

クリアランス内で衝突を伴うロータの非線形強制振動と自励振動* (1/2次分数調波共振付近の引込現象と結合振動)

稲垣 瑞穂*¹, 石田 幸男*²
早川 誠*³, 安田 聡*⁴

Nonlinear Resonances and Self-Excited Oscillations of a Rotor Due to Impact in Radial Clearance of Bearings (Entrainment and Combination Oscillation at 1/2 Order Subharmonic Resonance)

Mizuho INAGAKI*⁵, Yukio ISHIDA,
Makoto HAYAKAWA and Satoshi YASUDA

*⁵ 13th Research Domain, TOYOTA Central R & D Labs., Inc.,
Nagakute, Aichi, 480-1192 Japan

Oscillations around 1/2 order subharmonic resonance are investigated in a rotor system with a radial clearance between the bearing and the casing by numerical simulations and experiments. The following phenomena due to impact in the bearing are found: (1) Combination oscillations of $[p_r - p_b = \omega]$ and $[3p_r - p_b = 2\omega]$ occur in lower speed range of $+(1/2)\omega$ resonance. (2) Entrainment phenomena occur in the speed range of $+(1/2)\omega$ resonance. (3) Oscillations of $\omega - p_r$ occur around the speed range of $+(1/2)\omega$ resonance with self-excited oscillation of p_r . Furthermore entrainment phenomena and coupling between self-excited oscillation of p_r and oscillation of $\omega - p_r$ are explained theoretically by a similar self-excited and forced oscillation model of nonlinear van der Pol's equation.

Key Words: Rotor, Impact, Radial Clearance, Nonlinear Resonance, Entrainment, Self-Excited Oscillation, Subharmonics, Combination, van der Pol's equation

1. 緒 言

高速ターボ機械では、滑り軸受のロータと軸受のような回転部と静止部間のクリアランス、または、スクイズフィルムダンパの軸受保持器とケーシングのような静止部間のクリアランスに起因する種々の軸振動が問題となる。

後者の系については、断片線形様式の非線形ばね特性に起因する振動が多く研究されている。例えば、Ehrich⁽¹⁾⁽²⁾は、ロータの支持部にクリアランスをもつ系について、分数調波振動などの非線形共振やカオス振動の発生を報告している。しかし、これらの研究では、支持部のクリアランスを断片線形様式の非線形ばねで近似して解析を行っており、実際には起きてはいるはずの衝突が考慮されていない。

本研究では、後者の系、すなわち静止部品間で接触・衝突を起こすスクイズフィルムダンパ軸受をもつ

回転軸系において、ダンパ部のダンピングが十分効かなくなった場合に発生する振動を調べている。前報⁽³⁾では、軸受保持器とケーシングの間のクリアランス部で衝突を起こす弾性回転軸系でモデル化することにより、発生する振動現象を実験と数値シミュレーションで調べた。その結果、軸受部の衝突に起因して、主共振速度より高速側の広い範囲で前向きふれまわりの自励振動が発生すること、また、主共振速度より高速側のある特定の回転速度では分数調波・超分数調波・和差調波振動などの各種非線形共振現象が発生することを明らかにした。

本報では、同様な系について、1/2次分数調波振動の共振点付近の挙動に着目し、自励振動と非線形強制振動の発生状況および、自励振動から1/2次分数調波振動への移り変わりや引込現象を数値シミュレーションと実験で明らかにする。また、不安定解を求め振動特性をより詳しく明らかにするため、定性的に類似した特性をもつ、van der Pol型の非線形微分方程式⁽⁴⁾⁽⁵⁾で表される1自由度の強制自励系モデルを用いて理論解析する。

2. 数値シミュレーション

2・1 解析モデルと運動方程式 前報⁽³⁾と同様、

* 原稿受付 2002年9月2日。

*¹ 正員、(株)豊田中央研究所第13研究領域(〒480-1192 愛知県長久手町)。

*² 正員、名古屋大学大学院工学研究科(〒464-8603 名古屋市千種区不老町)。

*³ 名古屋大学大学院工学研究科。

*⁴ 三菱重工(株)(〒108-8215 東京都港区港南2-16-5)。

E-mail: m-inagaki@mosk.tytlabs.co.jp

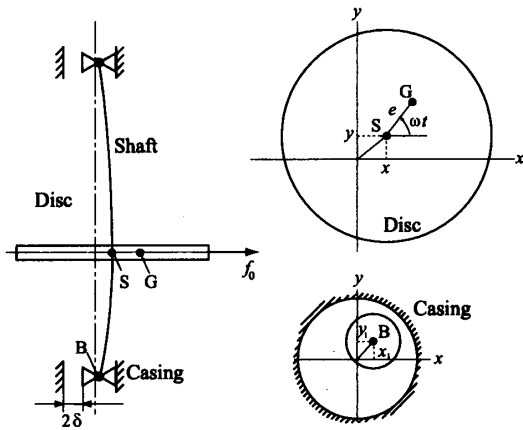


Fig. 1 Rotor model with radial clearance

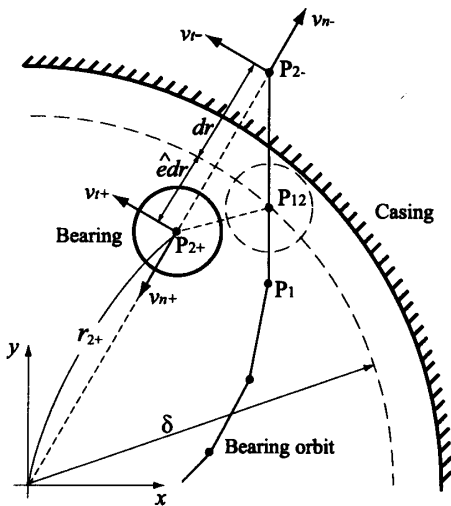


Fig. 2 Calculation for impact

図1に示す解析モデルを用いる。弾性軸の中央に円板(質量 M)があり、上下端の軸受(質量 $m/2$)とケーシングの間にラジアルクリアランス δ をもつ。簡単のため、上下対称な運動を仮定する。 x, y 方向の円板と軸受の変位を、それぞれ、 x, y および x_1, y_1 とすると、運動方程式は無次元形式で次式のように表される⁽³⁾。

