

鉛直支持された磁気軸受・剛性ロータ系の非線形振動解析と実験*
(制御力の遅れを考慮した場合)井上 剛志*¹, 石田 幸男*¹, 村上 新*²Nonlinear Vibration Analysis and Experiments
of a Vertical Rigid Rotor-Magnetic Bearing System
(Case Considering the Delay of Control Force)Tsuyoshi INOUE*³, Yukio ISHIDA and Shin MURAKAMI*³ Department of Mechanical Science and Engineering, Nagoya University,
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya-shi, Aichi, 464-8603 Japan

Active magnetic bearings (AMB) become to be widely used in various kinds of rotating machinery. However, as the magnetic force is essentially nonlinear, nonlinear phenomena may occur when the rotating speed becomes higher. In this paper, the magnetic force is modelled considering the 1st order delay in the control current from the control signal, and the AMB force is represented by a power series of the control current and displacement. The nonlinear theoretical analysis of vertical rigid rotor-AMB system is achieved. Then, the effect of the delay of control current and AMB parameters on the nonlinear phenomena is clarified theoretically and experimentally.

Key Words: Vibration of Rotating Body, Magnetic Bearing, Nonlinear Oscillation

1. 序 論

磁気軸受は、摩擦・摩耗がなく、真空中での使用が可能、機械的損失が極めて少ないなど従来の転がり軸受や滑り軸受に比べて優れた特徴を持っているため、さまざまな産業において実用化されており⁽¹⁾⁽²⁾、さらに、振動制御への応用も研究されている⁽³⁾。

磁気吸引力の特性が本質的に非線形であることから、磁気軸受を用いた系では通常の線形解析では解明できない様々な非線形振動現象、例えば、跳躍現象による急激な振幅変化、主共振点以外における非線形共振の発生などが起こり得ることがこれまで明らかにされている⁽⁴⁾⁻⁽⁹⁾。しかし、それらの研究は数値シミュレーションによる解析が多く、また、そのほとんどはパラメータの値が実機から離れた場合を調べたものであるため、現在のところ、実用的にはあまり問題となっていない。しかし、今後期待される超高速ロータ・磁気軸受系の場合には、制御力の微小な遅れなどの制御系のダイナミクスがこのような本質的に内在する非線形性と絡み合い、特異な非線形現象が発生する可能性がある。このような非線形現象の発生メカニズムやその

特性の解明は、超高速ロータ・磁気軸受系の振動対策を講じる上で重要となるが、これまでほとんど調べられていない。

本研究では、超高速回転する鉛直剛体ロータを磁気軸受で支持する場合を想定し、微小な制御力の遅れが動特性に与える影響を調べる。この制御力の遅れは、計算機の制御演算部、パワーアンプから電磁石までの電気回路部、磁気回路部など様々なところで発生する可能性があり⁽¹⁾⁽²⁾、回転数が高速になるほど相対的に大きくなる。本研究では、鉛直剛性ロータ系の下端を磁気軸受で支持した回転軸モデルを用い、制御力の微小遅れを考慮した非線形近似解析と実験を行う。そして、バイアス電流など磁気軸受特有のパラメータの影響を明らかにする。

2. 解析モデルと吸引力

図1に示すように、下端を磁気軸受により支持した鉛直剛体ロータ系を考える。

2-1 吸引力について 図1の系において、円板の変位を (x, y) とする。そして、4つ全ての電磁石にバイアス電流 I_0 を流し、プッシュプル方式により制御を行う。磁気軸受の電磁石 A, B, C, D に電流 $I_{x1} = I_0 - i_x$, $I_{x2} = I_0 + i_x$, $I_{y1} = I_0 - i_y$, $I_{y2} = I_0 + i_y$ をそれぞれ

* 原稿受付 2004年12月20日。

*¹ 正員, 名古屋大学大学院工学研究科(☎464-8603 名古屋市千種区不老町)。*² 正員, 島根大学総合理工学部(☎690-8504 松江市西川津町1060)。

