

回転軸系におけるカオス振動と内部共振現象* (主危険速度付近)

井上 剛志*¹, 石田 幸男*¹, 近藤 健二*²

Chaotic Vibration and Internal Resonance Phenomena in Rotor Systems (In the Vicinity of the Major Critical Speed)

Tsuayoshi INOUE*³, Yukio ISHIDA and Kenji KONDO*³ Nagoya University, Graduate School of Engineering, Electronic-Mechanical Engineering,
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya, Aichi, 464-8603, Japan

In rotor systems, if the gyroscopic moment is small, the forward natural frequency and the backward natural frequency almost satisfy a condition of 1: (-1) internal resonance. In such systems, the critical speed of a backward harmonic oscillation and that of a supercombination oscillation are near from the major critical speed. This study clarifies dynamical characteristics of nonlinear phenomena, including steady-state oscillations, almost periodic motions, bifurcate phenomena, and chaotic vibrations, due to the internal resonance at the major critical speed.

Key Words: Vibration of Rotating Body, Nonlinear Vibration, Critical Speed, Chaotic Vibration, Internal Resonance

1. まえがき

回転機械における分数調波振動などの非線形共振現象はこれまで長年に渡って調べられてきており、近年、カオス振動の研究も近年数多く行われている。しかし、このカオス振動の研究の多くは数値シミュレーションによる研究であり、実際に実験で現象を観察し、解析したものはきわめて少ない。Ehrich⁽¹⁾は、スクイズフィルムダンパ軸受を用いた航空用ガスタービンエンジンの実験で、高次の分数調波共振間の遷移領域でカオス振動の発生を観察し、さらに、不感帯を持つ回転軸モデルを用いて、調和振動と1/2次分数調波振動、あるいは隣り合う分数調波振動間の遷移領域でカオス振動が発生することを数値シミュレーションで確認している。LiとPaidoussis⁽²⁾は、軸の復元力が無く、回転体とケーシングの間の衝突現象のみを考慮した回転軸系を考え、その系の動的挙動を数値シミュレーションにより調べ、この系にカオス振動が発生することを報告している。しかし、以上のような研究は、クリアランスによる不感帯を持つ系や衝突系など断片線形様式の強い非線形ば

ね特性を持つ系を扱ったものであり、一般の多くの回転機械では、これほど強い非線形性が現れることはまれである。

多自由度非線形系において、固有振動数間に簡単な整数比の関係が成立するときに、内部共振現象が発生する。(例えば、固有振動数間の関係が $p_i : p_j = m : n$ のとき内部共振が発生するが、これを $m : n$ 型の内部共振と呼ぶことにする。)この内部共振現象については、Sethna⁽³⁾が報告して以来、様々な機械・構造物に関して研究がなされている⁽⁴⁾。また、往復振動系において、この内部共振の影響を通じてカオス振動が発生することも報告されている⁽⁵⁾。

著者らは、既報^{(6),(7)}において、弱い非線形ばね特性をもつ回転軸系を取り上げ、この系の前向きと後向きの固有振動数が $p_f : p_b = 1 : (-1)$ に近い関係を持つときの内部共振現象、すなわち1: (-1)型の内部共振現象を調べた。そして、主危険速度付近およびその2倍付近と3倍付近では、内部共振のため、共振曲線の形状が複雑に変化し、新たに安定な分枝が現れることや、概周期運動が発生することを明らかにした。また系に作用するジャイロモーメントを徐々に大きくしたときの、各共振点が近い系から離れた系へ変化する過程において、発生する振動現象がどのように単一共振の場合の現象に移るのかについても理論的・実験的に明らかにした。

* 原稿受付 1999年8月11日。

¹ 正員,名古屋大学大学院工学研究科(〒464-8603 名古屋市千種区不老町1)。² 名古屋大学大学院。

E-mail: inoue@nuem.nagoya-u.ac.jp

本研究では、既報⁽⁷⁾の弱い非線形性を持つ2自由度回転軸系を用いて、主危険速度付近における、概周期運動が発生する領域の分岐現象を調べる。そして、系の非線形性が弱い場合でも、その系が内部共振の影響を受けるときは、概周期運動だけでなくカオス振動も発生する可能性があることを示し、その特性を明らかにする。

2. 運動方程式

図1(a)に2自由度傾き振動モデルを示す。その無次元表示の運動方程式は次式となる⁽⁸⁾。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta}_x + i_p \omega \dot{\theta}_y + c \dot{\theta}_x + \theta_x + N_{\theta x} &= (1 - i_p) \tau \omega^2 \cos \omega t \\ \ddot{\theta}_y - i_p \omega \dot{\theta}_x + c \dot{\theta}_y + \theta_y + N_{\theta y} &= (1 - i_p) \tau \omega^2 \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 θ_x, θ_y は円板位置における軸の傾き角の成分、 i_p は極慣性モーメントと直径に関する慣性モーメントの比、 c は減衰係数、 $N_{\theta x}, N_{\theta y}$ は復元力中の非線形項⁽⁶⁾、 τ は動不つりあい、 ω は回転角速度、 t は時刻を示す。非線形ばね特性を含んだ場合の系のポテンシャルエネルギーは、次式で表される。

$$\begin{aligned} V &= \theta^2/2 + (\varepsilon_c^{(1)} \cos \varphi + \varepsilon_s^{(1)} \sin \varphi + \varepsilon_c^{(3)} \cos 3\varphi \\ &+ \varepsilon_s^{(3)} \sin 3\varphi) \theta^3 + (\beta^{(0)} + \beta_c^{(2)} \cos 2\varphi + \beta_s^{(2)} \sin 2\varphi \\ &+ \beta_c^{(4)} \cos 4\varphi + \beta_s^{(4)} \sin 4\varphi) \theta^4. \end{aligned} \quad (2)$$