$$\begin{aligned} \ddot{x} + i_p \omega \dot{y} + c\dot{x} + k(x - x_1) &= e\omega^2 \cos \omega t \\ \ddot{y} - i_p \omega \dot{x} + c\dot{y} + k(y - y_1) &= e\omega^2 \sin \omega t + f_0 \\ \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + \frac{k}{\mu}(x_1 - x) &= 0 \\ \ddot{y}_1 + c_1 \dot{y}_1 + \frac{k}{\mu}(y_1 - y) &= 0 \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

ここで、 c は円板の減衰、 c_1 は軸受の減衰、 k は軸のたわみ剛性、 μ は軸受と円板の質量比 (m/M)、 e は円板の重心の偏心量、 ω は回転速度、 t は時間を表す無次元量である。 f_0 は y 方向の横荷重を表す無次元量

で、組付誤差などによる軸受クリアランスの偏りを模擬するために追加する。また、 $i_p \omega \dot{y}$ 、 $-i_p \omega \dot{x}$ は回転儀項である。本来、図1で上下対称の運動を仮定したたわみ振動を扱う場合は、円板のジャイロモーメントは影響しないが、ここでは、円板が中央についていない実験装置のジャイロモーメントによる固有振動数の変化を考慮するため、便宜的にジャイロ作用を表すこの回転儀項を追加している。

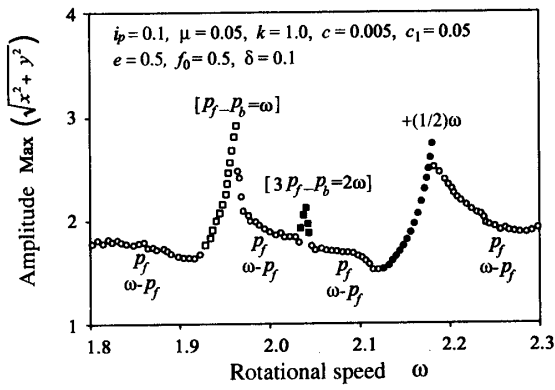
2.2 軸受部の衝突の扱い方 運動方程式(1)を、ルンゲ・クッタ法により解く。軸受とケーシングの衝突は、Liらが円筒内面に衝突する回転円板の解析に用いた方法⁽⁶⁾を用いて、図2のように扱う。すなわち、時刻歴応答計算において、軸受が点 P_1 から壁に向かって移動し、ある時刻で壁を通過して点 P_{2-} まで移動した場合は、軸受は P_{2-} で反射したものととして、次の条件のもとで、人為的に点 P_{2+} まで移動させる。

$$\begin{aligned} v_{n+} &= -\epsilon v_{n-}, \quad v_{t+} = v_{t-} \\ dr &= r_{2-} - \delta, \quad r_{2+} = \delta - \epsilon dr \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

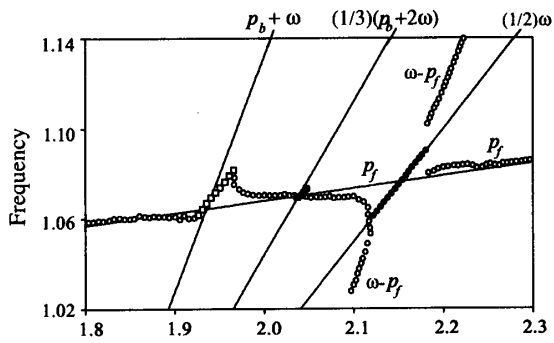
ここで、 r は軸受の変位、 v_n と v_t は軸受の法線方向と接線方向の変位を表す。また、 $-$ と $+$ の添字は、点 P_{2-} と P_{2+} における値であることを示す。この式では、軸受と壁の間の乾性摩擦は無視する。

2.3 計算結果 図3と4に、 $1/2$ 次分数調波振動の共振点付近における円板の応答曲線と、代表的な振動の時刻歴、軌道、周波数成分を示す。図中の p_f 、 p_b は前向き、後向きの固有振動数を表す。 $1/2$ 次分数調波共振(図4(d))の前後では、前向きふれまわりの自励振動(図4(a))、 $[p_f - p_b = \omega]$ の和差調波振動(図4(b))が発生する。記号 $[]$ は、 $p_f - p_b = \omega$ が成立するときに発生する振動を示す。これらの振動は前報⁽³⁾でもその発生を確認したが、本報で新たに、 $[3p_f - p_b = 2\omega]$ の和差調波振動(図4(c))および、自励振動の振動数 p_f に関連して振動数 $\omega - p_f$ の振動(図4(e))も発生することがわかった。 $\omega - p_f$ の振動は、図3の周波数線図に示すように、 $1/2$ 次分数調波振動の引込現象の前後で発生する。また、振動数 ω をもつ強制振動と振動数 p_f をもつ自励振動が共存する現象は結合振動⁽⁴⁾とよばれる。結合振動はこれまでにも発振回路の主共振点で引込現象が起きた前後で発生することが知られているが、この場合は分数調波振動の共振点の前後で発生している。