E-mail: inoue@nuem.nagoya-u.ac.jp

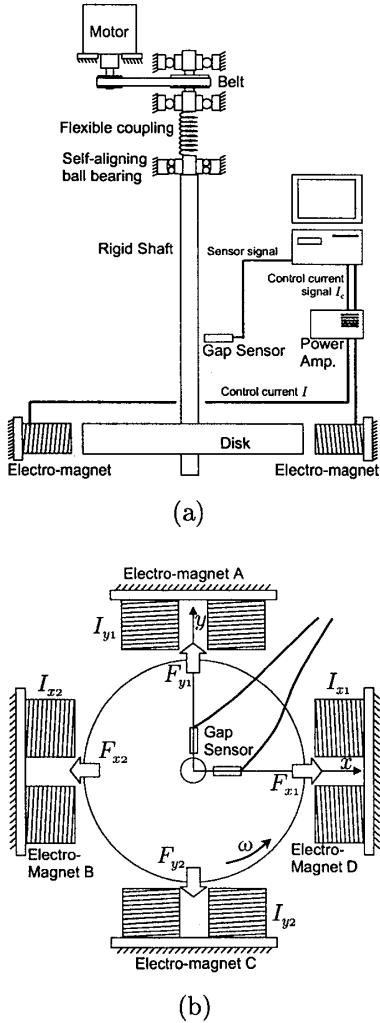


Fig. 1 Experimental system of vertical rigid rotor - magnetic bearing system

れ流したときの吸引力 F_{x1} , F_{x2} , F_{y1} , F_{y2} は、それぞれ次式となる⁽¹⁾⁽²⁾。

$$\left. \begin{aligned} F_{x1} &= k \frac{(I_0 - i_x)^2}{(R_0 - x + \delta)^2}, & F_{x2} &= k \frac{(I_0 + i_x)^2}{(R_0 + x + \delta)^2}, \\ F_{y1} &= k \frac{(I_0 - i_y)^2}{(R_0 - y + \delta)^2}, & F_{y2} &= k \frac{(I_0 + i_y)^2}{(R_0 + y + \delta)^2}, \\ F_x &= F_{x1} - F_{x2}, & F_y &= F_{y1} - F_{y2}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 k は電磁石定数、 R_0 は平衡ギャップ、 δ はギャップの補正值である。

電磁石の特性を表す定数 k , δ は後述する実験装置の表 1 の値を用いる。本研究では、制御電流 i_x は $i_x = k_p x + k_d \dot{x}$ とし、フィードバック係数 k_p, k_d は基本的に最適レギュレータ理論により求めた値 k_{popt}, k_{dopt} を用いる。

制御電流を $i_x = k_p x$ として x 方向の静的吸引力特性を調べた結果を図 2 に示す。破線が F_{x1} 、点線が F_{x2} の特性を示す。ここで変位 x を、 $I_{x2} = I_0 + i_x = 0$ (す

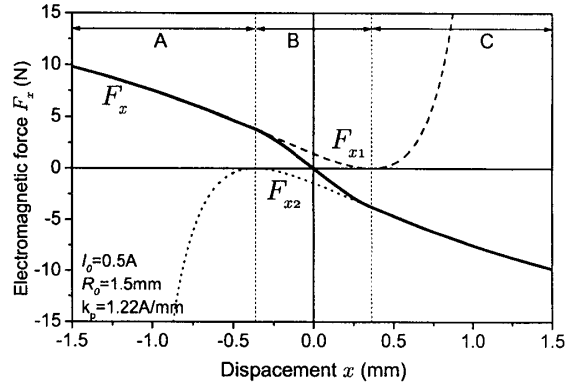


Fig. 2 Electro-magnetic force (x -direction)

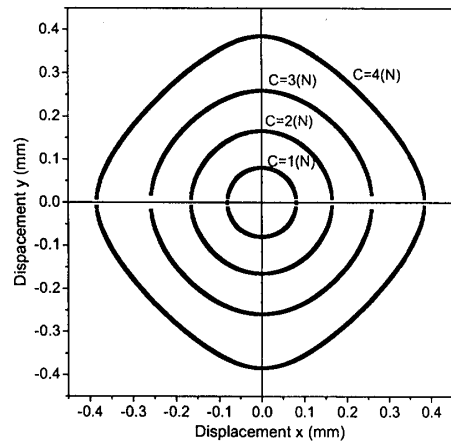
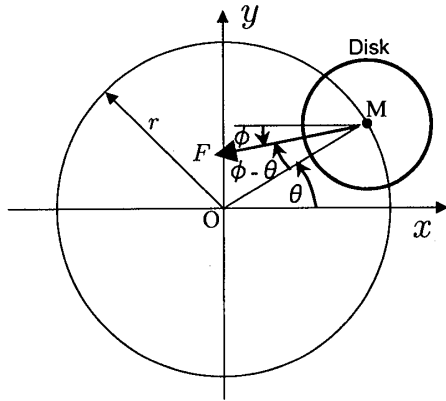


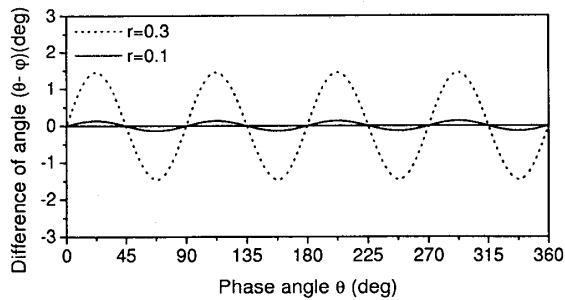
Fig. 3 Equi-potential line

なわち、図中の $F_{x2} = 0$ の点と $I_{x1} = I_0 - i_x = 0$ (図中の $F_{x1} = 0$ の点 (図中の細い破線) を境に領域 A, B, C に分ける。一般にアンプの特性として負の電流は流れないようにするため、本研究では、この領域 A では $I_{x2} = 0 (F_{x2} = 0)$ 、領域 C では $I_{x1} = 0 (F_{x1} = 0)$ とする。そして、その 2 つの対向する力 F_{x1} と F_{x2} の合力 F_x を実線で示す。この場合は漸軟形の非線形復元力特性を示すが、場合によっては漸硬形になることもある⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾。

