

## 周期的加振によるロータクラックの検出\*

石田 幸男<sup>\*1</sup>, 井上 剛志<sup>\*1</sup>

## Detection of a Rotor Crack by a Periodic Excitation

Yukio ISHIDA and Tsuyoshi INOUE<sup>\*2</sup><sup>\*2</sup> Department of Electronic-Mechanical Engineering, Nagoya University,  
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya-shi, Aichi, 464-8603 Japan

Dynamic characteristics of a cracked rotor with a periodic excitation force are investigated. Due to the open-close mechanism of the rotor crack, the equations of motion of a cracked rotor have linear and nonlinear parametric terms. When a periodic excitation force is applied to a cracked rotor, various kinds of resonances, which are not observed in a symmetric rotor and an asymmetric rotor with linear spring characteristics, occur due to the unique spring characteristics of a cracked rotor. We clarify characteristics of these resonances theoretically and experimentally. These results enable us to detect a crack on-line without stopping the system.

**Key Words:** Vibration of Rotating Body, Cracked Rotor, Nonlinear Vibration, Critical Speed

## 1. ま え が き

回転機械に発生したクラックは、そのまま定常運転を続けると時間とともに成長し、ついには大事故となるため、非常に危険である。機械を止め、分解して行う従来の超音波探傷法、染色検査法、ロータの加振試験などの定期点検は、ハイコスト、早期発見が難しい等の欠点があり、近年、クラック発生による振動特性の変化に着目した振動診断法が研究されている<sup>(1)-(6)</sup>。

著者ら<sup>(7)(8)</sup>はこれまでに、クラックの非線形性に起因して、主危険速度(主共振点)の分数倍や整数倍などの回転速度(副共振点)近傍で非線形共振現象が起きることを報告し、その特性を明らかにした。しかし、回転機械の定格回転速度がこれらの各共振点近傍ではない場合には、このような共振現象に注目してクラックの発生を特定することはできない。

本研究では、たとえば磁気軸受などをモニタリング用に回転機械に組み込み、定常運転中に回転機械を加振して、クラック検出を行う方法の開発を目的とする。これまで、このような、定常運転中の回転機械を加振してクラックの検出を行う研究は報告されていない。

提案する本方法は、クラックの非線形性に起因する共振現象の発生の有無を検出するものであり、印加する周期的外力の大きさは回転軸の自重より1オーダー小さい程度で十分に可能であると想定している。した

がって、周期的外力の印加は磁気軸受により十分に実現可能であるとともに、クラックがない回転軸では共振自体が存在しないため、振動はほとんど発生しない。また、印加外力の周波数や大きさを変化させたり、外力を零にすることは容易であるため、軸の回転速度を変化させてクラックに起因する非線形共振を調べる方法に比べ、加振時の系の状態の変化に対して柔軟・高速に対応でき、危険性は大幅に低減できると考える。

本論文では、主共振点や副共振点から離れた回転速度で運転中の回転軸系に、アクチュエータにより周期的外力を加え、その周波数を変化させて系の応答を調べる。まず、簡単な数学モデルを用いて理論解析を行い、クラックによる非線形性に起因して複数の非線形共振が発生することを示し、その発生要因を明らかにし、それらに着目したクラックの検出法を検討する。

さらに、模擬的にクラックを入れた弾性軸に1つの回転体を取り付けた回転軸系を水平支持し、それをボイスコイルモータにより鉛直1方向に加振して実験を行い、理論解析結果と比較検討する。

## 2. 運動方程式

水平支持により重力が作用する円形断面の回転軸系にクラックが入った回転軸系に周期的外力を加えた場合の非線形近似解析の解析モデルとして、図1(a)のような2自由度傾き振動モデルを考える。この2自由度傾き振動モデルはジャイロモーメントの作用を考

\* 原稿受付 2003年5月20日。

<sup>\*1</sup> 正員,名古屋大学大学院工学研究科(〒464-8603 名古屋市千種区不老町)。

E-mail: inoue@nuem.nagoya-u.ac.jp

慮した最も簡単な回転軸モデルであり、回転体はたわみ運動  $(x, y)$  を行わず、傾き運動  $(\theta_x, \theta_y)$  のみを行う<sup>(9)</sup>。なお、既報<sup>(10)</sup>において、このモデルと4自由度モデルの解析の比較検討をし、定性的にはこのモデルで十分な解析結果が得られることを示した。本論文では、解析対象とする非線形共振は複数の外力が作用する複雑なものであり、計算量が多大となるため、解析がより簡単となるこの2自由度傾き振動モデルを用いることとした。この2自由度傾き振動モデルに、実験において加える加振力に対応する周期的強制外部モーメントを作用させる。さらに、重力の作用に対応させて、一定モーメント  $M_0$  が作用すると考える。

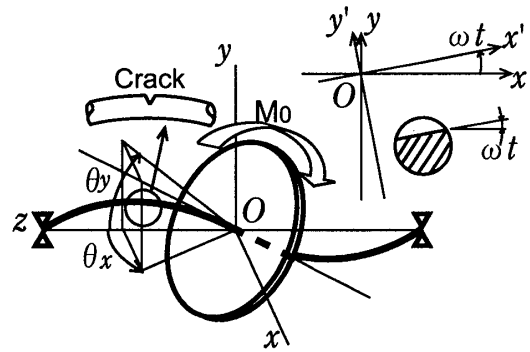
クラックの開閉をモデル化するために、図1(a)に示す静止座標系  $O-xy$  と、軸とともに回転する回転座標系  $O-x'y'$  を用いる。回転体位置における軸の傾き角を  $\theta$  で表し、その静止座標系の  $O-xz$  面と  $O-yz$  面への投影角を  $\theta_x, \theta_y$ 、回転座標系の  $O-x'z$  面と  $O-y'z$  面への投影角を  $\theta'_x, \theta'_y$  で表す。回転座標系の  $O-y'$  軸を、図1(a)に示すようにクラックの開閉方向に合わせると、回転座標系  $O-x'y'$  上におけるクラックロータのばね特性は図1(b)で表すことができる。 $O-x'$  方向のばね特性はクラックの影響は微小として線形特性で近似し、 $O-y'$  方向では軸の傾く方向によるクラックの開閉のためばね剛性が変化し、断片線形 (piecewise linear: PWL) 様式のばね特性となるとすると、ばね特性は次式で表される<sup>(7)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} -M'_x &= k_1 \theta'_x, \\ -M'_y &= (k_2 - \Delta k_2) \theta'_y \quad (\theta'_y > 0), \\ -M'_y &= (k_2 + \Delta k_2) \theta'_y \quad (\theta'_y < 0). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

