

クリアランス内で衝突を伴うロータの非線形強制振動と自励振動* (非線形ばね・減衰モデルによる分数調波振動の解析)

稲垣 瑞穂*¹, 石田 幸男*², 林 晃正*³

Nonlinear Resonances and Self-Excited Oscillations of a Rotor due to Radial Clearance and Impact in Bearings (Analysis of Subharmonic Oscillation by Nonlinear Spring/Damper Model)

Mizuho INAGAKI*⁴, Yukio ISHIDA and Akimasa HAYASHI

*⁴ Mechanism CAE Labs., TOYOTA Central R & D Labs., Inc.,
Nagakute, Aichi, 480-1192 Japan

A pieewise linear spring and damper model considering contact stiffness and restitution coefficient between bearing and case is introduced to analyze subharmonic resonances and the self-excited oscillation of the impact model in the former report. By applying Harmonic Balance Method (HBM) to the equivalent nonlinear spring and damper model, the periodic solution is analyzed in the speed range of 1/2 order subharmonic resonance speed. As the results, the entrainment of 1/2 order subharmonic oscillation can be explained analytically by the periodic solution of $+(1/2)\omega$ and its stability. In addition, the influence of the static lateral force or damping effect is investigated on the entrainment phenomena and the occurrence of the self-excited oscillation around 1/2 subharmonic resonance.

Key Words: Rotor, Impact, Radial Clearance, Nonlinear Resonance, Entrainment, Self-Excited Oscillation, Subharmonics, Pieewise Linear Spring, Harmonic Balance Method, Stability Analysis

1. 結 言

高速ターボ機械では、スクイズフィルムダンパ軸受の軸受保持器とケーシングの間のような静止部品間のクリアランスによって種々の振動が問題となる。例えば、Ehrich⁽¹⁾⁻⁽³⁾はその軸受を用いたガスタービン軸系で油膜の非線形性や組付けのミスアライメントによって分数調波振動やカオス振動が発生することを報告している。

著者らは既報⁽⁴⁾で、軸受保持器とケーシングの間のクリアランスで衝突を起こす弾性回転軸系でモデル化することにより、軸受部の衝突に起因して、主共振速度より高速側の広い範囲で前向き振れまわりの自励振動、および分数調波振動・超分数調波振動・和差調波振動などの非線形共振が発生することを明らかにした。

前報⁽⁵⁾では、1/2次分数調波共振付近の現象に着目し、円板のジャイロモーメントが1/2次分数調波振動

や和差調波振動の共振点に及ぼす影響や、自励振動に関連して発生する結合振動を明らかにした。また、van der Pol形の非線形微分方程式で表される1自由度の強制・自励系モデルを使って、1/2次分数調波振動への引込み現象や自励振動に関わる結合振動を定性的に説明した。

本報では、衝突に起因する振動現象の理論的な取扱いを可能にするため、衝突を極めて短時間に起きる接触中の粘弾性変形現象と考え、軸受とケース壁の接触剛性と反発係数を考慮することにより、前報までの衝突モデルと等価な非線形ばね・減衰モデルを作成する。その非線形モデルに調和バランス法を適用することにより、1/2次分数調波振動について不安定解を含めて解析し、横荷重や軸受減衰が分数調波振動に及ぼす影響を解明する。

2. 解析モデル

2・1 解析対象 図1の実験装置⁽⁴⁾を対象とする。鉛直弾性軸S(直径16mm,長さ $l=900$ mm, $a:b=11:7$)に不釣合いを持つ円板D(直径480mm,厚さ5.5mm)を取付ける。軸の上下端は、複列自動調心玉軸受で支持される。下側の軸受部には、軸受保持器とケーシングの間にラジアルクリアランスがあ

* 原稿受付 2004年7月13日。

*¹ 正員, (株)豊田中央研究所機構CAE研究室(☎480-1192 愛知県長久手町)。

*² 正員, 名古屋大学大学院工学研究科機械理工学専攻(☎464-8603 名古屋市千種区不老町)。

*³ トヨタ自動車(株)(☎471-8572 豊田市トヨタ町1)。

E-mail: m-inagaki@mosk.tytlabs.co.jp

る。回転軸 S は上端側でばね継ぎ手を介してモータ駆動される。

図 1 の実験系を図 2 のようにモデル化する。円板と軸受の質量はその重心に集中させ、弾性軸の質量は円板部と上下軸受部に配分する。クリアランスのない上側軸受部は単純支持点とする。下側軸受は、クリアランス部で軸受が衝突するときにケーシングから受ける反発力を模擬するため、不感帯 δ を持つ非線形ばね・減衰要素で表す。なお、図 1 で軸受保持器は自転しないので、クリアランス部の乾性摩擦の影響は小さいとして無視する。

