを導いている (NAGASHIMA and INADA, 1987)。この論文では、最初に極限の樹幹形を三角形と仮定した場合には、梢端における樹高生長速度と直径生長速度が比例関係にある場合であることが示された。

第4節 樹幹形提案式の適用

2つの提案式による幹曲線式を実際の林木に対し最小自乗法によってあてはめ、その適用性を比較する。

ここに提供されたデータは、カナダ国ノースウェスト準州 Horseshoe Lake 地区で調査された林齢50年から150年生の jack pine (*Pinus banksiana* LAMB.) で、7プロット(プロット名: HL 04, HL 05, HL 06, HL 07, HL 09, HL 10, HL 17)から10本ずつ採られた計70本である。各林木について幹軸上、相対高10箇所まで直径が測定されている(Nagoya Univ., 1979)。

樹幹形のあてはめのためには、この樹幹形モデルの性格上、根元すなわち断面高ゼロの直径は除外した。これは前節で検討した提案式の性格にもとづき、根張り部分には適当しないので、この提案式2つの定義域は提案式1と同様に根張り部分を除いた幹軸上梢端までである。この式の適合性の検討のために、70本について、相対高10分の1位から9位までの9箇所の直径測定値が用いられた。幹曲線あてはめの結果は、各プロットから1本ずつを選んで図-6・5(a)~(g)に示した。略号は“PROPOSED 2”は提案式2(6・10)式による近似結果を示し、“PROPOSED 1”は提案式1(6・7)式による結果を、また“OBSERVED”は実測による現実の樹幹形である。2つの提案式について、残差平方和によるパーセント誤差率を次の(6・23)式によって定義し、その値の大きさによって近似の程度を比較した。

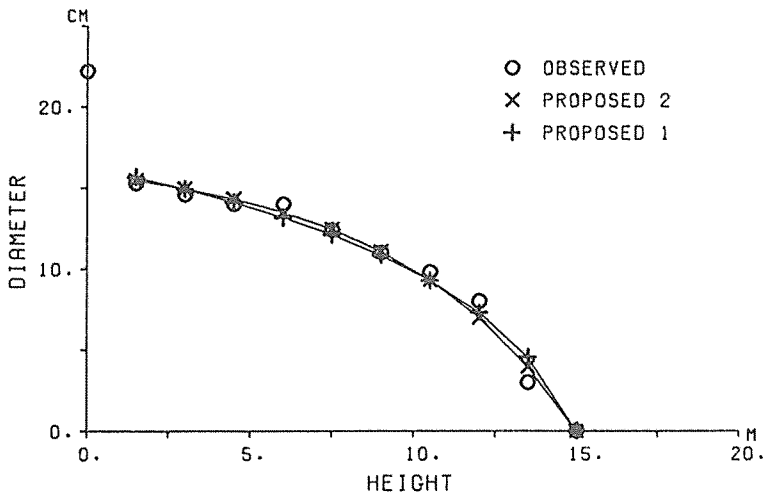


図-6・5 (a) 表現された樹幹形 (HL 04 No. 1)

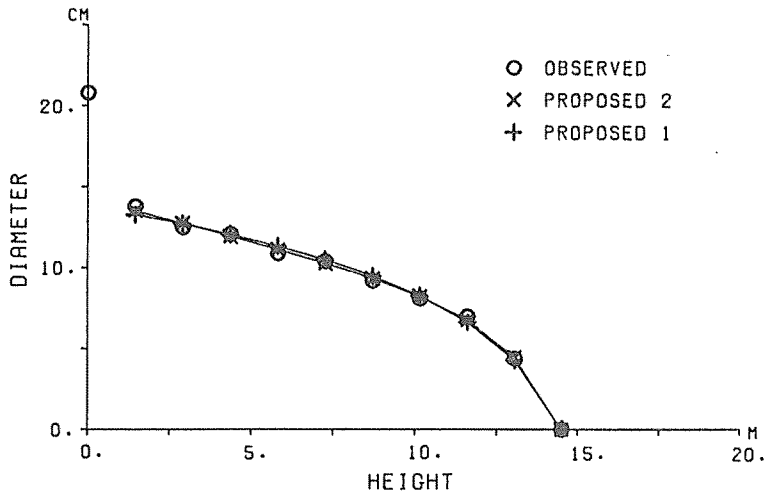


図-6・5 (b) 表現された樹幹形 (HL 05 No. 1)