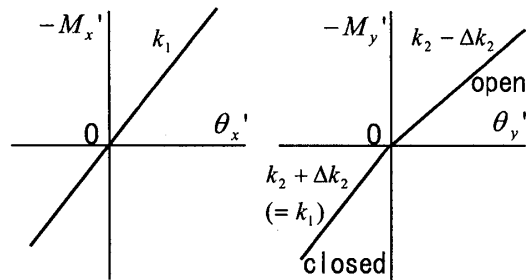
式(1)を静止座標系  $O-xy$  における変数  $\theta_x, \theta_y$  に変換することにより、クラックロータのばね特性を得る。断片線形様式 (PWL モデル) のクラックロータの運動方程式<sup>(11)</sup>に、印加する周期的強制外部モーメントの項を加え、無次元化<sup>(7)</sup>すると次式となる。ただし、式中の  $\pm$  は複合同順であり、 $\theta'_y > 0$  のときに上の符号をとり、 $\theta'_y < 0$  のときに下の符号をとる。

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_x + i_p \omega \dot{\theta}_x + c \dot{\theta}_x + (\Delta_1 \pm \Delta_2)(\theta_x C_2 + \theta_y S_2) \\ + (1 \mp \Delta_2) \theta_x &= M \cos(\omega t + \alpha) + M_1 \cos(\Omega t + \alpha_\Omega) \\ \ddot{\theta}_y - i_p \omega \dot{\theta}_y + c \dot{\theta}_y + (\Delta_1 \pm \Delta_2)(\theta_x S_2 - \theta_y C_2) \\ + (1 \mp \Delta_2) \theta_y &= M \sin(\omega t + \alpha) + M_1 \sin(\Omega t + \alpha_\Omega) + M_0 \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 $M = (1 - i_p)\tau\omega^2$ ,  $C_n = \cos n\omega t$ ,  $S_n = \sin n\omega t$ ,  $\Delta_1 = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$ ,  $\Delta_2 = \Delta k_2/(k_1 + k_2)$ <sup>(11)</sup> である。 $i_p$  は円板の極慣性モーメントと直径に関する慣性モーメントの比、 $\omega$  は回転速度、 $c$  は減衰係数、 $\tau$  は動つりあい、 $\alpha$  はその  $x'$  軸との位相



(a) 2 DOF inclination motion model



(b) Restoring moment

Fig. 1 Theoretical model of a cracked rotor

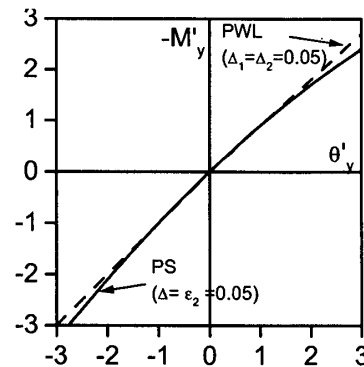


Fig. 2 2nd power approximation of  $M'_y$

差である。また、 $M_1, \Omega, \alpha_\Omega$  は加える強制外部モーメントの振幅、角速度、 $x'$  軸との位相差である。

後述の近似解析時の取り扱いの容易さのため、断片線形様式のばね特性を変位  $\theta_x, \theta_y$  に関するべき級数 (power series: PS) で近似した解析モデルも考える。この PS モデルの運動方程式は次のように示される<sup>(11)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta}_x + i_p \omega \dot{\theta}_x + c \dot{\theta}_x + \theta_x + \Delta(\theta_x C_2 + \theta_y S_2) + N_{\theta_x} \\ = M \cos(\omega t + \alpha) + M_1 \cos(\Omega t + \alpha_\Omega) \\ \ddot{\theta}_y - i_p \omega \dot{\theta}_y + c \dot{\theta}_y + \theta_y + \Delta(\theta_x S_2 - \theta_y C_2) + N_{\theta_y} \\ = M \sin(\omega t + \alpha) + M_1 \sin(\Omega t + \alpha_\Omega) + M_0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで  $\Delta$  および、 $N_{\theta_x}, N_{\theta_y}$ <sup>(11)</sup> は、それぞれ、クラックによる扁平性を表す項 (線形係数励振項) の係数と

非線形係数励振項である。本研究では、図 1(b) の断片線形様式のばね特性を 2 次のべき級数で近似して表す。その時のばね特性は図 2 のように表され、非線形係数励振項  $N_{\theta_x}$ ,  $N_{\theta_y}$  は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} N_{\theta_x} &= \frac{1}{4}\varepsilon_2\{(-3S_1 + S_3)\theta_x^2 + 2(C_1 - C_3)\theta_x\theta_y \\ &\quad - (S_1 + S_3)\theta_y^2\} \quad (\equiv [N_{\theta_x}]_2) \\ N_{\theta_y} &= \frac{1}{4}\varepsilon_2\{(C_1 - C_3)\theta_x^2 - 2(S_1 + S_3)\theta_x\theta_y \\ &\quad + (3C_1 + C_3)\theta_y^2\} \quad (\equiv [N_{\theta_y}]_2) \end{aligned} \right\} (4)$$

また、後の節で明らかになるが、ある種の共振は 2 次のべき級数では発生しない。そのような共振の解析には、つぎに示す 4 次までのべき級数で表される非線形係数励振項<sup>(8)</sup>を用いて解析する。

$$\left. \begin{aligned} N_{\theta_x} &= [N_{\theta_x}]_2 + \frac{1}{16}\varepsilon_4\{-(10S_1 + 5S_3 + S_5)\theta_x^4 \\ &\quad + 4(2C_1 - 3C_3 + C_5)\theta_x^3\theta_y - 6(2S_1 + S_3 - S_5)\theta_x^2\theta_y^2 \\ &\quad + 4(2C_1 - C_3 - C_5)\theta_x\theta_y^3 - (2S_1 + 3S_3 + S_5)\theta_y^4\} \\ N_{\theta_y} &= [N_{\theta_y}]_2 + \frac{1}{16}\varepsilon_4\{(2C_1 - 3C_3 + C_5)\theta_x^4 \\ &\quad - 4(2S_1 + S_3 - S_5)\theta_x^3\theta_y + 6(2C_1 - C_3 - C_5)\theta_x^2\theta_y^2 \\ &\quad - 4(2S_1 + 3S_3 + S_5)\theta_x\theta_y^3 + (10C_1 + 5C_3 + C_5)\theta_y^4\} \end{aligned} \right\} (5)$$