2・2 運動方程式 図 2 に示すように、 x, y 方向の円板と下側軸受の変位を x_1, y_1 および x_2, y_2 とすると、運動方程式は次のように表される。

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + i_p \omega \dot{y}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_{s1} \left(x_1 - \frac{a}{l} x_2 \right) &= m_1 e \omega^2 \cos \omega t \\ m_1 \ddot{y}_1 - i_p \omega \dot{x}_1 + c_1 \dot{y}_1 + k_{s1} \left(y_1 - \frac{a}{l} y_2 \right) &= m_1 e \omega^2 \sin \omega t + f_0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 + k_{s2} \left(\frac{a}{l} x_2 - x_1 \right) + \frac{x_2}{r_2} F_n &= 0 \\ m_2 \ddot{y}_2 + c_2 \dot{y}_2 + k_{s2} \left(\frac{a}{l} y_2 - y_1 \right) + \frac{y_2}{r_2} F_n &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、

$$\begin{aligned} k_{s1} &= \frac{3E_s I_s l}{a^2 b^2}, \quad k_{s2} = \frac{3E_s I_s}{ab^2} \\ r_2 &= \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

とする。 m_1, m_2 は円板と下側軸受の質量、 E_s は軸の縦弾性係数、 $I_s = \pi d^4 / 64$ (d は軸の直径) は軸の断面二次モーメント、 e は円板の不釣合いを表す。 $i_p \omega \dot{y}_1, -i_p \omega \dot{x}_1$ は回転儀項を表し、円板のジャイロモーメントによる固有振動数の変化を考慮するために便宜的に

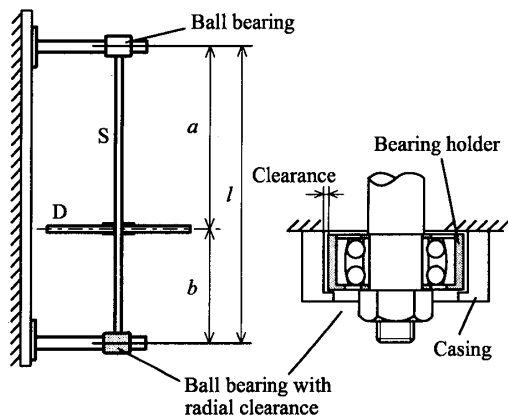


Fig. 1 Rotor system with radial clearance in bearing

追加する。その係数 i_p は、系の固有振動数の変化が図 1 の実験系と等価になるように定める。また、一定荷重 f_0 は、組付け誤差によってばね継ぎ手部から受ける荷重を表す。

2・3 衝突を模擬する軸受のばね・減衰モデル

衝突による軸受とケーシングの接触を、極めて短時間の粘弾性変形現象と考え、式(1)において軸受がケーシングから受ける半径方向の反発力 F_n を式(3)のように表す。

$$F_n = \begin{cases} k_{bn}(r_2 - \delta_b) + c_{bn}(\dot{x}_2 \cos \theta + \dot{y}_2 \sin \theta) & (r_2 \geq \delta) \\ 0 & (r_2 < \delta) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (3)$$

と表される。ここで、 δ_b は軸受部の半径クリアランス、 k_{bn}, c_{bn} は接触時のばね・減衰定数を表す。

線形のばね定数 k_{bn} は、接触によって蓄積されるひずみエネルギーが Hertz の接触理論で求めたものと等価になるように定める。平行二円筒の接触理論⁽⁶⁾より、荷重 P で軸受保持器(凸円筒、半径 R_1)をケーシング内面(凹円筒、半径 R_2)に接触させた場合の、両者の弾性変形による重なり変位 d は、

$$\begin{aligned} d(P) &= \frac{2P(k_1 + k_2)}{\pi l b} \left(1.8864 + \log \frac{l b}{2b} \right) \\ k_i &= \frac{1 - \nu_i^2}{E_i} \quad (i=1, 2), \quad b = \sqrt{\frac{2P(k_1 + k_2)R_1 R_2}{\pi l b (R_2 - R_1)}} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4)$$