つぎに、吸引力 F_x, F_y を、大きさ $|F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ と位相 $\phi = \tan^{-1}(F_y/F_x)$ によって表す。そして、吸引力の大きさ $|F|$ が一定値 C (N) になるような軸位置 (x, y) を図 3 に示す。軸変位 r が小さく復元力が小さい場合は $|F| = C$ の等復元力線はほぼ等方性の円軌道を描くが、軸変位 r が大きく復元力が大きい場合は、 $|F| = C$ の等復元力線は原点に対称であるが、軸位置の位相 θ によって変化する異方性の特徴を持つ⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾。そしてその傾向は、原点 O からの距離が大きくなるほど強くなるのがわかる。ロータの形心位置 M とそのとき働いている復元力の位相 ϕ を図 4(a)



(a) Configuration of the restoring force



(b) Discrepancy angle ϕ of a restoring force for the phase angle θ of the shaft displacement

Fig. 4 Direction of a restoring force

のように定義し、円板を原点 O まわりに一定半径 r で変化させたときの軸変位の位相 θ と復元力の位相差 $(\theta - \phi)$ を図 4(b) に示す。この図から復元力 F の向きは原点に向かう MO 方向ではなく、その方向からの位相差 $(\theta - \phi)$ は回転軸変位の位相角 θ によって周期的に変化し、その変化の程度は半径 r が大きいほど大きい事がわかる。

3. 運動方程式

3.1 ロータの運動方程式 図 1 のような磁気軸受・剛性ロータ系を解析するにあたり、図 5 に示す変数 θ_x, θ_y を導入する。図 5 の鉛直剛性ロータ系が上端支持点まわりで傾き角 $\theta = \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2}$ の振れ回り振動しているときの運動方程式は次式となる⁽²⁾⁽¹²⁾。

$$\left. \begin{aligned} I\ddot{\theta}_x + I_p\omega\dot{\theta}_y &= l(F_{x1} - F_{x2}) + lmew^2 \cos \omega t, \\ I\ddot{\theta}_y - I_p\omega\dot{\theta}_x &= l(F_{y1} - F_{y2}) + lmew^2 \sin \omega t. \end{aligned} \right\} (2)$$

ここで、 e は不つりあい、 l は軸長さ、 I は上端支持部における x 軸方向あるいは y 軸方向まわりの慣性モーメント、 I_p は極慣性モーメント、 m は回転体の質量、 ω は回転軸の角速度である。

式 (2) を平衡点である原点 O まわりで線形化する

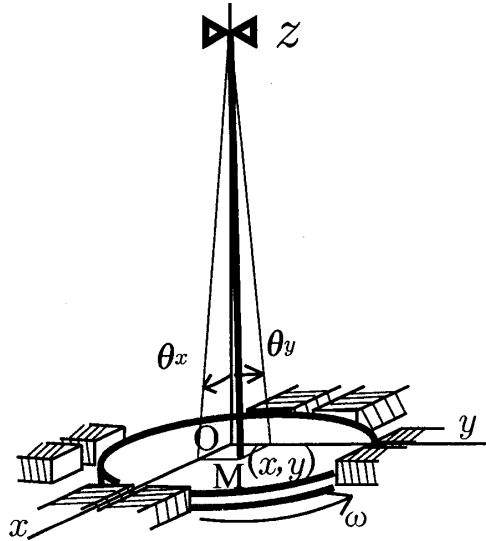


Fig. 5 Theoretical model of a vertical rigid rotor - magnetic bearing system

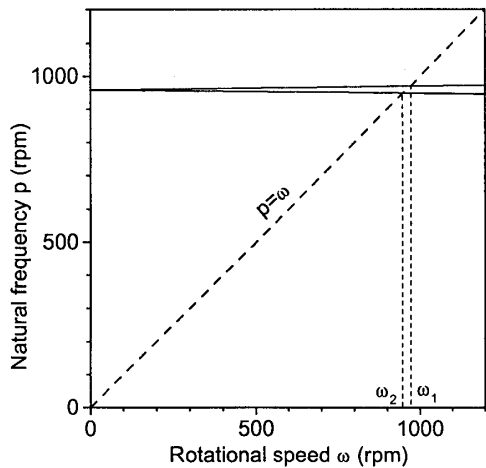


Fig. 6 Natural frequency diagram

と、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} I\ddot{\theta}_x + I_p\omega\dot{\theta}_y &= kl\left(-\frac{4I_0}{R_1^2}i_x + \frac{4I_0^2}{R_1^3}x\right) + lmew^2 \cos \omega t, \\ I\ddot{\theta}_y - I_p\omega\dot{\theta}_x &= kl\left(-\frac{4I_0}{R_1^2}i_y + \frac{4I_0^2}{R_1^3}y\right) + lmew^2 \sin \omega t. \end{aligned} \right\} (3)$$