式 (3),(4),(5) から、周期的強制外部モーメントを加えた 2 自由度傾き振動モデルによるクラックローターは、非線形強制係数励振系に分類される系である。

以下では、偏平軸 (式 (3) において  $N_{\theta_x} = 0$ ,  $N_{\theta_y} = 0$  としたもの) とクラックのない丸軸 (式 (3) において  $N_{\theta_x} = 0$ ,  $N_{\theta_y} = 0$ ,  $\Delta = 0$  としたもの) についても調べ、それらの結果とクラックロータの結果を比較検討し、クラックロータの特性を明らかにする。

### 3. 数値シミュレーションによる検討

前述のそれぞれの系に関して、運動方程式 (2),(3) を用いて数値シミュレーションを行う。なお、実験結果と比較するために、数値シミュレーションおよび後に示す理論解析において用いた各パラメータ値は実験装置に対応した値を用いる。 $i_p$  は、後で式 (6) で求める理論モデルの固有振動数の回転速度  $\omega$  に対する変化が、実験装置を 4 自由度系と見たときの 1 次モードの固有振動数の回転速度  $\omega$  に対する変化と同程度になるように設定した。用いた無次元パラメータを表 1 に示す。回転速度  $\omega$  は主共振点や副共振点から離れた  $\omega = 3.0$  で回転しているとし、励振周波数  $\Omega$  に対する共振曲線を調べたものを図 3 に示す。

図 3 の横軸の正の値は軸回転と同方向に回転する外部モーメントを加えることを示しており、負の値は軸回転と逆方向の外部モーメントを加えることを示す。

Table 1 System parameters

$i_p$	0.1	$\Delta_1$	0.05	$\Delta_2$	0.05
$\Delta$	0.05	$\varepsilon_2$	0.05	$c$	0.01
$M_0$	1.0	$M_1$	0.1	$\alpha_\omega$	$3\pi/2$

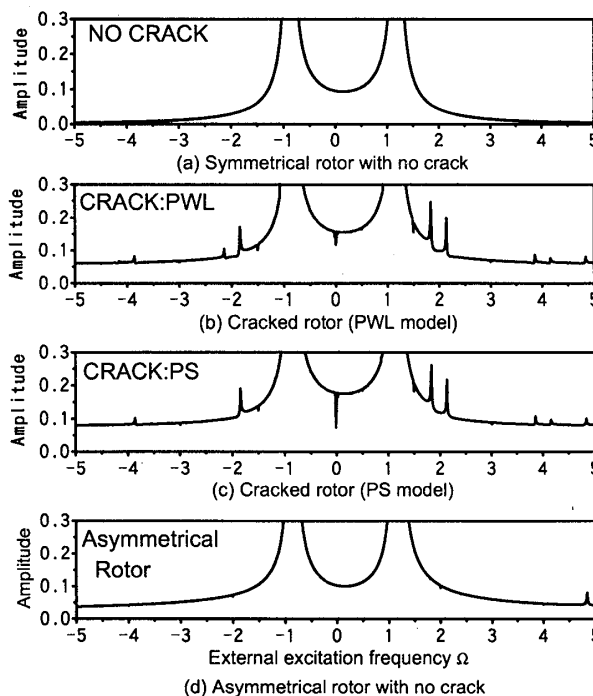


Fig. 3 Resonance curves ( $\omega = 3.0$ )

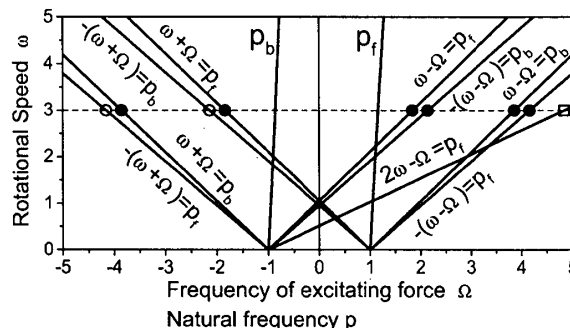


Fig. 4 Frequencies variations of resonances

式 (3) の減衰  $c$  やクラックに起因する線形および非線形係数励振項  $\Delta$ ,  $N_{\theta_x}$ ,  $N_{\theta_y}$ , そして外力  $M$ ,  $M_1$  を 0 とした式に、自由振動解  $\theta_x = \theta_0 \cos pt$ ,  $\theta_y = \theta_0 \sin pt$  を代入し、整理すると次の振動数方程式を得る。前向きと後向きの振れ回り運動の固有振動数  $p_f > 0$ ,  $p_b < 0$  は、この振動数方程式の根として与えられる。

$$G(p) = 1 + i_p \omega p - p^2 = 0 \quad (6)$$

図 4 に、式 (6) から求めた固有振動数  $p_f$ ,  $p_b$  を示す。この図では、横軸は励振周波数  $\Omega$  と固有振動数  $p_f$ ,  $p_b$ , 縦軸は軸の回転速度  $\omega$  をとってある。ジャ

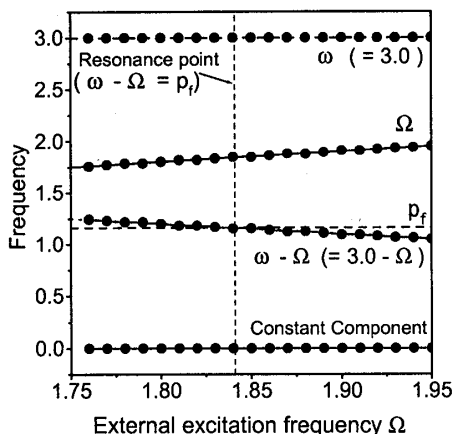


Fig. 5 Frequencies of vibration components ( $\omega - \Omega = p_f$ )