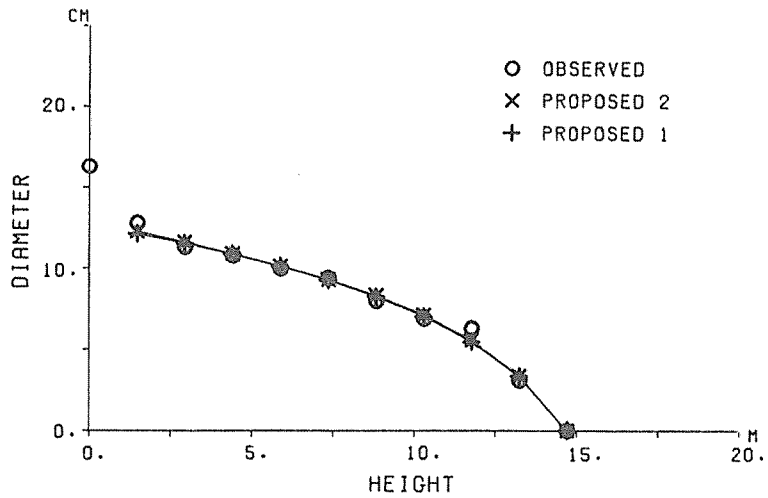


図-6・5 (c) 表現された樹幹形 (HL 06 No. 1)

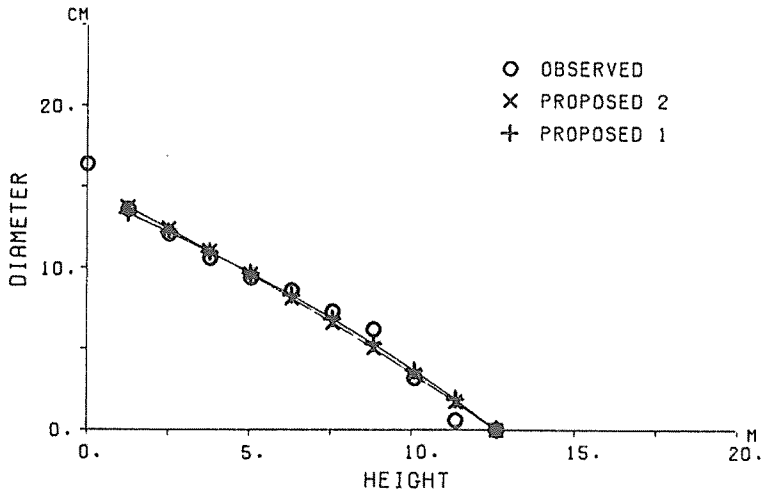


図-6・5 (d) 表現された樹幹形 (HL 07 No. 1)

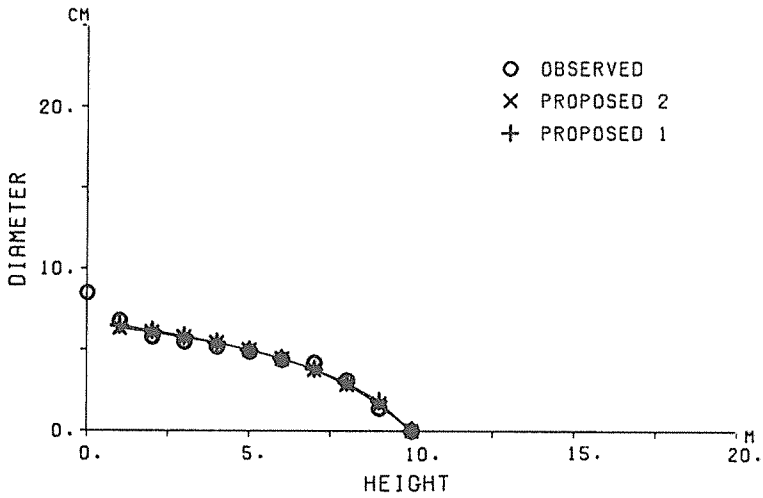


図-6・5 (e) 表現された樹幹形 (HL 09 No. 1)

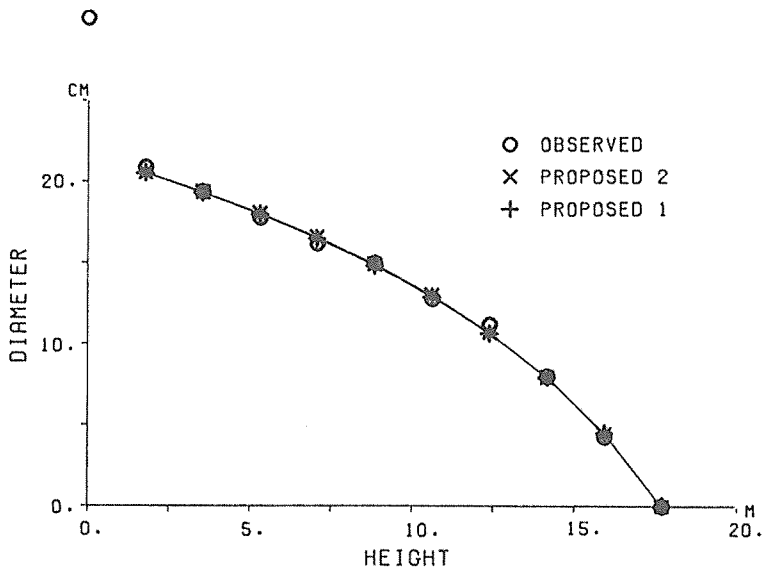


図-6・5 (f) 表現された樹幹形 (HL 10 No. 1)