ここで、 $R_1 = R_0 + \delta$ である。不つりあい $e=0$ とし、制御電流を $i_x = k_p x, i_y = k_p y$ とおいて式 (3) に代入し、振動数方程式を求めると次式を得る。

$$-Ip^2 + I_p\omega p + 4kl^2 \frac{I_0}{R_1^2} \left(k_p - \frac{I_0}{R_1}\right) = 0 \quad (4)$$

図 1 の実験装置のパラメータの場合の固有振動数線図を図 6 に示す。共振点は約 950rpm である。

3.2 制御系について 電流制御アンプを通して制御電流を電磁石コイルに流して制御するとき、実際

には電流アンプの電圧飽和や渦電流などの影響により、制御力に遅れが生じる⁽¹⁾⁽²⁾。本研究では、その制御力の遅れを指令電流信号に対する電流の1次遅れとしてモデル化して制御力の方程式を考える。各電磁石の制御電流 i_x と i_y に関する微分方程式を次式のように表す。

$$\left. \begin{aligned} \alpha \dot{i}_x + i_x &= k_p x + k_d \dot{x}, \\ \alpha \dot{i}_y + i_y &= k_p y + k_d \dot{y}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

磁気軸受・剛性ロータ系の運動方程式は式(1)(2)と式(5)の組となる。

3.3 運動方程式の無次元化 運動方程式(2), (5)を無次元化する。 $\theta_x = x/l$ と $\theta_y = y/l$ により軸の角変位 (θ_x, θ_y) を円板中心の変位 (x, y) に変換する。線形系のばね特性 $K = 4kl^2 I_0(k_p - I_0/R_1)/R_1^2$ により得られる固有振動数 $p = \sqrt{K/I}$ と代表長さ $R_1 = R_0 + \delta$ を用いて無次元化する。各物理量の無次元量を次式に示す。

$$\left. \begin{aligned} \dot{i}_p &= I_p/I, \quad \dot{\omega} = \omega/p, \quad \dot{t} = tp, \\ \dot{x} &= x/R_1, \quad \dot{y} = y/R_1, \quad \dot{i}_x = i_x/I_0, \quad \dot{i}_y = i_y/I_0, \\ \dot{\epsilon} &= l^2 me/(R_1 I), \quad \dot{k} = kl^2 I_0^2/(R_1^3 K), \\ \dot{k}_p &= k_p R_1/I_0, \quad \dot{k}_d = k_d R_1 p/I_0, \quad \dot{\alpha} = \alpha p \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

プライム記号 (') を省略して表すと、無次元方程式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + i_p \omega \dot{y} &= k \left\{ \frac{(1-i_x)^2}{(1-x)^2} - \frac{(1+i_x)^2}{(1+x)^2} \right\} + e \omega^2 \cos \omega t, \\ \ddot{y} - i_p \omega \dot{x} &= k \left\{ \frac{(1-i_y)^2}{(1-y)^2} - \frac{(1+i_y)^2}{(1+y)^2} \right\} + e \omega^2 \sin \omega t, \\ \alpha \dot{i}_x + i_x &= k_p x + k_d \dot{x}, \\ \alpha \dot{i}_y + i_y &= k_p y + k_d \dot{y}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

運動方程式(7)の右辺第1項の磁気力は非線形である。なお、この式では、変位の2乗に反比例し、さらに図2で示したように、それぞれの電磁石電流 $1 \pm i_x$, $1 \pm i_y$ が負の電流にならないように制御電流 i_x , i_y を操作しているため区分表現されているなど、理論解析では取り扱いにくい表現である。そこで、本研究では、この磁気力を変位 x と電流 i_x に関する次式のような5次のべき級数で近似する。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= k \sum_{i,j=0,1 \leq (i+j) \leq 5}^5 a_{ij} x^i i_x^j, \\ N_y &= k \sum_{i,j=0,1 \leq (i+j) \leq 5}^5 a_{ij} y^i i_y^j \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

このべき級数の各係数 a_{ij} を最小2乗近似により求め、得られた近似磁気力を変位 x と電流 i_x に対して

図7に示す。図には式(7)の磁気力とその近似式(8)を2次元平面で示しているが、両者は一致し、ほとんど同一面に見える。この近似磁気力の式(8)を用いた運動方程式をつぎに示す。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + i_p \omega \dot{y} + N_x &= e \omega^2 \cos \omega t, \\ \ddot{y} - i_p \omega \dot{x} + N_y &= e \omega^2 \sin \omega t, \\ \alpha \dot{i}_x + i_x &= k_p x + k_d \dot{x}, \\ \alpha \dot{i}_y + i_y &= k_p y + k_d \dot{y}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