と表される。 l_b は軸受保持器の軸方向長さ、 ν_1, ν_2 および E_1, E_2 は、それぞれ軸受保持器とケーシングのポアソン比と縦弾性係数を表す。式(4)より、荷重 P_m を与えた場合のひずみエネルギー S_m は、

$$S_m = d(P_m) P_m - \int_0^{P_m} d(P) dP \quad \dots\dots\dots (5)$$

ひずみエネルギーが等しくなる等価ばね定数 k_{bn} は、

$$k_{bn} = \frac{2S_m}{d(P_m)^2} \quad \dots\dots\dots (6)$$

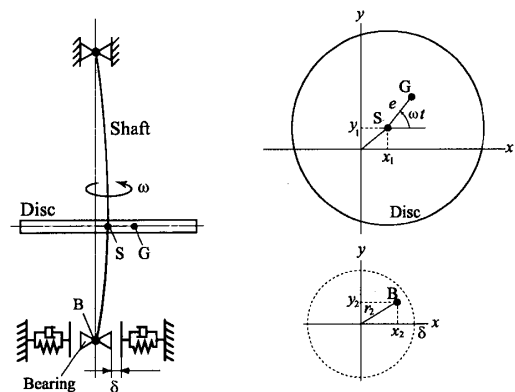


Fig. 2 Rotor system with radial clearance in bearing

により求められる。ここで、荷重 P_m には、図2で下側軸受を単純支持した場合の線形振動モデルで計算した主共振点の最大軸受荷重を使う。

減衰係数 c_{bn} は、1回の衝突に伴う運動エネルギーの減少分が実験的に同定した反発係数と等価になるように設定する。図2において、質量 m_2 の軸受が x 方向に移動してケーシングに衝突する場合を想定する。衝突直前の軸受の速度を v_0 とし、接触中の運動を粘性減衰系の自由振動と仮定すると、衝突後に軸受がケーシングから離れる速度 v_1 は、

$$v_1 = -v_0 e^{-\pi \zeta_b / \sqrt{1 - \zeta_b^2}} \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 ζ_b は減衰比で、

$$\zeta_b = \frac{c_{bn}}{2\sqrt{m_2 k_{bn}}} \dots\dots\dots (8)$$

上式と反発係数 \bar{e} の定義式 $\bar{e} = -v_1/v_0$ より、等価な減衰定数 c_{bn} は、

$$\zeta_b = \sqrt{\frac{2(\log \bar{e})^2 m_2 k_{bn}}{\pi^2 + (\log \bar{e})^2}} \dots\dots\dots (9)$$

と表される。なお、反発係数については物体の落下試験により測定したが、実際の軸受保持器で測定するのは困難なので、同材質の鋼球を平板に落下する試験で代用した。

2.4 運動方程式の無次元化 次の無次元量を導入する。

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{\frac{k_{s1}}{m_1}}, \quad t' = \omega_n t, \quad x'_1 = \frac{x_1}{d_0}, \quad y'_1 = \frac{y_1}{d_0} \\ x'_2 &= \frac{x_2}{d_0}, \quad y'_2 = \frac{y_2}{d_0}, \quad \delta'_b = \frac{\delta_b}{d_0}, \quad e' = \frac{e}{d_0}, \quad f'_0 = \frac{f_0}{m_1 \omega_n^2 d_0} \\ \omega' &= \frac{\omega}{\omega_n}, \quad \alpha = \frac{a}{l}, \quad \beta = \frac{m_2}{m_1} k'_{s2} = \frac{k_{s2}}{m_1 \omega_n^2} \\ c'_1 &= \frac{c_1}{m_1 \omega_n}, \quad c'_2 = \frac{c_2}{m_1 \omega_n} k'_{bn} = \frac{k_{bn}}{m_1 \omega_n^2}, \quad c'_{bn} = \frac{c_{bn}}{m_1 \omega_n} \end{aligned} \dots\dots\dots (10)$$

d_0 は系の代表長さを表す。上式より運動方程式(1)

を無次元化し、簡略化のため記号'記号を省略すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + i_p \omega \dot{y}_1 + c_1 \dot{x}_1 + (x_1 - \alpha x_2) &= e \omega^2 \cos \omega t \\ \dot{y}_1 - i_p \omega \dot{x}_1 + c_1 \dot{y}_1 + (y_1 - \alpha y_2) &= e \omega^2 \sin \omega t + f_0 \\ \beta \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 + k_{s2}(\alpha x_2 - x_1) + \frac{x_2}{r_2} F_n &= 0 \\ \beta \dot{y}_2 + c_2 \dot{y}_2 + k_{s2}(\alpha y_2 - y_1) + \frac{y_2}{r_2} F_n &= 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (11)$$