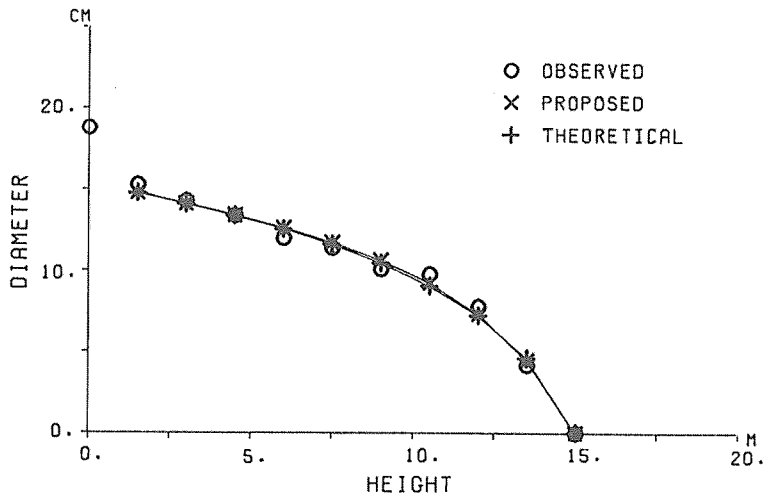


図-6・5 (g) 表現された樹幹形 (HL 17 No. 1)

$$\epsilon(\%) = \frac{\sum_{i=1}^9 (\hat{y}_i - y_i)^2}{\sum_{i=1}^9 y_i^2} \times 100 \quad (6.23)$$

ただし

- i : 幹軸上の相対高の i 番目
- y : 直径実測値
- \hat{y} : 直径近似値

近似の誤差率について、各プロットから No. 1 の林木をとりだして結果を表-6・1 に例示した。これは図-6・5 の各林木のものである。

表-6・1 によると提案式 2 の方が僅かながら良い近似を得ている。全体数について近似の良かった方の提案式に対する林木の本数を表-6・2 に掲げる。

表-6・1 樹幹形の誤差率 (%) による比較
(各プロット No. 1 の林木)

林分	HL04	HL05	HL06	HL07	HL09	HL10	HL17
林齢	90	153	104	56	Unknown	123	92
提案式 1	0.32	0.08	0.18	0.46	0.37	0.03	0.16
提案式 2	0.21	0.03	0.15	0.53	0.35	0.03	0.14

表-6・2 近似が良好であった林木本数

林分	HL04	HL05	HL06	HL07	HL09	HL10	HL17	計
提案式 1	4	0	1	5	1	2	1	15
提案式 2	6	10	9	5	9	8	9	56
計								70本

表-6・2 によれば明らかに提案式 2 による近似の方が良好であることが示されている。ここに全林木について誤差率は示していないが、表-6・1 の例のように何れの提案式においても誤差率は一般的に僅少な値であった。

さらに、比較の慎重さを期するため樹幹形ベクトル、相違度などを次のとおりに定義して(長嶋, 1986)、適合の状況を検討した。

樹幹形ベクトル $y = (y_1, y_2, \dots, y_9)$

近似樹幹形ベクトル $\hat{y} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_9)$

類似度 $r = \frac{(\hat{y}, y)}{\|\hat{y}\| \cdot \|y\|}$

ただし (,) は内積, $\| \cdot \|$ はノルム

相違度 (%) : $s = (1 - r^2) \times 100$ (6・24)

各林分から図-6・5 に対応する No. 1 のものについて、相違度の値を表-6・3 に掲げる。

表-6・3 樹幹形の相違度による比較
(各プロット No. 1 の林木)
(数値: %)

林分	HL04	HL05	HL06	HL07	HL09	HL10	HL17
提案式 1	0.32	0.08	0.18	0.46	0.35	0.03	0.16
提案式 2	0.10	0.02	0.08	0.26	0.17	0.02	0.07

この結果は全ての場合、提案式2の方がよい結果となっている。表-6・1との結果の相違は樹幹形ベクトルとして取り扱うことによって、比較の精度が改善されたものと考えられる。

次に図-6・5を検討すれば、両幹曲線式ともに幹軸上根元に近い部分、中央部及び梢端側に於てバイアスが生じている。このバイアスを分析するために、幹軸上3箇所、すなわち第1相対高（根元部分）、第5相対高（中央部分）および第9相対高（梢端部分）に対して、バイアスの正負発生頻度を、符号検定を適用して考察した。全林木70本についての結果が表-6・4に示される。表中、+印は過大評価を、-印は過小評価を表す。数値はその本数である。数値にはバイアスがゼロのものは±0.5で振り分けたので小数が生じている。