イロモーメントの作用を表すパラメータ  $i_p$  の影響により、固有振動数  $p_f, p_b$  は回転速度  $\omega$  とともに変化している。この図 4 から、例えば図 3 で示した回転速度  $\omega = 3.0$  の場合には、 $\omega = 3.0$  を示す破線と  $p_f, p_b$  を示す実線の交点はその回転速度における固有振動数であり、励振周波数  $\Omega$  がこの固有振動数  $p_f$  あるいは  $p_b$  に一致するときに共振が現れることが予想できる。

図 3(a) はクラックのない丸軸における共振曲線である。励振周波数  $\Omega$  が図 4 で示した  $p_f$  と  $p_b$  の近傍になるときに大きなピークが発生している。

図 3(b)(c) はクラックロータの共振曲線を示しており、前者は PWL モデル、後者は 2 次の PS モデルに対するものである。励振周波数  $\Omega$  を  $-5.0 \sim 5.0$  の間で変えてゆくと、図 3(a) における主共振のピーク以外の励振周波数  $\Omega$  において幾つかの鋭いピークが現れる。このピークの大きさは、主共振  $\Omega = p_f$  あるいは  $\Omega = p_b$  に近い励振周波数  $\Omega$  におけるピークほど大きくなる傾向がある。

図 4 の回転速度  $\omega = 3.0$  の破線上に、図 3(b) でピークが発生した励振周波数を ●, ○, □ で示す。そして、回転速度  $\omega$  を変えながら図 3(b) と同様な解析を行い、ピークが発生する励振周波数  $\Omega$  を固有振動数  $p_f, p_b$  に注目しつつ調べたものを図 4 中に実線で示す。結果として、クラックに起因してピークが発生するときに、これら  $p_f, p_b, \Omega, \omega$  の値の間にはある関数関係が成立していることを示している。すなわち、図 4 から、これらのクラックに起因するピークが発生する励振周波数は  $\pm\omega \pm \Omega = p_f, p_b$  および  $2\omega - \Omega = p_f, p_b$  の関係を満足する実線上において現れる。記号 ● と ○ の違いは、図 3(c) の 2 次の PS モデルでピークが現れたか否かを示しており、● で示されたピークはクラックに起因する最低次 (2 次) の非線形係数励振

性に起因して現れたものであることを示している。

クラックを特性づけるピークを明らかにするために、係数励振効果を持つ線形偏平軸についても同様に調べた。その結果を図 3(d) に示す。偏平軸では、 $\Omega = p_f, p_b$  で示される主共振以外に、 $\Omega = 4.8$  付近において小さなピークが 1 つのみ発生する。このピークは、図 4 における検討より、 $2\omega - \Omega = p_f$  の関係を満足したときに発生する共振 (記号 □) であることがわかる。以上から、回転中のクラックロータに周期的励振力を加えると、そのクラックの発生の有無を検出するのに注目すべき、クラックロータ固有の非線形共振点を持つことが分かる。また、そのピークは  $\Omega = p_f, p_b$  の主共振に近いものほど大きく発生することも観察できる。

4. 非線形近似解析による各共振の動特性の解明

図 3(b) においてクラックに起因して発生した非線形共振について、PS モデルの式 (3) を用いて調べる。なお、 $\Delta$  の大きさは  $O(\epsilon)$  程度とし、非線形項  $N_{\theta_x}, N_{\theta_y}$  については式 (4) あるいは式 (5) を用いる。

4.1 共振  $\omega - \Omega = p_f, p_b$  について 非線形共振  $\omega - \Omega = p_f, p_b$  について調べる。解析には、2 次のべき級数の式 (4) を用いる。励振周波数  $\Omega$  をこの共振点近傍で変化させ、発生する振動成分の振動数変化を調べたものを図 5 に示す。この図 5 から、振動に含まれる振動数は、定数成分、回転速度  $\omega$  成分、励振周波数  $\Omega$  成分、および、振動数  $\omega - \Omega$  成分と思われる。このことから、解を  $O(\epsilon)$  精度で次のように仮定する。

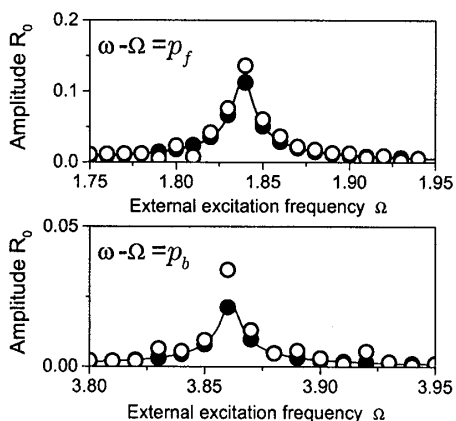
$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= R \cos((\omega - \Omega)t + \gamma) \\ &+ P \cos(\omega t + \beta) + Q \cos(\Omega t + \delta) + A_x \\ &+ \epsilon \{ a \cos((\omega - \Omega)t + \gamma) + b \sin((\omega - \Omega)t + \gamma) \} \\ \theta_y &= R \sin((\omega - \Omega)t + \gamma) \\ &+ P \sin(\omega t + \beta) + Q \sin(\Omega t + \delta) + A_y \\ &+ \epsilon \{ a' \cos((\omega - \Omega)t + \gamma) + b' \sin((\omega - \Omega)t + \gamma) \} \end{aligned} \right\} (7)$$

ここで、 $P, Q, R, \beta, \delta, \gamma$  は時間に対してゆっくり変化する関数とする。まず、この仮定した解 (7) を運動方程式 (3) に代入し、定数成分、回転速度  $\omega$  成分、および、励振周波数  $\Omega$  成分について、 $O(\epsilon^0)$  精度で調和バランスをとることにより、定常解  $A_{x0}, A_{y0}, P_0, \beta_0, Q_0, \delta_0$  を次のように得る<sup>(9)</sup>。

$$A_{x0} = 0, A_{y0} = M_0 \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= M/G(\omega), \quad \beta_0 = \alpha \quad (G(\omega) > 0), \\ P_0 &= -M/G(\omega), \quad \beta_0 = \alpha - \pi \quad (G(\omega) < 0), \end{aligned} \right\} (9)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_0 &= M_1/G(\Omega), \quad \delta_0 = \alpha_\Omega \quad (G(\Omega) > 0), \\ Q_0 &= -M_1/G(\Omega), \quad \delta_0 = \alpha_\Omega - \pi \quad (G(\Omega) < 0), \end{aligned} \right\} (10)$$