このポテンシャルエネルギーから非線形項が求められるが、その非線形項は、式(2)中の方向角 φ が 2π 変化する間に増減する回数によって分類でき、その回数が n である成分を記号 $N(n)$ で表す。座標の3乗までの非線形項を考えた場合、成分 $N(0) \sim N(4)$ があり、式(2)中の係数 $\beta^{(n)}$ と $\varepsilon^{(n)}$ の肩の数字は、非線形成分 $N(n)$ の数字に対応する⁽⁸⁾。

実際の系では、軸受中心線の一致がよい場合には等方性の対称非線形成分 $N(0)$ のみが強く現れ、軸受中心線にずれがある場合には $N(0)$ に加え、非対称非線形成分 $N(1)$ が比較的強く現れる。

3. 理論解析

3-1 近似解の計算と共振曲線

ジャイロモーメントの作用が小さいときには、固有振動数線図は図1(b)のようになり、座標の3乗までの非線形性を持つ系で発生する可能性がある振動のうち、調和振動 $[+p_f]$ 、後向き調和振動 $[-p_b]$ 、超和差調波振動 $[(p_f - p_b)/2]$ の共振点が近くなる。ここで、例えば記号 $[(p_f - p_b)/2]$ は、関係 $(p_f - p_b)/2 = \omega$ が成立する時に発生する振動の種類を表す。

内部共振の影響により、振動数 ω と $-\omega$ の振動が同時に発生すると予想し、解を $O(\varepsilon)$ 精度で次のように仮定

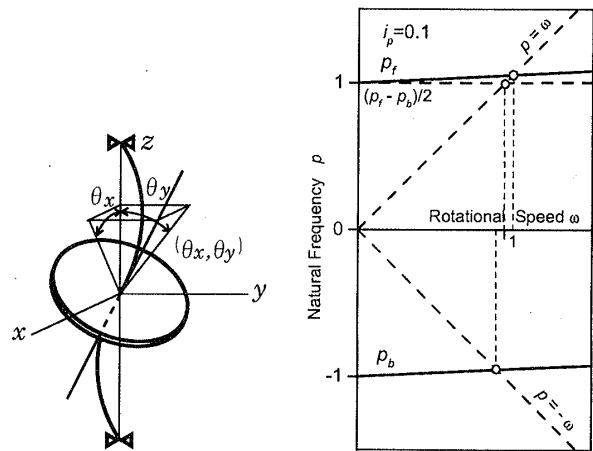
する。

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= P \cos(\omega t + \beta) + R_b \cos(-\omega t + \delta) + A_x \\ \theta_y &= P \sin(\omega t + \beta) + R_b \sin(-\omega t + \delta) + A_y \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式(3)を式(1)に代入し、振動数 ω と定数項について $O(\varepsilon)$ 精度で両辺の係数を等置すると、振幅 P, R_b 、位相角 β, δ 、定数項 A_x, A_y に関する次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} A_f \dot{P} &= -F \sin \beta - c \omega P \\ &+ 2\varepsilon^{(1)} R_b \{A_x \sin(\beta + \delta) - A_y \cos(\beta + \delta)\} \\ &+ 4\beta^{(0)} R_b \{(A_x^2 - A_y^2) \sin(\beta + \delta) - 2A_x A_y \cos(\beta + \delta)\} \\ A_f P \dot{\beta} &= -F \cos \beta + G_f P \\ &+ 2\varepsilon^{(1)} \{2A_x P + A_x R_b \cos(\beta + \delta) + A_y R_b \sin(\beta + \delta)\} \\ &+ 4\beta^{(0)} \{P(P^2 + 2R_b^2 + 2A_x^2 + 2A_y^2) \\ &+ (A_x^2 - A_y^2) R_b \cos(\beta + \delta) + 2A_x A_y R_b \sin(\beta + \delta)\} \\ A_b \dot{R}_b &= c \omega R_b \\ &+ 2\varepsilon^{(1)} P \{A_x \sin(\beta + \delta) - A_y \cos(\beta + \delta)\} \\ &+ 4\beta^{(0)} P \{(A_x^2 - A_y^2) \sin(\beta + \delta) - 2A_x A_y \cos(\beta + \delta)\} \\ A_b R_b \dot{\delta} &= G_b R_b \\ &+ 2\varepsilon^{(1)} \{2A_x R_b + A_x P \cos(\beta + \delta) + A_y P \sin(\beta + \delta)\} \\ &+ 4\beta^{(0)} \{R_b(2P^2 + R_b^2 + 2A_x^2 + 2A_y^2) \\ &+ (A_x^2 - A_y^2) P \cos(\beta + \delta) + 2A_x A_y P \sin(\beta + \delta)\} \\ i_p \omega \dot{A}_x &= A_y + 2\varepsilon^{(1)} \{A_x A_y + P R_b \sin(\beta + \delta)\} \\ &+ 4\beta^{(0)} \{A_y(2P^2 + 2R_b^2 + A_x^2 + A_y^2) \\ &+ 2P R_b (A_x \sin(\beta + \delta) - A_y \cos(\beta + \delta))\} \\ -i_p \omega \dot{A}_y &= A_x \\ &+ \varepsilon^{(1)} \{2P^2 + 2R_b^2 + 3A_x^2 + A_y^2 + 2P R_b \cos(\beta + \delta)\} \\ &+ 4\beta^{(0)} \{A_x(2P^2 + 2R_b^2 + A_x^2 + A_y^2) \\ &+ 2P R_b (A_x \cos(\beta + \delta) + A_y \sin(\beta + \delta))\} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

