

基礎励振を受ける並進・傾き連成系の振動* (オートパラメトリック共振と重心高さ, 偏重心, 剛性差の影響)

井上 剛志*¹, 石田 幸男*¹, 山田 晋太郎*²

Vibration of Translation-Inclination Coupled System Under the Periodic Base Motion (Auto-parametric Resonance, and Influences of Height of Center of Mass, Imbalance of Mass and Difference of Stiffness)

Tsuyoshi INOUE*³, Yukio ISHIDA and Shintarou YAMADA*³ Department of Mechanical Science and Engineering, Nagoya University,
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya-shi, Aichi, 464-8603 Japan

The vibration characteristics of the translation motion and inclination motion coupled systems, which is the dynamical models of train, vehicle, and so on, are studied. The nonlinear vibration of such a system subjects to the base periodic displacement is investigated by numerical simulation and theoretical analysis. The occurrence of the auto-parametric resonance at the resonance point of the translational motion is observed when the ratio between the natural frequencies of the inclinational motion and the translational motion is close to 1:2. Also, the occurrence of an almost periodic motion is observed when this ratio is slightly different from 1:2. The occurrence regions of the auto-parametric resonance and the almost periodic motion are discussed. Besides, the influences of discrepancies of the center of mass which produce slight linear coupling terms between the translational motion and the inclinational motion are investigated. Furthermore, these theoretical results are confirmed by the experiment.

Key Words: Nonlinear Oscillation, Auto parametric Resonance, Bifurcation, Unstable Region

1. はじめに

鉄道や車などの交通車両やばね支持された除振台, 高層建築ビルなどの1つのモデルとして, 質量を持つ物体の両側をばねで鉛直支持された並進・傾き連成系を考える. 最近の機械構造物は軽量化されているため, たとえば鉄道車両における冷房装置のように付加構造物が高い位置に設置される場合などには, 相対的に重心位置が支持位置よりもかなり高い位置になる.

この系で, 重心が支持点間の中央鉛直線上にあり, かつ支持剛性特性が等しい場合には, 鉛直方向の運動と傾き運動は線形では連成せず, 非線形項を通じて連成する系となる. このような系の振動特性については, 藪野ら⁽¹⁾や吉沢ら⁽²⁾⁽³⁾が両端を永久磁石で支持された構造物について調べて報告しているが, これらは主に磁石の非線形性の影響に着目したものであり, 重心位置が比較的低い場合である. また, このような系において傾き運動と鉛直並進運動の固有振動数の間に

1:2の内部共振の関係があるときにはオートパラメトリック共振⁽⁴⁾⁻⁽¹¹⁾の発生が報告されており, オートパラメトリック動吸振器⁽⁷⁾⁻⁽¹⁰⁾, 非線形アクティブ制御⁽¹¹⁾などの応用も行われている. しかし, 交通車両などでは固有振動数比は重心高さなどにより様々に変化するのに対し, 比が1:2からずれたときの振動の変化を解析と実験で調べてまとめたものはほとんどない.

さらに, 一般の交通車両では乗客の乗車位置により重心位置の偏りが生じ, 系の鉛直運動と傾き運動の間に線形連成が生じるようになる. これまでに, この線形連成の大きさをパラメータとして, オートパラメトリック共振からの遷移現象は明らかにされていない.

本研究では, 図1(a)に示すような重心位置が支持点よりも比較的高い位置にある機械構造物に着目し, このモデルに鉛直方向に強制変位加振を加えたときの振動特性を非線形解析により調べる. 特に, 重心位置を広い範囲で変化させてオートパラメトリック共振の発生の有無と発生範囲を明らかにする. また, 偏重心量や支持剛性差もパラメータとして着目し, 線形連成の影響を明らかにする. さらに, 実験装置を製作し,

* 原稿受付 2005年7月15日.

¹ 正員, 名古屋大学大学院工学研究科(☎464-8603 名古屋市千種区不老町).² (株)リコー(☎104-8222 東京都中央区銀座8-13-1リコービル).

E-mail: inoue@nuem.nagoya-u.ac.jp

実験的にもその動特性を調べる。

2. モデル化と運動方程式

図 1(b) に示すような、1つの質点が2つのばねで支持された並進・傾き運動モデルを考える。このとき、質点(重心)位置はばねの支持点を結ぶ線上よりも鉛直上方に位置するとする。質点の質量を m 、中心線 AG からの重心 G_n の偏りを表す偏重心量を e 、AG 間距離を l 、2つのばねのばね定数をそれぞれ k_1 と k_2 、ばね間距離を $2d$ 、ばねの自然長を l_0 とする。

座標系 $O-xy$ において、A 点の鉛直位置を x_a 、 x_a からばね自然長 l_0 を引いたものを x 、AG の傾きを θ 、基礎の鉛直変位を $x_b = a \cos \omega t$ とすると、ばね k_1 と k_2 の伸びはそれぞれ $x - x_b - d \sin \theta$ と $x - x_b + d \sin \theta$ で表される。G 点の座標 (x_m, y_m) と重心 G_n 点の座標 (x_n, y_n) はそれぞれ、 $x_m = x + l_0 + l \cos \theta$ 、 $y_m = l \sin \theta$ 、 $x_n = x + l_0 + l \cos \theta - e \sin \theta$ 、 $y_n = l \sin \theta + e \cos \theta$ となる。運動方程式は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} - m(l \cos \theta - e \sin \theta) \dot{\theta}^2 \\ - m(l \sin \theta + e \cos \theta) \ddot{\theta} + 2c\dot{x} \\ + k_1(x - x_b - d \sin \theta) + k_2(x - x_b + d \sin \theta) \\ = -mg, \\ m(\ell^2 + e^2) \ddot{\theta} - m(l \sin \theta + e \cos \theta) \ddot{x} + 2cd^2 \dot{\theta} \\ - k_1 d \cos \theta (x - x_b - d \sin \theta) \\ + k_2 d \cos \theta (x - x_b + d \sin \theta) \\ = mg(l \sin \theta + e \cos \theta). \end{aligned} \right\} (1)$$

