

不連続ばね特性を利用した回転機械の制振*

石田 幸男^{*1}, 劉 軍^{*1}Vibration Suppression of Rotating Machinery Utilizing
Discontinuous Spring CharacteristicsYukio ISHIDA^{*2} and Jun LIU^{*2} Department of Electronic-Mechanical Engineering, Nagoya University,
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya-shi, Aichi, 464-8603 Japan

In rotating machinery, resonance phenomena occur with large amplitude in the vicinities of the major critical speeds. In this paper, a new vibration suppression method utilizing the discontinuous spring characteristics is proposed. This spring characteristic is made by additional springs with preload. This method has the following advantages: In designing these additional springs, we need not adjust their parameter values to the rotor stiffness and the system damping. The amplitude of vibration can be suppressed to the any desired levels. Although this method has a disadvantage that an almost periodic motion occurs above the major critical speed, two countermeasures are proposed to diminish it. We clarified these phenomena theoretically and experimentally.

Key Words: Vibration of Rotating Body, Nonlinear Vibration, Vibration Suppression, Discontinuous Spring Characteristics, Resonance

1. まえがき

回転機械では、不つりあいに起因して主危険速度付近で大きな振動が発生する。この振動を抑制するには、まず、バランスングにより振動の原因である不つりあいを取り除く。しかし、もしつりあいをとった後でも共振が起きる場合には、何らかの制振法が必要となる。

回転軸系の制振法として、これまで以下のようなものが提案されている。最も簡単な方法として、軸受部を防振ゴム^[1]あるいは板ばね^[2]で弾性支持して、その支持部に減衰を与える方法があり、実用化されている。R.G.Kirk と E.J.Gunter^[3]、太田と神戸^[4]は、弾性支持した系に動吸振器理論を適用してその制振効果を調べた。岩田と野波^[5]は、自己最適化吸振器の原理を回転軸の軸受支持部に応用して制振した。一方、航空機用ガスタービンエンジンでは、振動を抑えるため、スクイズフィルムダンパ軸受が広く使われている^{[6][7]}。さらに、最近では、さまざまな制御理論を用いて能動的に制振する方法が盛んに研究されている。例えば、野波^[8]は最適レギュレータを用い、K.D.Reinig と A.A.Desrochers^[9]は外乱オブサーバ理論を利用し、野波と鄭^[10]は可変速度フィードバック法を用いて回

転軸系の制振を調べた。

以上のように様々な制振法がこれまでに提案され、研究あるいは実用化されているが、視点を変えるとそれぞれ次のような短所を持っている。(1) 防振ゴムは弾性定数の経年変化、気温による変化が著しく、パラメータの値を精度よく調整し、保つことが難しい。(2) 軸受部を弾性支持構造にすることは、もとの機械を構造変更して複雑化し、かつ安全面でも低下をもたらす恐れがある。(3) 動吸振器理論に基づいて最適値を求める、特に減衰係数などの値をそれに調整することが難しい。(4) スクイズフィルムダンパ軸受や制御手法を適用する方法は、複雑で大掛かりな装置が必要であり、一般回転機械に利用するにはコストがかかる。(5) 多くの振動制振法においては、モデリングの段階で実際の系と数学モデルの間のパラメータ誤差、無視された電磁力の非線形性があり、また、制振の段階でサーボフィードバック制御に侵入する高周波数ノイズ、制御回路の飽和や位相遅れの問題（閉ループ系の不安定化）が存在する。

本研究では、補助ばねを利用して回転軸の復元力に不連続ばね特性をつくり、回転軸の振動を簡単に抑える方法を提案する。この方法は、上記(1)～(5)の欠点を補うとともに、さらに、パラメータの細かい調整が

* 原稿受付 2003年11月18日。

^{*1} 正員、名古屋大学大学院工学研究科(〒464-8603 名古屋市千種区不老町)。

E-mail: ishida@nuem.nagoya-u.ac.jp

不要であり、また、振幅を希望する任意の大きさに制限できるという長所をもっている。ここでは、主危険速度付近の共振現象に対して、この不連続ばね特性を用いた回転体系の振動特性を調べ、その制振効果を明らかにした。

2. 理論モデルと不連続ばね特性

2.1 理論モデル 理論モデルを図1に示す。回転速度 ω で回転するジェフコットロータの円板を、回転しないケーシングで囲う。このケーシングは、2つの軸受を介して回転軸に取り付けられており、軸の回転に対しては自由である。ここで、軸は鉛直であるとし、重力の作用を考えない。 m を回転体とケーシングの質量、 e を円板の静不つりあい、 c_1 を系の減衰係数、 k_1 を弾性軸のばね定数であるとする。このケーシングからクリアランス δ だけ離れて補助リングを設け、その外側に補助ばね(ばね定数 k_2)と補助ダンパー(減衰係数 c_2)を設置する(以下では、簡単のため、これら2つの要素を設置した状態でも文中では補助ばねを設置と記す)。上下軸受の中心を結んだ線(軸受中心線)に z 軸、回転体がふれまわる平面内に x 、 y 軸をとった直交座標系 $O-xyz$ を設定する。円板の形心を $M(x, y)$ とし、円板の重心を $G(x_G, y_G)$ とする。重心と形心の距離を e とする。また、形心を極座標では $M(r, \theta)$ で表す。