上式において、 $A_f = (2 - i_p)\omega$ 、 $A_b = -(2 + i_p)\omega$ 、



(a) 2DOF inclination model (b) Natural frequencies

Fig.1 Analytical model

$G_f = 1 + i_p \omega^2 - \omega^2$, $G_b = 1 - i_p \omega^2 - \omega^2$ である。

この式(4)の左辺の微分項を零とおくことによって、定常解を求めることができる。主危険速度付近における調和振動成分の共振曲線を図2に示す。図中の実線は安定解、破線と鎖線は不安定解を示す。破線と鎖線は、Routh-Hurwitzの安定判別法における判別条件の違い⁽⁹⁾を表し、鎖線の分枝の端点AはHopf分岐点である。図中の○は数値シミュレーション結果の定常解の振幅を示し、●は振幅変調を伴う振動の振幅の最大値と最小値を示す。これまでは、この鎖線の領域で発生する振幅変調を伴う振動は概周期運動と分類されてきた^{(6),(7),(9)}。

3.2 数値的解析

共振曲線の鎖線の領域における振動現象を、式(1)を直接数値積分して調べる。図2中のシミュレーション結果で、定常振動から概周期運動に変化した付近のいくつかの回転速度における θ_x の時刻歴、スペクトル、および外力の周期ごとにサンプリングしたポアンカレ写像を、図3に示す。スペクトルの縦軸は対数で示してあり、横軸の正負はそれぞれ前向きと後向きの振れ回り方向を示す。

図3(a) ($\omega = 1.0000$) は定常振動状態であり、スペクトルも ω 成分、定数成分、および $-\omega$ 成分が大きく発生し、それに加え、その整数倍の振動成分が小さく発生している。この整数倍の振動成分は、 ω 成分と $-\omega$ 成分から、式(2)中の非線形項を通して発生した成分と、それらがまた非線形項を通じて発生したさらに高次の成分である。

回転速度をわずかに増加させた場合の図3(b) ($\omega = 1.0109$) を図3(a)と比較してみる。時刻歴やポアンカレ写像の比較では、あまりはっきりとした違いが確認できないが、スペクトルの比較では、図3(b)において低次の振動成分付近で連続したスペクトル分布となっているとともに、 ω 成分、 $-\omega$ 成分、および定数成分の両側に、数本の比較的大きな振動数成分が互いに等間隔にわずかに離れて発生し始めている。Ehrichは、スクイズ

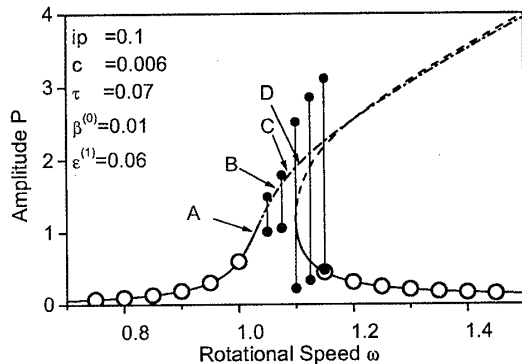


Fig.2 Resonance curves

フィルムダンパが十分に機能していない回転機械における実験と、局所的な接触を伴う数学モデルにおける数値シミュレーションにおいて類似な現象を観察し、この現象をサイドバンディングと呼んでいる⁽¹⁰⁾。次に、図3(c) ($\omega = 1.054$) では、時刻歴が回転速度と比較して長い周期で変化していることが確認でき、これと対応して、ポアンカレ写像は閉ループを描くようになる。そして、スペクトルでは、図3(a)の振動数成分の両側で、図3(b)の場合よりさらに多くの振動数成分が発生している。し