以下の理論解析に用いる各物理量は、以下の値を用いる。そして、質点位置 l と偏重心量 e をパラメータとして動特性を調べる。

$$\left. \begin{aligned} m = 1.6 \text{ kg}, \quad d = 0.1 \text{ m}, \quad g = 9.80 \text{ m/s}^2 \\ k_1 = 4600 \text{ N/m}, \quad k_2 = 4600 \text{ N/m}, \\ c = 1.0 \text{ Ns/m}, \quad a = 0.001 \text{ m} \end{aligned} \right\}$$

$k_1 = k_2 = k$ のときの静たわみ $\delta_{st} = mg/(2k)$ を代表長さ、並進運動の固有振動数 $p_0 = \sqrt{(k_1 + k_2)/m}$ を代表周波数として用い、無次元化を行う。

$$\left. \begin{aligned} t' = tp_0, \quad \omega' = \omega/p_0, \quad x' = \frac{x}{\delta_{st}}, \\ g' = \frac{g}{p_0^2 \delta_{st}}, \quad e' = \frac{e}{\ell}, \quad x'_b = x_b/\delta_{st}, \\ d'_1 = \frac{\ell}{\delta_{st}}, \quad d'_2 = \frac{\ell \delta_{st}}{\ell^2 + e^2}, \quad d'_3 = \frac{d^2}{\ell^2 + e^2}, \\ \Delta k'_x = \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} \cdot \frac{d}{\delta_{st}}, \quad \Delta k'_\theta = \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} \cdot \frac{d \delta_{st}}{\ell^2 + e^2}, \\ c'_x = \frac{2c}{\sqrt{m(k_1 + k_2)}}, \quad c'_\theta = \frac{2cd^2}{(\ell^2 + e^2) \sqrt{m(k_1 + k_2)}} \end{aligned} \right\} (2)$$

記号'を省略し、 t' による微分を改めて記号'を用い

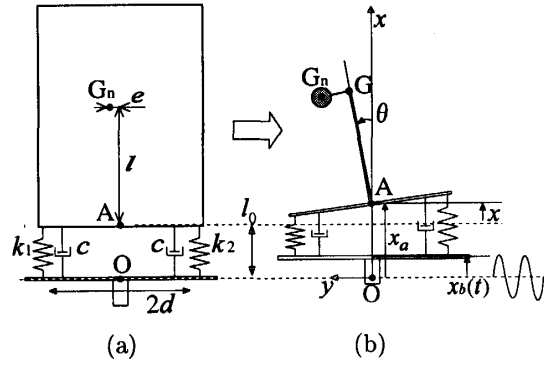


Fig. 1 Theoretical model

て表すと、無次元化された運動方程式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + c_x \dot{x} + g + x - x_b + \Delta k_x \sin \theta \\ - d_1 \{ (\cos \theta - e \sin \theta) \dot{\theta}^2 + (\sin \theta + e \cos \theta) \ddot{\theta} \} = 0 \\ \ddot{\theta} + c_\theta \dot{\theta} - d_2 (\sin \theta + e \cos \theta) (1 + \ddot{x}) \\ + \Delta k_\theta \cos \theta (x - x_b) + d_3 \sin \theta \cos \theta = 0 \end{aligned} \right\} (3)$$

ここで、 $\Delta k_x, \Delta k_\theta$ はばね k_1 と k_2 の間の剛性差によって生じる係数であり、 e は重心の偏りを表す項である。この系は、支持ばね間の剛性差および偏重心が無く ($\Delta k_\theta = \Delta k_x = e = 0$)、固有振動数比が 1:2 のときにオートパラメトリック系となる。なお Tondl⁽⁴⁾ は、系がつぎの条件を満たす時、その系はオートパラメトリック系であると定義している。

- (1) 系が励振される副系と励振されない副系で構成。
- (2) 励振される副系の変位量を y_i 、励振されない副系の変位量を ϕ_j とすると、準自明解 (Semi-trivial solution) ($y_i \neq 0, \phi_j = 0$) がいつでも存在する。
- (3) 準自明解はある特定の条件下において不安定解となる。この不安定解の領域においてオートパラメトリック共振 ($y_i \neq 0, \phi_j \neq 0$) が発生する。
- (4) 励振される副系の励振の種類は問わない。

3. 重心の高さの影響

支持ばね間の剛性差および偏重心が無い場合 ($\Delta k_x = \Delta k_\theta = e = 0$) を考え、重心の高さの影響を調べる。特に、固有振動数比が 1:2 となる重心高さの値周辺に着目して調べる。この場合は、並進・傾き連成系は準自明解 ($x \neq 0, \theta = 0$) を持つ系となり、運動方程式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + c_x \dot{x} - d_1 (\cos \theta \dot{\theta}^2 + \sin \theta \ddot{\theta}) + g + x = a \cos \omega t \\ \ddot{\theta} + c_\theta \dot{\theta} - d_2 (1 + \ddot{x}) \sin \theta + d_3 \sin \theta \cos \theta = 0 \end{aligned} \right\} (4)$$

準自明解の解析を行う。上下振動解 x , 傾き振動解 θ をつぎのように仮定する。

$$\begin{cases} x = A_x + P_x \cos(\omega t + \alpha) \\ \theta = A_\theta + R_\theta \cos\left(\frac{1}{2}\omega t + \delta\right) \end{cases} \quad (5)$$

