

二次元噴流のコヒーレント構造発展に関する実験的研究*

(第4報, 速度二成分多点同時測定と KL 展開による大スケール構造モデル)

田 中 伸 彦^{*1}, 酒 井 康 彦^{*1}
山 本 瞳^{*2}, 久 保 貴^{*1}

An Experimental Study on the Development of Coherent Structure in a Plane Jet

**(4th Report, Multi-point Simultaneous Measurement of Two Velocity Components
and the Large-scale Structure Model by the KL Expansion)**

Nobuhiko TANAKA^{*3}, Yasuhiko SAKAI,
Mutsumi YAMAMOTO and Takashi KUBO

^{*3} Department of Mechanical Science and Engineering, Nagoya University,
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya-shi, Aichi, 464-8603 Japan

In order to clarify the large-scale coherent structure in a turbulent plane jet, the simultaneous measurement of the main streamwise and the cross-streamwise velocity at 9 points in the self-preserving region of a turbulent plane jet has been performed by an array of X-type hot wire probes. From the time variation of the main streamwise fluctuating velocity field, it is found that there exist a pair of fluid lumps with the positive and negative fluctuating velocity on opposite sides of the jet centerline. On the other hand, the instantaneous cross-streamwise fluctuating velocity shows the same sign over the cross-section, i.e., the vertically-striped pattern is formed. As the result of the KL expansion, it is found that the first u and v modes present a character of the "flapping", and the second and third modes show the one of the "puffing". From the combination of the "flapping" and the "puffing", a new coherent structure model in the self-preserving region of a turbulent plane jet has been developed.

Key Words: Jet, Turbulence, Vortex, Flow Measurements, Velocity Distribution, Karhunen Loève Expansion, Coherent Structure

1. 緒 論

二次元噴流のコヒーレント構造に関しては、昔から数多くの研究^{(1)~(4)}が成されてきたが、高レイノルズ数の二次元乱流噴流の相似領域においては、瞬間的コヒーレント構造に関しての明確で統一的な解釈は未だに成されていない⁽⁵⁾⁽⁶⁾。そこで著者らは、ノズル出口直後から十分下流に至る広い範囲にわたって X 型熱線プローブによる 2 点同時測定の実験を行い、KL(Karhunen Loève) 展開⁽⁷⁾や KL 展開と Fourier 変換を組み合わせた解析法⁽⁸⁾を用いて得られた固有値、固有関数などの観点から二次元噴流の出口から下流にわたる各種領域でのコヒーレント構造の平均的特徴について考察を行った。そして、前報⁽⁹⁾において、二次元乱流噴流の自己保存領域で I 型熱線プローブによる 21 点同時測定を実行し、二次元乱流噴流の自己保存領域におけるコヒーレント構造として知られていく。

る flapping 現象^{(1)~(4)}について調べた。しかし、I 型熱線プローブでは速度一成分の情報しか得られないため、渦構造の空間的特徴を詳細に議論することは困難であった。そこで、本報では、速度二成分を測定することが可能な X 型熱線プローブを用いて多点同時計測を行い、軸方向速度と軸に垂直な方向の速度、両方の観点から、コヒーレント構造について考察した。また、これまでの報告^{(7)~(9)}と同様に、KL 展開⁽⁵⁾⁽⁶⁾⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾を用いてエネルギーの大きな構造(低次の固有関数)を抽出し、その固有関数を用いて再構成された空間速度分布の時間変化を調べ、それに基づき、二次元乱流噴流の自己保存領域に存在する大スケールのコヒーレント構造モデルを提案した。本報では、これらについて報告する。

2. KL 展開

解析法の詳細はこれまでの報告^{(7)~(9)}で示したので、ここでは簡単に説明する。変動速度ベクトル \mathbf{u} の 1 成分を α とする。ここで、 α は u あるいは v であり、各々、噴流中心軸方向あるいは噴流中心軸に垂直方向の変動速度成分を表している。この α に対する

* 原稿受付 2004年10月20日。

*1 正員、名古屋大学大学院工学研究科(〒464-8603 名古屋市千種区不老町)。

*2 名古屋大学大学院工学研究科。

E-mail: tanaka@sps.mech.nagoya-u.ac.jp

KL 展開の固有関数(基底) $\phi_{\alpha}^{(n)}$ 、固有値 $\lambda_{\alpha}^{(n)}$ は次式の2点速度相関を基礎とする固有値問題を解くことで得られる。

$$\sum_{j=1}^N R_{\alpha\alpha}(x_2^{(i)}, x_2^{(j)}) w(x_2^{(j)}) \phi_{\alpha}^{(n)}(x_2^{(j)}) \Delta r = \lambda_{\alpha}^{(n)} \phi_{\alpha}^{(n)}(x_2^{(i)}) \quad (1)$$

$$R_{\alpha\alpha}(x_2, x'_2) = \langle \alpha(x_2, t) \alpha(x'_2, t) \rangle \quad (2)$$

