

## 回転軸系のカオス振動と内部共振現象\*

(和差調波共振と1/2次分数調波共振の共振点が近接する場合)

井上 剛志\*<sup>1</sup>, 石田 幸男\*<sup>1</sup>, 村山 拓仁\*<sup>2</sup>

### Chaotic Vibrations and Internal Resonance Phenomena in Rotor Systems

(Case that the Critical Speeds of a Combination Resonance and  
Subharmonic Resonances of Order 1/2 are close)

Tsuyoshi INOUE\*<sup>3</sup>, Yukio ISHIDA and Takuji MURAYAMA\*<sup>3</sup> Department of Electronic-Mechanical Engineering, Nagoya University,  
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya-shi, Aichi, 464-8603 Japan

In rotor systems, if the gyroscopic moment is small, a forward natural frequency and a backward natural frequency almost satisfy a condition of 1: (-1) internal resonance. In such systems, the critical speeds of the forward and the backward subharmonic resonances of order 1/2 and the combination resonance are close in the vicinity of twice the major critical speed and internal resonance phenomena may appear. This study clarifies dynamical characteristics of nonlinear phenomena due to internal resonance, such as steady-state oscillations, almost periodic motions, bifurcation phenomena, and two kinds of chaotic vibrations, at the rotational speed of twice the major critical speed.

**Key Words:** Vibration of Rotating Body, Nonlinear Vibration, Critical Speed, Internal Resonance, Combination Resonance, Subharmonic Resonance, Chaotic Vibration

#### 1. ま え が き

多くの回転機械では、ジャイロモーメントの作用が小さく、低次の前向きと後向きの固有振動数間に、ほぼ 1: (-1) の関係が成立する。また、回転機械の振動解析によく用いられているジェフコットロータは、前向きと後向きの固有振動数  $p_f$ ,  $p_b$  間に、厳密に  $p_f : p_b = 1 : (-1)$  の関係を持つモデルである。このような系では、内部共振<sup>(1)-(3)</sup>により、さまざまな特徴ある非線形現象が現れることが予想される。

著者らはこれまでに回転軸系の内部共振現象を明らかにしてきた。まず、ジェフコットロータの、主危険速度付近およびその2倍と3倍の回転速度付近において、共振曲線の変化等が発生することを明らかにし<sup>(4)(5)</sup>、つぎに、ジャイロモーメントの作用が小さい回転軸系において、内部共振系から単一共振系への遷移過程における内部共振現象の変化も明らかにした<sup>(4)(5)</sup>。

さらに、ジャイロモーメントの作用が小さい回転軸系の主危険速度付近で、カオス振動が発生することを示し、その動特性を明らかにした<sup>(6)</sup>。

本報では、ジャイロモーメントの作用が小さく、弱い非線形性を持つ回転軸系をとり扱う。そして、 $p_f - p_b = \omega$  が成立するとき発生する和差調波共振(以後、和差調波共振 [ $p_f - p_b$ ] とする)と前向きおよび後向き1/2次分数調波共振の共振点が近接する主危険速度の2倍の回転速度領域における振動現象を調べた。まず、実験において、2つの回転速度領域における1/2次分数調波共振の発生と和差調波共振 [ $p_f - p_b$ ] の発生、および分岐現象とカオス振動の発生を明らかにし、つぎに、それらの定性的特性を、簡単な2自由度モデルを用いた理論解析により説明する。

#### 2. 実 験

**2.1 実験装置** 実験装置の概要を図1(a)に示す。軸受中心間距離  $l = 700$  mm, 直径 12 mm の軸に、直径 300 mm, 厚さ 14 mm の回転体を取り付け、上端を複列自動調心玉軸受 (#1200), 下端を単列深み

\* 原稿受付 2001年1月15日。

<sup>1</sup> 名古屋大学大学院工学研究科(☎464-8603 名古屋市千種区不老町)。<sup>2</sup> ヤマハ発動機(株)。

E-mail: inoue@nuem.nagoya-u.ac.jp

ぞ玉軸受(#6204)で支持した。軸中央から回転体までの距離を  $a$  とする。本研究では、回転体が軸中央に比較的近く、低次のたわみ優勢なモードに対するジャイロモーメントの作用が小さい場合を考える。この装置を回転体のたわみと傾きに関する4自由度系とみなすと、例えば、回転体位置が  $a = 80 \text{ mm}$  のとき、主危険速度の2倍付近の固有振動数線図は図1(b)で表される。このような場合には、低次の前向きと後向きの固有振動数  $p_2$  と  $p_3$  は  $p_2 : p_3 = 1 : (-1)$  に近い関係を持ち、その結果、前向き1/2次分数調波共振、後向き1/2次分数調波共振、和差調波共振  $[p_2 - p_3]$  の共振点  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  はお互いに近接して存在する。

本装置で用いたような、単列深みぞ玉軸受には、一般に、わずかなクリアランスが存在する。そのため、本装置では、軸下端の傾きが軸受クリアランス内にあるときは単純支持、クリアランス外にあるときは固定支持となることに起因して、弱い対称非線形性が現れる。さらに、下側軸受の軸受中心線の延長線と上側軸受の中心とのずれ  $\delta$  が存在する場合には、この実験装置は非対称非線形ばね特性を持つ系となる。

**2.2 実験結果** 本研究では、回転体位置を  $a = 50 \sim 130 \text{ mm}$  と比較的軸中央に近いさまざまな位置に設定し、また、そのそれぞれの場合において下側軸受の軸受中心線の延長線と上側軸受の中心とのずれを  $\delta = 2 \sim 6 \text{ mm}$  の範囲で変化させて詳細に実験を行った。

**2.2.1 1/2次分数調波共振における分岐現象とカオス** 回転体位置を  $a = 80 \text{ mm}$ 、下側軸受の軸受中心線の延長線と上側軸受の中心とのずれを  $\delta = 6 \text{ mm}$  に設定し、前述の3つの共振点、すなわち  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  が近接する主危険速度の2倍付近において発生する共振現象を観察した結果を図2に示す。共振点  $\omega_1$  と  $\omega_2$  に対応する2ヶ所の回転速度領域 ( $\omega = 1530 \sim 1670$

rpm 付近と  $\omega = 1330 \sim 1430 \text{ rpm}$  付近) において1/2次分数調波共振が発生し、その間の和差調波共振  $[p_2 - p_3]$  の共振点  $\omega_3$  に対応する回転速度領域 ( $\omega = 1460 \sim 1520 \text{ rpm}$  付近) で、振幅変調運動が発生した。図2(a)には1/2次分数調波振動と和差調波共振  $[p_2 - p_3]$  の振幅変調運動の前向き成分を示し、図2(b)にはそれらの後向き成分を示した。○は定常振動の振幅を、●は振幅変調運動の振幅の最大値と最小値を表す。