2.2 不連続ばね特性 補助ばねは、自然長から δ だけ縮んだ状態でリングに接している。補助ばねにはストッパを設けてあり、さらに縮むことはできるが、伸びることはできないものとする。例えば、 x の正の方向に円板が移動すると、 $x < \delta$ のときは弾性軸の復元力 k_1x だけが作用する。 $x = \delta$ になると、ケーシングがリングに接触する。リングを押す力が与圧の大きさ $k_2\delta$ を越えると、リングが移動して $x > \delta$ となり、右の補助ばねは縮む(このとき、左の補助ばねは、ストッパがあるためそれ以上に伸びることができないで、リングから離れる)。 $x > \delta$ では、弾性軸と補助ばねが復元力に寄与する。以上の機構から復元力特性は図2のようになる。与圧のため、ばね特性はこのように不連続になる。

このモデルでは、回転体の変位 $r(= \sqrt{x^2 + y^2})$ に依存して、 $r > \delta$ の状態と、 $0 < r < \delta$ の状態で系の特性が変わる。すなわち、 $r = \delta$ を境に、柔らかいばね系と硬いばね系が切り替わることになる。なお、たとえば、回転体が一定半径 r でふれまわり運動をしているときには、図2のばね特性の一点のみを利用してすることになる。これは往復振動系と異なる性質であり、ここで提案している制振法が、回転軸系でのみ有

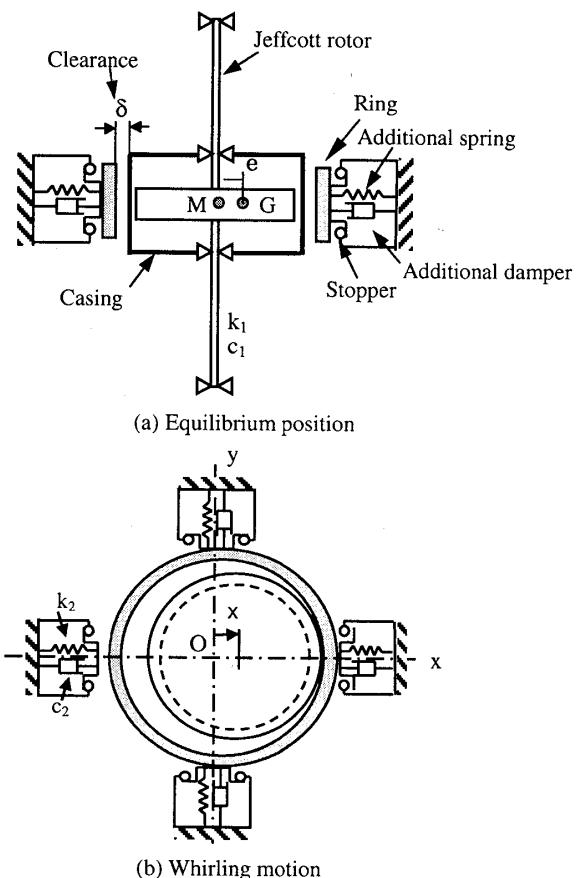


Fig. 1 Rotor model

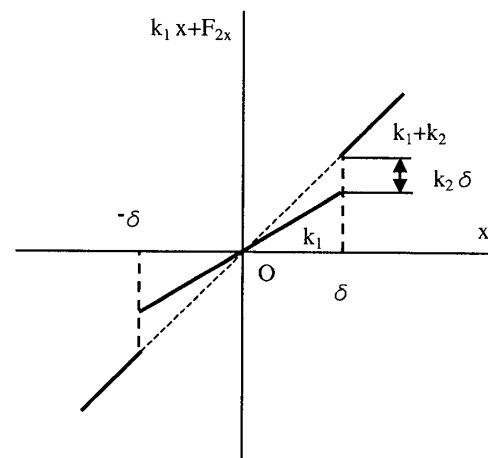


Fig. 2 Spring characteristic with additional spring

効であることを意味している。

補助ばねによるばね力(F_{2x} , F_{2y})と減衰力(D_{2x} , D_{2y})はつぎのように表される。

$$\left. \begin{aligned} F_{2x} &= -k_2x, & D_{2x} &= -c_2\dot{x}, \\ F_{2y} &= -k_2y, & D_{2y} &= -c_2\dot{y}, \\ F_{2x} &= F_{2y} = D_{2x} = D_{2y} = 0, & (r \leq \delta) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