次節では、この式(9)を用いて、制御系のダイナミクスも考慮した磁気軸受・ロータ系の非線形近似解析を行う。

4. 理論解析

4.1 基礎式の誘導 強制振動解を次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} x &= P \cos(\omega t + \beta), \quad y = P \sin(\omega t + \beta), \\ i_x &= P_i \cos(\omega t + \beta_i), \quad i_y = P_i \sin(\omega t + \beta_i). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ただし、 P , β , P_i , β_i はゆつくり変化する関数とする⁽¹²⁾。式(10)を式(9)に代入し、両辺の $\cos \omega t$, $\sin \omega t$ の係数を等置し、 $O(\epsilon)$ の精度で解析すると、つぎの基礎式を得る。

$$\left. \begin{aligned} &\dot{P} \{c \cos \beta + \omega(i_p - 2) \sin \beta\} \\ &+ P \dot{\beta} \{\omega(i_p - 2) \cos \beta - c \sin \beta\} \\ &+ (k + i_p \omega^2 - \omega^2) P \cos \beta - c \omega P \sin \beta \\ &+ \frac{N_{xc} + N_{ys}}{2} = e \omega^2 \\ &\dot{P} \{\omega(i_p - 2) \cos \beta - c \sin \beta\} \\ &+ P \dot{\beta} \{-c \cos \beta - \omega(i_p - 2) \sin \beta\} \\ &- c \omega P \cos \beta - (k + i_p \omega^2 - \omega^2) P \sin \beta \\ &+ \frac{N_{xs} - N_{yc}}{2} = 0 \\ &\alpha_1 (\dot{P}_i \cos \beta_i + \dot{\beta}_i P_i \sin \beta_i) \\ &+ P_i \cos \beta_i - \alpha_1 P_i \sin \beta_i \\ &= k_p P \cos \beta - k_d \omega P \sin \beta \\ &+ k_d (\dot{P} \cos \beta - \dot{\beta} P \sin \beta) \\ &\alpha_1 (\dot{P}_i \sin \beta_i + \dot{\beta}_i P_i \cos \beta_i) \\ &+ P_i \sin \beta_i + \alpha_1 P_i \cos \beta_i \\ &= k_p P \sin \beta + k_d \omega P \cos \beta \\ &+ k_d (\dot{P} \sin \beta - \dot{\beta} P \cos \beta) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここで、たとえば N_{xc} は N_x の $\cos \omega t$ 成分を表し、 N_{xs} , N_{yc} , N_{ys} も同様である。この具体的な形は冗長となるため、紙面の関係上ここでは示さない。定常解は、 $\dot{P} = \dot{\beta} = \dot{P}_i = \dot{\beta}_i = 0$ として得られる代数方程式を解くことにより得られ、その解の安定性はラウス・フルビッツの判別法を用いて調べる。

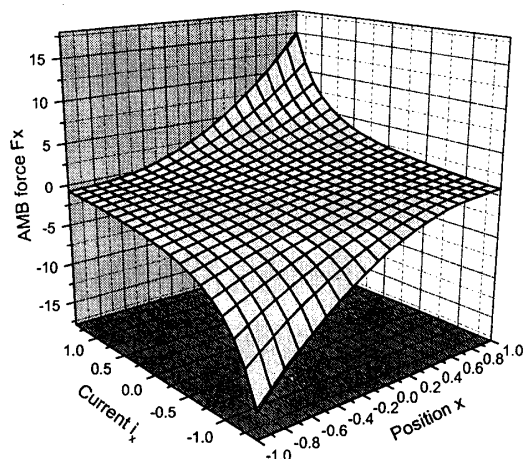


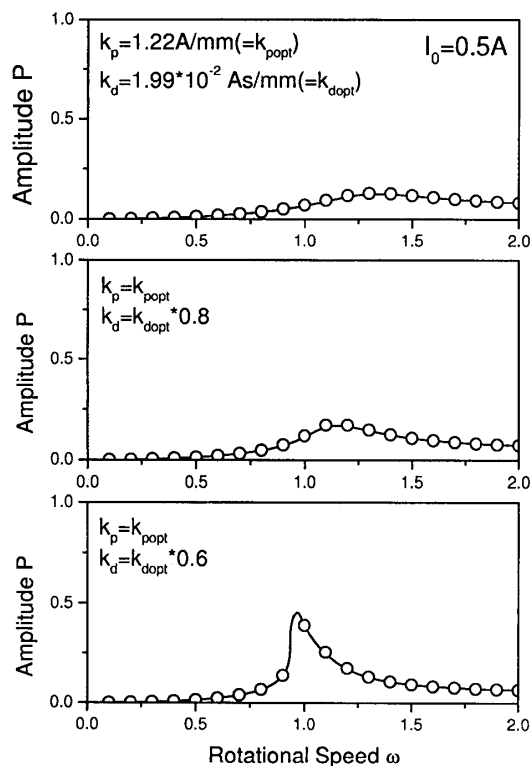
Fig. 7 Approximation of electromagnetic force (upper plane:Eq.(8), lower plane:first term on the right hand of Eq.(7))