低速側の1/2次分数調波共振 B では後向き成分が優勢であり、高速側の1/2次分数調波共振 A では前向き成分が優勢であった。また、高速側の1/2次分数調波共振 A では、1550 rpm 付近から定常振動が分岐により振幅変調運動へと発展した。そして、 $\omega = 1570 \sim 1600 \text{ rpm}$  付近において、より大きな変調幅を持つ振幅変調運動が確認された。

この1/2次分数調波共振 A における定常振動から振幅変調運動へ発展する過程(図2中の d, e, f 点)の時刻歴と、軸の1回転毎にサンプリングしたポアンカレ写像を図3に示す。図3(a)(d点: 1542 rpm)は定常な1/2次分数調波共振であり、ポアンカレ写像では2点が現れる。図3(b)(e点: 1562 rpm)では振幅

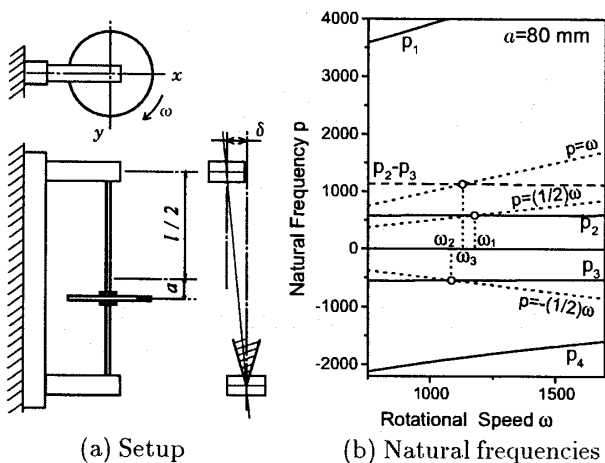
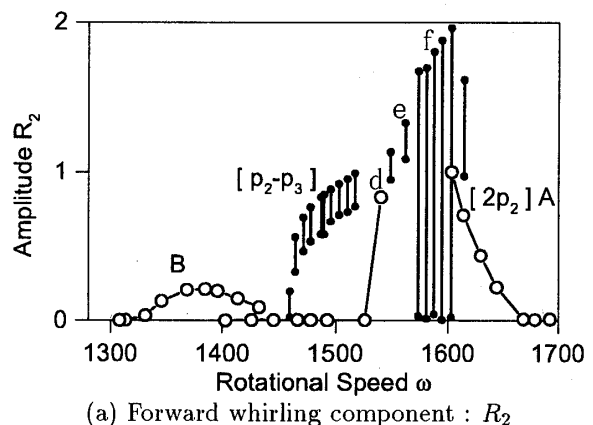
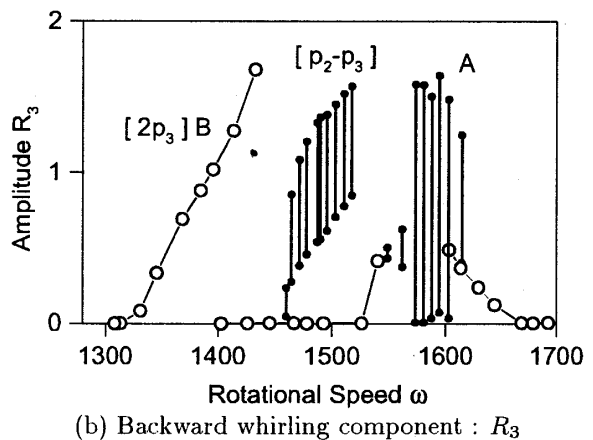


Fig. 1 Experimental system



(a) Forward whirling component :  $R_2$



(b) Backward whirling component :  $R_3$

Fig. 2 Resonance curves  
(Experiment :  $a = 80 \text{ mm}$ )

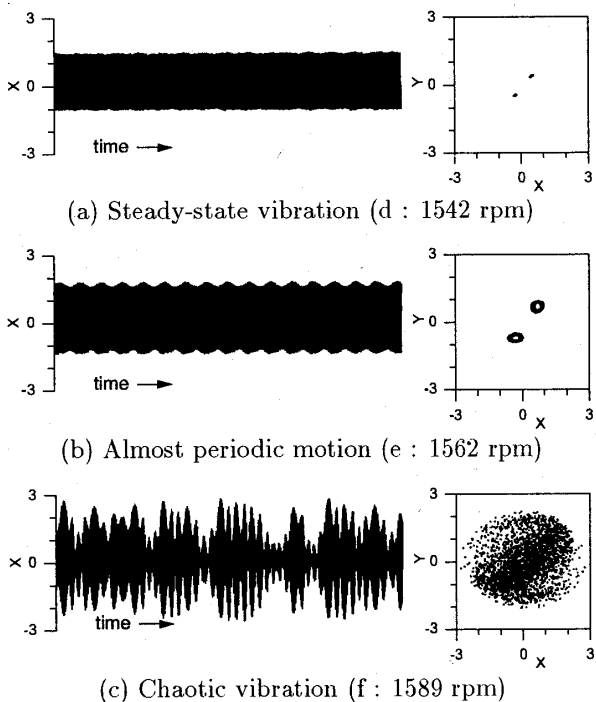


Fig. 3 Time histories and Poincaré maps (Experiment)

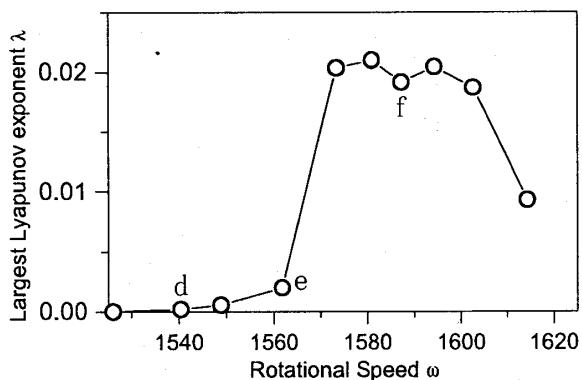


Fig. 4 Largest Lyapunov exponents (Experiment)