図5に、ジャイロモーメントが作用しない $i_p = 0$ の場合の計算結果を示す。このケースでは、前向きと後向きの固有振動数の絶対値が同じになるため、振動数 $+(1/2)\omega$ 、 $-(1/2)\omega$ の $1/2$ 次分数調波振動と、 $[p_f - p_b = \omega]$ の和差調波振動の共振点が一一致する。また、



(a) Response curve



(b) Frequency diagram

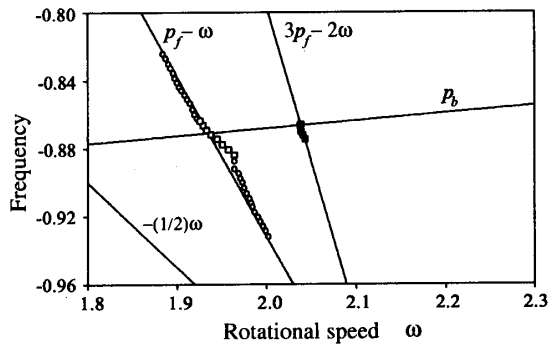


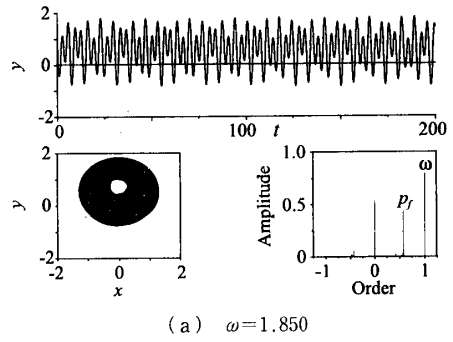
Fig. 3 Response curve and frequency diagram for $i_p=0.1$ (Simulation)

$i_p=0$ の場合は固有振動数が回転速度に依存しないことを考えると、図5に示す自励振動の発生周波数から、この系の固有振動数 p_f は 0.962 付近にあることがわかる。図1のモデルで軸受部のクリアランスをなくして、すなわち $x_1=0, y_1=0$ とおいた系の振動数方程式は、

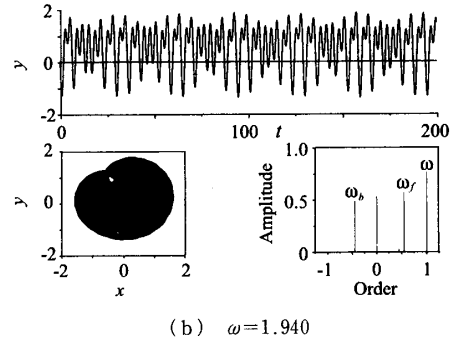
$$p^2 - i_p \omega p - k = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

であるので、式(3)で $k=1, i_p=0$ とすると、前向きの固有振動数 $p_f=1.0$ が得られる。したがって、衝突モデルの固有振動数は、軸を単純支持した系よりも若干低くなっていることがわかる。

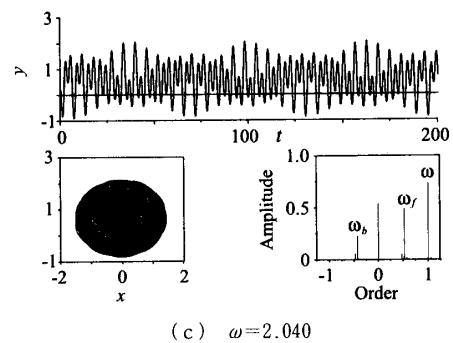
軸受部のクリアランスを考慮して厳密な固有振動数を解析することは難しいが、ここでは、前述した $i_p=$



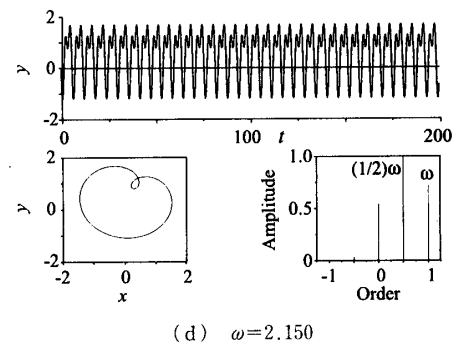
(a) $\omega=1.850$



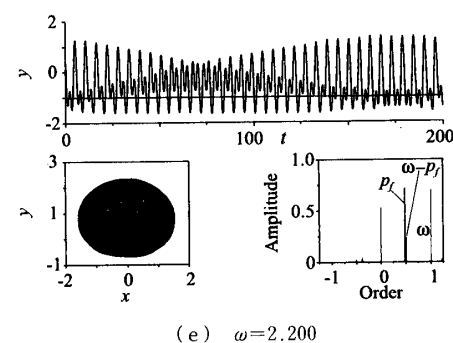
(b) $\omega=1.940$



(c) $\omega=2.040$



(d) $\omega=2.150$



(e) $\omega=2.200$

Fig. 4 Time history, orbit and spectrum for $i_p=0.1$ (Simulation)