ここで、 x_2 、 x'_2 はそれぞれ噴流中心軸に垂直な方向の座標を表し、 $x_2^{(i)}$ あるいは $x_2^{(j)}$ は各プローブの測定位置に対応する。また、 N はプローブ(測定位置)の数、 Δr は x_2 方向の離散化距離であり、今の場合にはプローブ間隔である。 $\langle \cdot \rangle$ は、アンサンブル平均を表す。また、 $w(x_2^{(j)})$ は N 次元の重み関数ベクトル w の j 成分であり、 w は以下のように定義される。

$$w = (0.5, \overbrace{1, 1, \dots, 1}^{N-2}, 0.5) \quad (3)$$

以下に、KL 展開の性質をまとめる。

(a) 固有値の番号は、通常、次のように大きさの順に並べる。

$$\lambda_{\alpha}^{(1)} > \lambda_{\alpha}^{(2)} > \dots > \lambda_{\alpha}^{(n)} > \dots \quad (4)$$

(b) 変動速度の各成分は、固有関数の線形結合として表現される。

$$\alpha(x_2, t) = \sum_{n=1}^N a_{\alpha}^{(n)}(t) \phi_{\alpha}^{(n)}(x_2) \quad (5)$$

ここで、展開係数は次式で与えられる。

$$a_{\alpha}^{(n)}(t) = \int_I \alpha(x, t) \phi_{\alpha}^{(n)}(x_2) dx_2 \quad (6)$$

積分領域 I は、KL 展開を適用する範囲を示す。

(c) 領域 I における変動速度の2乗平均値の総和が固有値の和として与えられる。

$$E_{\alpha} = \int_I \langle \alpha^2(x_2, t) \rangle dx_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{\alpha}^{(n)} \quad (7)$$

$$\langle \alpha^2(x_2, t) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{\alpha}^{(n)} \left\{ \phi_{\alpha}^{(n)}(x_2) \right\}^2 \quad (8)$$

3. 実験方法と条件

実験装置はこれまでの報告(7)～(9)で示したものと同じものが使用されたので、今回はその詳細な説明を省略する。座標系は、スキマー出口を原点とし、主流方向を x_1 、噴流中心軸に垂直な方向を x_2 、スパン方向を x_3 としている。速度二成分多点同時測定は、 x_2 方向に X 型熱線プローブを 9 本並べて 18 チャンネル同時測定を行っており、図 1 に本実験の速度二成分多点同

時測定システムの概略図を示す。AD ボードは 8ch 同時サンプリングすることができる MICRO SCIENCE ADM-688PCI を 3 枚使用し、それぞれのボードで 6ch 使用し、同一クロックで同期運転させることで 18ch 同時サンプリングを行った。また、熱線流速計はすべて自作したものを使用しており、周波数応答特性は -3dB 特性で約 14kHz であり、実際には約 10kHz まではゲイン、位相とも良好な応答特性であったことを確認している。実験条件を以下にまとめて示す。

出口流速 U_0 : 約 20m/s

出口高さ d : 12mm

出口レイノルズ数 $Re (= U_0 d / v)$: 約 16,000

測定断面の位置: $x_1/d = 10.0 \sim 30.0$

熱線プローブ: X 型 (5μm タングステン)

プローブ本数、間隔: 9 本, 11.0mm

サンプリング周波数: 10kHz

サンプリング点数: 229,376 点

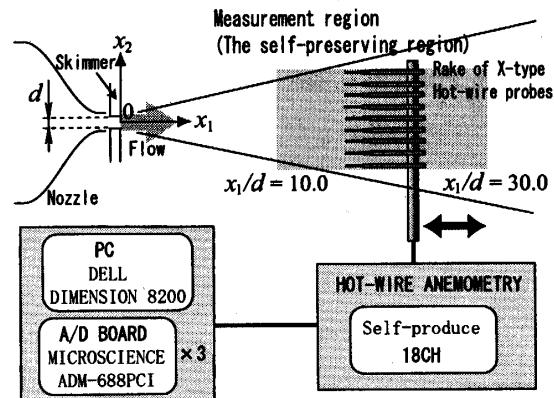


Fig. 1 Multi-point measurement system

4. 実験結果

4.1 平均速度と速度 r.m.s. 値分布 図 2 に x_1 方向平均速度 U の x_2 方向分布、図 3,4 に x_1 方向速度 r.m.s. 値 u' 、 x_2 方向速度 r.m.s. 値 v' の x_2 方向分布を示す。それらの分布において、横軸は平均速度 U の半値幅 b 、縦軸は噴流中心軸の値 U_m 、 u'_m 、 v'_m で無次元化されている。また、これらの乱流強度の値(無次元化に使用された具体的な数値)については、参考文献(7)を参照されたい。図中の実線は X 型熱線プローブ 1 点測定(7)によって得られた分布であり、どの分布においても、今回の X 型熱線プローブ 9 点同時測定結果とよく一致していることが確認できる。また、図 5 にレイノルズ応力 $\langle uv \rangle$ の x_2 方向分布を示す。横軸は半値幅 b 、縦軸は噴流中心軸上の x_1 方向と x_2 方向の r.m.s. 値の積 $u'_m v'_m$ で無次元化されている。図 5 より多