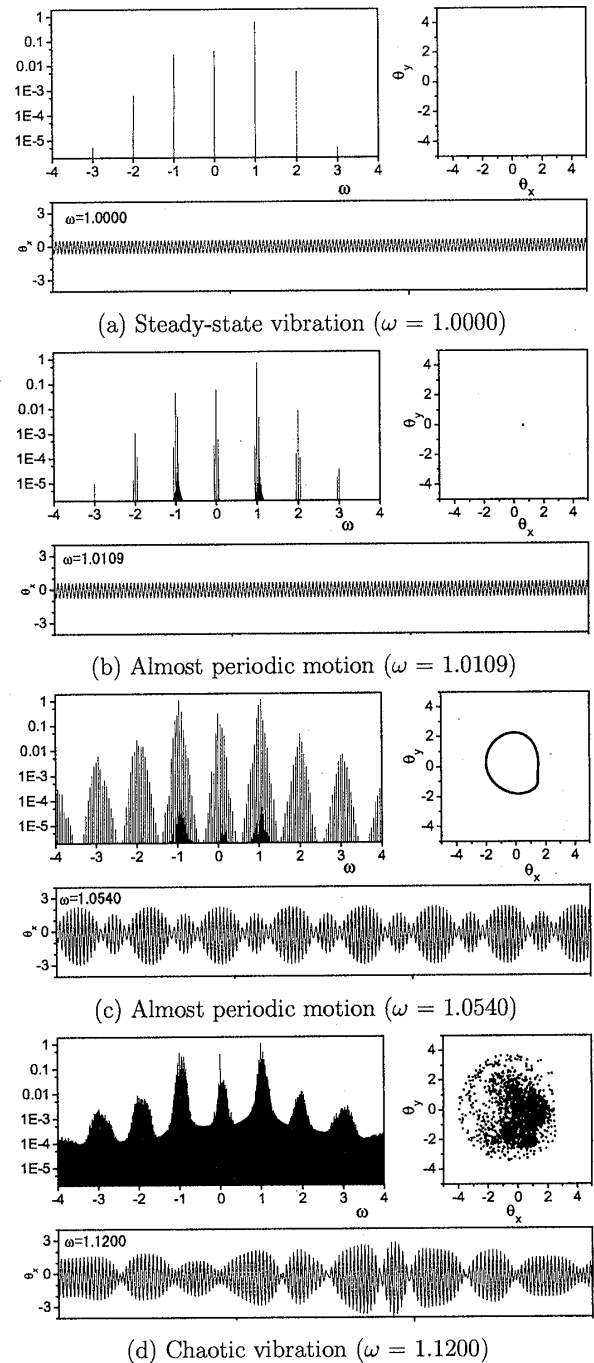


Fig.3 Time histories, spectra, and Poincaré map

かし、その振動数は依然としてお互いに等間隔にわずかに離れている。そして、最後に図3(d) ($\omega = 1.120$) では、もはや時刻歴は周期的ではなくなり、ポアンカレ写像も閉ループではない点の集合になる。スペクトルでは、整数倍のスペクトル付近のみでなく、広範囲にわたって振動数成分が大きくなり、密に発生するようになる。

図3で示したポアンカレ写像は、外力の周期ごとにサンプリングした4次元空間上の状態点 $(\theta_x, \dot{\theta}_x, \theta_y, \dot{\theta}_y)$ を2次元平面に投影したものであったため、図3(d)では収束したアトラクタの構造が明らかではない。その回転速度 $\omega = 1.120$ において、外力の周期毎にサンプリングし、さらに、その状態点が $\dot{\theta}_x$ 軸の正の方向へ変化しながら $-0.025 < \dot{\theta}_x < 0.025$ の範囲に入ったときの点 $(\theta_x, \theta_y, \dot{\theta}_y)$ のみを記録し、 θ_x - θ_y 平面に写したダブルポアンカレ写像を図4に示す。このダブルポアンカレ写像ではストレンジアトラクタが得られ、この回転速度における系の状態点の変化が観察できる。

3.3 近似解による解析 前節では運動方程式を直接数値積分することにより、図2の鎖線の領域周辺における現象を調べた。そして、時刻歴やスペクトル、ポアンカレ写像を観察することにより、この共振点付近が定常振動と概周期運動、およびカオス様式の振動が発生する領域に分かれていることが明らかとなった。しかし、この方法では、例えば前向き調和振動成分 P と β に注目して、図2の共振曲線と対応させて、この成分がどのような変化を経てカオス振動へと至っていくのかを詳細に調べることが困難である。本節では、近似解析により得られた式(4)を数値積分し、そのときの P と β の応答を図2の共振曲線と対応させて調べていくことで、系の動的応答を解析していく。

3.3.1 相平面図, 分岐図による解析 式(4)を数値積分して得られた P の時刻歴および $P \cos \beta$ - $P \sin \beta$

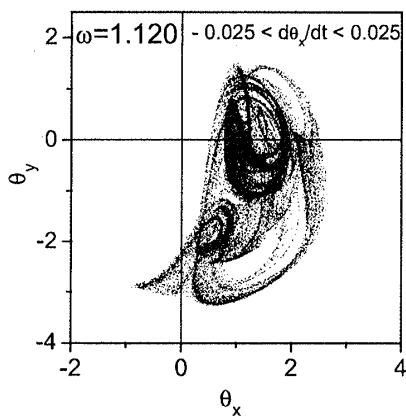


Fig.4 Double Poincaré map

平面での軌道を表した結果を図5に示す。

調和振動成分の振幅 P は、定常振動時には一定値をとるが、図5(a) ($\omega = 1.070$: 図2のB点) では、 P の時刻歴は周期運動となり、軌道は1重のリミットサイクルとなる。このとき、対応する原系の応答 (θ_x, θ_y) は概周期運動となる⁽⁹⁾。図5(b) ($\omega = 1.080$: 図2のC点) では、その時刻歴の周期は2倍になり、軌道は周期倍分岐を経て2重の周期解軌道となる。図5(c) ($\omega = 1.088$) では、図5(b)から周期倍分岐を経て4重の周期解軌道となり、図5(d) ($\omega = 1.089$) では複数回の周期倍分岐を経て多重