が軸の回転周期と比較して長い周期で変化していることが確認でき、ポアンカレ写像は2つの閉ループを描く。そして、最後に図3(c)(f点: 1589 rpm)では時刻歴はカオス様式となり、ポアンカレ写像では閉ループが崩れ、有限領域内の点の集合として観察された。

実験で得られた変位  $x$  の時刻歴データから遅れ座標による擬相空間を用いて最大リャプノフ指数<sup>(7)</sup>を計算した結果を図4に示す。この方法では、0未満の指数は計算できず、計測誤差等に起因して、微小な正の値が得られる場合もある。この図中のd, e点近傍は、このような誤差の範囲内である。回転速度 1589 rpm 付近(図2, 3中のf点付近)における振動は、リャプノフ指数が他の点(d点やe点)と比べて大きな正の値となっており、カオス振動であることが確認できる。

2.2.2 和差調波共振  $[p_2 - p_3]$  における分岐現象

回転体位置は  $a = 80$  mm のままで、下側軸受の軸受中心線の延長線と上側軸受の中心とのずれを  $\delta = 3$  mm としたとき得られた前向き成分を図5に示す。これは非対称非線形性が小さくなった場合である。 $\omega = 1280 \sim 1460$  rpm 付近において和差調波共振  $[p_2 - p_3]$  の振幅変調運動が発生し、1330 rpm 付近から高速側の1/2次分数調波共振Aが発生したが、和差調波共振に引き込まれた。また、1/2次分数調波共振のBは発生しなかった。この和差調波共振の振幅変調運動の時刻歴とポアンカレ写像を図6に示す。図6(a)(g点: 1324 rpm)では、ポアンカレ写像は1重のループとなり、回転速度を上げると、図6(b)(h点: 1368 rpm)では2重の閉ループ、図6(c)(i点: 1385 rpm)では、閉ループが崩れた様子が観測された。

ジャイロモーメントと非対称非線形性の大きさの

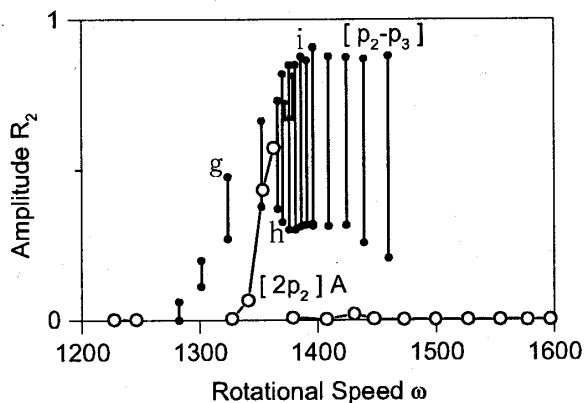


Fig. 5 Resonance curves (Experiment:  $a = 80$  mm)

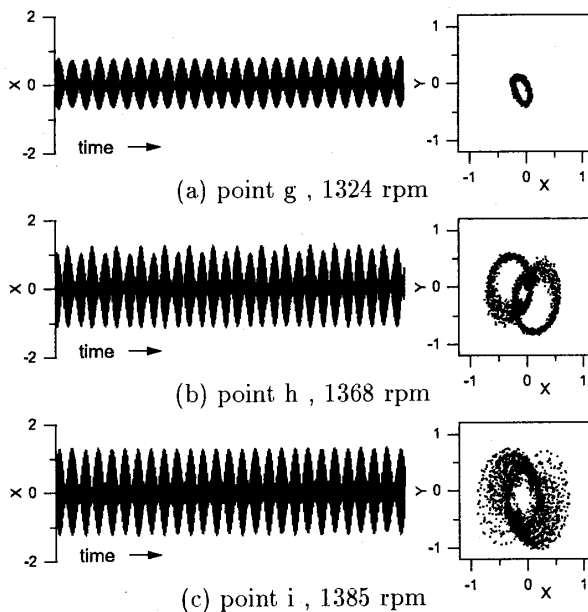


Fig. 6 Time histories and Poincaré maps (Experiment)

Table 1 Influence of rotor position ( $\delta = 4$  mm)

$a$ [mm]	50	60	65	70	75	80	90	100	110	130
$[2p_3]$ B				○	○	○	○	○	○	○
$[p_2 - p_3]$	○	○		○	○	⊙	○	○		○
$[2p_2]$ A	○	○		●	⊙	⊙	⊙	⊙	○	⊙

Table 2 Influence of discrepancy between bearing center lines ( $a = 80$  mm)

discrepancy $\delta$ [mm]	2	3	4	6
$[2p_3]$ B			○	○
$[p_2 - p_3]$			⊙	⊙
$[2p_2]$ A			⊙	●

変化が分岐現象に与える影響を調べるために、回転体位置  $a$  と、上下軸受中心線間のずれ  $\delta$  を変化させて共振現象を観察した結果を表 1, 2 に示す。ここで○は定常振動の発生, ⊙は分岐現象の発生, そして●はカオス振動の発生を表す。  $a$  や  $\delta$  がある範囲にあるときに分岐現象やカオス振動が発生することが分かる。

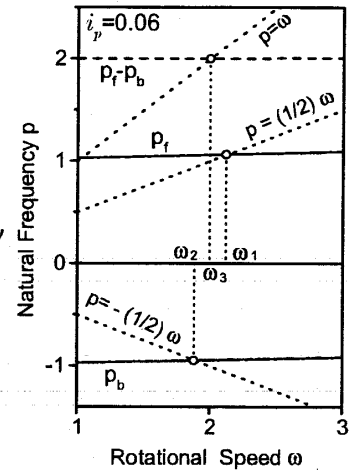
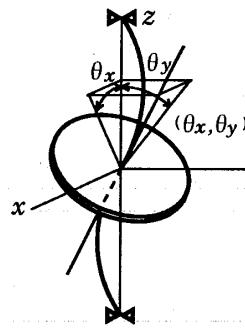
### 3. 理論解析