少のばらつきはあるが、平均速度分布や速度 r.m.s. 値の分布と同様に、本測定の結果は X型熱線プローブ 1 点測定⁽⁷⁾とほぼ一致していることが分かる。これらの結果から、本研究における速度二成分多点同時測定のデータが信頼できるものであることが確認できた。

4.2 2点空間速度相関係数の空間分布 図 6(a), (b) に $x_1/d = 20.0$ における x_1 方向速度 u と x_2 方向速度 v に対する 2点空間速度相関係数の空間分布を示す。2点空間速度相関係数は次式で定義される⁽¹²⁾。

$$C_{\alpha\alpha}(x_2, x'_2) = \frac{\langle \alpha(x_2, t)\alpha(x'_2, t) \rangle}{\sqrt{\langle \alpha^2(x_2, t) \rangle} \sqrt{\langle \alpha^2(x'_2, t) \rangle}} \quad (9)$$

ここで、 α は u あるいは v である。なお、 $C_{\alpha\alpha}$ の値は $[-1.0, +1.0]$ の範囲をとる。本実験は 9 本同時測定であるので、 $C_{\alpha\alpha}$ 通りの異なる位置（プローブ）における 2点空間速度相関係数を計算することができ、それぞれの値を等値線図にしたもののが図 6 である。図 6(a), (b) の分布は、第 1 報⁽⁷⁾ で示した 2 本の X型熱線プローブによる 2点空間速度相関係数の空間分布（第 1 報⁽⁷⁾ の図 10(c)) とほぼ一致した分布形状を示した。2点空間速度相関係数は 2つのプローブの位置における相関を表すので、上記の結果から各プローブの位置はほぼ正確に設置されていると言える。そして、この量は KL 展開の固有値問題（式(1)）で使用するため、KL 展開による解析結果の信頼性の根拠とすることができる。二次元噴流の自己保存領域における 2点空間速度相関係数の特徴は、噴流中心軸に対して対称な位置（図 6 の第 2 象限と第 4 象限）において、 u の場合（図 6(a)）は負の領域、 v の場合（図 6(b)）は正の領域を有することである。

4.3 空間速度分布の時間変化 図 7(a), (b) に x_1 方向と x_2 方向の変動速度空間分布 $u(x_2, t)$, $v(x_2, t)$ の時間変化を示す。横軸は時間、縦軸は半值幅 b で無次元化された x_2 であり。また、図中のグレースケールは、変動速度 u, v [m/s] の値を示している。図 7(a) より、 $u(x_2, t)$ の分布においては、前報（第 3 報⁽⁹⁾）で示したように、噴流中心軸に対して対称な位置で、正の変動速度をもつ流体塊と負の変動速度をもつ流体塊が対になっていることが分かる。一方、図 7(b) より、 $v(x_2, t)$ の分布は、同時刻においては、どの x_2 においても主に同符号の変動速度を示しており、縦縞状の構造を形成するという特徴が見られた。そこで、この特徴をさらに明確に捉えるため、図 8 に $x_2/b = \pm 0.34$ における変動速度 u, v の瞬時波形を調べた結果を示す。図 8 から、互いの位置における信号が、 u は逆の、 v は同じような動きをしていることがよく分かる。

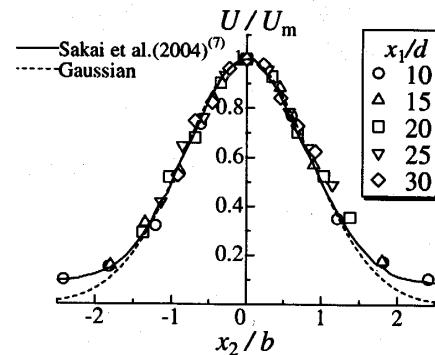


Fig. 2 Vertical profiles of the streamwise mean velocity U

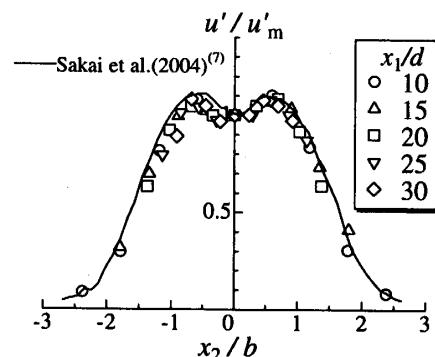


Fig. 3 Vertical profiles of the streamwise r.m.s. velocity u'

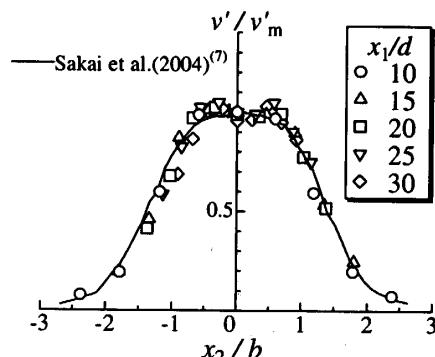


Fig. 4 Vertical profiles of the cross-streamwise r.m.s. velocity v'