Fig. 6 Resonance curve ( $\omega - \Omega = p_f, p_b$ )

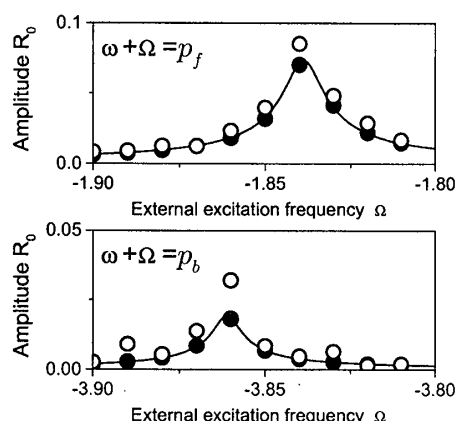
ここで式(6)より,  $G(\omega) = 1 + i_p\omega^2 - \omega^2$ ,  $G(\Omega) = 1 + i_p\omega\Omega - \Omega^2$ である. なお, 以降の各共振の解析時にも, これらの式(8),(9),(10)の結果を用いる.

次に, この結果を用いて,  $\omega - \Omega$ 成分について  $O(\varepsilon)$ 精度で調和バランスをとることにより, 定常解  $R_0$ ,  $\gamma_0$ を求めると, 次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= \frac{\varepsilon_2 Q_0 M_0}{2\sqrt{\{G(\omega - \Omega) + P_0 \varepsilon_2 \sin \beta_0\}^2 + c^2(\omega - \Omega)^2}} \\ \gamma_0 &= \tan^{-1} \frac{-c(\omega - \Omega)}{\{G(\omega - \Omega) + P_0 \varepsilon_2 \sin \beta_0\}^2 - \delta_0} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

共振点  $\omega - \Omega = p_f, p_b$  近傍では, 式(6)より  $G(\omega - \Omega)$ が0に近づく. したがって, 式(11)より, クラックによる非線形係数励振成分  $\varepsilon_2$ , 励振周波数  $\Omega$ の振動成分  $Q_0$ , そして重力  $M_0$ が存在するとき, 共振  $\omega - \Omega = p_f, p_b$ が発生し, 周波数  $(\omega - \Omega)$ の振動振幅  $R_0$ が大きくなる事が分かる. 式(11)より求めた  $\omega - \Omega$ 成分の振幅  $R_0$ の共振曲線を図6に示す. 図の実線は式(11)の理論解析結果を表し, ○と●は, それぞれ, クラックロータのPWLモデルと2次のPSモデルの式(2), (3)を用いた数値シミュレーション結果である. ○と実線は多少の振幅のずれを示しているが, ●と実線はよく一致しており, クラックの影響による共振  $\omega - \Omega = p_f, p_b$ の発生の有無およびその発生する励振周波数  $\Omega$ の値については, 非線形近似解析で得られた式(11)は妥当な結果を与えていることが確認できる. この○と●の違いは2次のべき級数近似の影響を示しており, より高次の近似を行うことにより, この差は0に近づけることができる.

**4.2 共振  $\omega + \Omega = p_f, p_b$  について** 図5と同様な解析より, 共振時には, 定数成分, 回転速度  $\omega$ 成分, 励振周波数の  $\Omega$ 成分, および振動数  $\omega + \Omega$ 成分が発生すると予想し, 解を  $O(\varepsilon)$ 精度で仮定する. 具体的には, 式(7)の振動数  $(\omega - \Omega)$ の項, すなわ

Fig. 7 Resonance curve ( $\omega + \Omega = p_f, p_b$ )

ち, 各式の第1項と  $O(\varepsilon)$ の大きさの項の位相部分  $((\omega - \Omega)t + \gamma)$ を  $((\omega + \Omega)t + \gamma)$ におき直した式で仮定する. 式(8),(9),(10)の結果を考慮しつつ, 周波数  $\omega + \Omega$ 成分について  $O(\varepsilon)$ 精度で調和バランスをとり, 定常解  $R_0$ ,  $\gamma_0$ を求めると, 以降では定常解  $R_0$ のみについて示す.

$$R_0 = \frac{\varepsilon_2 Q_0 M_0}{2\sqrt{\{G(\omega + \Omega) + P_0 \varepsilon_2 \sin \beta_0\}^2 + c^2(\omega + \Omega)^2}} \quad (12)$$

式(12)より, 共振  $\omega + \Omega = p_f, p_b$ の発生条件は, クラックによる非線形係数励振成分  $\varepsilon_2$ , 励振周波数  $\Omega$ の振動成分  $Q_0$ , そして重力  $M_0$ であることが分かる. 式(12)の解析結果とPWLモデル, 2次のPSモデルを用いたシミュレーション結果を図7に示す.

**4.3 共振  $-\omega + \Omega = p_f, p_b$  について** 図5と同様な解析より, 振動に含まれる振動数成分を予想し, 解を  $O(\varepsilon)$ 精度で仮定する. 具体的には, 式(7)の各式の第1項と  $O(\varepsilon)$ の大きさの項の位相部分  $((\omega - \Omega)t + \gamma)$ を  $((-\omega + \Omega)t + \gamma)$ におき直した式で仮定する. 式(8),(9),(10)の結果を考慮しつつ, 周波数  $-\omega + \Omega$ 成分について  $O(\varepsilon)$ 精度で調和バランスをとり, 定常解  $R_0$ を得る.

$$R_0 = \frac{\varepsilon_2 Q_0 M_0}{2\sqrt{\{G(-\omega + \Omega) + P_0 \varepsilon_2 \sin \beta_0\}^2 + c^2(-\omega + \Omega)^2}} \quad (13)$$

式(13)より, 共振  $-\omega + \Omega = p_f, p_b$ の発生条件はクラックによる非線形係数励振成分  $\varepsilon_2$ , 励振周波数  $\Omega$ の振動成分  $Q_0$ , そして重力  $M_0$ である. 式(13)の解析結果とPWLモデル, 2次のPSモデルを用いたシミュレーション結果を図8に示す.