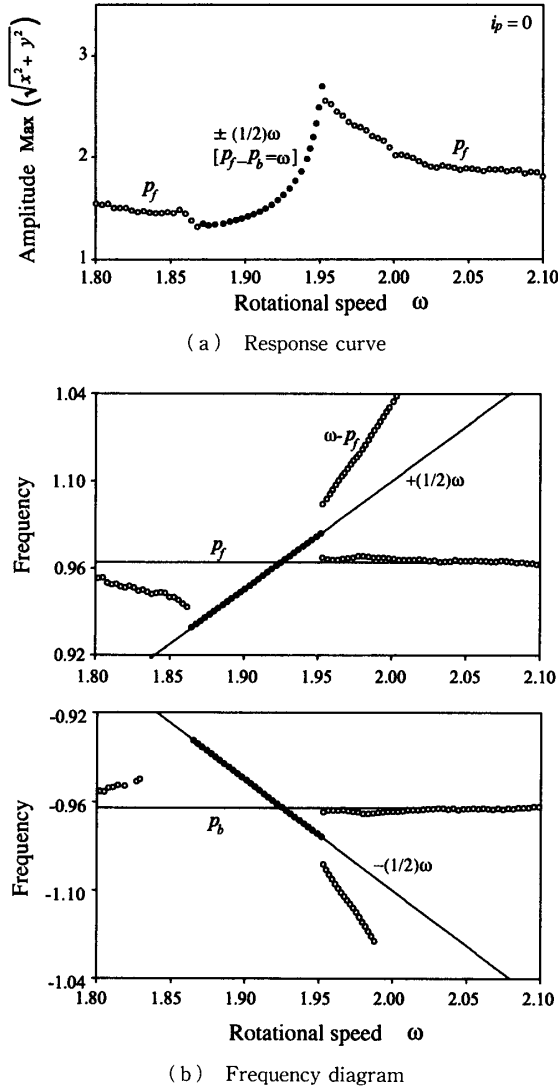


Fig. 5 Response curve and frequency diagram for $i_p=0$ (Simulation)

0の場合の固有振動数0.962をもとに、1/2次分数調波振動や和差調波振動の共振点と固有振動数の関係を確認する。式(3)から、 $i_p=0$ のときの固有振動数 p_f が0.962になるように、クリアランスがない等価な系の軸剛性 k' を見積もると、 $k'=0.927$ となる。この k' を用いて、式(3)から、 $i_p=0.1$ の場合の固有振動数 p_f 、 p_b を求めると、図3に実線に示す値となる。この図から、1/2次分数調波振動と二つの和差調波振動の共振は、それぞれ、 $p_f=(1/2)\omega$ 、 $p_f-p_b=\omega$ 、 $3p_f-p_b=2\omega$ を満足する回転速度で発生していることが確認できた。

3. 実験

3.1 実験装置 図6に実験装置⁽³⁾を示す。直径480 mm、厚さ5.5 mmの円板Dが直径16 mm、長さ $l=900$ mmの鉛直弾性軸Sに取付けられている。軸

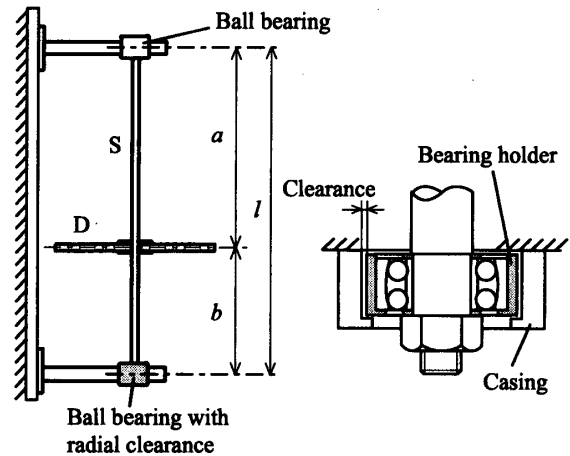


Fig. 6 Experimental setup

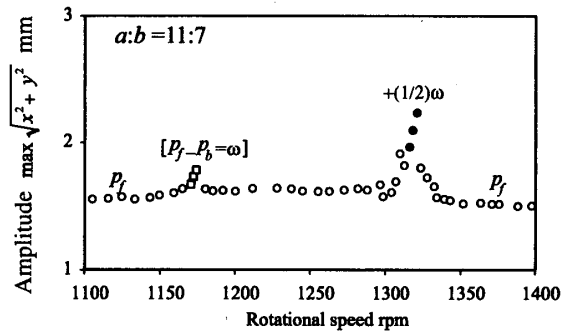


Fig. 7 Response curve (Experiment)

の上下端は、複列自動調心玉軸受で支持されている。下側の軸受部には、軸受外輪とケーシングの間に0.1 mmのラジアルクリアランスがある。回転軸Sはばね継ぎ手を介してモータで駆動し、そのときの円板Dの x, y 方向のたわみ振動を変位計で測定した。

3.2 実験結果 図7と8に、円板の取付位置が $a:b=11:7$ の場合の円板の振動の測定結果を示す。この場合は、円板が軸の中央位置から下側にずれているので、円板のたわみ振動と傾き振動が連成し、円板のジャイロモーメントが固有振動数に影響する。すなわち、2章の数値シミュレーションの $i_p=0.1$ の場合に相当する。図7、8を図3、4と比較することにより、数値シミュレーションで発生した自励振動、1/2次分数調波振動、 $[p_f-p_b=\omega]$ の和差調波振動、および共振点の前後で振動数 $\omega-p_f$ などの結合振動が発生していることが確認できた。なお、 $[3p_f-p_b=2\omega]$ の和差調波振動については、 $[p_f-p_b=\omega]$ の和差調波振動に比べてより高次の非線形ばね成分に起因する振動のため⁽⁷⁾、実験では軸受部の摩擦減衰などに抑制されて発生しなかったと推察される。