$P_x, R_\theta, A_x, A_\theta, \alpha, \delta$ はそれぞれ緩やかに変化する時間の関数とする。解析において、微小量を表すパラメータ ϵ を導入し、 ϵ と同程度の大きさを $O(\epsilon)$ と表す。したがって、たとえば、 $\dot{P}_x = O(\epsilon)$, $\ddot{P}_x = O(\epsilon^2)$ となる。なお、運動方程式中の三角関数 $\sin \theta$ と $\cos \theta$ については、運動方程式 (3) を用いた数値シミュレーションにおける θ の運動範囲を確認し、その範囲で十分に精度良く近似できる 3 次のテイラー展開近似を用いる。仮定した解 (5) を式 (4) に代入し、つぎのように Van der Pol の方法⁽¹²⁾ を用いて解析する。第 1 式の $\sin \omega t$, $\cos \omega t$ 成分の各係数、第 2 式の $\sin(1/2)\omega t$, $\cos(1/2)\omega t$ 成分の各係数および第 1 式と第 2 式の定数成分を $O(\epsilon)$ 精度でそれぞれ等置することにより、つぎの 6 個の式からなる基礎式を得る。

$$\left. \begin{aligned} 0 &= f_1(\dot{P}_x, \dot{R}_\theta, \dot{A}_x, \dot{A}_\theta, \dot{\alpha}, \dot{\delta}, P_x, R_\theta, A_x, A_\theta, \alpha, \delta), \\ &\vdots \\ 0 &= f_6(\dot{P}_x, \dot{R}_\theta, \dot{A}_x, \dot{A}_\theta, \dot{\alpha}, \dot{\delta}, P_x, R_\theta, A_x, A_\theta, \alpha, \delta). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

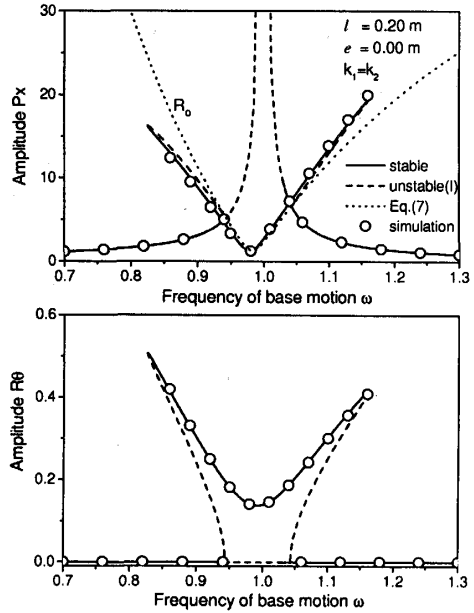
定常解 $P_{x0}, R_{\theta 0}, \alpha_0, \delta_0, A_{x0}, A_{\theta 0}$ は、式 (6) の微分項 $\dot{P}_x, \dot{R}_\theta, \dot{\alpha}, \dot{\delta}, \dot{A}_x, \dot{A}_\theta$ を 0 とおいた式を解くことで求まり、得られた解の安定性は Hurwitz の安定判別法を用いて判別する。固有振動数比が 1:2 の場合 (重心高さ $l = 0.20$ m) について、上下運動 x の ω 成分の振幅 P_x と傾き運動 θ の $\omega/2$ 成分の振幅 R_θ の解析結果を図 2(a) に示す。実線は安定解、破線は安定判別の特性方程式の係数のいずれかが負となる不安定解 (以下、不安定解 I とする) を示す。

Tondl ら⁽⁴⁾ はこのような系の準自明解 ($x \neq 0, \theta = 0$) からのオートパラメトリック共振を調べている。Tondl らが用いた方法を適用すると、不安定領域を表す境界曲線 R_0 は次式となる。

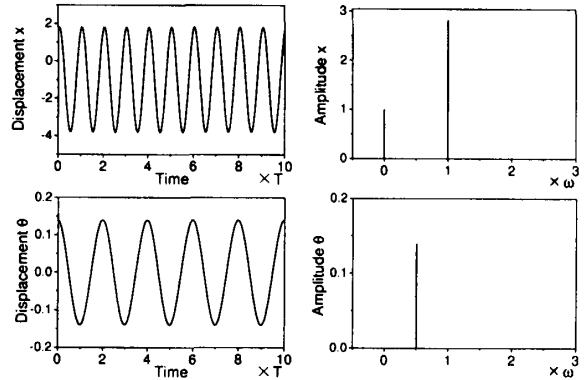
$$R_0 = \frac{2}{d_2 \omega^2} \sqrt{\left(d_3 - d_2 - \frac{\omega^2}{4}\right)^2 + \frac{c_\theta^2 \omega^2}{4}} \quad (7)$$

式 (7) で求めた境界線 R_0 も図中に点線で重ねて示す。

○ は数値シミュレーションにより得られた定常解を示す。なお、数値シミュレーションには Fortran を使用し、数値積分には富士通のサブルーチンパッケージ SSL2 の刻み幅制御および次数制御付きのアダムス法サブルーチン odam を用いている。このサブルーチンは、予測子計算に Adams-Bashforth の公式を、修



(a) Resonance curve



(b) Time history and spectrum at $\omega = 1.0$

Fig. 2 Case with $\Delta k_x = \Delta k_\theta = e = 0, l = 0.2$ m (auto-parametric system with 1:2 natural frequency ratio)

正子計算に Adams-Moulton の公式を用い、予測・評価・修正・評価 (PECE 法) を行うものである。シミュレーションの時間刻み幅は外力周期 $T = 2\pi/\omega$ を 2^8 分割、要求精度は無次元量を 1 としたときの大きさと誤差 1.0^{-6} 以内として行う。実際の時間刻みは指定精度が満足されるようにサブルーチン内で自動的に時間刻みがなされている。