3. 運動方程式

3.1 リングに接触していない場合 ($0 < r < \delta$)

この場合は、ジェフコットロータと同じ運動方程式となる^[11]。仮に回転体を水平に支持したときに生じる静たわみ $e_{st} = mg/k_1$ を用いて無次元量をつぎのように定義する。

$$\left. \begin{array}{l} x' = x/e_{st}, \quad y' = y/e_{st}, \quad t' = t\sqrt{k_1/m} \\ \omega' = \omega/\sqrt{k_1/m}, \quad e' = e/e_{st}, \quad c'_1 = c_1/\sqrt{mk_1}, \end{array} \right\} \quad (2)$$

これらを用いると、運動方程式は次式となる。なお、以下では無次元量の'を省略する。

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{x} + c_1 \dot{x} + x = e\omega^2 \cos \omega t \\ \ddot{y} + c_1 \dot{y} + y = e\omega^2 \sin \omega t \end{array} \right\} \quad (3)$$

3.2 リングに接触している場合 ($r \geq \delta$) ケーシングがリングに接触すると、式(1)の力が加わるので、運動方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{x} + c_1 \dot{x} + x = e\omega^2 \cos \omega t + F_{2x} + D_{2x} \\ \ddot{y} + c_1 \dot{y} + y = e\omega^2 \sin \omega t + F_{2y} + D_{2y} \end{array} \right\} \quad (4)$$

4. 予圧がない場合

4.1 数値シミュレーション 図1(a)において、第2.2節で説明したばねより δ だけ短いばねを用いる。すなわち、自然長の状態でリングに接するようとする。さらに、補助ばねのストップをはずす。このとき予圧は与えられず、またばね定数は不連続であるが、復元力の大きさは連続となる。このとき、 F_{2x} , F_{2y} , D_{2x} および D_{2y} は以下のように表される。

$$\left. \begin{array}{l} F_{2x} = k_2(r - \delta)x/r, \quad F_{2y} = k_2(r - \delta)y/r, \\ D_{2x} = c_2 \dot{x}/r, \quad D_{2y} = c_2 \dot{y}/r \quad (r > \delta) \\ F_{2x} = F_{2y} = D_{2x} = D_{2y} = 0 \quad (r \leq \delta) \end{array} \right\} \quad (5)$$

式(4)と(5)を用いて数値計算を行い、主危険速度付近の調和振動成分の振幅 R を調べた結果を図3に示す。

4.2 共振曲線とその特徴 この共振曲線はつぎの特徴をもつ。(1) $r < \delta$ のときは共振点 $\omega = 1.0$ 附近で共振するが、 $r > \delta$ となると、補助ばねも合わせたときの共振点 $\omega = 1.5$ に徐々に近寄っていく。(2) 共振曲線は全体として漸硬形となる。(3) 補助ばねを加えた系には制振効果がない。

5. 予圧がある場合

第2.2節の図2で示したばねを用いた場合であり、復元力全体の大きさは不連続特性を示す。なお、補助

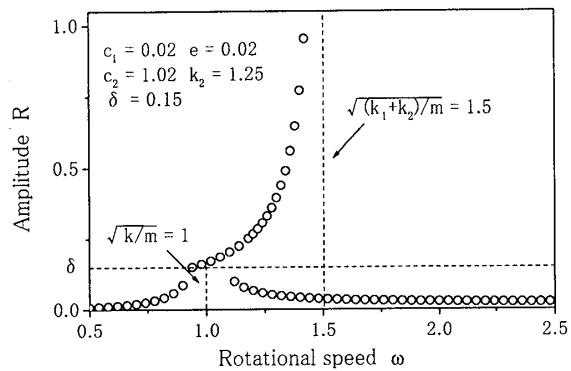


Fig. 3 Without a preload in additional spring

ばねには方向差がないと仮定する。

5.1 基礎式の誘導 主危険速度付近の共振現象に注目する。 $O(\epsilon^0)$ の大きさの調和振動解をつぎのように仮定する。

$$\left. \begin{array}{l} x = R \cos(\omega t + \beta) \\ y = R \sin(\omega t + \beta) \end{array} \right\} \quad (6)$$

式(6)を式(4)に代入し、振動数 ω の項について両辺の係数を $O(\epsilon)$ の精度で等置すると、振幅 R と位相角 β に関する次式を得る。 $r > \delta$ のときは

$$\left. \begin{array}{l} (c_2^2 + 4\omega^2)\dot{R} = \omega^2 e c_2 \cos \beta - R c_2 G(\omega) \\ -2\omega^3 e \sin \beta - 2R\omega^2(c_1 + c_2), \\ R(c_2^2 + 4\omega^2)\dot{\beta} = 2\omega R G(\omega) - 2\omega^3 e \cos \beta \\ -\omega^2 e c_2 \sin \beta - R c_1 c_2 \omega - R c_2^2 \omega \end{array} \right\} \quad (7)$$