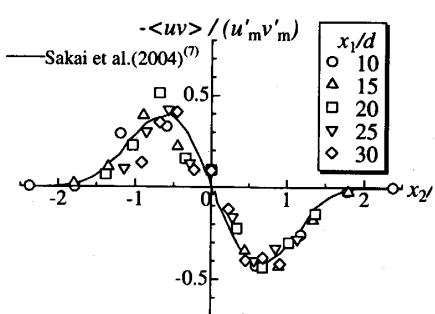


Fig. 5 Vertical profiles of the Reynolds stress $\langle uv \rangle$

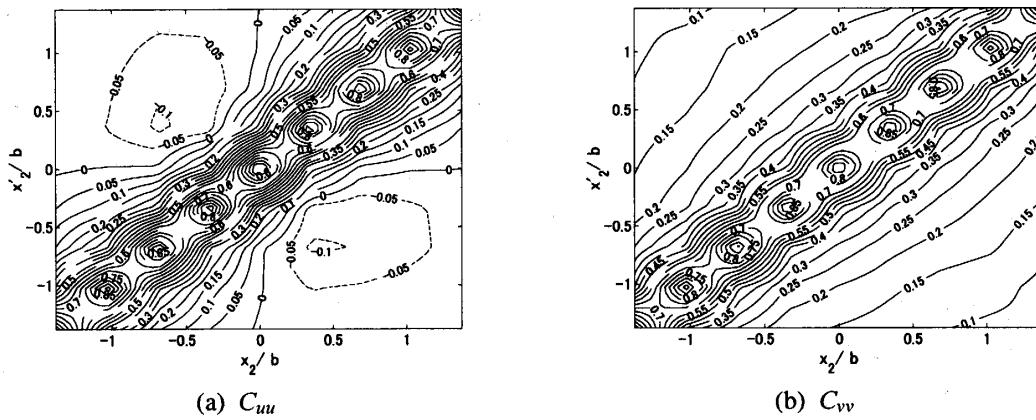


Fig. 6 Distributions of the spatial correlation coefficient

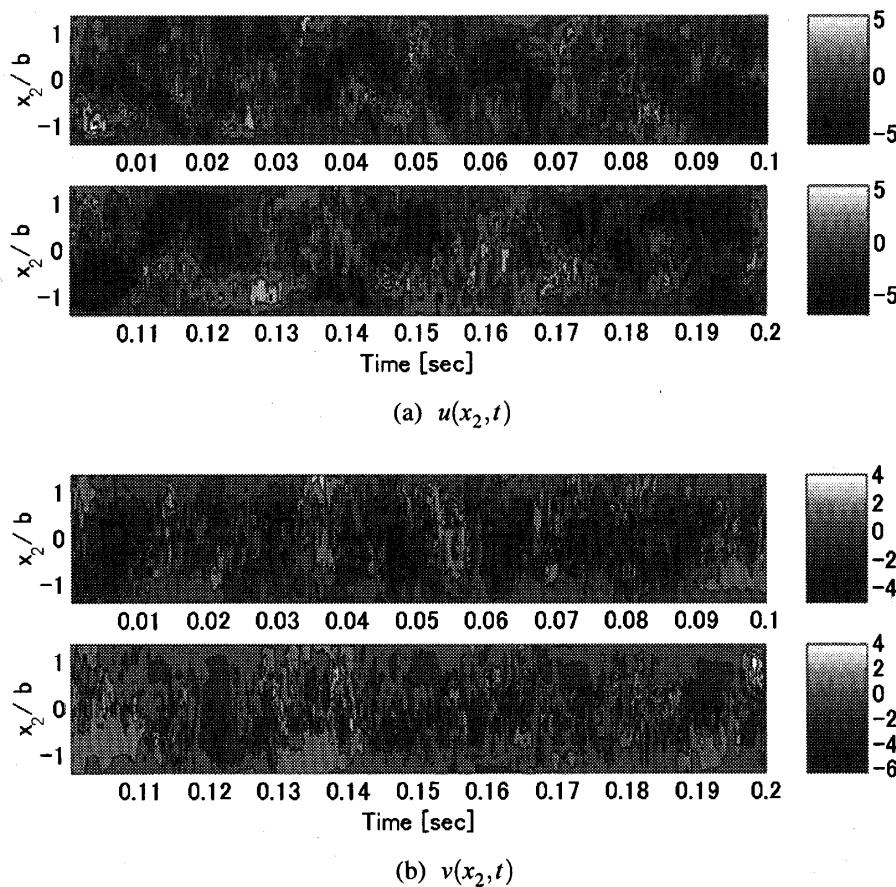


Fig. 7 Time variation of the spatial velocity field

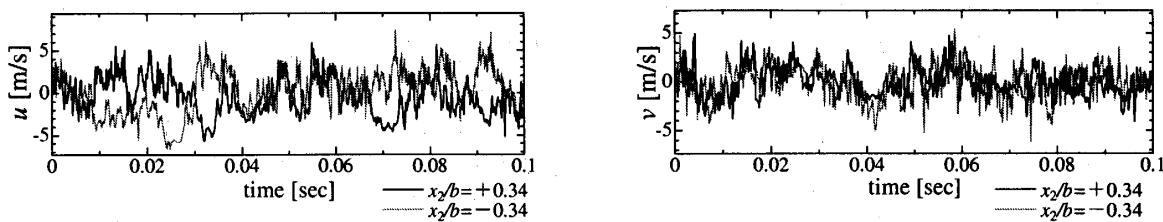


Fig. 8 The fluctuating velocity signals on opposite side of the jet centerline

5. KL 展開による解析結果

5.1 固有値 図 9(a),(b) に $x_1/d = 20.0$ における各基底の固有値 $\lambda_\alpha^{(n)}$ の分布を示す。ただし、横軸は KL 展開の次数を示し、縦軸は変動速度 2 乗平均値の総和（すなわち、全ての固有値の和 $E_\alpha = \sum_{i=1}^{21} \lambda_\alpha^{(i)}$ ）で無次元化された固有値をとっている。また、図中には第 1 報⁽⁷⁾ で報告された X 型プローブの 2 点同時測定のデータを KL 展開して得られた固有値の分布 ($x_1/d = 20.0$) も示している。