3. 数値シミュレーション

運動方程式(11)をルンゲ・クッタ法で数値積分した結果を図3に示す。各無次元パラメータは、図1の実験装置の諸元から系の代表長さを $d_0 = 1 \text{ mm}$ として求め、 $\alpha = k_{s2} = 0.611$, $i_p = 0.1$, $\beta = 0.019$, $\delta_b = 0.1$, $e = 0.5$, $f_0 = 0.5$, $k_{bn} = 12881$, $c_{bn} = 0.515$ とした。減衰係数については理論的に求めることが難しいので、図3の共振ピークが実験結果と対応するように同定し、 $c_1 = 0.005$, $c_2 = 0.05$ とした。なお、数値積分の時間刻み幅は軸の回転周期を4096分割した値とし、これ以上小さくしても振動現象が変化しなくなることを確認した。

図3は、1/2次分数調波共振付近の円板の応答曲線と軌道を示す。図中の p_f , p_b は前向き、後向きの固有振動数を表す。既報⁽⁴⁾⁽⁵⁾の実験結果と同様に、調和振動 ω に加えて、前向き振れまわりの自励振動 p_f , 和差調波振動 [$p_f - p_b = \omega$]、および1/2次分数調波振動 $+(1/2)\omega$ への引込み現象がそれぞれ発生することにより、解析モデルの妥当性を確認した。

4. 分数調波振動の解析

図3の1/2次分数調波振動について、不安定解を含めその振動特性をより詳しく調べるため、調和バランス法⁽⁷⁾により分数調波振動の定常周期解を求める。

4.1 周期解の解析方法 変換式

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1, \quad z_2 = \dot{x}_1, \quad z_3 = y_1, \quad z_4 = \dot{y}_1 \\ z_5 &= x_2, \quad z_6 = \dot{x}_2, \quad z_7 = y_2, \quad z_8 = \dot{y}_2 \\ \nu \tau &= \omega t \end{aligned} \dots\dots\dots (12)$$

により、運動方程式(11)を次の連立1階常微分方程式に変換する。

$$\dot{z} = Z(z, \tau) \dots\dots\dots (13)$$

ν は解析次数に応じて設定するパラメータで、1/2次分数調波振動の場合は $\nu = 2$ とする。

式(13)の周期解 z_0 を、次のように三角関数の有限級数で展開する。

$$z_0(\tau) = a_0 + \sum_{n=1}^m (a_n \cos n\tau + b_n \sin n\tau) \dots\dots (14)$$

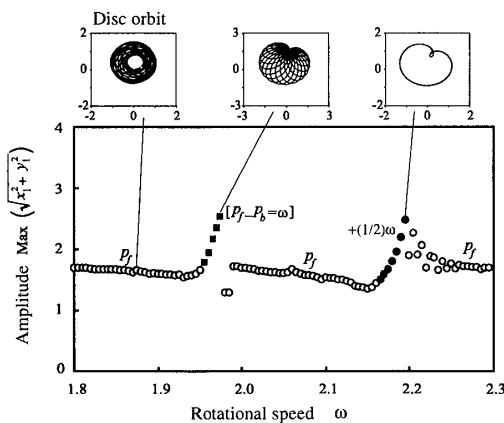


Fig. 3 Resonance of disc (simulation)

ここで、未知の係数ベクトル $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n$ は、状態ベクトル \mathbf{z} と同じ次元を持つ。式(14)を式(13)に代入し、離散時間のガラーキン積分⁽⁷⁾を施して、両辺の調和バランスをとると、

$$\begin{aligned} F_0(\alpha) &= \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} Z(z_0(\tau_k), \tau_k) = 0 \\ F_{2n-1}(\alpha) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{2N} Z(z_0(\tau_k), \tau_k) \cos n\tau_k - nb_n = 0 \\ F_{2n}(\alpha) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{2N} Z(z_0(\tau_k), \tau_k) \sin n\tau_k + na_n = 0 \\ (n &= 1, 2, \dots, m) \dots \dots \dots (15) \end{aligned}$$