4.2 各パラメータの影響 対象とする回転軸系の負荷量や運転状況，機能により，フィードバック係数の設計に差異が生じることを考え，磁気軸受のさまざまな設計パラメータが系の動特性に与える影響を調べる．時間遅れ係数 α は有次元値で 0.0083 とし，式 (6) により無次元化して用いる．なお，バイアス電流 I_0 などを変化させた場合には，そのつどフィードバック係数 k_{popt} ， k_{dopt} は求め直すこととする．

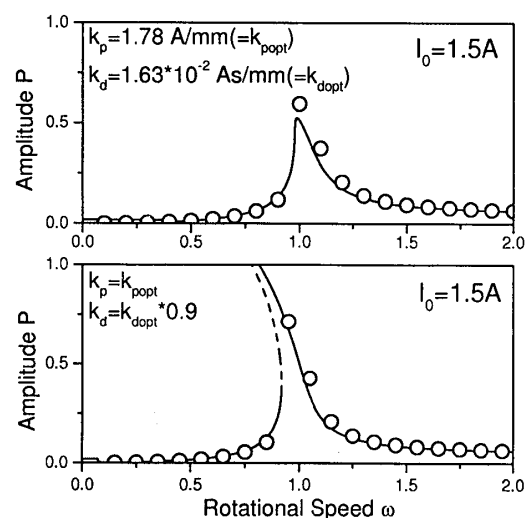
速度フィードバック係数 k_d の影響を調べた結果を図 8 に示す．図中の線は式 (11) から得られる解析解であり，実線は安定解を示し，破線は不安定解を示す．また，図中の○は，式 (7) から得られる数値シミュレーション解である．用いたパラメータ値は次節で示す実験装置におけるものと同じである．図 8(a) はバイアス電流 $I_0=0.5A$ の場合を示しており，速度フィードバック係数 k_d を小さくすると共振のピークが低速側にずれ，主共振点付近での振幅が大きくなる．図 8(b) はバイアス電流 $I_0=1.5A$ の場合の速度フィードバック係数 k_d の影響を示している．共振曲線形状は漸軟形となり， k_d の値を 10% 小さくしたときにはサドルノード分岐が生じて複数の安定解を持つ回転速度領域が現れることがわかる．

バイアス電流 I_0 の影響を調べた結果を図 9 に示す．また，ロータ系の支持剛性を上げたい場合にはバイアス電流 I_0 の値を大きくすることが考えられるが， I_0 を大きくすると図 9 に示すように振幅が大きくなり，強い非線形性が表れる．

制御の遅れ α の影響を調べた結果を図 10 に示す． α の値（無次元値）が増えて $\alpha = 1.16$ になると共振曲線が漸軟形に伸び，サドルノード分岐が生じ，複数



(a) $I_0=0.5A$



(b) $I_0=1.5A$

Fig. 8 Influence of feedback coefficient k_d

の安定解が存在する回転速度領域が現れる．この無次元量 α は，式 (6) より固有振動数が大きくなると大きくなるため，共振点が高速になるほど，このような現象が生じやすくなることを示している．

5. 実験

5.1 実験装置 実験装置はすでに図 1 に示しており，下端に厚さ $l_d = 20\text{mm}$ ，半径 $R_d = 62\text{mm}$ の円板を取り付けた軸長さ $l_s = 230\text{mm}$ ，軸半径 $l_d = 15\text{mm}$