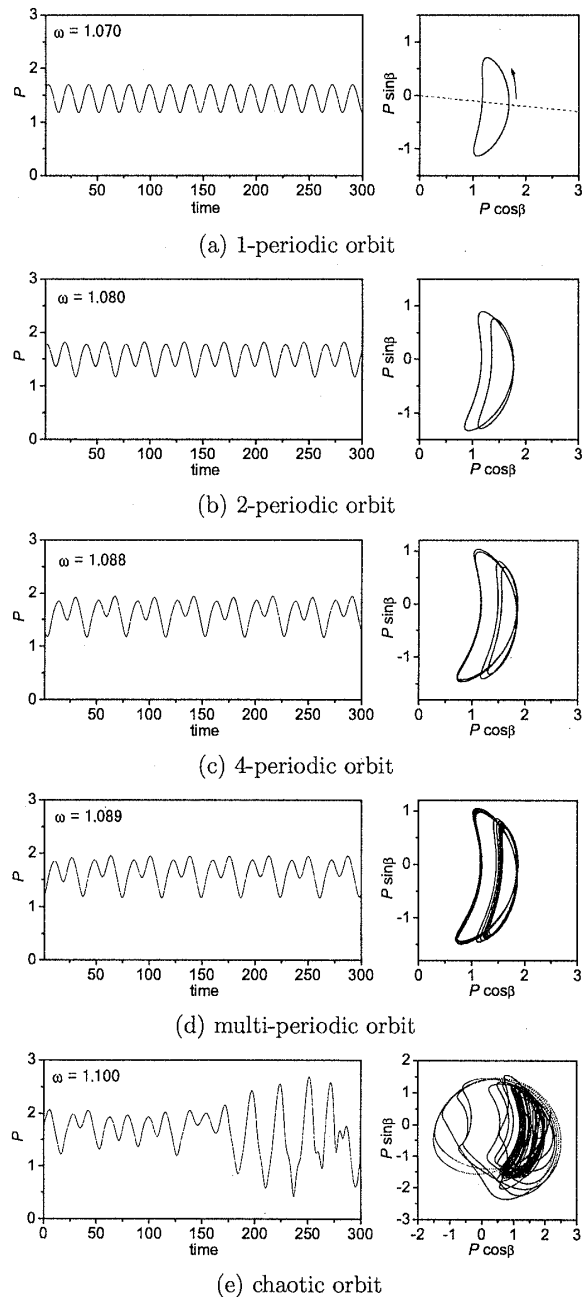


Fig.5 Orbits in phase planes

の周期解軌道となっている．図5(e) ($\omega=1.100$: 図2のD点)では, P の応答は非周期的となり, 軌道もカオス様式の軌道となる．

次に, この軌道の回転速度 ω に対する連続的な変化を調べる．図5の解軌道が, ある位相角の方向 (図5(a)の中の破線) の方向を原点に対して反時計回りに横切る度に振幅 P を記録した結果を図6に示す．この図から以下のことが確認できる．Hopf分岐点Aから回転速度 ω を徐々に上げていくと, 最初は, リミットサイクルが横切る時の振幅 P は, ただ1点のみ記録される．この状態点は図5(a)とは別のリミットサイクル上の点である．さらに回転速度を上げると, E点 ($\omega=1.049$) から周期倍分岐が発生し, その後, カオス様式の非周期振動の狭い領域に入る．そして, F点 ($\omega=1.057$) で図5(a)で描いたリミットサイクル軌道に跳躍する．その後, 再びG点 ($\omega=1.080$) 付近から周期倍分岐が発生する．この周期倍分岐時の状態は, 図5(b)から5(d)で示した時刻歴や軌道図と対応する．そして, 図5(e)に対応するカオス様式の非周期的振動が発生し, そのとき分岐図6上の振幅 P の値は幅広い範囲にわたってプロットされている．この状態は広い回転速度範囲にわたって存在する．逆に, 回転速度 ω を下げていくと, 上昇時の跳躍点Fよりも低速側のJ点 ($\omega=1.020$) でもとのリミットサイクルへ跳躍する．なお, HI間では振幅 P は記録されていないが, これはこの領域ではリミットサイクルの大きさが非常に小さくなり, 上記の方法ではリミットサイクルが図5(a)の中の破線)の方向を横切らなくなったためである．以上から, FJ間の領域では2種類の安定なリミットサイクルが存在することがわかる．

3.3.2 各パラメータの影響 次に, このカオス様式の非周期振動の発生領域と内部共振の影響の関係を調べるために, 図2から各パラメータの値を変化させて

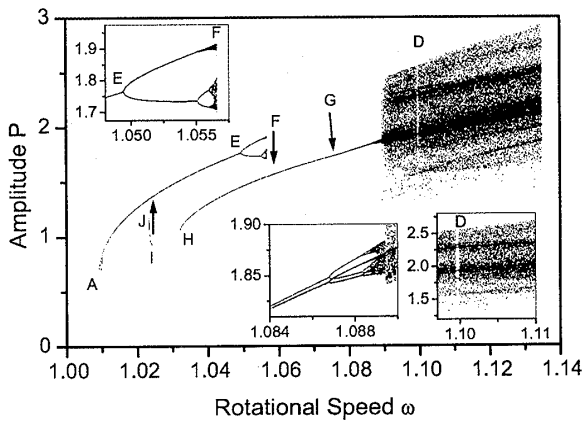
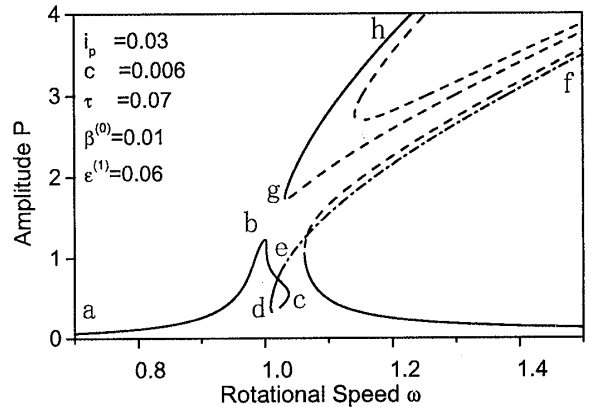