ここで、 $\alpha = \{a_0, a_1, b_1, \dots, a_m, b_m\}^T$ とする。また、 $2N$ は周期 2π の間の時間ステップ数を表し、各離散点の時刻 τ_i は $\tau_i = (2i-1)\pi/2N$ で計算する。

式(15)の α をニュートン・ラフソン法で解き、式(14)の周期解を求める。 α の更新式は、式(16)、(17)で与えられる。

$$\sum_{j=1}^{2m} J_{ij}(\alpha) \Delta \alpha_j + F_i(\alpha) = 0 \quad (i=0, 1, 2, \dots, 2m) \dots \dots \dots (16)$$

$$\begin{aligned} J_{0,0}(\alpha) &= \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} \Psi(z_0(\tau_k), \tau_k) \\ J_{0,2p-1}(\alpha) &= \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} \Psi(z_0(\tau_k), \tau_k) \cos p\tau_k \\ J_{0,2p}(\alpha) &= \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{2N} \Psi(z_0(\tau_k), \tau_k) \sin p\tau_k \\ J_{2n-1,0}(\alpha) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Psi(z_0(\tau_k), \tau_k) \cos n\tau_k \\ J_{2n-1,2p-1}(\alpha) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Psi(z_0(\tau_k), \tau_k) \cos n\tau_k \cos p\tau_k \\ J_{2n-1,2p}(\alpha) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Psi(z_0(\tau_k), \tau_k) \cos n\tau_k \sin p\tau_k \\ &\quad - n\delta_{np} \\ J_{2n,0}(\alpha) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Psi(z_0(\tau_k), \tau_k) \sin n\tau_k \\ J_{2n,2p-1}(\alpha) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Psi(z_0(\tau_k), \tau_k) \sin n\tau_k \cos p\tau_k \\ J_{2n,2p}(\alpha) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Psi(z_0(\tau_k), \tau_k) \sin n\tau_k \sin p\tau_k \end{aligned}$$

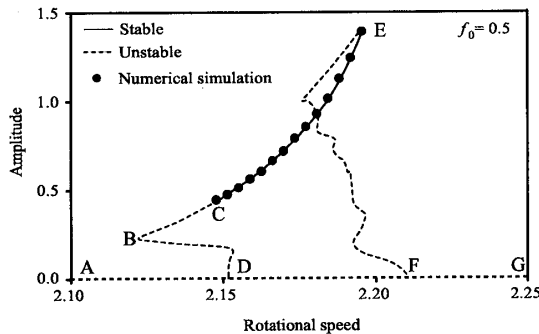


Fig. 4 Periodic solution of 1/2 order component

$$+ n\delta_{np} \dots \dots \dots (17)$$

$\Psi(z_0(\tau_i), \tau_i)$ は、 $Z(z_0(\tau_k), t_k)$ に対する z のヤコビアン行列を表す。

4.2 周期解の安定判別法

周期解の安定性を Nyfeh の方法⁽⁸⁾ で判定する。次のように、周期解 z_0 に乱れ y を加える。

$$z(\tau) = z_0(\tau) + y(\tau) \dots \dots \dots (18)$$

これを元の微分方程式(13)に代入し、テイラー級数展開により乱れ y の線形項を残すと、

$$\dot{y} = \Psi(z_0, \tau)y \dots \dots \dots (19)$$

$\Psi(z_0, \tau)$ は 2π の周期関数になるので、上式は、周期係数を持つ線形常微分方程式となる。その基本解行列を $Y(\tau)$ とすると、Floquet の定理から、

$$Y(\tau + 2\pi) = Y(\tau)\Phi \dots \dots \dots (20)$$

を満足するモノドロミー行列 Φ が存在する。初期条件を $Y(0) = I$ (I は単位行列) として、式(19)を数値積分し $Y(2\pi)$ を求める。この $Y(2\pi)$ と式(20)の関係から Φ が計算できる。 Φ の特性乗数(複素固有値)がすべて単位円より中にあれば、乱れ y は原点に漸近安定となり、周期解 z_0 は安定である。逆に一つでも単位円より外にあれば、周期解 z_0 は不安定となる。