表-6・4 樹幹形のバイアス

幹軸上の部分 相対高	根元 0.1		中央 0.5		梢端 0.9	
	+	-	+	-	+	-
提案式1	22	48	22	48	47	23
提案式2	20	50	41.5	28.5	56.5	13.5

[註] ____ : 有意差なし, 他はすべて有意な差あり

この表によれば提案式1, 2とも根元部分において過小評価, 梢端部分において過大評価となっている。中央部分については提案式2の適合は良好で提案式1の場合はマイナスのバイアスが生じている。MUNRO and DEMAERSHALK (1974) は変曲点のない幹曲線式は根元では過小評価, 上部では過大評価となる傾向があるとしている。この研究においても上の傾向は指摘どおりの結果である。ただし $m < 1$ の樹幹形があるとすれば、その場合のバイアスの傾向については、勿論今後の検討課題である。

この研究における最小自乗法について、提案式1については、すべてのパラメータを同時に決定することが不可能であったので直径の上限値として300 cmを与えた。このような値は調査現地には観測されなかったが、究極的に達する直径としては、それほど不自然な値ではないと考えられる。一方、提案式2については、パラメータの同時決定がほぼ可能であったが、不可能の場合もあった。パラメータの同時決定が不可能であった林木については、樹高の極限值を極端な値、たとえば500 mなどとしなければならなかった。HL 04 No. 1はその例である。通常パラメータが求まった例として、HL 05 No. 1 すなわち図-6・5(b)のパラメータを表-6・5に掲げる。

表-6・5 パラメータの値
(HL04 No. 1)

幹曲線式	a	m	H (m)	D (cm)
提案式1	—	0.01847	18.47	300
提案式2	0.5291	8.44	27.09	—

第5節 まとめ

樹幹形提案式1は、樹高生長、直径生長ともに MITSCHERLICH の過程に従うという仮定のもとに導かれた、生長理論にもとづく最初の幹曲線式であった。しかし、この樹幹形は林齢が無限大に達したとき樹幹形が方形となるという問題点をもっている。これは樹高生長と直径生長とが独立という暗黙の仮定にもとづいていたからである。

これに対して、新しく提案された樹幹形は林齢を無限大としたときの究極の幹曲線を線形の細りをもつ樹幹形、すなわち予め極限の幹曲線を三角形として仮定して構成したものである。この仮定によりある年度の幹軸から発生する直径生長速度とその断面高におけるその年度の樹高生長速度の比をとると、その比は細りの係数と、直径生長係数・樹高生長比との積になっていることがわかる。すなわち直径生長と樹高生長とに関連がつけられたのである。

提案された幹曲線式、すなわち提案式2の性格について、このモデルが上に凸の幹形であるだけでなく、三角形および下に凸の場合も表現できる。すなわち、樹高生長係数と直径生長係数の値に関して、もし直径係数の方が樹高生長係数よりも大きいならば、樹幹形は上に凸（完満）である。もし小さいならば、梢端は下に凸（梢殺）となる。またもし両者が等しいならば、樹幹形は直線（円錐）となる。以上の点は、提案式1と著しく異なる点である。

提案された2つの幹曲線式を現実の樹幹形に適用した結果は残差平方和によっても、相違度によっても満足できる値をえたが提案式2の方がより優れた結果を示した。幹軸上の3つの部分におけるバイアス傾向は、根元部分でマイナス、梢端部分ではプラスのバイアスが両式ともに生じた。この傾向は、現実に三角形よりも完満な樹幹形に対して、一般的に指摘されているところのものと考えられる。提案式2の場合は、中央部合については有意なバイアスは認められなかった。

以上を総合して、提案式2の優位性がほぼ確認された。提案式1よりも一歩進んだ理論性をもっているから、広く適用した場合に決定的な過誤を招くことはないものと考えられる。

第7章 総括

この論文は、樹幹形を合理的に表現する方法について理論的に考究したものである。

この研究において取り扱われた樹幹形表現の方法は、モーメントによる表現方法、モーメントとかかわりのある近似理論にもとづく表現方法および生長過程論にもとづく表現方法である。幹曲線式あるいは樹幹形は、単なる当てはまりの良否よりも何等かの理論的根拠にもとづいて誘導されることが前提条件であると考ええる。

この論文で取り扱っていないものに力学的あるいは物理学的理論にもとづく誘導がある。これは重要なアプローチではあるが、樹幹形表現のためには、いまなお研究の蓄積が必要な側面である。