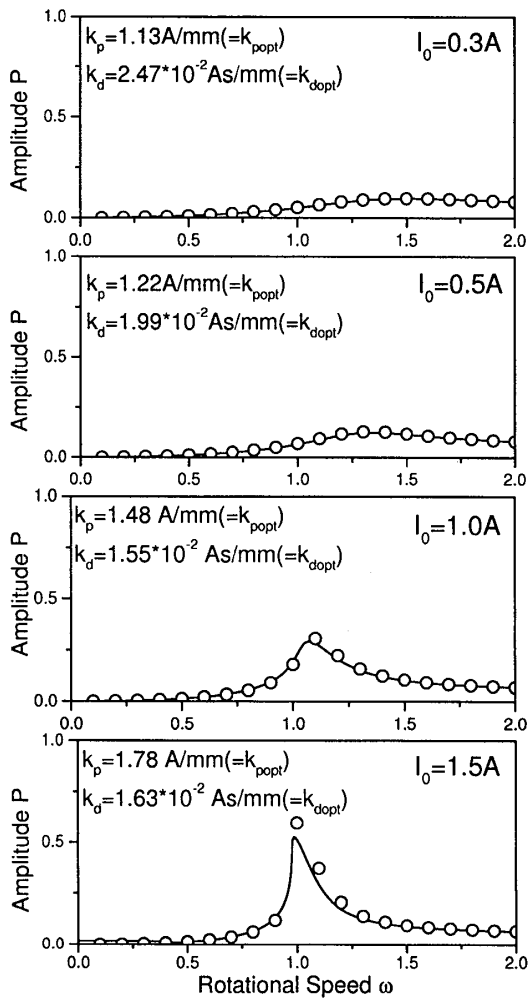


Fig. 9 Influence of bias current I_0

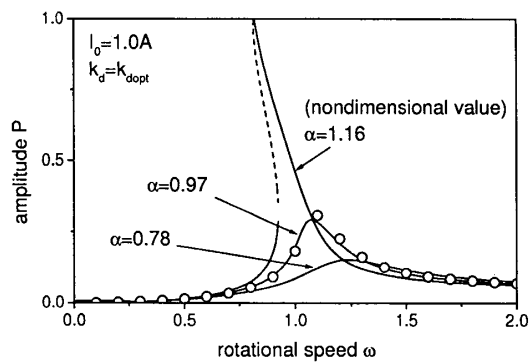


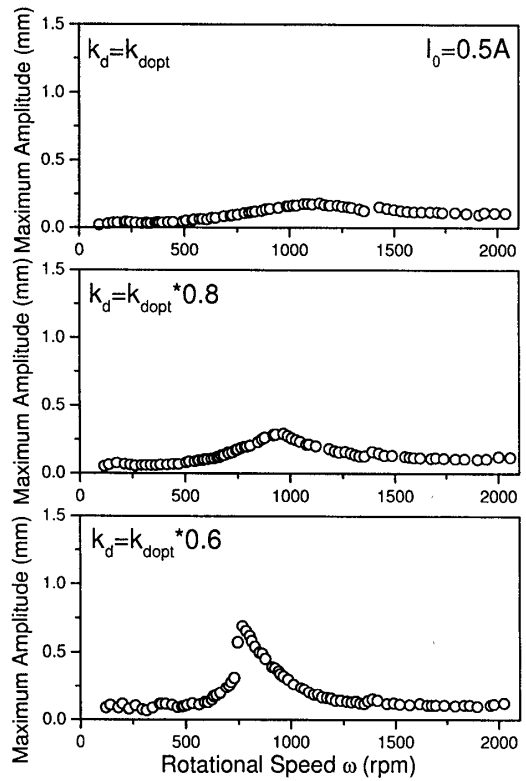
Fig. 10 Influence of delay α ($I_0 = 1.0A$)

の回転軸を、フレキシブルカップリングを介してモータに取り付け、上端を複列自動調心玉軸受（# 1208）で支持し、下端円板部を 4 つの電磁石から成る磁気軸受で支持した。磁気軸受の平衡ギャップは $R_0 = 1.5$ mm である。円板の上側位置でギャップセンサにより x と y 方向変位を計測する。

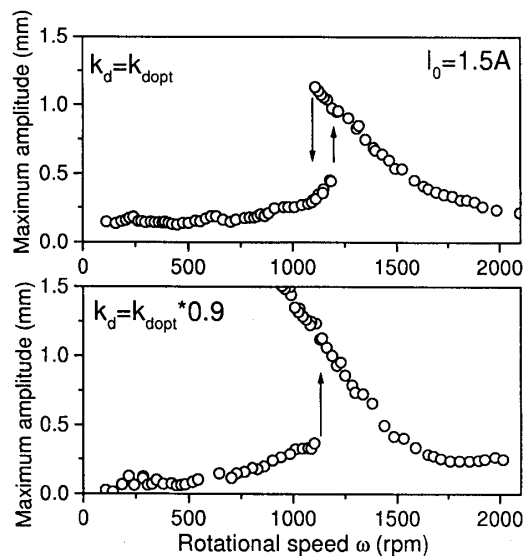
電磁石の吸引力特性を式 (1) とおき、磁気軸受に用いる 4 つの電磁石にそれぞれについて電磁石電流と

Table 1 The coefficients of electro-magnets

	k (kgmm ³ /A ² s ²)	δ (mm)
Electromagnet 1	35288.35	0.877
Electromagnet 2	39098.65	0.884
Electromagnet 3	39331.57	0.963
Electromagnet 4	37848.99	0.988



(a) $I_0 = 0.5A$



(b) $I_0 = 1.5A$

Fig. 11 Influence of feedback coefficient k_d (Experiment)