Fig.6 Bifurcation diagram

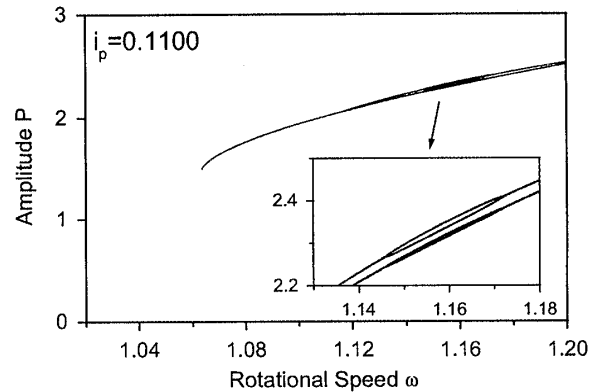
対応する分岐図を求めた．

パラメータ i_p の値を変化させたときの現象の変化を図7に示す． i_p が図2の値より小さくなると, 図1(b)に示した固有振動数の回転速度に対する変化が少なくなり, 調和振動 $[+p_f]$ と後向き調和振動 $[-p_b]$ の共振点が近づくため内部共振の影響は強くなり, 図7(a)に示されるような共振曲線となる (7)．このとき, 図中の鎖線の分枝 ef の存在する回転速度領域に, 同時に安定な分枝 gh が存在するようになり, この分枝 gh の引き込みが強いため, 数値シミュレーションにおいて, 図6で示したような鎖線の分枝における分岐やカオス様式の非周期振動は発生しにくくなる．また, さらに i_p を小さくすると, 安定な分枝 ab と gh が結合し1つの安定な分枝となり, 鎖線の分枝 gh における現象はさらに発生しにくくなる．

一方, i_p が図2の値より大きくなると, 調和振動 $[+p_f]$ と後向き調和振動 $[-p_b]$ の共振点が離れるため内部共振の影響は弱くなり, その結果, 図2における鎖線の領域は狭くなる．この i_p における分岐図を図7(b)に



(a) Resonance curves at the case of smaller i_p



(b) Bifurcation diagram at the case of larger i_p

Fig.7 Influence of the parameter i_p

示す。図6の場合と異なり、リミットサイクルが発生した後2回分岐して4周期軌道となるのみで、カオス様式の振動の領域は発生しない。また、リミットサイクルが発生する回転速度範囲も図6に比べて狭くなる。このように、内部共振に起因する主危険速度付近のカオス振動は、調和振動 $[+p_f]$ と後向き調和振動 $[-p_b]$ の共振点が近いほど発生しやすいのではなく、その間の距離がある適当な範囲にあるときのみ発生しやすいと言える。

次に、減衰係数 c の影響を調べる。回転速度を $\omega=1.12$ に固定し、図6におけるパラメータから減衰係数 c を変化させたときの分岐図を図8に示す。この分岐図では、定常振動の状態点をプロットするために、図5(a)の破線の方角に関してではなく、その軌道中で原点からの距離が極大となる点のうち、その変化が原点に対して反時計回りである場合の点をプロットした。そして、定常振動の状態点はそのままプロットした。

減衰係数が大きく、 $c=0.03$ であるとき、系の応答は定常振動であり、分岐図ではその状態点は1点で表される。減衰係数 c を0.03から徐々に小さくしてくると、図中のK点において、定常振動から概周期運動へと分岐する。(ここでの方法では、1重のリミットサイクルも1点のみしかサンプリングされない)さらに、減衰係数 c を小さくすると、リミットサイクルが周期倍分岐を起こして、2重、4重へと変化し、図6における減衰係数 $c=0.006$ ではカオス様式の振動へと変化している。

3-4 リアプノフ指数による解析 これらの数値的解析や近似解による解析で得られた振動現象がカオスであるか否かを確認するため、リアプノフ指数を計算した。この計算方法として、Wolfらによる方法⁽¹¹⁾を用い、データは式(1)を数値積分して得たものを用いた。この式は、1階の4つの式からなり、その動特性に関するリアプノフ指数は合計4つ計算されるが、その内の最

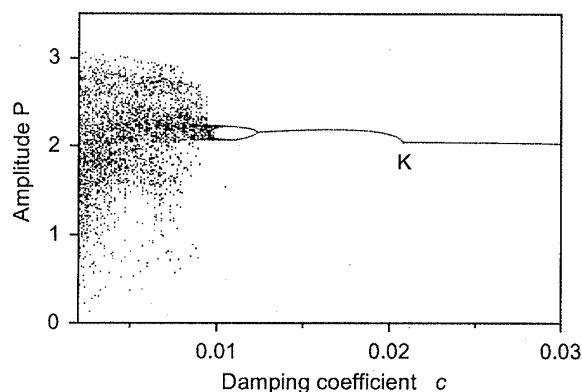


Fig.8 Influence of the damping coefficient c

大リアプノフ指数のみを図9に示す。この図のパラメータの値は、図2における値と同じである。この図からわかるように、図3で時刻歴、スペクトル、およびポアンカレ写像を示した回転速度 $\omega=1.000, 1.0109, 1.0540, 1.1200$ ではそれぞれ最大リアプノフ指数は $-0.00489, 0, 0, 0.01353$ となる。このリアプノフ指数の値からも、この領域において発生した振動現象は、定常振動($\lambda < 0$)から概周期運動($\lambda = 0$)、カオス振動($\lambda > 0$)へと変化していたことが確認できる。

4. 実験

4-1 実験装置 実験装置の概要を図10(a)に、上下軸受の設定を図10(b)に示す。上下の軸受中心間距離 $l=700$ mm、直径 $d=12$ mmの軸 S が、下端では単列深みぞ玉軸受(#6204)、上端では複列自動調心玉軸受(#1200)で支持されている。直径300 mm、厚さ14 mm