**4.4 共振  $-\omega - \Omega = p_f, p_b$  について** 図4で○で示した非線形共振  $-\omega - \Omega = p_f, p_b$ について調べる. この共振は, 図3(c)では対応するピークが現れなかったことから, より高次のべき級数モデルを用い

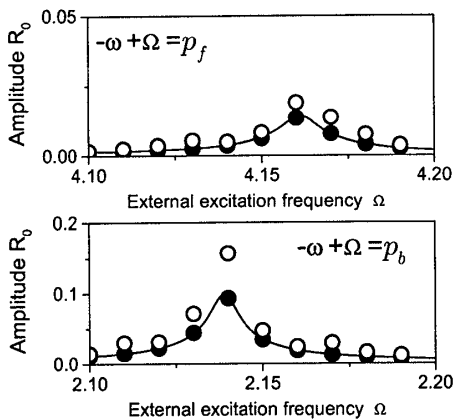


Fig. 8 Resonance curve ( $-\omega + \Omega = p_f, p_b$ )

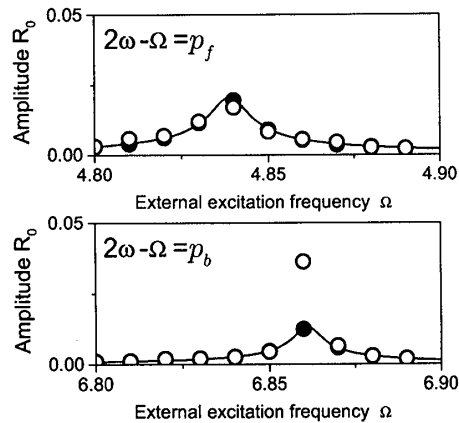


Fig. 9 Resonance curve ( $2\omega - \Omega = p_f, p_b$ )

る必要があると考え、解析に4次のべき級数の式(5)を用いる。図5と同様な解析より、振動に含まれる振動数成分を予想し、解を $O(\epsilon)$ 精度で仮定する。具体的には、式(7)の各式の第1項と $O(\epsilon)$ の大きさの項の位相部分 $((\omega - \Omega)t + \gamma)$ を $((-\omega - \Omega)t + \gamma)$ におき直した式で仮定する。式(8),(9),(10)の結果を考慮しつつ、周波数 $-\omega - \Omega$ 成分について $O(\epsilon)$ 精度で調和バランスをとり、定常解 $R_0$ に関する次式を得る。

$$4R_0^2 \{ (3P_0R_0^2\epsilon_4 \sin \beta_0 + A)^2 + 4c^2(-\omega - \Omega)^2 \} = \epsilon_4^2 Q_0^2 M_0^6 \quad (14)$$

ここで、 $A = 2G(-\omega - \Omega) + P_0 \{ 2\epsilon_2 + 3(2M_0^2 + P_0^2 + 2Q_0^2)\epsilon_4 \} \sin \beta_0 - P_0^3 \epsilon_4 \sin(3\beta_0)$ である。さらに解を考察するために、 $\epsilon_4$ が $\epsilon_2$ に比べて1オーダー小さい量であること<sup>(12)</sup>を考慮して、この左辺中の $\epsilon_4$ に関する項を省略すると、定常解 $R_0$ をつぎのように得る。

$$R_0 = \frac{\epsilon_4 Q_0 M_0^3}{4\sqrt{\{G(-\omega - \Omega) + P_0 \epsilon_2 \sin \beta_0\}^2 + c^2(-\omega - \Omega)^2}} \quad (15)$$

式(15)より、クラックによる非線形係数励振成分 $\epsilon_4$ 、励振周波数 $\Omega$ の振動成分 $Q_0$ 、そして重力 $M_0$ が存在するとき、共振 $-\omega - \Omega = p_f, p_b$ が発生することが分かる。 $\epsilon_4$ は $\epsilon_2$ に比べて小さいため、図3(b)でも確認できるように、このピークは非常に小さい。

**4.5 共振  $2\omega - \Omega = p_f, p_b$  について** クラックロータの場合(図3(b)(c))にも偏平軸(図3(d))の場合にもピークが発生した共振 $2\omega - \Omega = p_f, p_b$ について調べる。図5と同様な検討を行った結果から、共振 $2\omega - \Omega = p_f, p_b$ において振動に含まれる振動数成分を予想し、解を $O(\epsilon)$ 精度で仮定する。具体的には、式(7)の第1項と $O(\epsilon)$ の大きさの項の位相部分 $((\omega - \Omega)t + \gamma)$ を $((2\omega - \Omega)t + \gamma)$ におき直した式で仮定する。

式(8),(9),(10)の結果を考慮しつつ、 $2\omega - \Omega$ 成分に

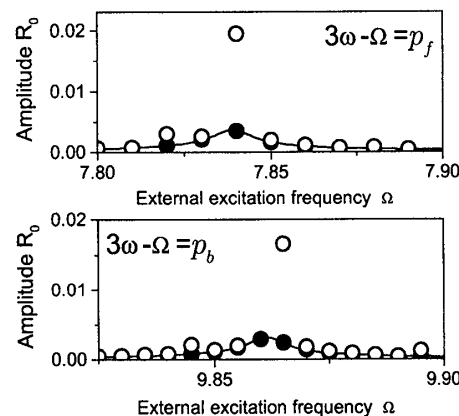


Fig. 10 Resonance curve ( $3\omega - \Omega = p_f, p_b$ )

ついて $O(\epsilon)$ 精度で調和バランスをとり、定常解 $R_0$ は次のように求まる。

$$R_0 = \frac{Q_0(\Delta - P_0 \epsilon_2 \sin \beta_0)}{\sqrt{\{G(2\omega - \Omega) + P_0 \epsilon_2 \sin \beta_0\}^2 + c^2(2\omega - \Omega)^2}} \quad (16)$$

式(16)より、共振点 $2\omega - \Omega = p_f, p_b$ 近傍で発生するこの共振は、偏平性(線形係数励振性)の成分 $\Delta$ と励振周波数 $\Omega$ の振動成分 $Q_0$ の相互作用によって発生することが分かり、図3で、偏平軸においてもクラックロータにおいてもこの共振が発生することが説明できる。式(16)の解析結果とPWLモデル、2次のPSモデルを用いたシミュレーション結果を図9に示す。