第 1 報⁽⁷⁾ における X 型プローブの 2 点同時測定では、21 個の測定位置を設定したので、基底の次数は全部で 21 個であったが、今回の X 型プローブによる 9 点同時測定の基底の次数は 9 個である。従って、両者を単純に比較することはできないが、図 9 より両者はほぼ同様の傾向を示していることが確認できた。今回の測定において、 $x_1/d = 20.0$ では、 u と v の第 1 基底の固有値によるエネルギーの寄与率はそれぞれ約 23%，約 38%， u と v の第 2 基底の寄与率はそれぞれ約 17%，約 16% である。

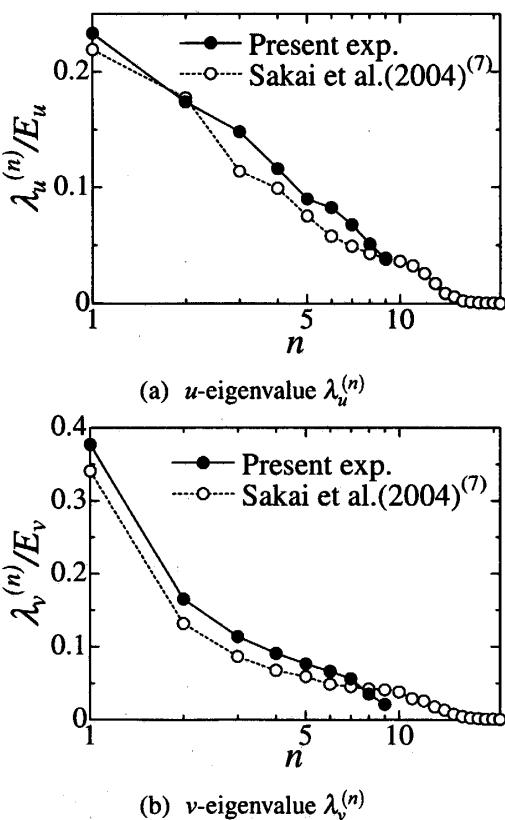


Fig. 9 Distributions of the eigenvalue $\lambda_u^{(n)}$ and $\lambda_v^{(n)}$

5.2 固有関数 図 10(a),(b) に $x_1/d = 20.0$ における固有関数 $\phi_\alpha^{(n)}(x_2)(n=1,2,3,4)$ の分布を示す。固有関数の分布は、第 1 報⁽⁷⁾ で示した X 型プローブによる 2 点同時測定のものと一致することが確かめられ

ており、このことも、今回の 9 点同時測定の信頼性を示すものと考えられる。(ただし、第 1 報⁽⁷⁾ では低次の基底 ($n = 1, 2$) の分布のみ示されており、 $n = 3, 4$ の分布は示されていない。)