この $\omega=1.0$ における並進運動と傾き運動の時刻歴とスペクトルを図 2(b) に示す。この時刻歴の横軸は、外力周期 $T = 2\pi/\omega$ の 10 周期分を示している。傾き運動が外力周波数の 1/2 で振動するオートパラメトリック共振が発生していることがわかる。

重心位置をわずかに低くし、 $l = 0.18$ m とした場

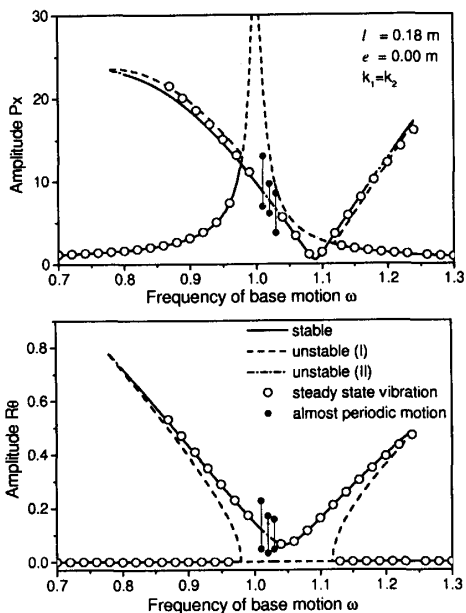


Fig. 3 The Influence of center of mass on the auto-parametric resonance

合の共振曲線を図3に示す。図中において、鎖線は特性方程式の係数は全て正であるが Hurwitz 行列式が負である場合の不安定解（以下、不安定解IIとする）を示す。図2の場合と異なり、オートパラメトリック共振解の振幅 P_x の極小位置が高周波数側にずれ、 $\omega = 1.02$ 付近と $\omega = 1.18$ 付近において、不安定解IIが発生する。●はこの不安定領域において数値シミュレーションにより得られた概周期運動⁽³⁾⁽⁶⁾の振幅の最大値あるいは最小値を示している。このような概周期運動については、本研究で考えるような2自由度並進・傾き連成系では磁気浮上系で吉沢ら⁽³⁾が理論解析と実験で観察しており、また、オートパラメトリック系としては、たとえば池田ら⁽⁶⁾が液体容器の構造・液体連成系において概周期運動とカオス振動の発生を理論解析と実験で観察している。図2と図3から、上下振動 x 、傾き振動 θ ともにオートパラメトリック共振の振幅、発生範囲が精度良く解析できていることが確認できる。

4. 偏重心の影響

偏重心 e やばね間の剛性差 $\Delta k_\theta, \Delta k_x$ を持つ場合を調べる。振動解をつぎのように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} x &= A_x + P_x \cos(\omega t + \alpha) + R_x \cos\left(\frac{1}{2}\omega t + \gamma\right) \\ \theta &= A_\theta + P_\theta \cos(\omega t + \beta) + R_\theta \cos\left(\frac{1}{2}\omega t + \delta\right) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$P_x, P_\theta, R_x, R_\theta, A_x, A_\theta, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ はそれぞれ緩やかに変化する時間の関数とする。仮定した解(8)を式(3)に代入し、それぞれの式の定数成分および $\sin \omega t, \cos \omega t, \sin(1/2)\omega t, \cos(1/2)\omega t$ の各係数を $O(\epsilon)$ の精度で等置し、つぎの10個の式からなる基礎式を得る。

$$\left. \begin{aligned} 0 &= g_1(\dot{P}_x, \dot{P}_\theta, \dot{R}_x, \dot{R}_\theta, \dot{A}_x, \dot{A}_\theta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\delta}, \\ &\quad P_x, P_\theta, R_x, R_\theta, A_x, A_\theta, \alpha, \beta, \gamma, \delta) \\ &\vdots \\ 0 &= g_{10}(\dot{P}_x, \dot{P}_\theta, \dot{R}_x, \dot{R}_\theta, \dot{A}_x, \dot{A}_\theta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\delta}, \\ &\quad P_x, P_\theta, R_x, R_\theta, A_x, A_\theta, \alpha, \beta, \gamma, \delta) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

定常解 $P_{x0}, P_{\theta0}, R_{x0}, R_{\theta0}, A_{x0}, A_{\theta0}, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$ は、上式の微分項 $\dot{P}_x, \dot{P}_\theta, \dot{R}_x, \dot{R}_\theta, \dot{A}_x, \dot{A}_\theta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \dot{\delta}$ を0と置くことで求まる。また、得られた解の安定性は、前節と同様、Hurwitzの安定判別法を用いて判別する。

4.1 偏重心量が小さい場合 図2の状態から重心を少しずつ偏らせて調べた。その中で、 $e = 0.04$ mの場合の理論解析と数値シミュレーション結果を図4に示す。図2や図3と異なり、傾き振動 θ の ω 成分 P_θ が常に発生する。また、 $\omega = 1.0$ 付近では、上下振動 x については ω 成分に加えて $(1/2)\omega$ 成分が小さく発生し、傾き振動 θ については $(1/2)\omega$ 成分に加えて ω 成分が小さく発生する特徴を持つ共振現象が発生する。さらにその共振曲線の安定分枝の $\omega = 1.0$ 付近で不安定解IIが発生し、数値シミュレーションでは概周期運動が発生するようになる。本論文ではこのような共振も図2におけるものの遷移現象であることからオートパラメトリック共振として扱うこととする。