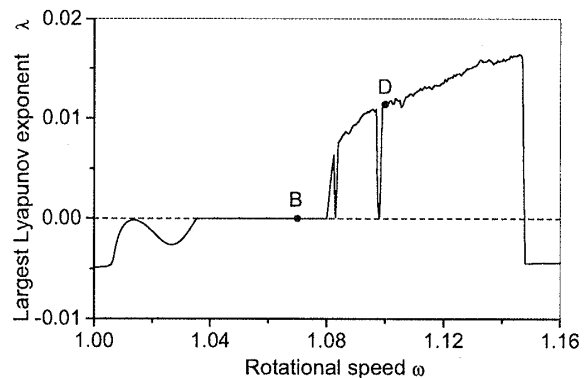


Fig.9 Largest Lyapunov exponents

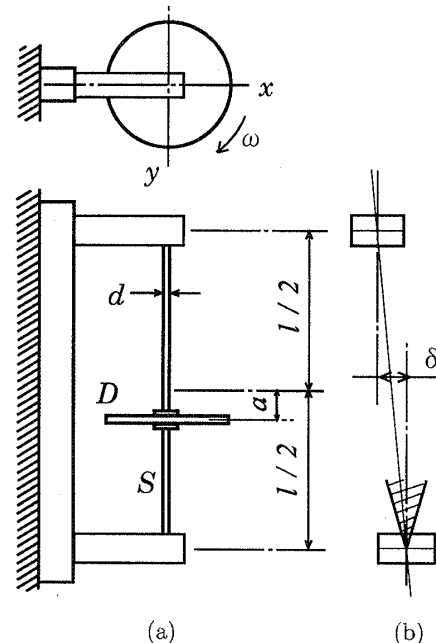


Fig.10 Experimental system

の回転体 D を軸に取り付け、軸中央から回転体中央までの距離を a とする。

この実験装置は軸の質量が円板の質量に対してはるかに小さいため、回転体のたわみと傾きに関する 4 自由度集中定数系として考えることができる。回転体を軸中央から離れた位置に設定した場合は、たわみ振動と傾き振動が連成する 4 自由度系となり、すべてのモードがジャイロモーメントの影響を受ける⁽⁶⁾。実験では、これらのモードのうち、低次のモード（たわみ振動が支配的なモード）の共振を調べる。系に作用するジャイロモーメントの大きさは、実験装置では円板の軸中央からの距離 a を変えることにより、上述の理論解析ではパラメータ i_p の大きさを変えることにより調整できる。

この実験装置は、下端の単列深みぞ玉軸受のクリアランスに起因して非線形ばね特性を持つ。このクリアランスは、図 10(b) の斜線で示すように現れ、その大きさは角度で $0.2^\circ \sim 0.5^\circ$ 程度、上端軸受部における水平方向距離に換算すると $2.5 \text{ mm} \sim 6 \text{ mm}$ 程度に相当する。下側軸受の軸受中心線と上側軸受の軸受中心線との水平距離を δ で表す。

組立状態がよい時 ($\delta \approx 0$) は、等方性の非線形ばね特性となり、この場合は、理論解析における $N(0)$ のみを考慮した系に対応する。一方、軸受中心線のずれ δ があるときは、等方性非線形性に加えて非対称非線形性が現れる。その系は、理論解析における $N(0)$ と $N(1)$ を考慮した系に対応する。これらの成分の大きさは、 δ を変化させることによって調整できる。

4.2 実験結果 本研究では、円板の位置を変化させ、主危険速度付近で発生する非線形振動を、特に振幅変調を伴う運動に注目して調べた。円板の軸中央からの距離 $a = 125 \text{ mm}$ 、上下軸受中心線のずれ $\delta = 4 \text{ mm}$ のときの実験結果を図 11 に示す。図 11(a) は、発生した振動の x, y 方向の振動を計測し、スペクトル解析により調和振動成分だけを抽出して求めた共振曲線を表し、○ は定常振動の振幅、● は振幅変調を伴う運動の振幅の最大値と最小値を示す。この図に示されるように、回転速度 880 rpm 付近から 940 rpm 付近において振幅変調幅の大きな運動が観察された。図 11(b), (c) に、この振幅変調を伴う運動の領域の点 a, b における時刻歴と回転軸の回転周期ごとに x, y 方向の軸変位をサンプリングしたポアンカレ写像を示す。図 11(b) では、時刻歴から振動の振幅が周期的に変化していることがわかり、ポアンカレ写像では閉ループが観察された。この状態は、理論解析における図 3(c) と定性的に一致しており、発生した振動が概周期運動であることが分かる。一

方、図 11(c) では、時刻歴の振動の振幅の変化が周期的ではなく、ポアンカレ写像では閉ループが崩壊して広がって分布している様子が観察された。この状態は、理論解析における図 3(d) と定性的に一致している。図 11(c) で示されたような状態は、この回転速度付近の比較的狭い領域においてのみ観察された。

次に、実験で得られた x の時刻歴データから遅れ座標を用いた疑似相空間上の軌道を構成し、Wolf らによる方法⁽¹¹⁾を用いて最大リアプノフ指数を計算した結果を図 11(d) に示す。図 11(c)(d) の対応から、図 11(c) に示した状態の領域において発生した振動のリアプノフ