第3章におけるモーメントによる樹幹形の表現に関して、いわゆるモーメント問題によって、モーメントと樹幹形の1対1の対応にもとづく論議は樹幹形の研究において、基本的な重要課題である。樹幹形を統計学的観点から分布として取り扱えばモーメント問題によりモーメントで樹幹形を完全に表現できる。これにより各次のモーメントによって樹幹形の分析ができる。統計におけると同様に1次のモーメント(平均値)、2次モーメント(半径分布の広がり方)など各次のモーメントの値が樹幹形を比較する指標となる。樹幹形を幹軸上 n 個に区分し、半径を離散点のみに定義し、また梢端の半径をゼロと定義すれば、 $n-1$ 個の多項式としての樹幹形表現式がえられ、各係数がモーメントによって決定される。なお、林木が単木でなく集団であるならば、その集団としての樹幹形は各林木についての各次のモーメントの各々の全林木についての期待値で表示してよいことが示された。低次のモーメントによって樹幹形のほとんどを把握し、または表示する試みとしてCHARLIERの直交関数系展開による樹幹形表現について検討した。4次までのモーメントによって十分な近似がえられた。しかし、半径を対象とした場合に表現された樹幹形に若干ながらクビレを生じた。もう一つの問題として梢端において半径がゼロにならなかったことである。すべての直交関数による樹幹形展開式の係数はその項の次数以下のモーメントにもとづいて計算されるから、樹幹形の比較は展開式の係数の大きさによって行うこともできる。またそれぞれの次数の直交関数の図を参照しながら、それぞれの項の効果を視察することができる。

第4章と第5章は正規直交多項式による樹幹形表現の問題を扱った。

前者は樹幹形を離散関数とした場合であり、後者は樹幹形を連続とした場合である。両章を通じて、正規直交関数系による樹幹形表現の意義が明確にされた。その理論を検討する過程で、離散と連続の両者について離散的樹幹形正規直交多項式系および連続樹幹形正規直交多項式系を誘導した。以下に樹幹形を離散的とした場合の正規直交関数系を導入する利点を整理する。樹幹形を正規直交多項式系により展開したことは、樹幹形を展開式の各項に直交分解したことを意味するから、展開式の各項の係数はその次数の直交関数が樹幹形を構成するのにどれほど効いているかを示す指標になっている。この係数の値はその項の次数までのモーメントによって計算され、直交性によって互いに他の項の係数と関係なく決定できる。こ

れを樹幹形近似の立場からみると、近似結果について誤差平方和を計算して目的の精度に達していない場合、より高次数の項の係数が低次のそれと独立に求められるから展開式に新しい項を付け足し近似精度を改善できるため、近似が不満足であった場合に、一般の最小自乗法のように最初から近似計算をやり直す必要がなく、必要な項をつけたせばよいという利点がある。なお近似結果は、一般の最小自乗法による場合とまったく同じであるが、一般の場合にはむやみにパラメータの数を大きくすると正規方程式が解けなくなるのに対して、この方法によればその心配はない。正規直交性によって展開式係数の全自乗和は、幹軸上の半径の自乗和と一致するから、各係数の自乗を半径自乗和へ比較すれば、それはその項による構成される樹幹形への寄与率を示すことになる。展開式係数の値とその次数の直交関数の図を照合すれば、各項の直交関数が樹幹形を構成するのに幹軸上のどの部分にどの様に働いているか視覚的によく理解できる。

樹幹形を連続とした場合も、モーメントの計算が積分になること以外の結論は同様である。異なる点は、当然のことながら、定義域が連続に定義されているから、測点以外へ無理のない補間を行うことができる。半径または直径に関する直交展開の場合、その式の自乗の積分による材積の推定値は過小評価になる。この過小評価は常に一方的に生ずるバイアスである点に特に注意を要する。

第6章の生長過程論にもとづいて樹幹形を表現する方法は一つの新しい方向である。生長理論としてはMITSCHERLICHの生長過程を選び樹幹形を誘導した。誘導された提案式1は樹高生長、半径生長ともにMITSCHERLICHの過程にしたがうという仮定のもとに導かれた。この幹曲線式は50本のjack pineに適用した結果は、KUNZE式よりも良好な近似をえたが、このモデルは林齢が無限大に達したとき樹幹形が方形となる問題点をもっている。新しく提案された提案式2は林齢無限大における究極の樹幹形を線形の細りのもの、すなわち三角形と仮定して構成された。この仮定によって林齢が無限大でない時点における樹幹形は、半径生長係数が樹高生長係数よりも大きな場合は上に凸(完満)の樹幹形を、小さい場合は下に凸(梢殺)の樹幹形を、また等しければ三角形(円錐)を表現でき、提案式1よりも柔軟性を持っていることが示されている。ただし、根張りの表現は不可能であるから、提案式1と共に定義域は根張りを除いた上部梢端までである。両式を50年から150年のjack pineに適用した結果は、両者ともに良い適合をしたが、残差平方和および相違度による比較結果によれば提案式2の方が優れていることが示された。係数の数は両者等しいにも拘らず差異が認められたのは提案式2の優位性が示されたものと考えられる。ただし、両式ともに半径の近似値に、根元付近でマイナス、梢端付近でプラスのバイアスが観測された。しかし、これは上に凸で変曲点のない幹曲線に一般的に認められている傾向である。