図4の $\omega = 1.05$ における定常振動と $\omega = 1.0$ における概周期運動の時刻歴とスペクトルを図5に示す。定常振動においても、上下振動 x に ω 成分と定数成分に加えて $(1/2)\omega$ 成分と $(3/2)\omega$ 成分が小さく現れ、傾き振動 θ に $(1/2)\omega$ 成分に加えて ω 成分が小さく現れる。これらの成分はそれぞれ、上下振動 x と傾き振動 θ が線形連成を介してお互いに影響して発生する成分である。図5(b)の概周期運動では、スペクトルにおいて図5(a)の定常振動の主要成分のまわりにサイドバンド成分が大きく発生し、時刻歴では振幅が大きな時間周期で変動する様子が得られる。

4.2 偏重心量が大きい場合 偏重心量をさらに大きくし、 $e = 0.1$ mとする場合の解析と数値シミュレーション結果を図6に示す。ただしこのときは $(1/2)\omega$ 成分の R_x と R_θ は常に0となったため、 ω 成分のみ示す。偏重心量 e が大きくなることで傾き振動の共振点が $\omega_\theta = 0.42$ 付近、上下振動の共振点が $\omega_x = 1.15$ 付近に移動したため、上下振動の共振点 ω_x

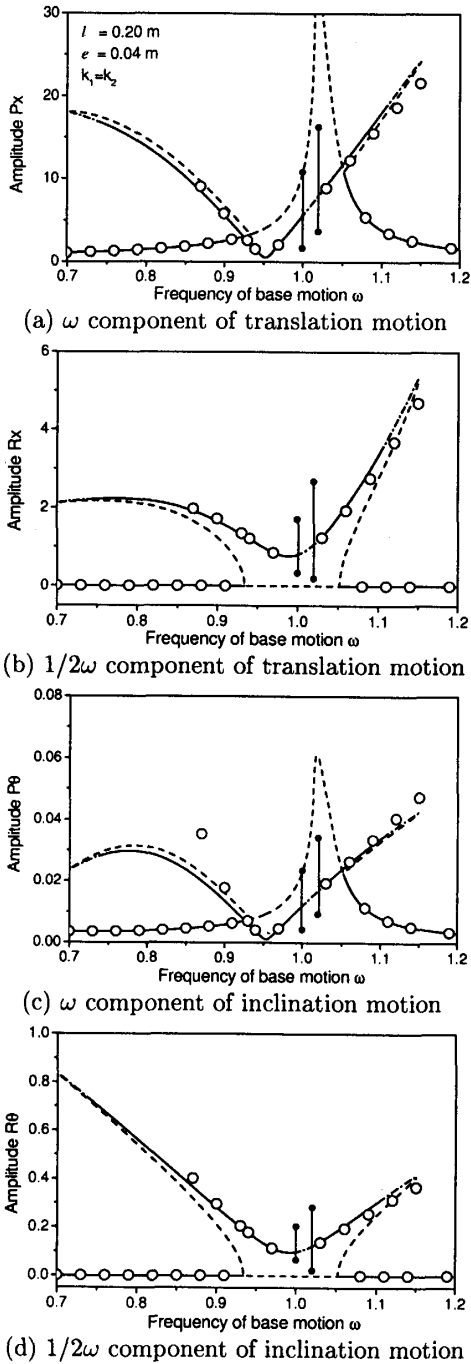


Fig. 4 The influence of e on the auto-parametric resonance (Case with $e = 0.04\text{m}$)

付近でオートパラメトリック共振が発生しない。

以上の数値シミュレーションと理論解析結果から、偏重心量が並進・傾き連成系に与える影響をまとめる。

- 並進・傾き連成系が偏重心量を持つ場合には準自明解 ($P_x \neq 0, P_\theta = 0$) は存在せず、常に ω 成分の上下、傾き振動が発生する。

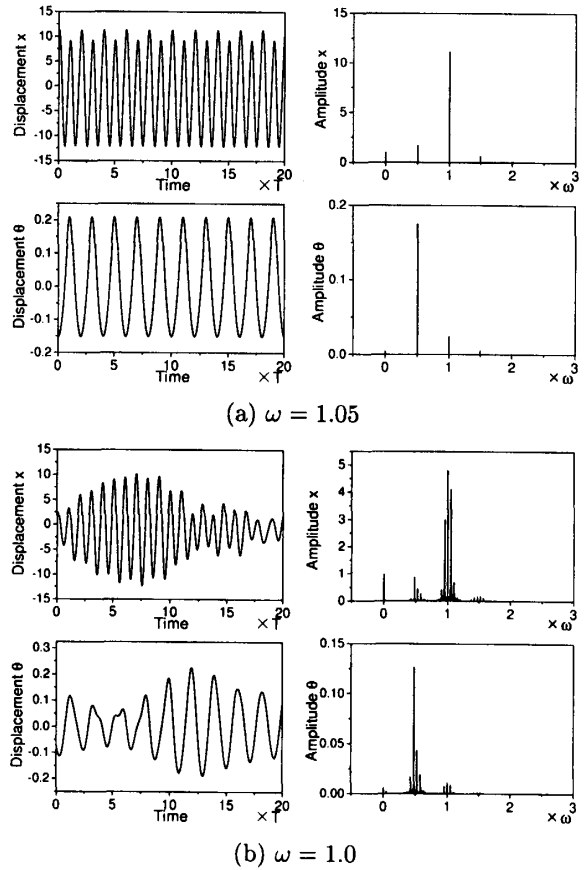


Fig. 5 Vibration of the system with almost 1:2 natural frequency ratio ($e=0.04\text{ m}$)

- 偏重心量が小さい範囲ではオートパラメトリック共振に近い共振現象が発生し、上下運動と傾き運動のどちらにも ω 成分、 $1/2\omega$ 成分が発生する。
- 偏重心量 e が小さいある範囲の値の場合には不安定解 II の発生による概周期運動が発生する。