**3.1 運動方程式と固有振動数線図** 実験において発生した共振現象の特性を明らかにするため理論解析を行う。

実験装置をそのまま回転体のたわみと傾きに関する 4 自由度系としてモデル化すると、回転体の位置の影響などの実験結果との対比はしやすいが、非線形現象の解析に用いるには非線形項の数が非常に多くなり、また、それぞれの非線形項の物理的意味や具体的要因を明確にすることが難しい<sup>(8)</sup>。したがって、本研究では、ジャイロモーメントの作用を考慮した最も簡単なモデルである 2 自由度傾き振動モデル (図 7(a)) を用いる<sup>(8)-(10)</sup>。質量のない弾性軸の中央に回転体を取り付けた系では、回転体のたわみ運動と傾き運動間の連成が無くなり、それぞれの運動を独立で扱うことができるが、このモデル (図 7(a)) はそのうちの傾き運動を表したものである。このモデルにおける非線形項の物理的説明は既報で示してある<sup>(8)(10)</sup>。

回転体の極慣性モーメントを  $I_p$ 、直径に関する慣性モーメントを  $I$ 、回転体位置の軸の傾きを  $\theta_x, \theta_y$ 、軸のばね定数を  $\delta$ 、減衰係数を  $c$ 、回転体の動不つりあい  $\tau$ 、回転角速度を  $\omega$ 、時刻を  $t$  で示す。このモデルの運動方程式は次式となる<sup>(8)-(10)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} I\ddot{\theta}_x + I_p\omega\dot{\theta}_y + c\dot{\theta}_x + \delta\theta_x &= (I - I_p)\tau\omega^2 \cos\omega t, \\ I\ddot{\theta}_y - I_p\omega\dot{\theta}_x + c\dot{\theta}_y + \delta\theta_y &= (I - I_p)\tau\omega^2 \sin\omega t. \end{aligned} \right\} (1)$$



(a) 2DOF inclination model (b) Natural frequencies

Fig. 7 Theoretical model

そして、発生する傾き角と同程度の大きさの代表角度  $\tau_0$  を選び、つぎに示す無次元量を用いて運動方程式の無次元化を考える。

$$\left. \begin{aligned} \theta'_x &= \theta_x/\tau_0, \theta'_y = \theta_y/\tau_0, \tau' = \tau/\tau_0, \\ i_p &= I_p/I, t' = t\sqrt{\delta/I}, \omega' = \omega/\sqrt{\delta/I}, \\ c' &= c/\sqrt{\delta I}. \end{aligned} \right\} (2)$$

式 (2) の無次元量を用いることにより、無次元表示の運動方程式は次式のように得る<sup>(8)-(10)</sup>。なお、無次元化後に  $l$  は省略した。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta}_x + i_p\omega\dot{\theta}_y + c'\dot{\theta}_x + \theta_x + N_{\theta x} &= (1 - i_p)\tau\omega^2 \cos\omega t \\ \ddot{\theta}_y - i_p\omega\dot{\theta}_x + c'\dot{\theta}_y + \theta_y + N_{\theta y} &= (1 - i_p)\tau\omega^2 \sin\omega t \end{aligned} \right\} (3)$$

ここで、復元力中の非線形項<sup>(4)(8)</sup>を表す  $N_{\theta x}, N_{\theta y}$  を加えてある。パラメータ  $i_p$  は、回転体の極慣性モーメント  $I_p$  と直径に関する慣性モーメント  $I$  の比であり、系に作用するジャイロモーメントの大きさを表す。本研究では、ジャイロモーメントの作用が小さい場合を考えているので、 $i_p$  が小さい場合を考える。

振動数方程式は、式 (3) において、 $c = 0, \tau = 0, N_{\theta x} = 0, N_{\theta y} = 0$  とし、 $\theta_x = A \cos pt, \theta_y = A \sin pt$  とおくことにより次式で与えられる。

$$G(p) = 1 + i_p\omega p - p^2 = 0 \quad (4)$$

このモデルの固有振動数線図の例を図 7(b) に示す。前向きふれまわりと後向きふれまわりの固有振動数  $p_f$  と  $p_b$  は、ジャイロモーメントの作用により、回転速度の関数として変化する。しかし、 $i_p$  の値が小さく、系に作用するジャイロモーメントが小さい場合には、図 7(b) のように、回転速度に対してあまり変化しない。その結果、前向き 1/2 次分数調波共振、後向き 1/2 次

分数調波共振, および和差調波共振  $[p_f - p_b]$  の共振点  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  は近接する.

実験装置における玉軸受のクリアランスに起因する非線形ばね特性を変位の3乗までのべき級数で表すこととする. 回転軸系における非線形成分の表現は, 軸のふれまわり方向角  $\varphi$  が  $2\pi$  変化する間に増減する回数  $n$  によってその物理的性質を分類することができ, その成分を記号  $N(n)$  で表す<sup>(8)</sup>. 座標の3乗までの非線形項を考えた場合, 成分  $N(0) \sim N(4)$  が存在する<sup>(8)</sup>. 本報では, 玉軸受のクリアランスと軸受中心線のずれに起因する非対称非線形性を考慮し, 非線形成分  $N(0)$  と  $N(1)$  のみが存在する系について解析する. 成分  $N(0)$  と  $N(1)$  の大きさを表す係数は, それぞれ  $\beta^{(0)}$  と  $\varepsilon^{(1)}$  で表す.

### 3.2 1/2 次分数調波共振の解析

前向きおよび後向き 1/2 次分数調波共振の共振点  $\omega_1$  と  $\omega_2$  が近接するため, 内部共振の影響により, 振動数  $(1/2)\omega$  と  $-(1/2)\omega$  の振動が同時に発生すると予想して, 解を  $O(\varepsilon)$  精度でつぎのように仮定する.