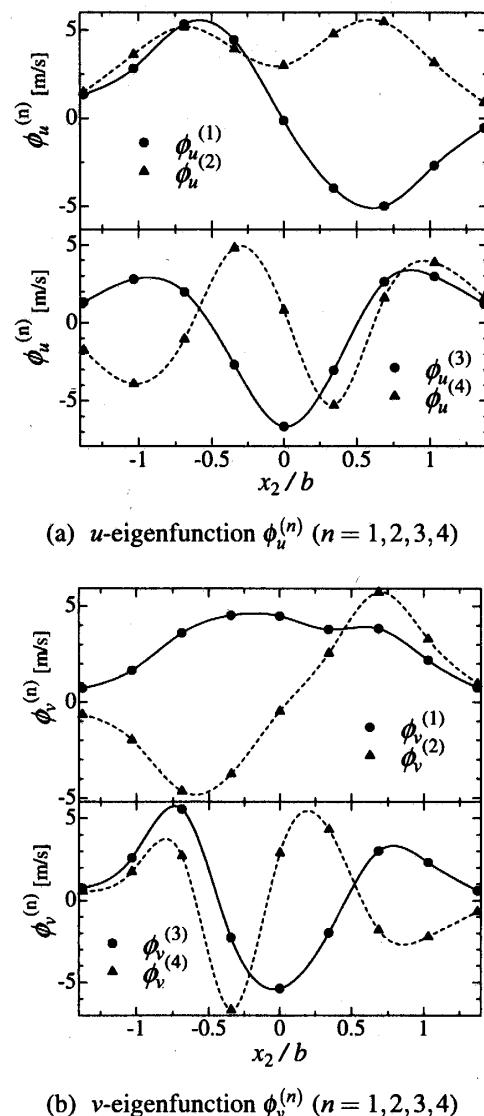


Fig. 10 Profiles of the eigenfunction $\phi_\alpha^{(n)}(x_2)$

5.3 空間速度分布の再構成 まず、図 11(a),(b) に $x_1/d = 20.0$ において第 1 基底で再構成された変動速度空間分布 $u^{(1)}(x_2, t) = a_u^{(1)}(t)\phi_u^{(1)}(x_2)$, $v^{(1)}(x_2, t) = a_v^{(1)}(t)\phi_v^{(1)}(x_2)$ の時間変化を示す。図 11(a) から、前報⁽⁹⁾ と同様に、正と負の主流方向の変動速度を持つ流体塊が対となり、時間の経過とともに、それらの符号が反転する様子が確認できる。一方、図 11(b) から、主流に垂直な方向の変動速度の分布は、縦縞状の構造となっており、時間の経過とともに、それらの符号が交互に反転する様子が分かる。これらの結果は、前報⁽⁹⁾

で提案された KL 展開の第 1 基底による flapping 現象の渦モデル(図 12 参照)を裏付けるものである。

次に、図 13(a),(b) に第 2 基底と第 3 基底を用いて再構成した変動速度空間分布 $u^{(2\sim 3)}(x_2, t) = \sum_{i=2}^3 a_u^{(i)}(t) \phi_u^{(i)}(x_2)$, $v^{(2\sim 3)}(x_2, t) \sum_{i=2}^3 = a_v^{(i)}(t) \phi_v^{(i)}(x_2)$ を示す。図 13(a)から、主流方向変動速度の分布においては、中心軸近傍とその両側で流体塊の符号が反転している様子が分かる。そして、図 13(b)から、主流に垂直な方向の変動速度の分布においては、図 11(a)と同様に、正と負の変動速度を持つ流体塊が対となり、時間の経過とともに、それらの符号が反転している様子が確認できる。これらの結果から、図 14 のような渦構造を考えることができる。すなわち、中心軸に対して対称な位置において、互いに逆回転する渦が同時に通過するという構造である。この構造は、ポテンシャルコア領域で顕著に現れる「puffing」⁽¹⁾ と非常に類似した構造であると思われる。

以上の結果から、KL 展開の第 1 基底は主に flapping 現象の特徴をよく表したものであり、第 2 基底と第 3 基底は主に puffing 現象の特徴をよく表していると考えられる。すなわち、二次元噴流の自己保存領域におけるコヒーレント構造といふのは、「flapping」と「puffing」の組み合わせで形成されていると考えることができ、このことは、Goldschmidt and Bradshaw⁽¹⁾によても推測されている。図 15 に、flapping(図 12)と puffing(図 14)を組み合わせた渦構造の概念図を示す。図中の「丸」は互いに強め合う部分、「四角」は弱め合う(打ち消し合う)部分を示している。図 15 の(1)においては、flapping 渦の向きから考えると、噴流中心軸に対して対称な位置にある 2 個の puffing 渦の外側において、 $x_2 < 0$ の方は強めあうが、 $x_2 > 0$ の方は弱めあう。一方、2 個の puffing 渦のみを考えるとき、中心軸付近はちょうど向きが同じため、 $x_2 > 0$ の puffing 渦においても、中心軸付近だけは強めあう効果がある。従って、(1)の場合は、噴流中心軸を $x_2 > 0$ の方に、少しまだぐのような時計周り渦構造が形成される。また、(2)においても同様に考えると、噴流中心軸を $x_2 < 0$ の方に、少しまだぐのような反時計周り渦構造が形成される。加えて、(1)と(2)の 2 個の flapping 渦の間に主流に鉛直下向き、(2)と(3)の flapping 渦の間に鉛直上向きに流れる速度場が形成されることが推測される。これらの考えをまとめると、図 16 で示される千鳥足状に渦が並ぶ構造が考えられる。この構造は、Antonia et al.⁽³⁾ や Thomas and Brethob⁽⁴⁾ が考えた二次元噴流の自己保存領域における概念図ともよく一致している。しかし、本報では、flapping と

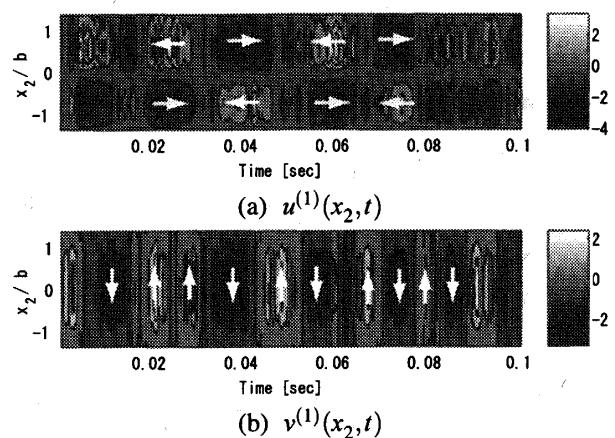


Fig. 11 Time variation of the spatial velocity field reconstructed by the first mode