なお、ここでは示していないが、ばね間の剛性差の影響についても同様に調べた結果、偏重心 e の影響と定性的に同様な影響を与えることも確認した。

5. オートパラメトリック励振の発生範囲

3節で重心位置の影響を調べ、固有振動数比が 1:2 に近い場合にオートパラメトリック共振において不安定解 II の発生による概周期運動が発生することを明らかにした。

ここでは、図 2 における $P_\theta \neq 0$ の振動に着目し、オートパラメトリック共振と概周期運動の発生範囲を固有振動数比をパラメータとして数値シミュレーションにより調べた結果を図 7 に示す。横軸は励振周波数 ω 、縦軸は上下振動 x の固有振動数 p_x と傾き振動 θ の固有振動数 p_θ の比を表し、図中の \circ がオートパ

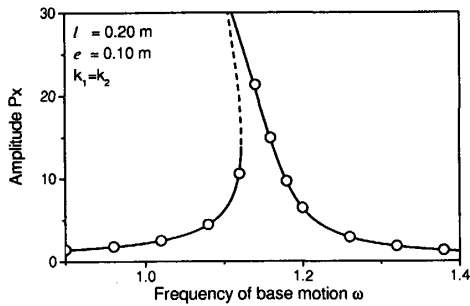


Fig. 6 The influence of e on the auto-parametric resonance (Case with large e)

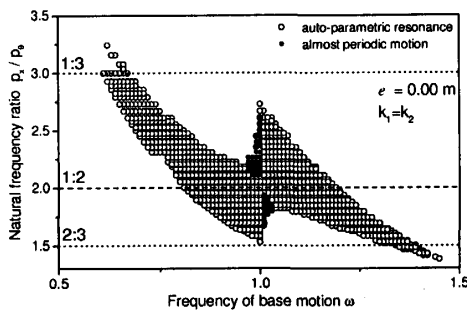


Fig. 7 Map of the occurrence ranges for the auto-parametric resonance and almost periodic motion

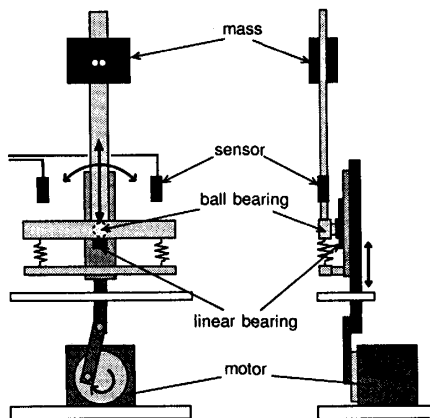


Fig. 8 Experimental setup

ラメトリック共振の発生, ● が概周期運動の発生を示す. 図7は偏重心 $e=0$ および剛性差 $\Delta k_x=0, \Delta k_\theta=0$ で, ばね間の距離 d と重心高さ l の比を変えることにより, 固有振動数比 p_x/p_θ を変化させた場合のものである. この図から, 固有振動数比に対するオートパラメトリック共振と概周期運動の発生範囲と固有振動数比の関係が明らかになり, 概周期運動は固有振動数比が1:2からわずかにずれたときに励振周波数 $\omega = 1$ の近傍で発生することや, 固有振動数比が1:2からずれるとオートパラメトリック共振の発生範囲が少しず

つ減少していくことがわかる. 著者らは既報⁽¹³⁾の回転軸系の内部共振の場合でも, 固有振動数比がわずかにずれたときに概周期運動が発生し, 固有振動数比がさらにずれるにつれて少しずつ内部共振の影響が弱まることを確認している. このオートパラメトリック共振も内部共振の関係を有する系の一種であるため, 並進と傾きの非線形連成を通じてのエネルギー授受がある. したがって, 固有振動数比のずれに伴ってその連成が既報⁽¹³⁾と同様に少しずつ弱まり, その結果, 概周期運動とオートパラメトリック共振の発生範囲の現れ方が図7のようになると考えられる.

6. 実験装置

実験装置の概略を図8に示す. 質量1kgのステンレス製の重りを長さ350mmの中空のアルミ部材に取り付けたものを, ばね定数 k_1 と k_2 のばねで2点支持する. このとき, 重りの取り付け位置 l は140~320mmの範囲で10mm間隔で可変であり, 回転中心から左右のばねまでの距離 d は50~130mmの範囲で10mm間隔で可変である.

リニアベアリングとボールベアリングを組み合わせ, 上下および傾き方向のみに拘束して支持する. 加振機構は, 0.2~30.0Hzの範囲で回転速度を制御できるACサーボモーターの回転運動をクランク機構を介して上下運動に変え, 実験機に下方から強制上下変位加振する. モータ位置におけるクランク機構のアーム長さが, 強制変位加振振幅 a となる. 上下振動 x と傾き振動 θ はレーザ変位センサを2つ用いて測定する. この装置の各設定値を示す.

$$\left. \begin{aligned} m &= 1.7\text{kg}, d = 0.1\text{m}, k_1 = k_2 = 4.6 \times 10^3 \text{N/m} \\ a &= 0.5 \times 10^{-3}\text{m}, \delta_{st} = 1.8 \times 10^{-3}\text{m} \end{aligned} \right\}$$

7. 実験

理論解析と同様, 重りの位置 l と偏重心量 e をパラメータとし, 重心の高さと偏重心の影響を調べた.