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= R_f \cos\left(\frac{1}{2}\omega t + \delta_f\right) + R_b \cos\left(-\frac{1}{2}\omega t + \delta_b\right) \\ &\quad + P \cos(\omega t + \beta) + A_x \\ \theta_y &= R_f \sin\left(\frac{1}{2}\omega t + \delta_f\right) + R_b \sin\left(-\frac{1}{2}\omega t + \delta_b\right) \\ &\quad + P \sin(\omega t + \beta) + A_y \end{aligned} \right\} (5)$$

式(5)を式(3)に代入し, 振動数  $(1/2)\omega$  と  $-(1/2)\omega$  および定数項について,  $O(\varepsilon)$  精度で両辺を等置すると,  $R_f, R_b, \delta_f, \delta_b$  及び定数項  $A_x, A_y$  に関する次式を得る.

$$\left. \begin{aligned} A_f \dot{R}_f &= -\frac{1}{2} c \omega R_f \\ &\quad + 2\varepsilon^{(1)} \{-PR_f \sin 2\delta_f - PR_b \sin(\delta_f - \delta_b) \\ &\quad + R_b A_x \sin(\delta_f + \delta_b) - R_b A_y \cos(\delta_f + \delta_b)\} \\ &\quad + 4\beta^{(0)} \{(A_x^2 - A_y^2) R_b \sin(\delta_f + \delta_b) \\ &\quad - 2A_x A_y R_b \cos(\delta_f + \delta_b) + 2PR_f A_y \cos 2\delta_f \\ &\quad - 2PR_f A_x \sin 2\delta_f - 2PR_b A_x \sin(\delta_f - \delta_b) \\ &\quad - 2PR_b A_y \cos(\delta_f - \delta_b)\} \\ A_f R_f \dot{\delta}_f &= G\left(\frac{\omega}{2}\right) R_f \\ &\quad + 2\varepsilon^{(1)} \{-PR_f \cos 2\delta_f - PR_b \cos(\delta_f - \delta_b) \\ &\quad + 2A_x R_f + A_x R_b \cos(\delta_f + \delta_b) \\ &\quad + A_y R_b \sin(\delta_f + \delta_b)\} \\ &\quad + 4\beta^{(0)} \{R_f (R_f^2 + 2R_b^2 + 2P^2 + 2A_x^2 + 2A_y^2) \\ &\quad + (A_x^2 - A_y^2) R_b \cos(\delta_f + \delta_b) \\ &\quad + 2A_x A_y R_b \sin(\delta_f + \delta_b) - 2PR_f A_x \cos 2\delta_f \\ &\quad - 2PR_f A_y \sin 2\delta_f - 2PR_b A_x \cos(\delta_f - \delta_b) \\ &\quad + 2PR_b A_y \sin(\delta_f - \delta_b)\} \end{aligned} \right\} (6)$$

$$\left. \begin{aligned} A_b \dot{R}_b &= \frac{1}{2} c \omega R_b \\ &\quad + 2\varepsilon^{(1)} \{PR_f \sin(\delta_f - \delta_b) \\ &\quad + R_f A_x \sin(\delta_f + \delta_b) - R_f A_y \cos(\delta_f + \delta_b)\} \\ &\quad + 4\beta^{(0)} R_f \{(A_x^2 - A_y^2) \sin(\delta_f + \delta_b) \\ &\quad - 2A_x A_y \cos(\delta_f + \delta_b) + 2A_x P \sin(\delta_f - \delta_b) \\ &\quad + 2A_y P \cos(\delta_f - \delta_b)\} \\ A_b R_b \dot{\delta}_b &= G\left(\frac{-\omega}{2}\right) R_b \\ &\quad + 2\varepsilon^{(1)} \{-PR_f \cos(\delta_f - \delta_b) + 2A_x R_b \\ &\quad + A_x R_f \cos(\delta_f + \delta_b) + A_y R_f \sin(\delta_f + \delta_b)\} \\ &\quad + 4\beta^{(0)} \{R_b (2R_f^2 + R_b^2 + 2P^2 + 2A_x^2 + 2A_y^2) \\ &\quad + (A_x^2 - A_y^2) R_f \cos(\delta_f + \delta_b) \\ &\quad + 2A_x A_y R_f \sin(\delta_f + \delta_b) - 2A_x P R_f \cos(\delta_f - \delta_b) \\ &\quad + 2A_y P R_f \sin(\delta_f - \delta_b)\} \end{aligned} \right\} (7)$$

$$\left. \begin{aligned} i_p \omega \dot{A}_x &= A_y + 2\varepsilon^{(1)} \{A_x A_y + R_f R_b \sin(\delta_f + \delta_b)\} \\ &\quad + 4\beta^{(0)} \{A_y (A_x^2 + A_y^2 + 2P^2 + 2R_f^2 + 2R_b^2) \\ &\quad - PR_f^2 \sin 2\delta_f + 2PR_f R_b \sin(\delta_f - \delta_b) \\ &\quad + 2R_f R_b A_x \sin(\delta_f + \delta_b) - 2R_f R_b A_y \cos(\delta_f + \delta_b)\} \\ -i_p \omega \dot{A}_y &= A_x + \varepsilon^{(1)} \{2R_f^2 + 2R_f R_b \cos(\delta_f + \delta_b) \\ &\quad + 2R_b^2 + 2P^2 + 3A_x^2 + A_y^2\} \\ &\quad + 4\beta^{(0)} \{A_x (A_x^2 + A_y^2 + 2P^2 + 2R_f^2 + 2R_b^2) \\ &\quad - PR_f^2 \cos 2\delta_f - 2R_f R_b P \cos(\delta_f - \delta_b) \\ &\quad + 2R_f R_b A_y \sin(\delta_f + \delta_b) + 2R_f R_b A_x \cos(\delta_f + \delta_b)\} \end{aligned} \right\} (8)$$

上式において,  $A_f = (1 - i_p)\omega$ ,  $A_b = -(1 + i_p)\omega$ ,  $G(\omega/2) = 1 + i_p \omega^2/2 - \omega^2/4$ ,  $G(-\omega/2) = 1 - i_p \omega^2/2 - \omega^2/4$  である. また, 調和振動成分の振幅  $P$ , 位相  $\beta$  は,  $O(\varepsilon^0)$  精度の解析により得られる  $P = -(1 - i_p)\tau\omega^2/(1 + i_p\omega^2 - \omega)$ ,  $\beta = -\pi$  を用いた.

### 3.3 和差調波共振 $[p_f - p_b]$ の解析

和差調波共振  $[p_f - p_b]$  の共振点  $\omega_3$  付近で, 固有振動数  $p_f, p_b$  に近い振動数  $\theta_f, \theta_b$  を持つ振動が同時に発生すると予想する. この発生振動数は  $O(\varepsilon^0)$  精度では  $\omega_f \equiv (p_{f0}/\omega_3)\omega$  と  $\omega_b \equiv (p_{b0}/\omega_3)\omega$  で表すことができる<sup>(11),(12)</sup>. ここで,  $p_{f0}$  と  $p_{b0}$  は共振点  $\omega_3$  における  $p_f$  と  $p_b$  の値である. 解を次のように仮定する.