ここで、 $G(\omega) = 1 + k_2 - \omega^2$ である。 $r < \delta$ のときには上式で $k_2 = c_2 = 0$ とおく。上式で、左辺の時間微分を0とおくことにより定常解を求める。また、解の安定性はラウス・フルビッツの安定判別法を適用すれば判別できる。

5.2 共振曲線の特徴と制振効果 調和振動成分の共振曲線を図4に示す。この系は、ケーシングが補助ばねと接触するかどうかによって2つの系に分かれる。すなわち、 $r \leq \delta$ のときはばね定数が小さく、 $\omega = \sqrt{k_1/m}$ で共振し、 $r \geq \delta$ のときには、補助ばねの剛性が加わるため $\omega = \sqrt{(k_1 + k_2)/m}$ で共振する。前者をシステム1、後者をシステム2とよぶことにする。図4にはこれら2つの系の共振曲線が重ねて書いてあるが、実際に存在する共振曲線は実線で示された部分である。この実線の部分は、安定判別の結果、安定であることが確認できる。破線の部分は、実際には存在しない共振曲線であるが、説明の便宜上記入した。すなわち、この系は、振幅が小さい範囲ではシステム1の共振曲線、大きい範囲ではシステム2の共振曲線を用いることになる。結局、補助ばねを用いた結果、

共振曲線の上部が高速側に移動した形状を持つようになる。

いま、この状態で低速側から徐々に回転速度を上げていくと、まず、システム1の共振曲線ABをたどる。回転速度がB点を越えると、もし振幅が δ より大きくなればシステム2になるので、仮想の曲線GHに収束しようとして振幅が減少し、一方、もし振幅が δ より小さくなればシステム1になるので、仮想の曲線BCあるいはDEに収束しようとして振幅が増大する。その結果、点Bと点Eを結ぶ線の付近に漂うと予想できる。そして回転速度がE点を越えると安定な曲線EFをたどって振幅が減少する。以上は物理的な推察であり、実際にどのような振動が発生するかについては以下で数値シミュレーション、あるいは実験により確認する。もし外乱などの原因で大振幅の曲線HI、JKに跳躍しないとすれば、共振点の振幅を小さな振幅 δ の程度に抑えることができる。

5.3 数値シミュレーション 与圧がある場合の応答を数値シミュレーションで調べる。なお、振動を抑える目的から、補助ダンパーの減衰を大きくして、高速側の共振(システム2)のピークを小さくした。計算結果を図5に示す。理論解も重ねて書いてある。この場合、クリアランスを $\delta = 0.07$ として計算した。理論解析の結果と数値積分の結果(○印)はよく一致している。ただし、BE間では、上で物理的に推察したとおり、ほぼ $\delta = 0.07$ の振幅の大きさにとどまっているが、概周期運動(振幅の変動範囲を記号●で示す)となっている。この概周期運動は図4のE点を越えても持続しており、H点からは高速側の共振曲線(システム2)に移る。その後、システム2の共振曲線のピークを越えたのち、振幅がクリアランス δ の値になると、小振幅のシステム1の共振曲線に跳躍した。回転速度 $\omega = 1.02$ のところのx成分の時刻歴を図6(a)に、また、回転速度 $\omega = 1.48$ のところのx成分の時刻歴を図6(b)に示す。

実際問題として、システム1は与えられた系(原系)であり、したがって、一般にそのパラメータを調整することが難しく、一方、システム2は付加する系であり、そのばね剛性と減衰の大きさは任意に与えることができると仮定する。図5の結果では、原系の最大振幅が非常に大きくほぼ1.0であるが、それがほぼ0.1程度に抑えられているので、本手法の効果が認められる。しかし、概周期運動がE点を超えても持続して高速側の共振曲線のピークに捕まるということは、制振の目的から言えば望ましくないし、また前節で予想(期待)した挙動からもはずれる。