7.1 重心の高さの影響 まず $l = 0.12\text{m}, e = 0.0\text{m}$ としたときにオートパラメトリック共振が発生しないことを確認した後に, 重りの高さを調整して $l = 0.21\text{m}$ として実験を行った. その場合の共振曲線を図9(a)に示す. このときの固有振動数は $p_\theta = 5.88\text{Hz}$ と $p_x = 11.63\text{Hz}$ であり, 固有振動数比はほぼ1:2である. 上下振動 x の共振点付近において傾き振動 θ も大きく振動するオートパラメトリック共振が発生している. また, 強制変位加振が $\omega = 12.17\text{Hz}$ の時の時刻歴およびスペクトルを図9(b)に示す. 時刻歴から, 上下振動 x は ω 成分, 傾き振動 θ は $1/2\omega$ 成分がほぼ支配的な成分であることが確認できる.

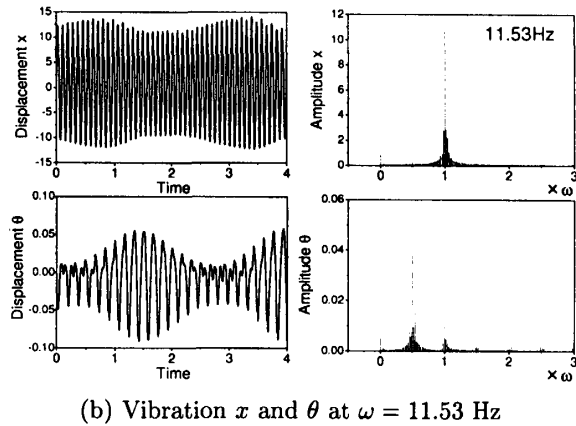
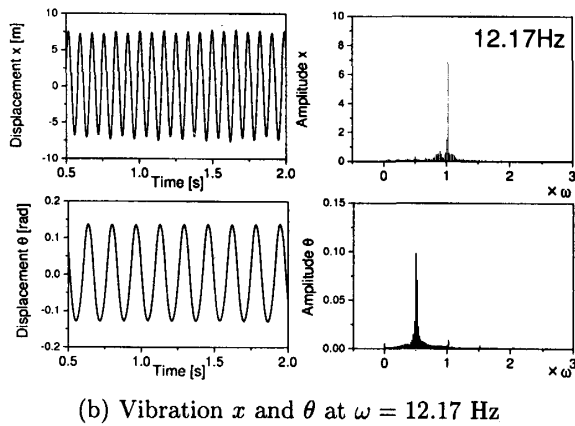
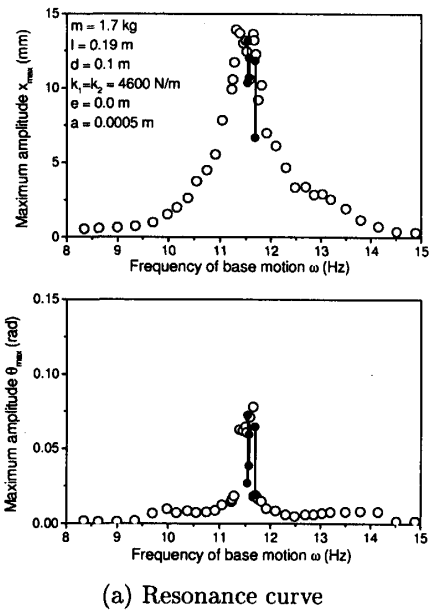
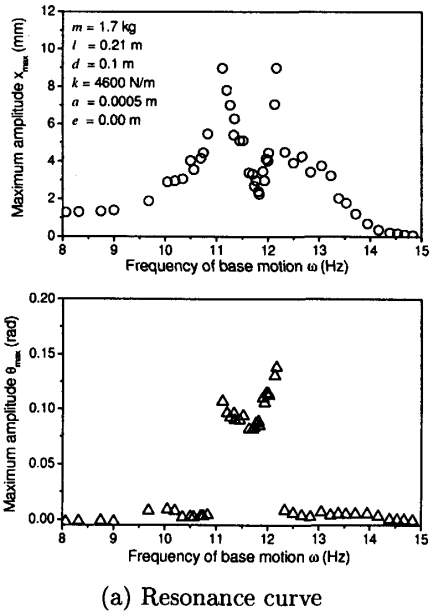


Fig. 9 Case with $e=0.0m$, $k_1=k_2$, auto-parametric system with $l=0.21m$; Experiment

Fig. 10 Case with $e=0.0m$, $k_1=k_2$, $l=0.19m$; natural frequency ratio is almost 1:2; Experiment

つぎに、重りの高さを $l = 0.19$ m とわずかに変化させることにより、固有振動数比を 1:2 からすこしずらした場合の実験結果の共振曲線を図 10(a) に示す。図 9(a) と同様にオートパラメトリック共振が発生し、さらに $\omega = 11.5$ Hz 付近において概周期運動が発生した。強制変位加振が $\omega = 11.53$ Hz の時の概周期運動の時刻歴およびスペクトルを図 10(b) に示す。これらの重心高さの影響に関する実験結果は、理論解析結果の図 2 と図 3 と定性的に一致している。

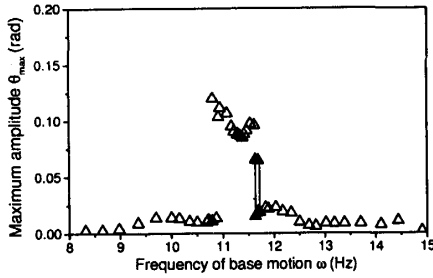
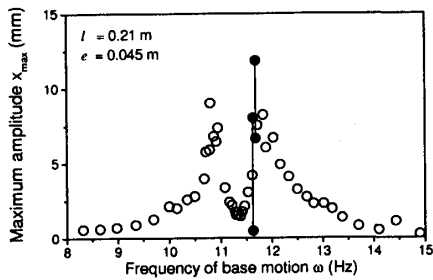
7.2 偏重心の影響 並進・傾き連成系の傾き振動 θ と上下振動 x の固有振動数比が 1:2 である図 9 の設定から偏重心量 e を少しずつ変化させて実験を行い、偏重心の影響を調べた。図 11(a) に $e = 0.045$ m の場合の共振曲線を示す。このときの固有振動数は