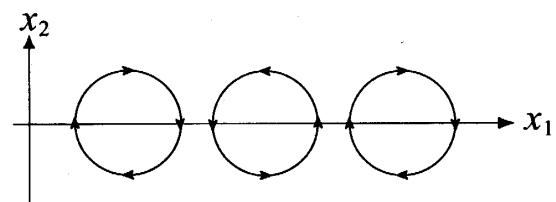


Fig. 12 Vortex structure model by the first mode of the KL expansion (Flapping mode)⁽⁹⁾

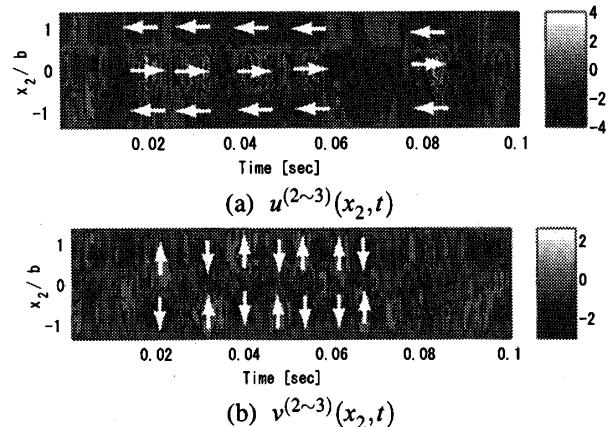


Fig. 13 Time variation of the spatial velocity field reconstructed by the second and third modes

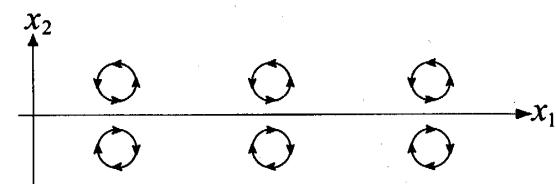


Fig. 14 Vortex structure model by the second and third modes of the KL expansion (Puffing mode)

puffing の組み合わせという考え方から、千鳥足状の構造を導いており、このような考え方は著者らの知る限りでは初めてのものである。図 16(a) は主流方向変動速度 u を、(b) は主流に垂直な方向の変動速度 v を強調して書いている。この概念図は、主流方向変動速度 u は中心軸に対して対称な位置において負の相関を持ち、主流に垂直な方向の変動速度 v はどの位置においても正の相関を持つ構造となっており、図 7(a),(b) で示したオリジナルの変動速度空間分布の時間変化の特徴ともよく一致している。図 17(a),(b) に最初の 3 つの基底で再構成された変動速度空間分布 $u^{(1\sim 3)}(x_2, t) = \sum_{i=1}^3 a_u^{(i)}(t) \phi_u^{(i)}(x_2)$, $v^{(1\sim 3)}(x_2, t) = \sum_{i=1}^3 a_v^{(i)}(t) \phi_v^{(i)}(x_2)$ を示す。図 17 と第 1 基底のみで再構成された図 11 を比較すると、分布形状がとても変化している様子が確認でき、より図 16 の千鳥足状に渦が並ぶ構造に近づいていることが分かる。このことから、flapping 現象は KL 展開の第 1 基底に対応するため、二次元噴流の自己保存領域において最大の乱れエネルギーを有する構造に起因するものではあるが、コヒーレント構造全体においては KL 展開の第 2,3 基底に対応する puffing 現象も重要な役割を果たしていると考えられる。

なお、本研究においては二次元的な構造について考察を行ったが、二次元噴流においても自己保存領域内の局所的な渦構造は三次元的であることに注意されたい。これについては、例えば Mumford⁽¹³⁾ は I 型熱線プローブ 8 点同時測定と X 型熱線プローブ 2 点同時測定によりパターン認識法を用いて、自己保存領域におけるコヒーレント構造の三次元的な形状が、平均速度勾配に関連するひずみ方向に引き伸ばされるロールのような構造であることを提案している。また、Gordyeyev and Thomas⁽⁶⁾ は、X 型熱線プローブをスパン方向において三列に配列して実験を行い、KL 展開の低次モードによる速度場の再構成から、スパン方向の渦管は主に、流れ方向に歪み、傾斜していることを示した。そして、彼らはスパン方向のモードの影響により横渦の歪みや傾斜が引き起こされるが、二次元噴流のコヒーレント（大スケールの）構造は平面的な成分が支配的であると結論付けている⁽⁶⁾。本研究のような一列の X 型プローブの配列による二次元的な計測においては、Mumford⁽¹³⁾ が提案したようなロール構造を抽出することは困難であるが、Gordyeyev and Thomas⁽⁶⁾ による結論を考慮すれば、本実験に基づいて、二次元噴流のコヒーレント構造を解析することは流れ場の物理的特性の理解に十分有効であると考えられる。