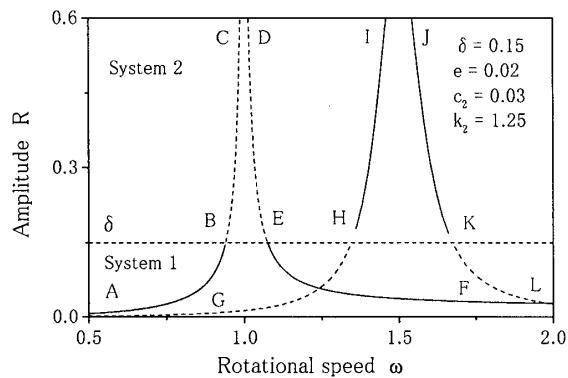


Fig. 4 Case with an additional spring

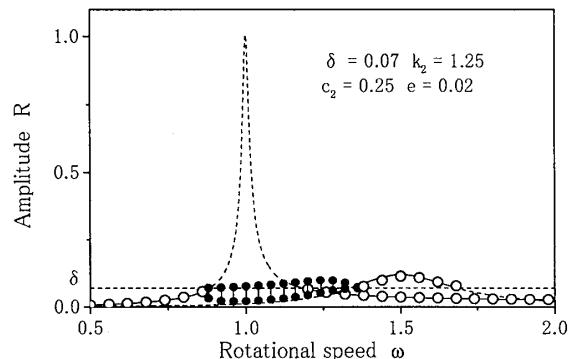


Fig. 5 Additional spring with a preload

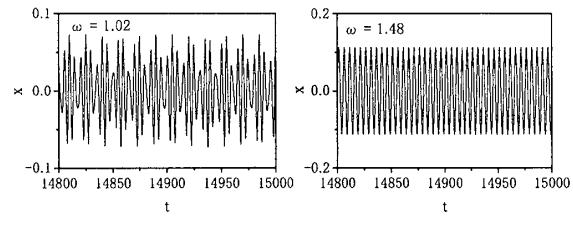
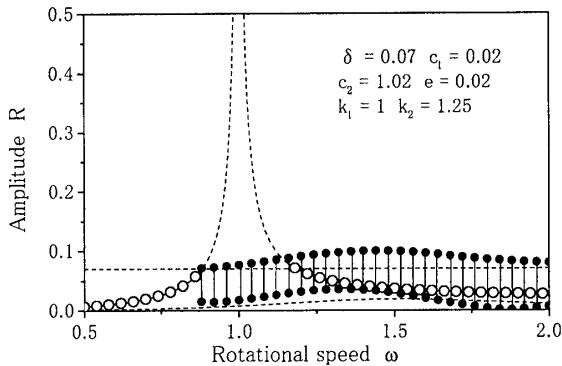


Fig. 6 Time histories

5.4 パラメータの影響 振動を小さく抑えるため、付加系の減衰係数 c_2 をさらに大きくして、高速側のピークをクリアランス δ より小さくすることを考える。計算結果を図7に示す。しかし、この結果は、概周期運動の発生範囲が著しく広くなることを示している。小振幅の調和振動に収まらず概周期運動が存在するということは、制振という目的からみると好ましくない。

6. 概周期運動の制振対策

前節では、減衰係数 c_2 が大きくなったら、高速側まで広い範囲で概周期運動が発生した。そこで回転体の運動が概周期運動から脱出するため、回転体のふれまわり軌道を何らかの方法で崩せば定常解へ跳躍やすくなるのではないかと予想して、以下のよう方策

Fig. 7 Case with a large damping coefficient c_2

を試みた。

6.1 補助ばねの剛性に方向差がある系 補助ばねに剛性の方向差を与えて、各方向で異なる大きさの復元力を作用させる。

補助ばねの x と y 方向のばね定数を k_{2x} , k_{2y} で表し、また減衰係数を c_{2x} , c_{2y} で表す。回転体がふれまわるとき、それらによる復元力と減衰力はつぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} F_{2x} &= -k_{2x}x, \quad F_{2y} = -k_{2y}y, \\ D_{2x} &= -c_{2x}\dot{x}, \quad D_{2y} = -c_{2y}\dot{y} \quad (r > \delta) \\ F_{2x} &= F_{2y} = D_{2x} = D_{2y} = 0 \quad (r \leq \delta) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

方向差として $k_{2x}/k_{2y} \approx 1.7$ を与えたときの計算結果を図 8 に示す。方向差のため概周期運動は途中で消え、小振幅の安定解に跳躍している。

6.2 クリアランスの方向差がある系 リングをわずかにずらして設置し、ケーシングとリングの間のクリアランスを不均一にする。これにより、異なる方向で違う大きさの復元力を系に与える。リングが y 方向に $\Delta\delta$ だけずれていると仮定する。座標変換

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \\ y &= y' + \Delta\delta \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