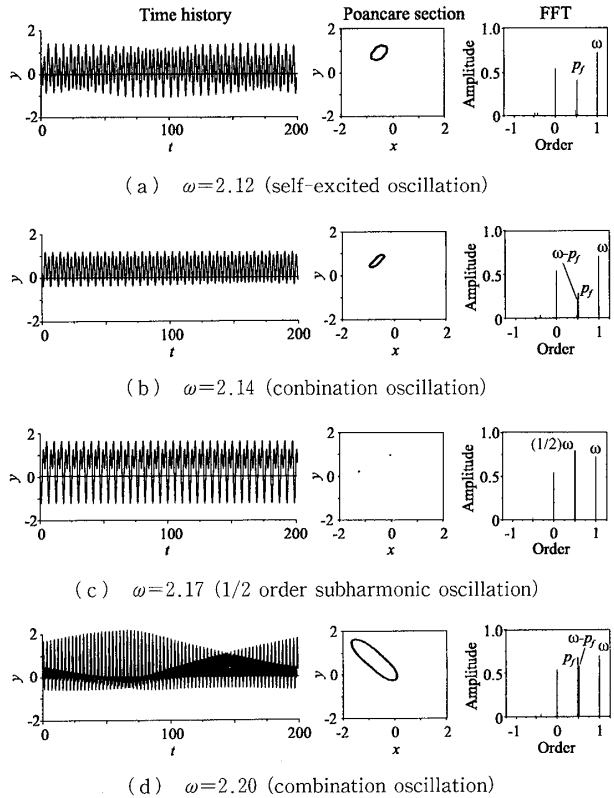


Fig. 5 Time history and spectrum of disc ($f_0 = 0.5$)

5. 解析結果と考察

周期解 $+(1/2)\omega$ の応答曲線を図4に示す。運動方程式のパラメータは4章と同じ値を用い、式(14)の級

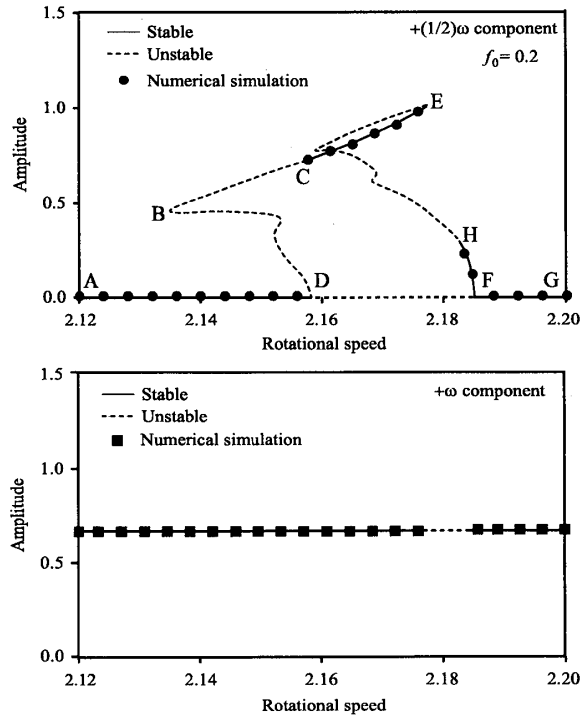


Fig. 6 Periodic solution for small static force

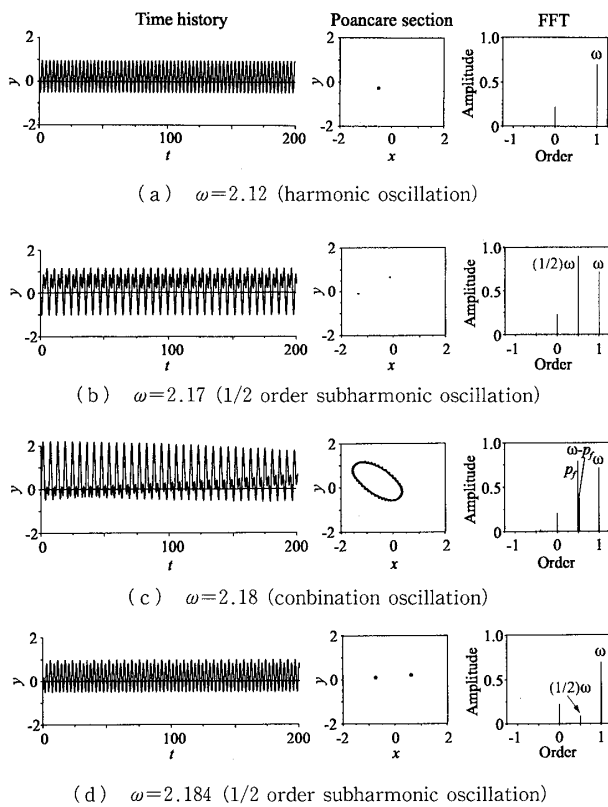


Fig. 7 Time history and spectrum of disc ($f_0=0.2$)