**4.6 その他の共振について** 図3, 4の範囲には共振点が見れないが、その他にもクラックによる非線形成分 $\epsilon_2$ に起因して非線形共振が発生する。 $m\omega + n\Omega = p_f, p_b$ の形の共振を考え、これまでと同様な解析を行うと、 $3\omega - \Omega = p_f, p_b$ の場合に、クラックに起因した共振が発生することがわかる。そのときの周波数 $3\omega - \Omega$ 成分の振幅 $R_0$ の解析解を示す。

$$R_0 = \frac{\epsilon_2 Q_0 M_0}{2\sqrt{\{G(3\omega - \Omega) + P_0 \epsilon_2 \sin \beta_0\}^2 + c^2(3\omega - \Omega)^2}} \quad (17)$$

Table 2 Occurrence of resonances

Resonance	Necessary factor for the occurrence of resonances			
	2 <sup>nd</sup> order nonlinear parametric excitation term due to crack	Gravity	External excitation force	Asymmetry
$2\omega - \Omega = p_f, p_b$			○	○
$\omega - \Omega = p_f, p_b$	○	○	○	
$\omega + \Omega = p_f, p_b$	○	○	○	
$-\omega + \Omega = p_f, p_b$	○	○	○	
$3\omega - \Omega = p_f, p_b$	○	○	○	
$-\omega - \Omega = p_f, p_b$	Does not occur with 2 <sup>nd</sup> power series approximation			

式(17)より、クラックによる非線形係数励振成分  $\varepsilon_2$ 、励振周波数  $\Omega$  の振動成分  $Q_0$ 、そして重力  $M_0$  が存在するとき、共振  $3\omega - \Omega = p_f, p_b$  が発生することが分かる。式(17)の解析結果とPWLモデル、2次のPSモデルを用いたシミュレーション結果を図10に示す。

式(11),(12),(13),(15),(16),(17)で示した解析結果はすべて、励振周波数  $\Omega$  の振動成分  $Q_0$  が関連する。すなわち、図3で推測したように、クラックに起因する共振の共振点が主共振点  $\Omega = p_f, p_b$  に近いほど  $Q_0$  は大きいため、その共振の振幅  $R_0$  は大きくなる。

以上の解析結果から、それらの共振が発生するために必要な要因をまとめたものを、表2に示す。表中の○は、その共振の発生に必要な要因を示している。

5. 実験

5.1 実験装置

実験装置の概要を図11に示す。両端の軸受中心間距離  $l = 700$  mm、直径  $d = 12$  mmの軸  $S$  を複列自動調心玉軸受(#1200)で支持し、直径300 mm、厚さ14 mmの回転体  $D$  を軸長の5:2の位置に取り付けた。実験は、クラックのない正常な軸と、模擬クラックを入れた軸とを用いて行った。模擬クラックは、軸の中央部に、図11に示すように幅  $l_c = 5$  mm、深さ  $d_c = 5$  mmの切り欠きを作り、そこに同じ材質・寸法の部材をはめ込むことにより作製した。

クラックが無く、無回転時のこの回転軸装置の固有振動数は900 rpmである。この固有振動数から離れた回転速度で軸を回転させ、ボイスコイルモータで、軸端から  $l_e = 70$  mmの位置で軸を鉛直方向に加振した。そして、円板から  $l_s = 100$  mmの位置にセンサを設置し、励振周波数  $\Omega$  を様々に変化させて、その時の応答を測定した。

ここで、本実験装置のボイスコイルモータからの周期外力は、図12に示すように、回転体に対する前向き周期励振力  $+\Omega$  と後向き周期励振力  $-\Omega$  に分解することができる。すなわち、この実験装置で周波

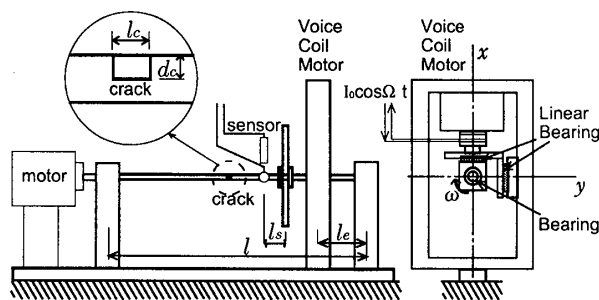


Fig. 11 Experimental system

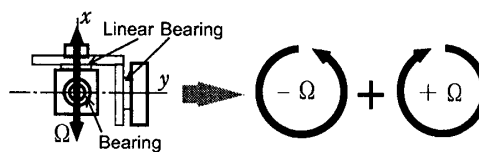


Fig. 12 External excitation force

数  $\Omega$  の励振力を加えることは、理論解析における図3において、前向きと後向きの励振周波数  $\pm\Omega$  を同時に加えることに対応する。したがって、実験結果で図3,4と同様な検討を行う際には、横軸の正負を重ねて示すこととする。

5.2 実験結果

回転速度を主共振点より小さな  $\omega = 300$  rpmで回転させ、ボイスコイルモータの励振周波数  $\Omega$  を様々に変化させたときの系の応答の最大値を調べた結果を図13に示す。図13(a)はクラックのない軸の場合を示し、図13(b)はクラック軸の場合を示す。横軸は、固有振動数  $p = 900$  rpmで無次元化してある。図13(c)はこの装置を回転体のたわみと傾きに関する4自由度系とみなし、クラックのない軸の1次モードの前向きと後向きの固有振動数  $p_f, p_b$  を計算し、得られた結果に基づいて予想した共振周波数を表しており、図3における励振周波数  $\pm\Omega$  を重ねて書いた形にしてある。この図中の破線は、実験を行った回転速度  $\omega = 300$  rpmを固有振動数  $p = 900$  rpmで無次元化したものであり、この破線と各実線との交点が、理論解析から予想される本実験の共振点である。

正常な軸の場合の図13(a)では  $\Omega = p_f$  と  $\Omega = -p_b$  に対応する  $\Omega = 1.0$  付近のピークのみが現れたが、クラック軸の場合の図13(b)では、主共振に加えて、2,3の小さなピークの発生が確認できた。これらのピークの発生位置は、共振周波数を表す図13(c)において  $\omega \pm \Omega = p_f, p_b$ 、 $-(\omega \pm \Omega) = p_f, p_b$  で示されている実線と回転速度  $\omega$  を表す破線の交点とほぼ対応する。この図13(c)の予想発生周波数と図13(b)で実際に共振が発生した周波数の違いの理由としては、図13(c)の