を用いて運動方程式 (4) を変換する。ここに、 x と y は元の座標系、 x' と y' はリングの中心に原点をもつ新たな座標系である。

数値シミュレーションの結果を図 9 に示す。クリアランスの方向差があるため概周期運動は高速側に行く途中で消え、小振幅の安定解に跳躍できることがわかる。

7. 実験

7.1 実験装置 本実験装置の概要を図 10 に示す。回転体として円板を取り付けた弾性軸の上端を 2

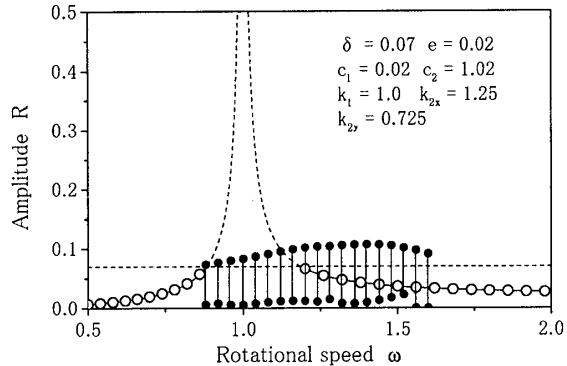


Fig. 8 Case with a directional difference in stiffness

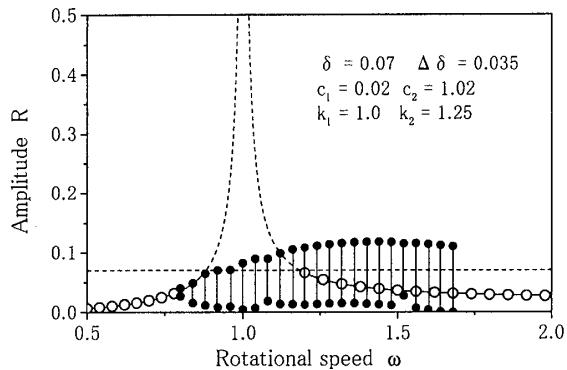


Fig. 9 Case with a directional difference in clearance

個の軸受で支持したオーバーハング軸を作製した。軸は、長さ(下側軸受の中心と軸の下端の間隔)700mm、直径 12mm、円板は直径 260mm、厚さ 10mm である。軸は円板より下方に約 60mm 伸びており、そこに、軸受がしまりばめによって取り付けてある。この軸受の外輪が、理論モデルのケーシングに相当する。なお、この外輪は、内輪の回転に対して自由な状態にある。実際に外輪は軸受のわずかな摩擦により回転するが、その外側に設けたリングに接すれば、その回転も止まる。外輪とリングの間のクリアランスが $\delta = 2\text{mm}$, $\delta = 1\text{mm}$ と $\delta = 0\text{mm}$ となる 3 種類のリングを用いる。補助ばねとして板ばねを用い、この板ばねを複数枚重ねて、その間の乾性摩擦により減衰を与えた。また、ストッパとして板にたてたピンを用い、さらに与圧も与えた。外輪とリングの間のクリアランスがなくなる $\delta = 0\text{mm}$ のリングは、すべての振幅でシステム 2 の状態にするためのものである。これを用いて実験をした結果、システム 2 の共振点は $\omega \approx 640\text{rpm}$ であった。

7.2 実験結果

7.2.1 補助ばねがない系 補助ばねがない場合の共振曲線を図 11 に示す。この図から、主危険速度($\omega \approx 540\text{rpm}$)付近で大きな共振現象が発生している

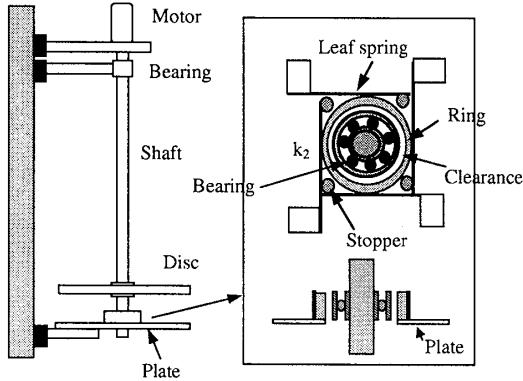


Fig. 10 Experimental setup

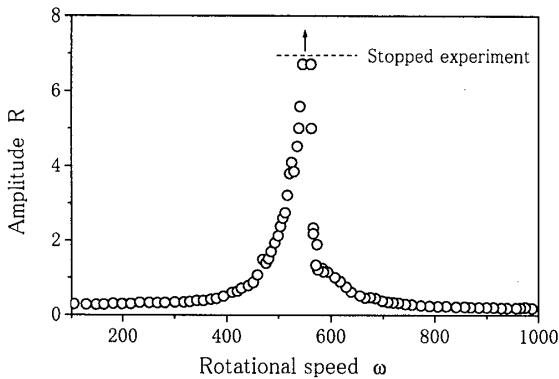
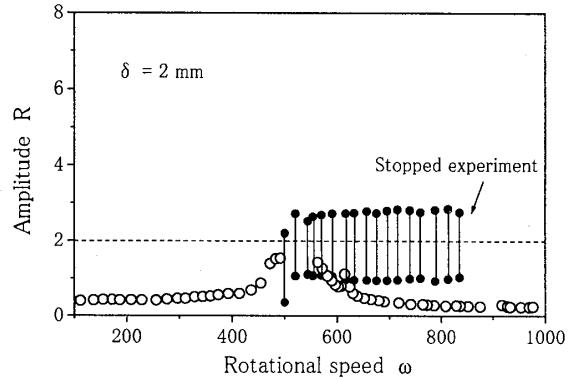