謝 辞

本研究に関し、研究の当初から今日まで、懇切にして卓越したご指導を賜った当森林経理学講座・鈴木太七教授に対し、深甚の謝意を表す。また、同梅村武夫助教授、堀高夫教授（名古屋大学農学部森林利用学講座）並びに穂積和夫教授（同造林学講座）には、常日頃、本研究について熱心なご指導と激励を賜った、深謝の意を表す。さらに、当講座の末田達彦博士および島根大学農学部林学科・稲田（旧姓山本）充男氏には研究の過程で論議に加わって頂いた。なお東京大学農学部林学科・南雲秀次郎教授からは、本研究に関し、折に触れ適切なご助言を賜った。以上の方々に心から御礼申し上げる。

本論文の研究資料の収集、調整に際しては、名古屋大学農学部付属演習林・弓場譲助教授、北原宣幸教官、山田金二技官、青木重昌技官、今泉保次技官、および同造林学研究室・萩原秋男助教授の諸氏、さらに同森林経理学研究室と同造林学研究室の大学院生・学生諸君に多大のご援助とご協力を頂いた。また、林木資料の一部については、古橋茂人氏のご好意的により提供して頂いた。計算処理にあたっては、当林学科・北川勝弘教官並びに近藤稔教官、田中隆文教官にご教示を頂いた。また、資料処理について、名古屋大学農学部農学科杉山晃氏に一方ならぬご援助を頂いた。これらの方々に厚く御礼申し上げる。

最後に、本研究における計算処理には名古屋大学計算機センターを利用したことを付記する。

引用文献

- ASSMANN, Ernst : The principles of forest yield study. (Waldetragskunde ; translated by Sabine H. Gardiner). 506pp, Pergamon Press, Oxford, 1970.
- BEHRE, C. Edward : Preliminary notes on studies of tree form. *J. For.* **21**: 507-511, 1923
- BIGING, Greg S. : Taper equations for second-growth mixed conifers of Northern California. *For. Sci.* **30**: 1103-1117, 1984.
- BITTERLICH, W : Trigonometrische Funktion für Baumschaftformen. *Allg. Forstzeit.* **87**: 329-330, 1976.
- BRUCE, David., CURTIS, Robert O., and VANCOEVERING, Caryanne. : Development of a system of taper and volume tables for red alder. *For. Sci.* **14**: 339-351, 1968.
- BURKHART, E. Harold and WALTON, Sally Burton. : Incorporating crown ratio into taper equations for loblolly pine trees. *For. Sci.* **31**: 478-484, 1985.
- BYRNE, John C. and REED, David D. : Complex compatible taper and volume estimation systems for red and loblolly pine. *For. Sci.* **32**: 423-443, 1986.
- CAO, Quang V., BURKHART, Harold E. and MAX, Timothy A. : Evaluation of two methods for cubic-volume prediction of loblolly pine to any merchantable limit. *For. Sci.* **26**: 71-80, 1980.
- CHENEY, E. W. : Introduction to approximation theory (近似理論入門. 一松 信・新島 耕一訳). 293pp, 共立出版, 東京, 1977.
- DEMAERSCHALK, J. P. : Converting volume equations to compatible taper equations. *For. Sci.* **18**: 241-245, 1972.
- DEMAERSCHALK, J. P. and KOZAK, A. : The whole-bole system ; a conditioned dual-equation system for precise prediction of tree profiles. *Can. J. For. Res.* **7**: 488-497, 1977.
- FRIES, Joran : Eigenvector analyses show that birch and pine have similar form in Sweden and British Columbia. *For. Chron.* **41**: 135-139, 1965.
- FRIES, Joran and MATÉRN, Bertil : On the use of multivariate methods for the construction of tree taper curves. IUFRO advisory group forest statisticians, Conf. in Stockholm, 33. pp 1965.
- 権 五福・鈴木太七 : 林木の直径生長の変動に関する研究 (I). *日林誌* **55**: 346-351, 1973.
- GOULDING, C. J. and MURRAY, J. C. : Polynomial taper equations that are compatible with tree volume equations. *N.Z. J. For. Sci.* **5**: 313-322, 1976.
- GRAY, H. R. : The form and taper of forest-tree stems. *Imp. For. Inst., Oxf. Inst. Pap.* **32**: 79pp, 1956.
- GROSENBAUGH L. R. : Tree Form : definition, interpolation, extrapolation. *For. Chron.* **42**: 444-457, 1966.
- 一松 信 : 解析学序説 (上). 342pp, 裳華房, 東京, 1963.
- HOHENADL, W. : Neue Grundlagen der Holzmessung. *Forstw. Cbl.* **66**: 55-68, 1922.