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= R_f \cos(\omega_f t + \delta_f) + R_b \cos(\omega_b t + \delta_b) \\ &\quad + P \cos(\omega t + \beta) + A_x \\ \theta_y &= R_f \sin(\omega_f t + \delta_f) + R_b \sin(\omega_b t + \delta_b) \\ &\quad + P \sin(\omega t + \beta) + A_y \end{aligned} \right\} (9)$$

式(9)を式(3)に代入し, 振動数  $\omega_f$  と  $\omega_b$  および定数項について,  $O(\varepsilon)$  精度で両辺を等置することにより,  $R_f, R_b, \delta_f, \delta_b$  および定数項  $A_x, A_y$

に関する以下の式を得ることができる。

$$\left. \begin{aligned} A_f \dot{R}_f &= -\{cR_f\omega_f + 8PA_x R_b \beta^{(0)} \sin \psi \\ &\quad + 8PA_y R_b \beta^{(0)} \cos \psi + 2PR_b \varepsilon^{(1)} \sin \psi\} \\ A_b \dot{R}_b &= -cR_b \omega_b + 8PA_x R_f \beta^{(0)} \sin \psi \\ &\quad + 8PA_y R_f \beta^{(0)} \cos \psi + 2PR_f \varepsilon^{(1)} \sin \psi \end{aligned} \right\} (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{1}{A_b A_f R_b R_f} \left\{ 4(2A_b - A_f) R_b^3 R_f \beta^{(0)} \right. \\ &\quad + 2A_b P R_b^2 (-4A_x \beta^{(0)} \cos \psi \\ &\quad + 4A_y \beta^{(0)} \sin \psi - \varepsilon^{(1)} \cos \psi) \\ &\quad - 2A_f P R_f^2 (-4A_x \beta^{(0)} \cos \psi \\ &\quad + 4A_y \beta^{(0)} \sin \psi - \varepsilon^{(1)} \cos \psi) \\ &\quad + R_b R_f (-A_f G(\omega_b) + A_b G(\omega_f) \\ &\quad + 4(2A_b P^2 - 2A_f P^2 + 2A_b A_x^2 \\ &\quad - 2A_f A_x^2 + 2A_b A_y^2 - 2A_f A_y^2 \\ &\quad + A_b R_f^2 - 2A_f R_f^2) \beta^{(0)} \\ &\quad \left. + 4A_b A_x \varepsilon^{(1)} - 4A_f A_x \varepsilon^{(1)} \right\} \end{aligned} \right\} (11)$$

$$\left. \begin{aligned} i_p \omega \dot{A}_x &= A_y + 4A_x^3 \beta^{(0)} + 4A_y^3 \beta^{(0)} \\ &\quad - 12P R_b R_f \beta^{(0)} \cos \psi \\ &\quad + 6A_y (P^2 + R_b^2 + R_f^2) \beta^{(0)} \\ &\quad + A_x (6(P^2 + R_b^2 + R_f^2) \beta^{(0)} + 2A_y \varepsilon^{(1)}) \\ -i_p \omega \dot{A}_y &= A_x + 2A_y (P^2 + R_b^2 + R_f^2) \beta^{(0)} \\ &\quad + 2A_x (P^2 + 2A_y^2 + R_b^2 + R_f^2) \beta^{(0)} \\ &\quad + A_y^2 \varepsilon^{(1)} + A_x^2 (4A_y \beta^{(0)} + 3\varepsilon^{(1)}) \\ &\quad + 2(-2P R_b R_f \beta^{(0)} \cos \psi \\ &\quad + P^2 \varepsilon^{(1)} + R_b^2 \varepsilon^{(1)} + R_f^2 \varepsilon^{(1)}) \end{aligned} \right\} (12)$$

ここで、 $A_f = 2\omega_f - i_p \omega$ 、 $A_b = 2\omega_b - i_p \omega$ 、 $G(\omega_f) = 1 + i_p \omega \omega_f - \omega_f^2$ 、 $G(\omega_b) = 1 + i_p \omega \omega_b - \omega_b^2$  である。

**3.4 共振曲線** 1/2 次分数調波共振の共振曲線は式 (6)-(8) を解くことにより、また、和差調波共振の共振曲線は式 (10)-(12) を解くことにより求まる。パラメータ  $i_p$  の値が小さい場合の共振曲線の例を図 8 に示す。この図には 1/2 次分数調波共振、および和差調波共振  $[p_f - p_b]$  の前向き成分のみを示した。実線は安定解、破線と鎖線は不安定解を示す。鎖線は、ホップ分岐による不安定解である。図中の ○、● と ▲ は数値シミュレーション結果である。

図 7(b) で示した共振点  $\omega_1$ 、 $\omega_2$  に対応して、2ヶ所の回転速度領域において 1/2 次分数調波共振が発生し、高速側の共振曲線ではホップ分岐により振幅変調運動が発生した。○ は定常解の振幅、● は 1/2 次分数調波共振からホップ分岐により発生した振幅変調運動の振幅の最大値と最小値を示す。そして、その 2ヶ所の 1/2 次分数調波共振の間の回転速度領域において、和差調波共振  $[p_f - p_b]$  の共振曲線に対応し、振幅変調

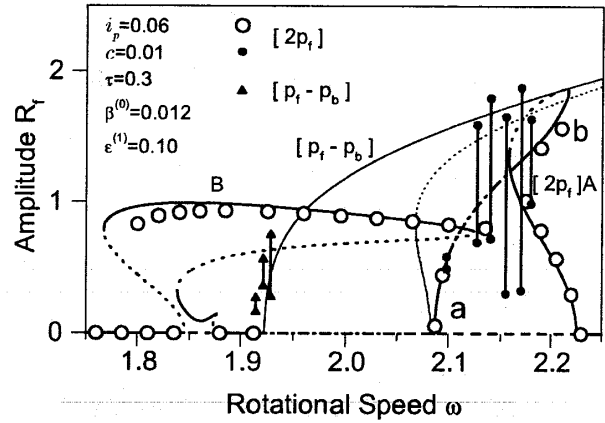


Fig. 8 Resonance curves ( $\varepsilon^{(1)} = 0.1$ )

運動が発生する。▲ は和差調波共振  $[p_f - p_b]$  の振幅変調運動の振幅の最大値と最小値を示す。これらの共振や分岐の様子、および発生する振動の種類分布は、図 2 で示した実験結果と定性的に良く一致している。