数の次数は $m=10$ とする。分岐 AG, CBD, EF は不安定解, 分岐 CE は安定解である。図5に, 対応する数値シミュレーションの結果を示す。図4で安定解 CE が存在する回転速度域では, 数値シミュレーションでは $+(1/2)\omega$ への引込み現象が発生する。また, $+(1/2)\omega$ の安定解が存在しない回転速度域では, 前向き振れまわりの自励振動 p_f や結合振動 $\omega-p_f$ ⁽⁵⁾ が発生する。

図6, 7には, 横荷重 f_0 を0.2と小さくした場合の結果を示す。 $f_0=0.5$ の場合と比較すると, 安定解 CE の領域が狭くなり, 同時に不安定解 EF の一部が安定解 HF になる。また, 振幅0の不安定解 AG の低速側と高速側が安定解 AD, FG になっている。 $+(1/2)\omega$ 成分の振幅0の安定解が存在する領域では, $+\omega$ の調和成分が有限振幅の安定解を持つ。この回転速度域では, 図7の $\omega=2.13$ に示すように, 安定な調和振動 $+\omega$ のみが発生し自励振動は発生しない。なお, $f_0=0$ として横荷重が作用しない場合を解析すると, 図6の全域で調和振動が安定になり, 数値シミュレーションでも $1/2$ 次分数調波振動や自励振動は発生しない。このことから, $1/2$ 次分数調波振動は, 横荷重によって非対称な非線形ばね成分が発生することが原因

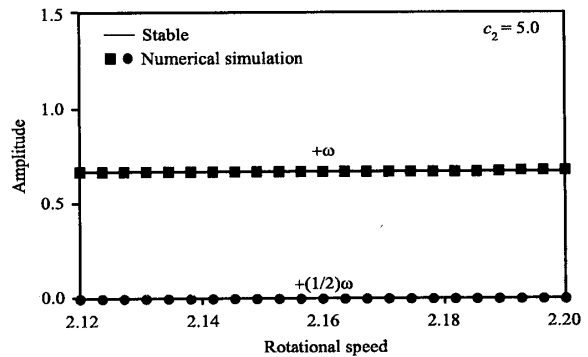


Fig. 8 Periodic solution for large damping

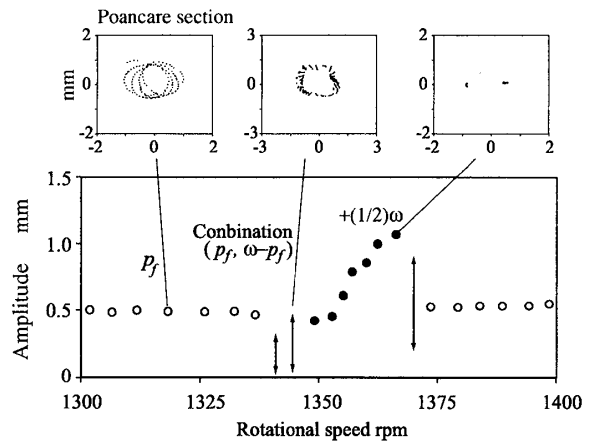


Fig. 9 Response of disc (experiment)

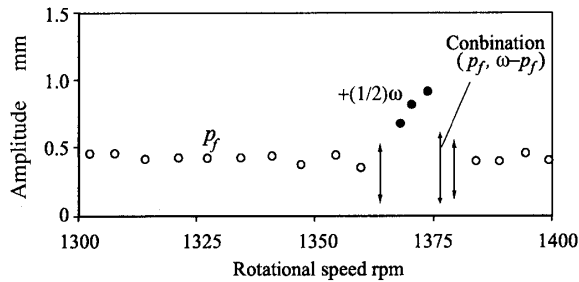


Fig. 10 Response of disc for small misalignment (experiment)

と考えられる。

図8には、軸受部の減衰を $c_2=5.0$ と大きくした場合の結果を示す。この場合は、全域において有限振幅を持つ $+\omega$ の安定解が存在し、 $+(1/2)\omega$ の分数調波振動や自励振動は発生しない。

以上の解析結果から、 $+\omega$ や $+(1/2)\omega$ の安定解が存在しない回転速度域では自励振動が発生し、有限振幅を持つ $+(1/2)\omega$ の安定解が存在する領域では、 $1/2$ 次分数調波振動の引込み現象が発生することがわかった。