- HRADETZKY, Von J. : Spline-Funktionen und ihre Anwendung in der forstlichen For-
schung. Forstw. Cbl. 100: 45-59, 1981.
- 伏見康治 : 確率論及統計論. 488pp, 河出書房, 東京, 1942.
- 伏見康治・赤井 逸 : 直交関数系. 246pp, 共立出版, 東京, 1981.
- 犬井鐵郎 : 球函数・圓禱函数・超幾何函数. 581pp, 河出書房, 東京, 1948.
- 梶原幹弘 : スギ同齡林における相對幹曲線の變動について. 日林誌 54: 340-345, 1972
- KOZAK, A., MUNRO, D. D., and SMITH, J. H. G. : Taper functions and their application in
forest inventory. For. Chron. 45: 278-283, 1969.
- KOZAK, A. and SMITH, J. H. G. : Critical analysis of multivariate techniques for estimating
tree taper suggests that simpler methods are best. For. Chron. 42: 458-463, 1966.
- LARSON, Philip R. : Stem form development of forest trees. For. Sci. Monogr. 5: 1-42,
1963.
- LIU, C. J. : Log volume estimation with spline approximation. For. Sci. 26: 361-369, 1980.
- LIU, C. J. and KEISTER, T. D. : Southern pine stem form defined through principal
component analysis. Can. J. For. Res. 8: 188-197, 1977.
- 前沢完次郎 : 単木の求積法に関する研究. 東大演報 56: 77-212, 1962.
- MAX, Timothy A. and BURKHART, Harold E. : Segmented polynomial regression applied
to taper equations. For. Sci. 22: 283-289, 1976.
- McMAHON, Thomas A. : Size and shape in biology. Sci. 179: 1201-1204, 1973.
- METZGER, K. : Der Wind als massgebender Factor fur das Wachstum der Baume.
Mundener Forstl. 3: 35-86, 1893.
- M'HIRIT, O. and POSTAIRE, J. G. : A nonparametric technique for taper function estima-
tion. Can. J. For. Res. 15: 862-871, 1985
- MUNRO, Donald D. and DEMAERSCHALK, Julien P. : Taper-based versus volume-based
compatible estimating systems. For. Chron. 50: 197-199, 1974.
- 森口繁一・宇田川硅一・一松 信 : 数学公式 III. 310pp, 岩波書店, 東京, 1977.
- 長嶋 郁 : モーメントによる幹形の比較. 日林中支講 15: 10-15, 1967.
- 長嶋 郁 : モーメントによる樹幹形の表現. 日林誌 63: 354-358, 1981.
- 長嶋 郁 : 直交多項式による樹幹形の近似 (I) 半径を離散的関数とした場合. 日林誌 63:
435-441, 1981.
- 長嶋 郁 : 直交多項式による樹幹形の近似 (II) 半径を連続関数とした場合. 日林誌 64:
307-314, 1982.
- 長嶋 郁 : 正規幹形と相對幹形. 日林中支講 32: 13-15, 1984.
- NAGASHIMA, Iku : Stem-form expression for forest management. Proc. IUFRO S4.04
Symp. Forest Manag. Plann. and Managerial Econ. 497-507, Tokyo, 1984.
- 長嶋 郁 : 樹幹形の類似性と相違性. 日林中支論 34: 99-100, 1986.
- NAGASHIMA, Iku, and INADA, Mitsuo : Stem form based on the MITSCHERLICH growth
process. J. Jpn. For. Soc. 69: 10-15, 1987.