### 3.5 1/2 次分数調波共振におけるカオス

図 8 の 1/2 次分数調波共振 A の分岐の鎖線の領域における振動現象を、式 (3) を直接数値積分して調べる。図 8 で定常解から振幅変調運動に変化した  $\omega = 2.1$  付近のいくつかの回転速度での  $\theta_x$  の時刻歴、ポアンカレ写像およびスペクトルを図 9 に示す。

図 9(a) ( $\omega = 2.095$ ) は、1/2 次分数調波共振に対応し、ポアンカレ写像では 2 点が現れる。そのスペクトルでは回転速度  $\omega$  成分、 $\pm(1/2)\omega$  成分、そして定数成分が大きく現れている。図 9(b) ( $\omega = 2.099$ ) では、ホップ分岐により振幅が軸の回転周期と比較して長い周期で変化していることが確認でき、ポアンカレ写像は 2 つの閉ループを描くようになる。このときスペクトルは  $\pm(1/2)\omega$  成分、および定数成分に加え、その両側に等間隔に多くの振動数成分が発生している。さらに回転速度を上げると、周期倍分岐が発生し、ポアンカレ写像のループは 2 重 (図 9(c) ( $\omega = 2.100$ ))、4 重と変化していく。そして、図 9(d) ( $\omega = 2.131$ ) では時刻歴は非周期的となり、ポアンカレ写像は有限領域内に分散した点の集合になる。スペクトルにおいては  $\pm(1/2)\omega$  成分付近、および定数成分付近だけでなく、広い範囲で振動数成分が連続的に分布して発生していることが分かる。これらの解析結果は図 3 で示した実験結果と定性的に一致している。

以上の理論解析で得られた振動現象について、リアプノフ指数<sup>(7)</sup>を計算した。図 10 に、図 8 の A の分岐 ( $\omega = 2.087 \sim 2.200$ ) に関する最大リアプノフ指数を示す。回転速度  $\omega = 2.125$  あたりでは B の分岐に引

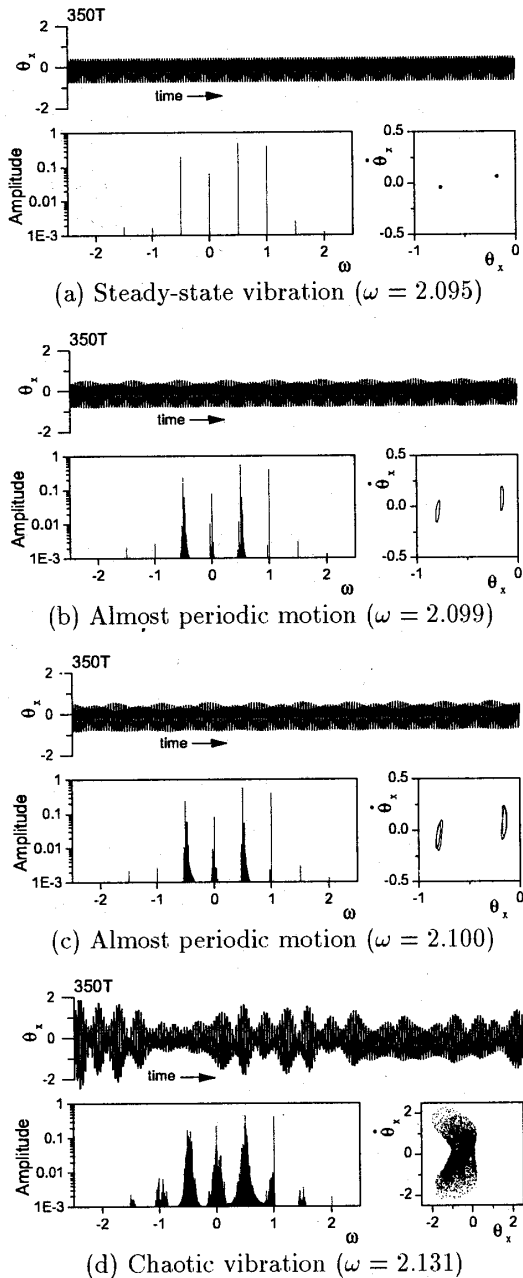


Fig. 9 Time histories and Poincaré map

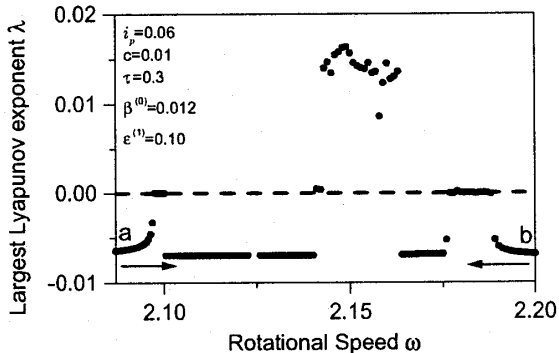


Fig. 10 Largest Lyapunov exponents

き込まれ、また  $\omega = 2.175$  では  $[2p_f]A$  の高速側の分枝に引き込まれるため、リャプノフ指数は負となっているが、 $\omega = 2.135 \sim 2.165$  付近における回転速度範囲でリャプノフ指数が正となる。

以上の解析結果により、実験で発生したカオス振動の振動特性と内部共振の影響を説明することができた。

### 3.6 和差調波共振 $[p_f - p_b]$ におけるカオス

非対称非線形性の大きさを表すパラメータ  $\epsilon^{(1)}$  を小さくしたときの共振曲線を図 11 に示す。図 8 の場合と異なり、和差調波共振  $[p_f - p_b]$  に関連した振幅変調運動が優勢となる。そして、その振幅変調運動において、 $\omega = 2.00 \sim 2.05$  付近で、大きな振幅変調幅の領域が発生する。

図 12 に、この和差調波共振  $[p_f - p_b]$  に関する振幅変調運動の  $\theta_x$  の時刻歴、ポアンカレ写像、スペクトル図を示す。図 12(a) ( $\omega = 1.96$ ) では振幅が軸の回転周期と比較して長い周期で変化し、ポアンカレ写像は 1 重の開ループとなる。スペクトルは、 $\omega_f$ 、 $\omega_b$  成分、回転速度  $\omega$  成分と定数成分に加え、その両側に等間隔に発生する。回転速度を上げると図 12(b) ( $\omega = 1.998$ ) に示すようにポアンカレ写像は 2 重の開ループに分岐する。さらに回転速度を上げると、図 12(c) ( $\omega = 2.00$ ) に示すように、時刻歴は非周期的となり、ポアンカレ写像は有限領域内に分散した点の集合になる。スペクトルは  $\omega_f$ 、 $\omega_b$  成分、回転速度  $\omega$  成分と定数成分近傍に数多く発生する。