図9に、円板の取付位置が $a:b=5:5$ の場合の測定結果を示す。このケースでは、円板のたわみ振動と

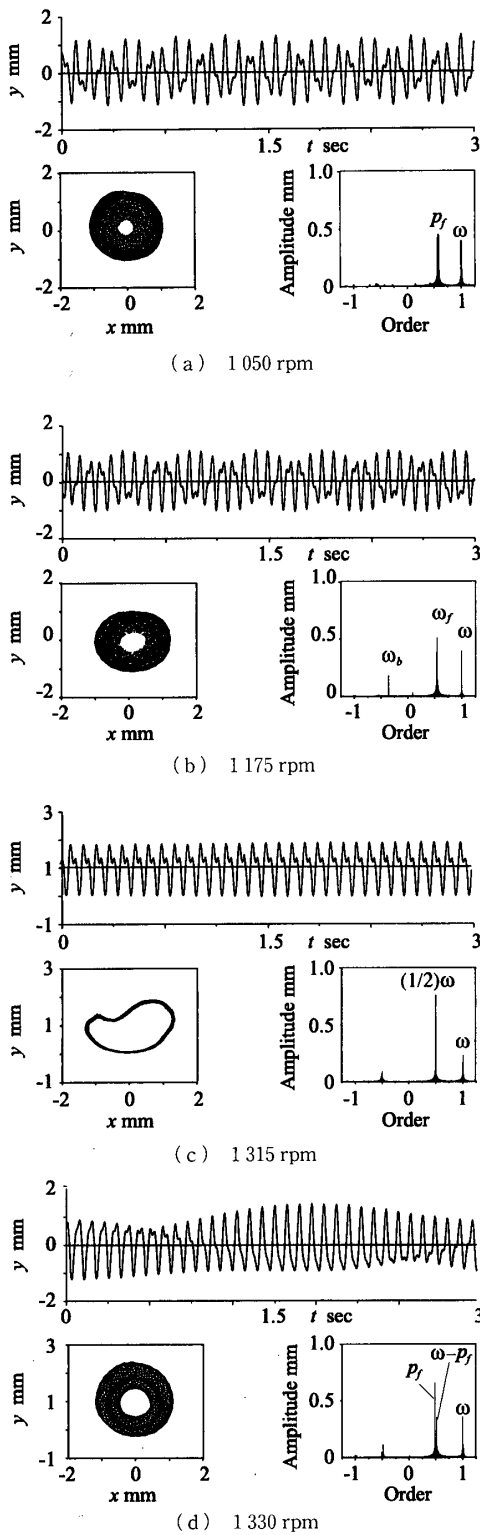


Fig. 8 Time history, orbit and spectrum of disc (Experiment)

傾き振動が連成しないため、円板のジャイロモーメントがたわみ振動の固有振動数に影響しない。すなわち、数値シミュレーションの $i_p=0$ のケースに対応する。数値シミュレーション(図5)と同様に、実験でも $1/2$ 次分数調波振動と和差調波振動の共振点が一致す

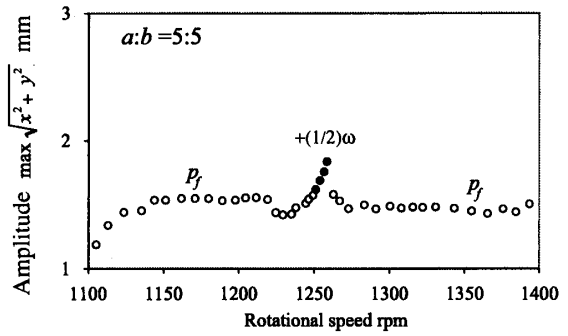


Fig. 9 Response curve (Experiment)

るため、分数調波振動のみが発生した。また、その後で自励振動が発生した。

4. 理論解析

4.1 強制・自励系の簡易モデル 図1の解析モデルは衝突系なので、理論解析を行い、安定解と不安定解を求めることは難しい。そこでこの種の現象の存在および解の性質を定性的に説明するため、広い振動数範囲で自励振動のリミットサイクルが発生する代表的な解析モデルである van der Pol 方程式に非線形項と励振力を加えた次の非線形強制自励系を考える。

$$\ddot{x} - \mu(1-x^2)\dot{x} + \beta_0^2 x + \alpha x^2 + \beta x^3 = f\omega^2 \cos \omega t \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで係数 μ, α, β は微量とする。すなわち、微小パラメータ ϵ と同程度 ($O(\epsilon)$ と表す) である。なお、図1では実験装置の組立誤差に該当する平衡点のずれを作る横方向力 f_0 を考えたが、この式(4)では、ずれたあとの平衡位置に座標原点をおいて、 f_0 の代わりに非対称性の非線形項 αx^2 を導入した。

なお、この系と類似な系(式(4)ではね力が線形の場合)の主共振点付近の引込現象と結合振動についてはすでに調べられているが⁽⁴⁾、以下では非線形復元力をもつ系の $1/2$ 次分数調波振動の共振点付近の現象について述べる。

まずはじめに、数値シミュレーション結果を図10に示す。図5との比較により、衝突モデルと同様に、振動数 p_1 の自励振動から $1/2$ 次分数調波振動への引込現象、および振動数 $\omega - p_1$ の結合振動が発生していることがわかる。よって、式(4)の系は、本報の衝突モデルと類似の強制自励系と考えられるので、式(4)の $1/2$ 次分数調波振動と自励振動を理論解析する。