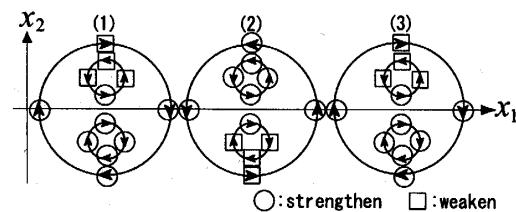


Fig. 15 Vortex structure model by first three modes of the KL expansion

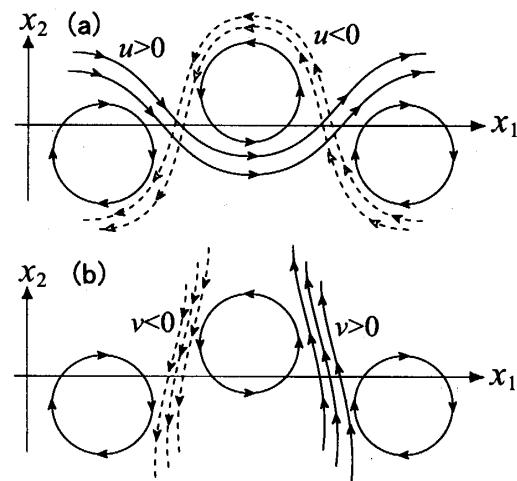
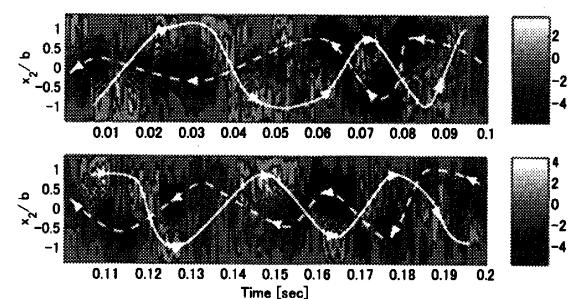
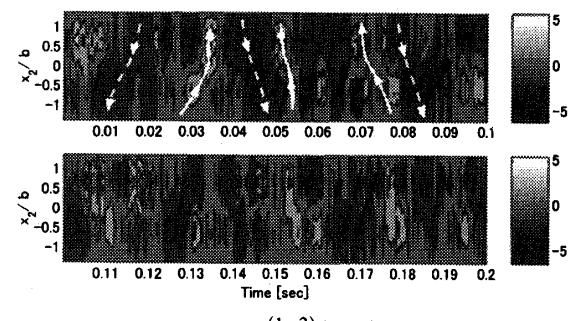


Fig. 16 Coherent structure of a plane jet in the self-preserving region



(a) $u^{(1\sim 3)}(x_2, t)$



(b) $v^{(1\sim 3)}(x_2, t)$

Fig. 17 Time variation of the spatial velocity field reconstructed by first three modes

6. 結論

二次元噴流の自己保存領域において X 型熱線プロープによる 9 点同時測定を行い、KL 展開を適用することにより噴流のコヒーレント構造について調べた。

1. 変動速度空間分布の時間変化から、噴流中心軸方向の変動速度は、正と負の流体塊が対になって形成されるのに対して、噴流中心軸に垂直方向の変動速度は、どの噴流中心軸に垂直な方向位置においても、主に同符号の変動速度を示す縦縞状の構造が形成されることが分かった。
2. KL 展開の第 1 基底は flapping 現象の特徴を表しており、第 2 基底と第 3 基底は puffing 現象の特徴を表していることが分かった。そして、flapping 現象と puffing 現象を組み合わせることにより、互いに逆回転する渦構造が千鳥足状に並ぶという二次元噴流の自己保存領域におけるコヒーレント構造を説明することができた。

参考文献

- (1) Goldschmidt, V.W. and Bradshow, P., *Phys. Fluids*, **160**(1973), No.3, 354-355.
- (2) Cervantes, de Gortari, J. and Goldschmidt, V. W., *J. Fluid Eng.*, **103**(1981), 119-126.
- (3) Antonia, R. A., 他 3 名, *J. Fluid Mech.*, **134**(1983), 49-66.
- (4) Thomas, F. O. and Brethob, E. G., *Phys. Fluids*, **29-6**(1986), 1788-1795.
- (5) Gordeyev, S. V. and Thomas, F. O., *J. Fluid Mech.*, **414**(2000), 145-194.
- (6) Gordeyev, S. V. and Thomas, F. O., *J. Fluid Mech.*, **460**(2002), 349-380.
- (7) 酒井, 他 2 名, 機論(B), **70-697**(2004), 2341-2348.
- (8) 酒井, 他 2 名, 機論(B), No.04-0809, 投稿中。
- (9) 酒井, 他 3 名, 機論(B), No.04-1049, 掲載予定。
- (10) Holmes, P. 他 2 名, *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*, Cambridge Univ. Press, (1996), 86-128.
- (11) Lumley, J. L., in Proc. Intl colloq. on the Fine Scale Structure of the Atmosphere and its Influence on Radio Wave Propagation, Doklady Akademii Nauk SSSR, Moscow, Nauka, (1967), 166-240.
- (12) 日野幹雄, スペクトル解析, 朝倉書店, (1977), 52-55.
- (13) Mumford, J. C., *J. Fluid Mech.*, **118**(1982), 241-268.