図 11 の和差調波共振  $[p_f - p_b]$  の振幅変調運動についての最大リャプノフ指数の計算結果を図 13 に示す。 $\omega = 1.95$  付近から、和差調波共振  $[p_f - p_b]$  の振幅変調運動の発生に対応して、最大リャプノフ指数は零となり、振幅変調幅が大きい領域 ( $\omega = 2.00 \sim 2.05$  付

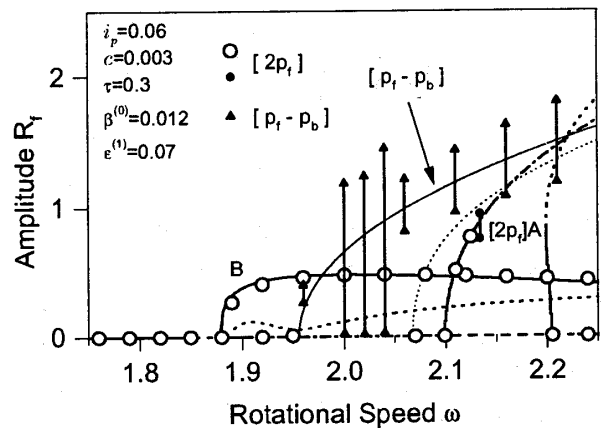


Fig. 11 Resonance curves ( $\epsilon^{(1)} = 0.07$ )

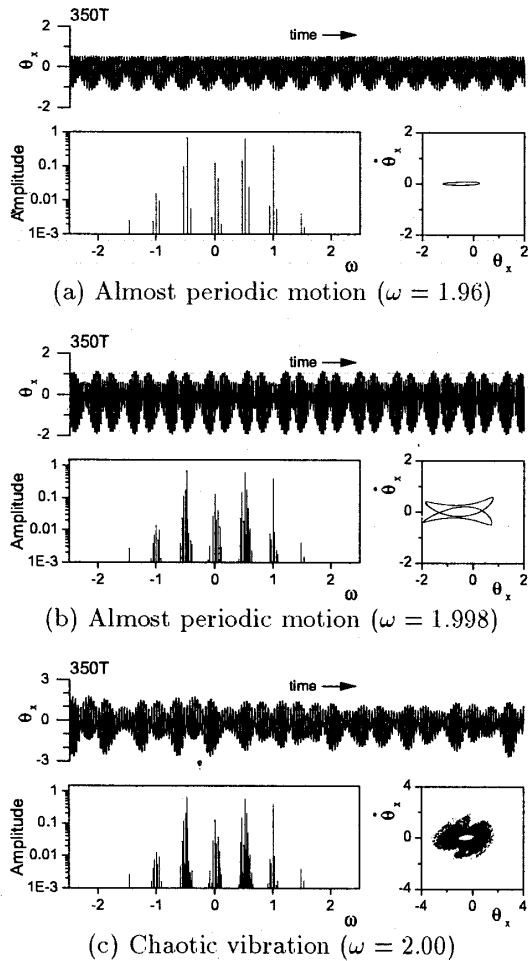


Fig. 12 Time histories and Poincaré map

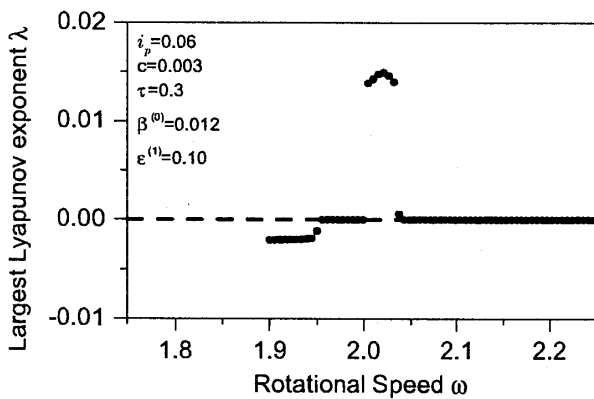


Fig. 13 Largest Lyapunov exponents

近)に対応して最大リアプノフ指数は正となることから、カオス振動の発生が確認できる。

これらの解析結果は実験で得られた図5, 6の結果を定性的に説明しており、さらにパラメータの状態によっては、和差調波共振 [ $p_f - p_b$ ]に関連したカオス振動の発生の可能性があることを明らかにしている。

#### 4. 結 論

弱い非線形ばね特性を持ち、前向きと後向きの固有振動数がほぼ 1 : (-1) の内部共振の関係をもつ回転軸の主危険速度の2倍付近における共振現象について以下の結論を得た。

- (1) 2種類の1/2次分数調波共振の発生、および、和差調波共振の振幅変調運動の発生を確認した。
- (2) 1/2次分数調波共振の高速側の分枝では、ホップ分岐による振幅変調運動から、カオス振動が発生することを観察した。
- (3) 和差調波共振の振幅変調運動からの分岐現象を観察した。実験では、ポアンカレ写像における1重から2重のループへの分岐現象を観察し、理論解析では、同様な現象に加え、さらにカオス振動の発生を明らかにした。

#### 文 献

- (1) Sethna, P.R., Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics, 27-1(1960), 187-195
- (2) 山本・安田, 機論, 42-358(1976), 1692.
- (3) Nayfeh, A.H., Balachandran, B., Appl Mech Rev Vol.42, No.11, Part2, (1989), 175-201.
- (4) 石田・井上, 機論 C, 63-606(1997), 321.
- (5) 石田・井上・竹内, 機論 C, 63-614(1997), 3335.
- (6) 井上・石田・近藤, 機論 C, 66-642(2000), 370.
- (7) Wolf, A., ほか3名, Physica 16D(1985), 285-317.
- (8) 山本・石田, 機論, 41-345(1975), 1374.
- (9) 山本・石田・川角, 機論, 41-341(1975), 133.
- (10) 山本・石田, 回転機械の力学(2001), 21, コロナ社.
- (11) 山本, 機論, 22-123(1956), 868.
- (12) 山本, 機論, 26-164(1960), 612.