4.2 $1/2$ 次分数調波振動の解析 $1/2$ 次分数調波振動の共振点付近の解を次のように仮定する。

$$x = R \cos(\omega_1 t + \delta) + P \cos(\omega t + \gamma) \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 $\omega_1 = \omega/2$ とする。また、調和振動成分につ

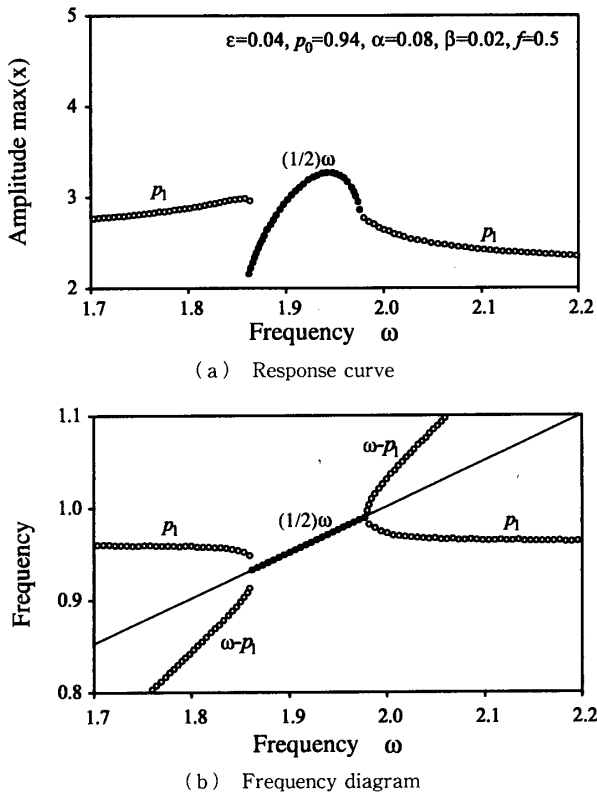


Fig. 10 Response curve and frequency diagram of 1 DOF system (Simulation)

いては、 $O(\epsilon^0)$ 精度の線形振動の解

$$P = \frac{f\omega^2}{\omega^2 - p_0^2} \quad \gamma = \pi \quad \dots \quad (6)$$

を用いる。以下では、van der Pol の方法⁽⁸⁾を用いて近似解析する。式(5)を式(4)に代入し、振幅 R と位相 δ が緩やかに変化するという仮定のもとで、 $O(\epsilon)$ 精度で $\cos(\omega_1 t + \delta)$, $\sin(\omega_1 t + \delta)$ の係数をそれぞれ両辺等値すると次式を得る。

$$\begin{aligned} 2\omega_1 \dot{R} &= \frac{1}{4} \epsilon \omega_1 R (4 - R^2 - 2P^2) - aPR \sin(\gamma - 2\delta) \\ 2\omega_1 R \dot{\delta} &= -\sigma R + \frac{3}{4} \beta R (R^2 + 2P^2) + aPR \cos(\gamma - 2\delta) \quad \dots \quad (7) \end{aligned}$$

ここで $\sigma = \omega_1^2 - p_0^2$ とする。定常解 $R = R_0$, $\delta = \delta_0$ は、式(7)で $\dot{R} = 0$, $\dot{\delta} = 0$ とおいた式から得られる。

次に、定常解の安定性を調べるため、次式のように定常状態の付近で微小なずれ ξ , η を考え、

$$R = R_0 + \xi, \quad \delta = \delta_0 + \eta \quad \dots \quad (8)$$

とおく。これを式(7)の第1, 2式に代入して、 ξ , η に関して線形近似すると、

$$2\omega_1 \dot{\xi} = a_{11} \xi + a_{12} \eta$$

$$2\omega_1 \dot{\eta} = a_{21} \xi + a_{22} \eta \quad \dots \quad (9)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{4} \epsilon (4 - 3R_0^2 - 2P^2) - aP \sin(\gamma - 2\delta_0) \\ a_{12} &= 2aR_0P \cos(\gamma - 2\delta_0) \\ a_{21} &= \frac{-4\sigma + \beta(9R_0^2 + 6P^2) + 4aP \cos(\gamma - 2\delta_0)}{4R_0} \\ a_{22} &= 2aP \sin(\gamma - 2\delta_0) \quad \dots \quad (10) \end{aligned}$$

微分方程式(9)から特性方程式を求め、ラウス・フルビッツの判別式を適用すれば、定常解の安定判別ができる。

4.3 自励振動の解析 1/2 次分数調波振動の共振点の前後で発生する自励振動を解析する。自励作用により発生する振動数 p_1 ($\approx p_0$) の成分と振動数 ω の調和成分の共存の結果非線形項 ax^2 を介して派生する各種振動成分のうち p_1 と近い値をもつ $\omega - p_1$ ($\equiv p_2$ と表す) を考慮し(図10参照)、解の形を次のように仮定する。

$$x = R_1 \cos(p_1 t + \delta_1) + R_2 \cos(p_2 t + \delta_2) + P \cos(\omega t + \gamma) \quad \dots \quad (11)$$