ギャップの関係を実際に測定し、吸引力特性パラメータ k と δ の値を求めた結果を表 1 に示す。

5.2 実験結果 理論解析結果の妥当性を確認するため、理論解析の図 8 と図 9 に対応させて、バイアス電流 I_0 と速度フィードバック係数 k_d の値を変えながら実験を行った。その結果を図 11 と図 12 に示す。これらのグラフは図 8 と図 9 の解析結果と、主共振の位置や共振曲線の形状などの点ではほぼ一致しており、系のモデル化の妥当性が確認できた。そして、図 11 から速度フィードバック係数 k_d が小さくなるほど、あるいは図 12 からバイアス電流 I_0 が大きくなるほど共振振幅が大きくなり、共振曲線において漸軟形の性質が強くなる。図 11(b) では跳躍現象が確認でき、複数の安定解を持つ回転速度領域を観測することもできた。

6. 結 論

鉛直剛体回転軸を磁気軸受で支持した系を、制御力の遅れを 1 次遅れとして近似した理論モデルを用いた数値シミュレーションと理論解析、および実験により調べた結果、以下の結論を得た。

1. 磁気軸受の吸引力は、変位の 2 乗に反比例し、区分的に異なる表現で表されることから従来は理論解析が困難で、数値シミュレーションによる解析がほとんどであった。本研究では、このような磁気軸受の磁気力を平衡点からの変位と制御電流のべき級数により精度良く近似出来ることを示し、この近似磁気力式を用いた非線形近似解析手法を提案し、制御系のダイナミクスを含む磁気軸受系の動特性を解析的に説明することができた。
2. 磁気力の遅れに起因して共振が大きくなり、漸軟形の共振曲線の形状となる。パラメータの値によっては、サドルノード分岐が生じ、複数の安定解が存在する回転速度領域が現れうることを明らかにした。
3. 得られた理論解析式を用いて磁気軸受特有のパラメータの影響を調べ、たとえば、バイアス電流 I_0 を大きくするほど、また速度フィードバック k_d が小さくなるほど、この非線形性の影響は大きくなることを明らかにした。
4. 上記の結論を実験により確認した。

文 献

- (1) 磁気浮上と磁気軸受, 電気学会編, コロナ社 (1993)
- (2) 磁気軸受の基礎と応用, 日本機械学会, 養賢堂 (1995)
- (3) 石田, 機論 C, 57 巻, 534 号, 576-581, (1991)
- (4) J.D.Knight and H.Ecker, Proc. of Computer Simulation Conf., Portland, (1996)
- (5) J.C.Ji and A.Y.T.Leung, Int. J. of Non-linear Mechanics, 38-6, 829-835(2003)
- (6) J.C.Ji, Int. J. of Non-linear Mechanics, 38-9, 1387-1401(2003)
- (7) Y.S.Ho, H.Liu and L.Yu, Trans. of ASME, J. of Vib. and Acoust., 125, 307-316(2003)
- (8) N.Steinschaden and H.Springer, Proc. of DETC ASME Conf., Las Vegas, VIB-8063, (1999)
- (9) N.Steinschaden and H.Springer, Proc. of IFToMM Int. Conf. on Rotating Machinery, 71-79, (2002)
- (10) 村上, 田中, 機講論 D&D, B-577, (1997)
- (11) 村上, 池田, 金田, 13th SEAD 講演論文集, 218, 295-298(2001)
- (12) 山本, 石田, 回転機械の力学, コロナ社 (2001)

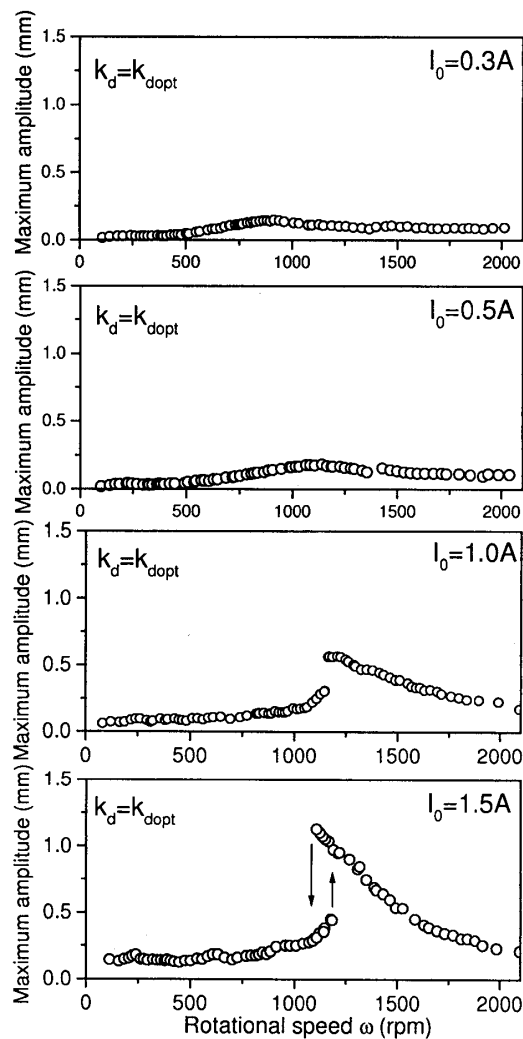


Fig. 12 Influence of bias current I_0 (Experiment)