- 長嶋 郁・栗田 悟：樹幹形表現に関する生長曲線の検討。日林中支講 33: 43-46, 1985.
- 長嶋 郁・栗田 悟：生長速度比例の生長曲線とその適用。日林誌 69: 77-83, 1987.
- 長嶋 郁・竹内公男：幹曲線の連続なモーメント。日林中支講 16: 218-221, 1968.
- 長嶋 郁・山本充男・松本光朗：幹形ベクトルによる樹幹形の表現と比較。日林誌 66: 353-360, 1984.
- NAGASHIMA, Iku, YAMAMOTO, Mitsuo, and SWEDA, Tatsuo : A theoretical stem taper curve (I). J. Jap. For. Soc. 62: 217-226, 1980.
- 長嶋 郁・山本充男・渡辺 徹：モーメントによる樹幹形の比較。日林中支講 27: 157-160, 1979.
- 長嶋 郁・山本充男・渡辺 徹：直交関数系による幹形の近似—CHARLIER 直交関数系を適用した場合。日林中支講 28: 185-188, 1980.
- Nagoya University (Dept. of For.) : Growth of even-aged jack pine stands-report of Nagoya University boreal forest survey in Canada, 1977. 762pp, 1979.
- 南雲秀次郎・佐藤 健：Mitscherlich 式による森林の生長予測。東大演報 61: 37-102, 1965.
- OOHATA, Sei-ich and SHINOZAKI, Kichiro : A statical model of plant form-Further analysis of the pipe model theory. Jap. J. Ecol. 29: 323-335, 1979.
- 大隅真一：幹形に関する研究 (I) 相対幹形について。日林誌 41: 471-479, 1959.
- 大隅真一：相対材積の概念とその生長。京府大学術報・農学 26: 74-87, 1974.
- ORMEROD, D. W. : A simple bole model. For. Chron. 49: 136-138, 1973.
- PRODAN, M. : Holzmesslehre. 644pp, J. D. Säuerlander's Verlag, Frankfurt am Main, 1965.
- RIESZ, F. and SZ-NAGY, B. : Lecons d'analyse fonctionnelle (秋月康夫・絹川正吉・清原岑夫 (訳) : リース・ナジー関数解析学 (上)). 282pp, 共立出版, 東京, 1973.
- SABOROWSKI, J., SLOBODA, B., and JUNGE, A. : Darstellung von Schaftformen durch kubische Spline-Interpolation und Reduktion der Stutzstellenanzahl. Forstarchiv. 52 Jah. Heft 4: 127-130, 1981.
- SAWYER, W. W. : A first look at numerical functional analysis. 186pp, Oxford U.P., Oxford, 1978.
- 柴田信明：スギの全幹幹曲線式について。日林東北支講 28: 29-31, 1976.
- 篠原能材：数値解析の基礎。385pp, 日新出版, 東京, 1978.
- SLOBODA, B. and SABOROWSKY, J. : Stand taper form as a stochastic process with an example of application. XVII IUFRO World Congr. Proc. (Interdivisional). 137-150, Japan IUFRO Congress Committee, Ibaraki, 1981.
- SPURR, Stephen : Forest inventory. 476pp, Ronald Press, N. Y., 1952.
- 鈴木太七：林木の生長法則・林地肥培効果の評価に関する研究 (長谷川孝三編)。86-109, 林野庁, 1961.
- 鈴木太七・長嶋 郁：CHARLIER の直交関数展開による幹曲線の表現。日林中支講 13: 66-70, 1965.

山本充男・松村直人・鈴木太七：長柱の座屈理論に基づく樹高曲線式について，日林論 95: 89-90, 1984.

吉田正男：測樹学要論，420pp, 成美堂，東京，1930.

Summary

This study is concerned with the expression of stem form in mathematical formulae which had been discussed in terms of theoretical background as the moment problem and the biological growth process (Chapter 1). Research on the stem form is essential in order to estimate of stem volume more accurately and to contribute for the morphology, and numerous efforts have been made in this regard to date. It remains both a traditional problem and forth coming one (Chapter 2). The present study presents two new opinions that will hopefully add to the knowledge provided by traditional stem form research.

First, we may consider a stem form as a vector. When we take the set of diameters at each of 10 positions located equidistantly along the stem axis length, we can define the vector as a very stem form itself, or the stem taper. On the other hand, when we take the stem base as the origin, using the moment system created from the diameters at each of the aforementioned 10 positions, we note that the moment system and the set of diameters are equivalent based on their one-to-one correspondence (Chapter 3).

The problem of stem form redounds to the selection of a stem form model to be applied for the actual stem taper and the method of calculation in employing the model in the approximation. In the present study, we propose that the stem curve be generally expanded in the the FOURIER series using some orthogonal systems. To this end, the CHARLIER orthogonal system was investigated originally, because it was derived from the POISSON distribution resembling the stem form configuration (Chapter 3). Next, the discrete orthonormal system and the LEGENDRE system were revised for stem form expression under the condition that the value is null at the stem canopy (Chapter 4, 5).

Using these functions for stem taper fitting, one can readily determine the coefficients of each term in the orthonormal expansion so as to minimize the square sum of deviations. Moreover, the value of square sum of the coefficients gives precisely the stem volume. Then, if the approximation does not suffice, the fitting will be improved to add a term of higher order. In this case, the coefficient will be independently determined with other coefficients, and this is a great advantage over the ordinal method of least squares (Chapter 4, 5).

Second, some new stem form formulae were derived theoretically based upon the biological growth process. Thus, supposing that the growth in height of stem follows the MITSCHERLICH growth process and the diameter at the canopy on the stem axis starts growing in the horizontal direction just as it does for hight, then one stem form formula may be theoretically constructed, then somewhat revised subsequently. This stem form model is well-suited to the actual stem if coniferous trees except for the butt-swell portion. Although many stem formulae have been reported to date, these new models are

theoretically derived for the first time in terms of the biological process and very simply (Chapter 6).

Key words : Stem form formula, Orthonormal expansion
Growth process.