また、調和振動成分については、式(6)を採用する。4.2節と同様に、式(11)を式(4)に代入し、 $p_1 t + \delta_1$ と $p_2 t + \delta_2$ の成分について $O(\epsilon)$ の精度で係数を比較すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} 2p_1 \dot{R}_1 &= \frac{1}{4} \epsilon p_1 R_1 (4 - R_1^2 - 2R_2^2 - 2P^2) - aR_2 P \sin(\gamma - \phi) \\ 2p_2 \dot{R}_2 &= \frac{1}{4} \epsilon p_2 R_2 (4 - 2R_1^2 - R_2^2 - 2P^2) - aR_1 P \sin(\gamma - \phi) \\ 2p_1 R_1 \dot{\delta}_1 &= -R_1 (p_1^2 - p_0^2) + \frac{3}{4} \beta R_1 (R_1^2 + 2R_2^2 + 2P^2) + aR_2 P \cos(\gamma - \phi) \\ 2p_2 R_2 \dot{\delta}_2 &= -R_2 (p_2^2 - p_0^2) + \frac{3}{4} \beta R_2 (2R_1^2 + R_2^2 + 2P^2) + aR_1 P \cos(\gamma - \phi) \quad \dots \quad (12) \end{aligned}$$

ここで、 $\phi = \delta_1 + \delta_2$ とおいた。式(12)で、第3式と第4式の両辺をそれぞれ加えたのち、 $\dot{R}_1 = 0$, $\dot{R}_2 = 0$, $\dot{\phi} = 0$ とすると、定常解の振幅 $R_1 = R_{10}$, $R_2 = R_{20}$, 位相 $\phi_0 (= \delta_{10} + \delta_{20})$ および振動数 p_1, p_2 に関する四つの方程式を得る。 $p_2 = \omega - p_1$ の関係により、その四つの式から、 R_{10} , R_{20} , ϕ_0 , p_1 が決定できる。

定常解の安定性を調べるため、定常解からの微小なずれ ξ , η , ζ_1 , ζ_2 を考えて次のようにおく。

$$R_1 = R_{10} + \xi, \quad R_2 = R_{20} + \eta \\ \delta_1 = \delta_{10} + \zeta_1, \quad \delta_2 = \delta_{20} + \zeta_2 \quad \dots \quad (13)$$

位相のずれに関しては、例えば、全位相 $p_1 t + \delta_1$ につ

いて考えると、外乱が加わったとき p_1 が変動し δ_1 が一定と考えても、 p_1 が一定で δ_1 が変動すると考えても物理的には同じである。したがって、以下の安定解析では p_1 が一定で、 δ_1 、 δ_2 が変動すると考える。なお、 δ_{10} 、 δ_{20} は個々には求まっていないが、 ϕ_0 は定まっているので、それからの外乱によるずれを $\zeta (= \xi_1 + \xi_2)$ と表して、 $\phi = \phi_0 + \zeta$ とおく。以上の考察から、式(12)を次のように書き換える。

$$\begin{aligned} \dot{R}_1 &= \frac{1}{8} \epsilon R_1 (4 - R_1^2 - 2R_2^2 - 2P^2) \\ &\quad - \frac{\alpha R_2 P}{2p_1} \sin(\gamma - \phi) \\ \dot{R}_2 &= \frac{1}{4} \epsilon R_2 (4 - 2R_1^2 - R_2^2 - 2P^2) \\ &\quad - \frac{\alpha R_1 P}{2p_2} \sin(\gamma - \phi) \\ \dot{\phi} &= -\frac{1}{2p_1} (p_1^2 - p_0^2) + \frac{3\beta}{8p_1} (R_1^2 + 2R_2^2 + 2P^2) \\ &\quad + \frac{\alpha R_2 P}{2p_1 R_1} \cos(\gamma - \phi) - \frac{1}{2p_2} (p_2^2 - p_0^2) \\ &\quad + \frac{3\beta}{8p_2} (2R_1^2 + R_2^2 + 2P^2) + \frac{\alpha R_1 P}{2p_2 R_2} \cos(\gamma - \phi) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (14)$$

式(13)と $\phi = \phi_0 + \zeta$ を式(14)に代入して、 ξ 、 η 、 ζ に関して線形化された微分方程式を導くと、次式となる。

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta \\ \dot{\eta} &= a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta \\ \dot{\zeta} &= a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで、

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{8} \epsilon (4 - 3R_{10}^2 - 2R_{10} - 2P^2) \\ a_{12} &= -\frac{1}{2} \epsilon R_{10} R_{20} - \frac{\alpha P}{2p_1} \sin \phi_0 \\ a_{13} &= -\frac{\alpha R_{20} P}{2p_1} \cos \phi_0 \\ a_{21} &= -\frac{1}{2} \epsilon R_{10} R_{20} - \frac{\alpha P}{2p_2} \sin \phi_0 \\ a_{22} &= \frac{1}{8} \epsilon (4 - 2R_{10}^2 - 3R_{20}^2 - 2P^2) \\ a_{23} &= -\frac{\alpha R_{10} P}{2p_2} \cos \phi_0 \\ a_{31} &= -\frac{1}{2p_1 R_{10}} (p_1^2 - p_0^2) \\ &\quad + \frac{3\beta}{8p_1 R_{10}} (3R_{10}^2 + 2R_{20}^2 + 2P^2) \\ &\quad + \frac{3\beta R_{10}}{2p_2} - \frac{\alpha P}{2p_2 R_{20}} \cos \phi_0 \\ a_{32} &= -\frac{1}{2p_2 R_{20}} (p_2^2 - p_0^2) \\ &\quad + \frac{3\beta}{8p_2 R_{20}} (2R_{10}^2 + 3R_{20}^2 + 2P^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{3\beta R_{20}}{2p_1} - \frac{\alpha P}{2p_1 R_{10}} \cos \phi_0 \\ a_{33} &= \frac{\alpha P}{2p_1 p_2} \left\{ p_1 \frac{R_{10}}{R_{20}} + p_2 \frac{R_{20}}{R_{10}} \right\} \sin \phi_0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (16)$$