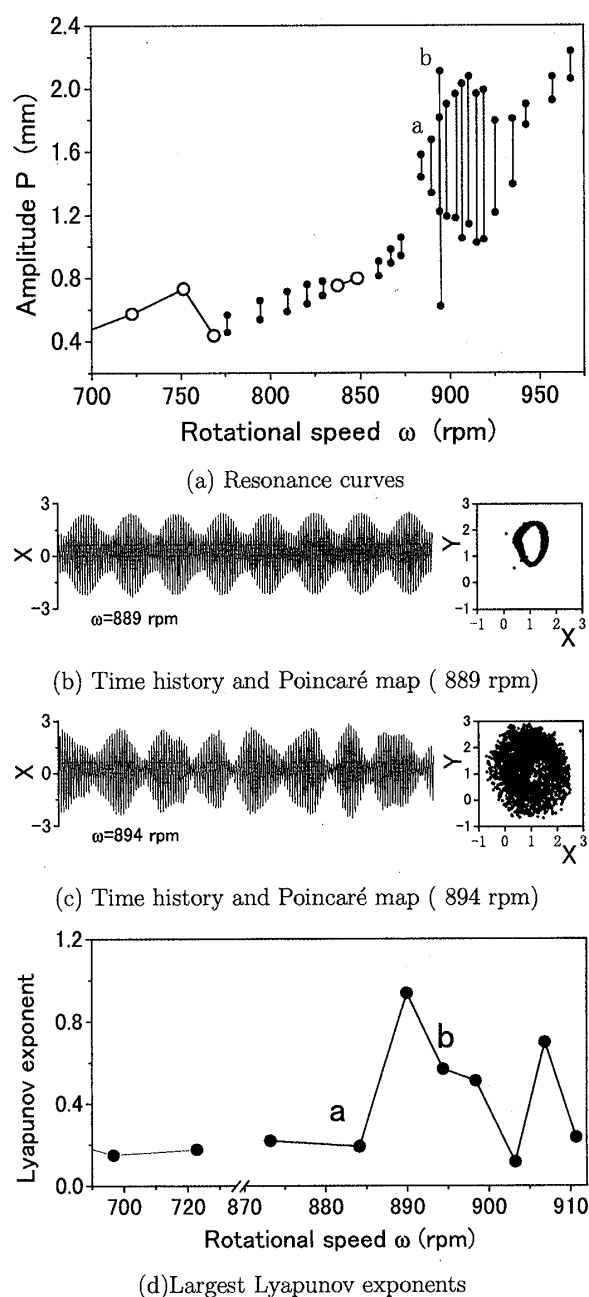


Fig.11 Experimental results

指数が正であることが確認でき、この結果から、実験においても、主危険速度付近において概周期運動からカオス振動が発生していることが確認できた。この発生する振動の種類と発生の分布、時刻歴やポアンカレ写像の様相は理論解析における図2、図3と定性的に一致している。

円板をこの位置付近から移動し、軸中央へ近づけた場合と遠ざけた場合についても幾通りかの実験を行った。その結果、どちらの場合においても、主危険速度付近ではこのカオス振動は発生しなくなり、ある回転速度領域で図11(b)に示したような概周期運動のみが発生するようになった。そして、円板の位置を軸中央からさらに遠ざけた場合は、主危険速度付近において、概周期運動も発生しなくなり、定常振動のみが振幅が大きくなって発生するようになった。このような円板の位置の変化に対する共振曲線の変化は、理論解析(節3-3.2)で示したパラメータ i_p の変化に対する共振曲線の変化と定性的に一致している。

5. 結論

非線形ばね特性を持つ回転軸の主危険速度付近における、1: (-1) 型の内部共振に起因する非線形現象について以下の結論を得た。

- (1) 内部共振の影響によって、共振曲線中の主要な分枝に Hopf 分岐点が発生し、その高速側で振幅変調を伴う振動が発生する。
- (2) この Hopf 分岐点の高速側では、近似方程式を数値積分するとリミットサイクルが得られ、このリミットサ

イクルは、回転速度 ω の増加とともに周期倍分岐を経てカオス振動へと変化する。

- (3) この Hopf 分岐点の高速側の一部の領域では、近似方程式の数値積分において、2つの安定なリミットサイクルが存在し、跳躍現象、履歴現象が発生する。
- (4) この分岐現象およびカオス振動は、前向きと後向きの調和振動の共振点が近すぎても離れすぎても発生しにくく、内部共振の影響がある適当な強さの範囲にあるときのみ発生しやすくなる。
- (5) 実験においても概周期運動からカオス振動が発生することを確認した。
- (6) 系の非線形性が弱い場合でも、内部共振の影響により回転軸系においてカオス振動が発生することを明らかにした。

文献

- (1) F.F.Ehrich, Trans. ASME, J. Vib. Acoust., Vol. 113, (1991), pp50-57
- (2) G.X.Li., M.P.Paidoussis., Nonlinear Dynamics, Vol.5 (1994), pp53-70
- (3) Sethna, P.R., Trans. ASME, J. Appl. Mech., 27-1 (1960), pp187
- (4) Nayfeh, A.H., Balachandran, B., Appl Mech Rev Vol.42, No.11, Part2, Nov 1989, pp175-201
- (5) Tousi, S., Bajaj, A.K., Appl. Mech., Vol.52, 1985, pp446-452
- (6) 石田・井上, 機論, 63-606(1997), 321
- (7) 石田・井上, 機論, 63-614(1997), 3335
- (8) 山本・石田, 機論, 41-345(1975), 1374
- (9) 山本・安田, 機論, 42-358(1976), 1693
- (10) F.F.Ehrich, Trans. ASME, J. Vib. Acoust., Vol. 114, (1992), pp498-505
- (11) Wolf, A., ほか3名, Physica D, 16(1985), 285-317