Fig. 11 Case with no additional spring (Experimental result)

ことが分かる。この場合、危険のため、振幅の大きさが約7mmとなったとき実験を中止した。

7.2.2 補助ばねがある系(方向差がなく $\delta = 2\text{mm}$ の場合) 各方向に同じ枚数の補助ばねを設置して実験を行った。外輪とリングの間のクリアランスは $\delta = 2\text{mm}$ と設定する。得られた共振曲線を図12に示す。図11において約7mm以上あった主危険速度付近の振動が約2mm程度にまで小さく抑えられていることが分かる。このとき、システム2の共振振幅がクリアランス $\delta = 2\text{mm}$ の下に存在する。また、主危険速度付近から高速側で、振幅がクリアランス δ 程度の大きさの概周期運動が広い領域で発生した。なお、危険なため、 $\omega = 840\text{rpm}$ 付近でこの概周期運動の実験を中止した。一般に、板ばねを用いると減数係数 c_2 は大きくなるので、この結果は、前述の理論解析の図7と定性的によく一致している。

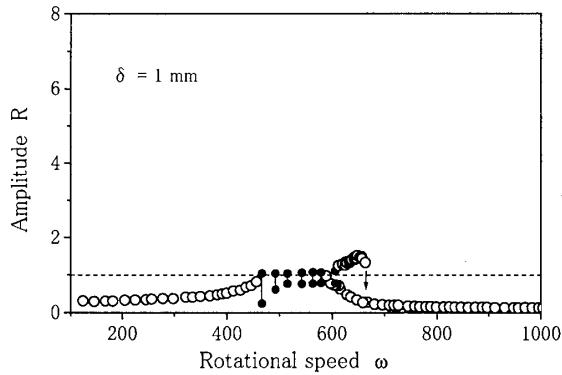
7.2.3 補助ばねがある系(方向差がなく $\delta = 1\text{mm}$ の場合) 上記第7.2.2節の場合より、クリアランスを小さくして $\delta = 1\text{mm}$ で実験した。得られた共振曲線を図13(a)に示す。主危険速度付近の振動が約1mm程度に小さく抑えられているので、システム2

Fig. 12 Case with equal additional springs, ($\delta = 2\text{mm}$, Experimental result)

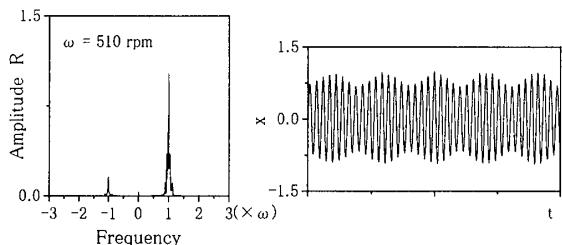
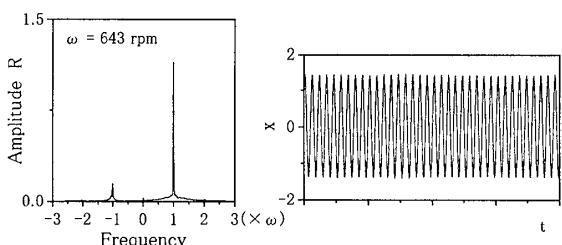
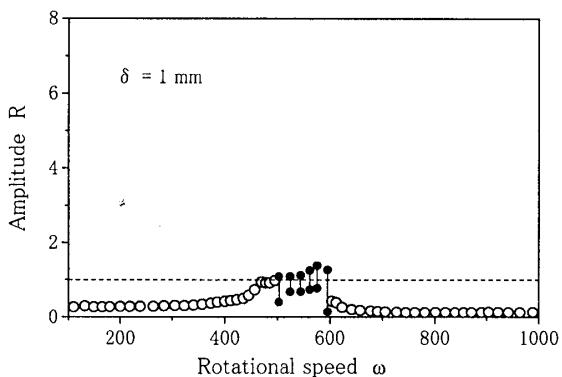
の $\delta = 1\text{mm}$ より大きい共振のピークが現れ、実験で $\omega = 600 \sim 670\text{rpm}$ で安定な振幅が得られた。その結果このシステム2の共振点を超えた後に高速側の小振幅の安定な共振曲線(調和振動の定常解)に移行した。主危険速度付近の回転速度 $\omega = 510\text{rpm}$ とシステム2の共振付近の回転速度 $\omega = 643\text{rpm}$ のところの時刻歴とFFTをそれぞれ図13(b)と(c)に示す。システム1の主危険速度付近で概周期運動が、システム2の主危険速度付近で定常振動が発生することがわかる。この実験の結果は、理論解析の図5と定性的によく一致している。