$p_x = 11.42$ Hz と $p_\theta = 5.50$ Hz である。図 9 の場合と違い、上下振動の共振点付近において概周期運動の発生が確認された。強制変位加振が $\omega = 11.63$ Hz の時の概周期運動の時刻歴とスペクトルを図 11(b) に示す。これらの偏重心の影響に関する実験結果は、理論解析結果の図 4、図 5 と定性的に一致している。

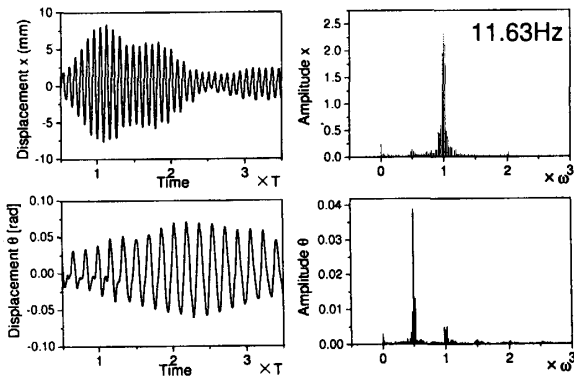
8. 結 論

基礎励振を受ける並進・傾き連成系の振動解析において、とくにオートパラメトリック共振が発生する場合に着目し、重心高さや偏重心、剛性差の影響について調べた結果、以下の結論を得た。

1. 並進・傾き連成系がばね間の剛性差、偏重心量を持たず、かつ傾き振動と上下振動の固有振動数比



(a) Resonance curve

(b) Vibration x and θ at $\omega = 11.63$ HzFig. 11 Case with $e=0.045\text{m}$, $k_1=k_2$, $l=0.21\text{m}$; almost auto-parametric system; Experiment

が $1:2$ である場合にはオートパラメトリック系となり、上下振動の共振点付近において傾き振動に $1/2\omega$ 成分を伴うオートパラメトリック共振が発生する。その共振現象を理論解析し、固有振動数比がずれたときのオートパラメトリック共振の発生範囲を明らかにした。

2. 並進・傾き連成系の支持ばねの剛性差や偏重心量が増加すると線形連成が生じる。その場合も固有振動数比が $1:2$ に近ければ傾き振動に $1/2\omega$ 成分の励振が大きく発生するオートパラメトリック共振が発生することを確認し、その領域を解析により明らかにした。
3. 支持ばねの剛性差や偏重心量がある小さい範囲の場合において、オートパラメトリック共振中に概

周期運動が発生することを確認し、その領域を解析により明らかにした。

4. 固有振動数比の $1:2$ からのずれとオートパラメトリック共振の発生の有無を調べ、広範囲の振動数比において発生することを明らかにした。また、 $1:2$ からわずかにずれたときに概周期運動が発生し易いことも明らかにした。

文 献

- (1) Yabuno, H., et al., Bouncing and Pitching Oscillations of a Magnetically Levitated Body due to the Guideway Roughness, *Journal of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.54, No.508(1988), 2850-2857
- (2) Yoshizawa, M., et al., Nonlinear Oscillation of a Magnetically Levitated Body, *Journal of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.57, No.540(1991), 2518-2523
- (3) Yoshizawa, M., et al., Nonlinear Oscillation of a Magnetically Levitated Body (Unsteady Bouncing and Pitching Oscillations), *Journal of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.59, No.562(1993), 1626-1632
- (4) Tondl, A., et al., Autoparametric Systems with Pendula, Wave Motion, *Intelligent Structures and Nonlinear Mechanics*, 226-238, (1995), World Scientific
- (5) Hatwal, H., et al., Forced Nonlinear Oscillations of an Autoparametric System, *Trans. of ASME, J. of Applied Mech.*, Vol.50(1983), 657-662
- (6) Ikeda, T., and Murakami, S., Autoparametric Resonance in a structure/fluid interaction system carrying a cylindrical liquid tank, *J. of Sound and Vib.*, Vol.285(2005), 517-546
- (7) Haxton, R.S., and Bar, A.D.S., The Autoparametric Vibration Absorber, *ASME J. of Eng. for Industry*, Vol.94, (1972), 119-125
- (8) Yabuno, H., et al., Stabilization of 1/3-Order Subharmonic Resonance Using an Autoparametric Vibration Absorber, *Trans. of ASME, J. of Vib. and Acoust.*, Vol.121(1999), 309-315
- (9) Vyas, A., and Bajaj, A.K., Dynamics of Autoparametric Vibration Absorbers Using Multiple Pendulums, *J. of Sound and Vib.*, Vol.246-1(2001), 115-135
- (10) Cuvalci, O., et al., Non-linear Vibration Absorber for a System Under Sinusoidal and Random Excitation: Experiments, *J. of Sound and Vib.*, Vol.249-4(2002), 701-718
- (11) Queini, S., et al., Analysis and Application of a Nonlinear Vibration Absorber, *J. of Vib. and Cont.*, Vol.6(2000), 999-1016
- (12) Stoker, J.J., *Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems*, JOHN WILEY & SONS, INC., (1950)
- (13) Ishida, Y., and Inoue, T., Internal Resonance of the Jeffcott Rotor: Critical Speed of Twice the Major Critical Speed, *Journal of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.63, No.606(1997), 312-327