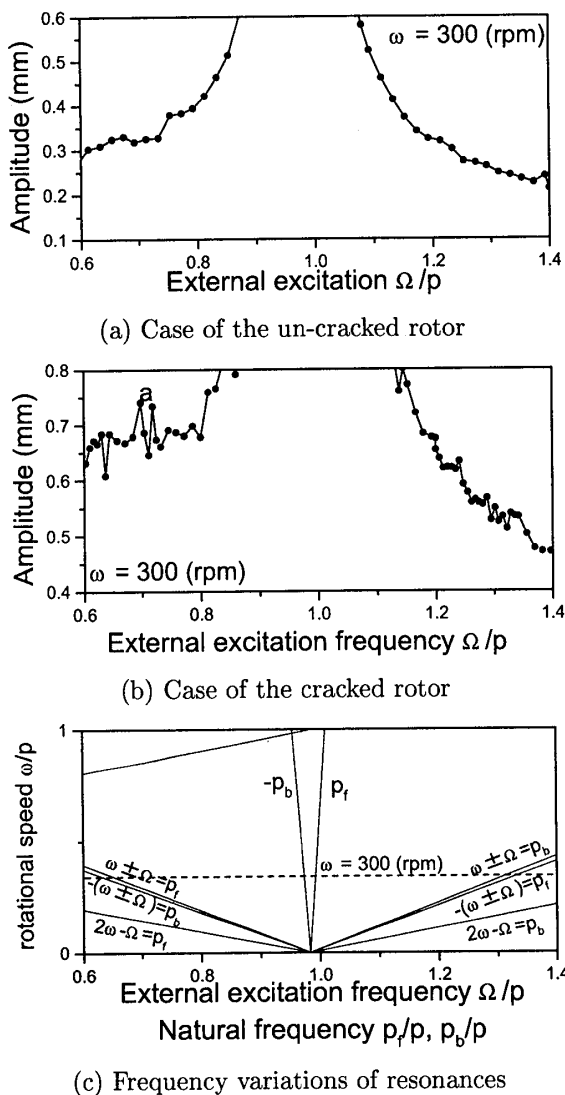


Fig. 13 Resonance curve and resonance frequencies

計算に用いたモデルと実験装置の違い、とくに、モデルに考慮されていない軸とモータの接続部や円板固定部、加振部の支持条件の影響や、クラックの発生による軸の剛性の低下などにより、実際の回転軸装置の固有振動数が変化したこと、実際のクラックロータの固有振動数と無次元化に用いた固有振動数  $p=900$  rpm のずれなどが考えられる。

図 13(b) 中の a の周波数  $\Omega=10.3$ Hz における、正常な軸とクラック軸のスペクトル線図を図 14 にそれぞれ示す。正常な軸では発生しない  $\omega + \Omega$  成分が、クラック軸では発生することが確認でき、シミュレーション結果ともよく対応している。

以上から、周期外力を印加してその周波数を変化させて、発生する共振の有無を調べ、その共振ピークの発生周波数やスペクトルに注目することにより、クラックの発生の有無を検出できると考える。

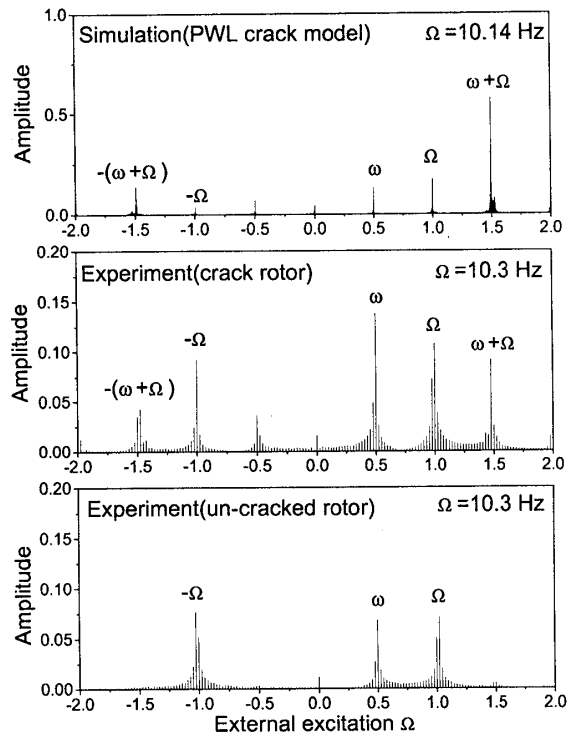


Fig. 14 Spectra ( $\Omega=10.3$  Hz)

## 6. 結 論

周期的加振によるクラックの検出について、以下の結論を得た。

1. 周期的な励振力を加えると、クラックロータでは、丸軸や偏平軸では発生しない、新たな複数の非線形共振が発生することを解析と実験により示した。
2. それらの共振は、クラックによる非線形係数励振成分、励振周波数の振動成分  $Q_0$ 、そして重力  $M_0$  の相互作用によって発生する非線形共振であることを理論解析により明らかにした。
3. 上記のクラックロータ特有の共振現象に着目した、加振によるロータクラックの検出法を提案した。

## 文 献

- (1) 白木 他, 三菱重工技報, 19-2, (1982), 41.
- (2) J.Wauer, Applied Mechanics Review, 43, (1990), 13.
- (3) R.Gasch, J. of Sound and Vib., 160, (1993), 313.
- (4) A.D.Dimarogonas, Engg. Fracture mechanics, 55, (1996), 831.
- (5) G.Meng and R.Gasch, Trans. of ASME, J. of Vib. and Acoust., 122, (2000), 116.
- (6) N.Bachschnid et al., Proc. of IMechE 7th int. conf. on vibration in rotating machinery, (2000), 571.
- (7) 石田・山本, 機論, 57-538, C(1991), 1791.
- (8) 石田・廣川・廣瀬, 機論, 60-579, C(1994), 3689.
- (9) 山本・石田, 回転機械の力学, コロナ社, (2001)
- (10) 石田・山本・廣川, 機論, 59-566, C(1993), 3095.
- (11) 石田・山本・廣川, 機論, 58-551, C(1992), 2032.
- (12) 石田・他, 機論, 53-488, C(1987), 925.