6. 実験

調和バランス法による解析結果を検証するため、図1の実験装置で $1/2$ 次分数調波共振点付近の振動を測定した。図9に円板の振動応答と軌跡を示す。回転速度の変化によって自励振動から結合振動を経て $1/2$ 次分数調波振動へ引込まれる様子が、図4の解析結果に対応することが確認できた。

図10に、下側軸受部のミスアライメントを調整して、モータの継ぎ手部から受ける横荷重を小さくした場合の測定結果を示す。これは、解析では図6の $f_0=0.2$ のケースに対応し、横荷重が大きな場合に比べて、 $1/2$ 次分数調波振動の引込み現象が起きる範囲が狭くなり、またその振幅も小さくなった。

図11に、下側軸受のクリアランス部に油を供給して、減衰を大きくした場合の測定結果を示す。図8の解析結果に対応して、このケースでは自励振動、 $1/2$ 次分数調波振動ともに発生せず、調和振動のみが発生する。

7. 結 言

軸受のクリアランス部で衝突を伴う回転軸系を、接触剛性と反発係数を考慮した等価な非線形ばね・減衰モデルで表すことにより、振動現象の理論的な取扱いを可能にし、分数調波振動を不安定解を含めて詳細に解析した。以下に結論をまとめる。

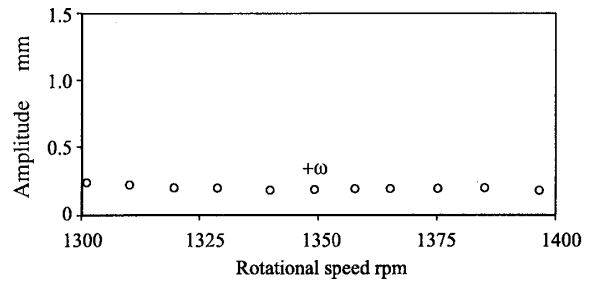


Fig. 11 Response of disc for large damping (experiment)

(1) 軸受クリアランス部の衝突を、軸受のケース壁の接触剛性と反発係数を考慮した断片線形様式のばね・減衰要素で置換えた非線形モデルで、実験で観測される分数調波振動、和差調波振動の各種非線形共振や、前向き振れまわりの自励振動が説明できる。

(2) 等価非線形モデルに調和バランス法を適用して得られる $+(1/2)\omega$ の周期解の安定性を調べることにより、自励振動から $1/2$ 次分数調波振動への引込み現象を理論的に説明できた。

(3) 横荷重が比較的大きな場合は、 $1/2$ 次分数調波振動の引込み領域の近隣に、振幅0の安定な周期解が存在しないため、その近隣領域では、自励振動や概周期振動が発生する。

(4) 横荷重が比較的小さい場合は、 $1/2$ 次分数調波振動の引込み領域の近隣に、振幅0の安定な周期解が存在するため、その近隣領域では、自励振動や概周期振動は発生せず、安定な調和振動のみが発生する。

(5) 軸受の減衰を大きくすると、有限振幅を持つ $1/2$ 次分数調波振動の安定解が消滅して調和振動の安定解のみが残るため、自励振動や $1/2$ 次分数調波共振は発生しない。

文 献

- (1) Ehrich, F. F., *Trans. ASME, J. Vib. Acoust. Stress Reliab.*, **110**-1 (1988), 9-15.
- (2) Ehrich, F. F., *Proceeding 1966 ASME Design Technical Conference*, 66-MD-1 (1966), 1-5.
- (3) Ehrich, F. F., *Trans. ASME, J. Vib. Acoust. Stress Reliab. Des.*, **113**-1 (1991), 50-56.
- (4) 石田幸男・稲垣瑞穂・江島力弥, 機論, **65**-636, C (1999), 3067-3074.
- (5) 稲垣瑞穂・石田幸男・早川誠・安田聡, 機論, **69**-684, C (2003), 1960-1967.
- (6) 日本潤滑学会編, 潤滑ハンドブック, (1987), 15-17, 養賢堂.
- (7) Kim, Y. B. and Noah, S. T., *Nonlinear Dyn.*, **1** (1990), 221-241.
- (8) Nayfeh, A. H. and Balachandran, B., *Applied Nonlinear Dynamics*, (1995), 171, A Wiley-Interscience Publication.