4.2節と同様な方法により、式(15)と(16)から定常解 R_{10} 、 R_{20} 、 ϕ_0 の安定判別ができる。

4.4 共振曲線と引込現象 図11に、上記の方法で行った1/2次分数調波振動と自励振動の解析解を示す。比較のため、図10の数値シミュレーション結果も重ねて示す。この図から、数値シミュレーションの結果にほぼ対応して、1/2次分数調波振動 $(1/2)\omega$ 、自励振動 p_1 、振動数 $\omega - p_1$ の振動の各安定解が存在することが確認できた。 $(1/2)\omega = p_1$ を満たす付近で、1/2次分数調波振動への引込現象が発生するのは、自励振動の安定解が消滅して、有限振幅をもつ $(1/2)\omega$ の安定解が現れるためである。

図11の解析解を、回転軸の図5や9と比較すると、衝突モデルの数値シミュレーション結果や実験結果と定性的によく対応している。よって、クリアランスをもつ軸受で支持された回転軸系の実験および衝突モデルで観測された自励振動 p_f から1/2次分数調波振動

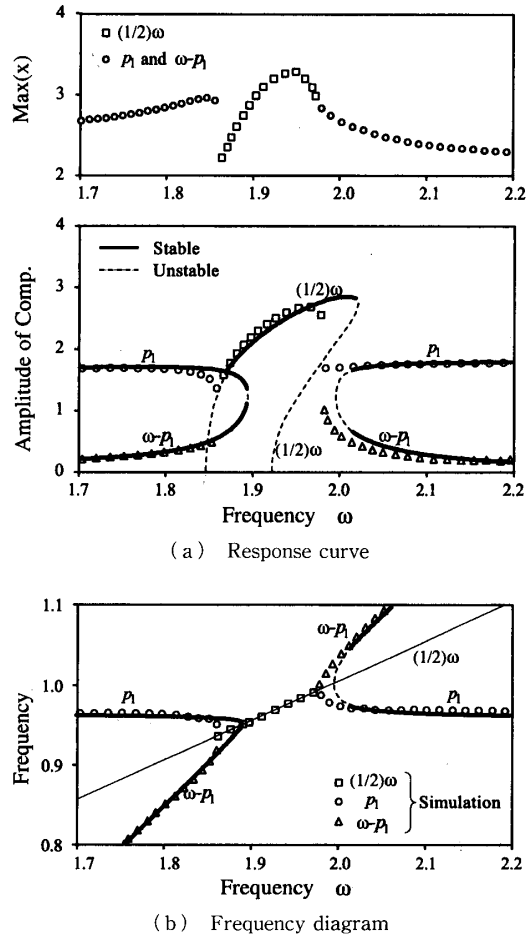


Fig. 11 Response curve and frequency diagram of 1 DOF system (Theoretical analysis)

への引込現象, およびその共振点前後で現れる結合振動は, 非線形ばね特性をもち周期的強制外力の作用する自励系で, 一般的に発生する現象であることが確認できた。

5. 結 言

軸受外輪とケーシングの間のクリアランス部で衝突が起きる回転軸系について, 1/2 次分数調波振動の共振点付近の挙動を詳細に調べた結果, 以下の結論を得た。

(1) 円板のジャイロモーメントが作用する系では, 前向き ω の1/2次分数調波振動の共振点より低速側で, $[p_f - p_b = \omega]$ や $[3p_f - p_b = 2\omega]$ の和差調波振動が発生する。円板のジャイロモーメントが作用しない系では, これらの和差調波振動と, 前向き・後向き ω の1/2次分数調波振動の共振点一致する。

(2) ジャイロモーメントの有無によらず, 1/2次分数調波振動の共振点付近では, 自励振動が消えて1/2次分数調波振動への引込現象が発生する。また, その前後では, 前向きふれまわりの自励振動 p_f とともに, 振動数 $\omega - p_f$ の振動が発生する。

(3) 衝突を伴う回転軸系の自励振動と1/2次分数調波振動の共振曲線, すなわち安定解, 不安定解の形状は, van der Pol 形の非線形微分方程式で表される一自由度系の理論解を使って定性的に説明できる。

(4) 自励振動から1/2次分数調波振動への引込現象は, 回転速度が前向き固有振動数の2倍になる付近で, 自励振動の安定解が消滅して, 有限振幅をもつ1/2次分数調波振動の安定解が現れるためである。

文 献

- (1) Ehrich, F. F., *Handbook of Rotordynamics* (1992), Sec. 1. 7.
- (2) Ehrich, F. F., *Trans. ASME, J. Vib., Acoust., Str., Rel.*, **110**-1 (1988), 9-15.
- (3) 石田幸男・稲垣端徳・江島力弥, 機論, **65**-636, C (1998), 3067-3074.
- (4) Stoker, J. J., *Nonlinear Vibration of Mechanical and Electrical Systems*, (1950), 163, Interscience Publishers.
- (5) 小寺忠・三谷芳弘, 機論, **49**-446, C (1983), 1662-1669.
- (6) Li, G. X and Ppaidoussis, M. P., *Nonlinear Dynamics.*, **5**-1 (1994), 53-70.
- (7) 山本敏男・石田幸男, 回転機械の力学, (2001), 131, コロナ社.
- (8) Stoker, J. J., *Nonlinear Vibration of Mechanical and Electrical Systems*, (1950), 149, Interscience Publishers.