7.2.4 補助ばねがある系(剛性の方向差がある場合) x と y 方向の補助ばね(板ばね)の枚数(2枚と4枚)を変えて方向差を作った。外輪とリングの間のクリアランスは $\delta = 1\text{mm}$ である。得られた共振曲線を図14に示す。共振点を超えた付近で概周期運動は消え、高速側の小振幅の安定な共振曲線(調和振動の定常解)に跳躍している。また、最大振幅も1mm程度に小さくなっている。制振効果が確認できた。この実験の結果は、理論解析の図8と定性的によく一致していることが確認された。

7.2.5 補助ばねがある系(クリアランスの方向差がある場合) リングをずらすことによってクリアランスの方向差を作った。なお、外輪とリングの間の平均のクリアランスは $\delta = 1\text{mm}$ とした。 x と y 方向の補助ばねの板ばねの枚数は同じである。得られた共振曲線を図15に示す。共振点を超えた付近で概周期運動は消え、高速側の小振幅の安定な共振曲線(調和振動の定常解)に跳躍し、概周期運動の発生範囲が大幅に狭くなっていることがわかる。また、最大振幅も1mm程度に小さくなっている。制振効果が確認できた。この実験の結果は理論解析の図9と定性的によく一致していることが確認された。

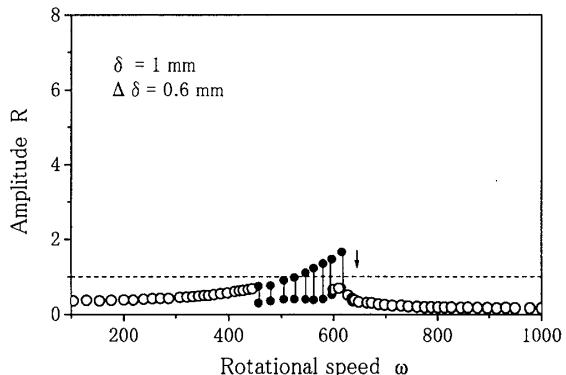


(a) Resonance curve

(b) Almost periodic motion($\omega = 510 \text{ rpm}$)(c) Stationary motion($\omega = 643 \text{ rpm}$)Fig. 13 Case with equal additional springs
($\delta = 1 \text{ mm}$, Experimental result)Fig. 14 Case with a directional difference in stiffness
($\delta = 1 \text{ mm}$ Experimental result)

8. 結 論

本研究では、回転機械における不つりあいによる主危険速度付近の共振現象を抑制するために、補助ばねを利用して不連続ばね特性を作つて回転軸の振動を抑

Fig. 15 Case with a directional difference in clearance
($\delta = 1 \text{ mm}$ Experimental result)

える方法を提案した。そして以下の結論を得た。

- (1) 補助ばねに予圧とクリアランスを与えることによって、不連続ばね特性が得られた。
- (2) この回転体系は、補助ばねのクリアランスの大きさを境として2つの独立な線形系に分けられる。
- (3) 補助ばねに予圧がない場合には、漸硬型の共振曲線が得られる。
- (4) 補助ばねに与圧を与えると、高い制振効果が得られ、振幅をクリアランスの大きさと同程度に抑えることができる。
- (5) 共振点より高速側で発生する概周期運動は、補助ばねの剛性の方向差、あるいはクリアランスの大きさの方向差を持たせることにより消すことができる。
- (6) 以上のことを、理論、数値シミュレーションおよび実験により確認できた。

文 献

- (1) Tallian,T.E. and Gustafsson,O.G., ASME Trans., Vol.8,3(1965),195
- (2) 伊藤, 機械設計, 6,12(1962), 30
- (3) Kirk,R.G. and Gunter,E.J., J. Engineering for Industry,2(1972),221
- (4) Ota,H. and Kanbe,Y., J. Applied Mechanics, Vol.98,1(1976), 144
- (5) 岩田, 野波, 機論, 49-446,10(1983), 1897
- (6) Morton,P.G., Pro.Inst.Mech. Eng.,180(1965),295
- (7) Ehrich,F. and Childs,D., Mech. Eng. 5(1984),66
- (8) 野波, 機論, 51-470,10(1985),2463
- (9) Reinig,K.D. and Desrochers,A.A. Trans. ASME J. Dyna. Sys. Meas. and Cont., Vol.108,3(1986), 24
- (10) 野波, 鄭, 機論, 55-517,9(1989),2336
- (11) 山本, 石田, 回転機械の力学, コロナ社, 2001