

幾何学的非線形ばね特性をもつ連続偏平軸の強制振動*
(主危険速度と二次的危険速度付近)長坂 今夫*¹, 石田 幸男*²
劉 軍*³, 服部 卓也*⁴Forced Oscillations of a Continuous Asymmetrical Rotor
with Geometric Nonlinearity
(Major Critical Speed and Secondary Critical Speed)Imao NAGASAKA, Yukio ISHIDA*⁵,
Jun LIU and Takuya HATTORI*⁵ Department of Electronic-Mechanical Engineering, Nagoya University,
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya-shi, Aichi, 464-8603 Japan

Forced oscillations in the vicinities of the major critical speed and the secondary critical speed of a continuous asymmetrical rotor with the geometric nonlinearity are discussed. When both ends of the rotor are supported by self-aligning double-row ball bearings, this geometric nonlinearity appears due to the stiffening effect in elongation of the shaft if the movements of the bearings in the longitudinal direction are restricted. The nonlinearity is symmetric when the rotor is supported vertically, and is asymmetric when it is supported horizontally. Because the rotor is slender, the natural frequency of a forward whirling mode p_{fn} and that of a backward whirling mode p_{bn} have the relation of internal resonance $p_{fn} : p_{bn} = 1 : (-1)$. Due to the influences of the internal resonance, the complicated resonance phenomena such as Hopf bifurcation, an almost periodic motion, the appearance new branches and the disappearance of unstable region, occur. These phenomena were clarified theoretically and experimentally. The influences of the nonlinearity, the unbalance, the damping, and a lateral force on the vibration characteristics are also examined.

Key Words: Nonlinear Vibration, Continuous Asymmetrical Rotor, Gravity, Internal Resonance, Bifurcation, Almost Periodic Motion

1. ま え が き

二極発電機のロータやキー溝をもった軸は方向によって弾性復元力が異なる。このような性質をもった軸を偏平軸とよぶ。偏平軸に関する非線形振動の研究は、これまで主として集中定数系で行われてきた⁽¹⁾⁽²⁾。しかし、二極発電機のロータのように、質量が軸にほぼ均一に分布する系では、それを集中定数系でモデル化するのは適当でない。分布定数系については、石田らは真円軸(円形断面の軸)の場合の非線形振動現象について報告した⁽³⁾⁽⁴⁾。

本研究では、断面が一様な細い連続偏平軸の非線形

強制振動を解析する。非線形性としては、軸受の軸方向の運動を拘束することによって生ずる幾何学的非線形性を考える。この非線形ばね特性は多くの集中定数系の研究で考えられている玉軸受のクリアランスによる非線形性とは性質が異なる。さらに、重力が横方向に作用するため、静止平衡位置がずれる水平軸のモデルを用いる。偏平軸では、係数励振作用により不安定領域が発生するので、真円軸とは異なる振動現象が現われると予想される。

回転体をもたない連続回転軸においては、軸が細くなるにつれジャイロ作用が小さくなるため、前向きと後向きのふれまわり運動の固有振動数 p_{fn} と p_{bn} の比がほぼ $1 : (-1)$ となり(正は前向き、負は後向きであることを示す)、内部共振の関係が成立する。この場合、それらの固有振動数を結びつける非線形性が存在するときには内部共振現象が発生することが真円軸

* 原稿受付 2001年4月20日。

*¹ 正員, 中部大学工学部(☎487-8501 春日井市松本町)。*² 正員, 名古屋大学大学院工学研究科(☎464-8603 名古屋千種区不老町)。*³ 正員, 名古屋大学大学院。*⁴ アイシン精機(株)(☎448-0032 刈谷市朝日町)。

E-mail: ishida@ishidalab.nuem.nagoya-u.ac.jp

で確認されている⁽⁵⁾。そこで、この連続偏平軸においても、内部共振の關係に注目する。

水平に支持された偏平軸では、線形ばね特性のとき主危険速度付近で不安定領域が発生し、またその約半分の回転速度である二次的危険速度付近で重力の作用により前向き超調波振動の共振現象が発生することが知られている。そこで本論文では、幾何学的非線形性をもつ水平連続偏平軸の主危険速度付近と二次的危険速度付近における非線形振動を調べる。とくに、内部共振の影響による共振曲線の形状変化、その安定性の変化、概周期運動の発生の有無、不安定領域の存在の有無を検討する。さらに、軸に作用する横方向の力の大きさ、減衰と不釣り合いがそれぞれ振動特性に及ぼす影響を調べ、数値シミュレーションと実験により、解析により得られた結果が妥当であることを確認した。

2. 運動方程式と振動数方程式

理論モデルとして、図1に示すように、重力を一般化した横方向の力 $\mu(s)$ が作用し、両端を複列自動調心玉軸受で水平に単純支持された、一様な細い偏平軸を取り扱う。ただし、その支持部は軸の長手方向に運動が拘束されているので、幾何学的非線形性が現われる。一方の軸受中心に原点 O を一致させ、下方向に y 軸、軸受中心線方向に s 軸をとった静止直交座標系 $O-xyz$ と、回転軸と同じ角速度 ω で回転し、剛性が最小となる方向を ξ 軸、最大となる方向を η 軸にとった回転直交座標系 $O-\xi\eta s$ を考える。 $t=0$ において x 軸と ξ 軸が一致すると仮定する。不釣り合いの $O\xi$, $O\eta$ 方向成分を $e_\xi(s)$, $e_\eta(s)$ 、時刻 t における軸の位置 s の Ox , Oy 方向のたわみを $u(s,t)$, $v(s,t)$ とし、 $z = u + iv$ と表現すると、つぎの無次元表示の運動方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{\pi^4} \frac{\partial^4 z}{\partial s^4} - \frac{\Delta}{\pi^4} \frac{\partial^4 \bar{z}}{\partial s^4} \exp 2i\omega t + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \\ & - \frac{\kappa}{\pi^2} \left[\frac{\partial^4 z}{\partial s^2 \partial t^2} - 2i\omega \frac{\partial^3 z}{\partial s^2 \partial t} \right] + c \frac{\partial z}{\partial t} \\ & - \frac{\alpha}{\pi^4} \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial s} \right) ds \\ & = \omega^2 [e_\xi(s) + ie_\eta(s)] \exp i\omega t + i\mu \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

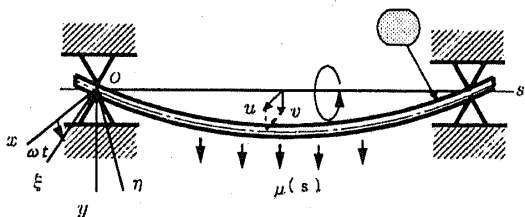


Fig. 1 Rotor model

なお、この式は、文献⁽⁵⁾の真円軸の式に偏平性 Δ に関する項⁽¹⁾が追加されている。ここに、断面二次モーメントの平均値を I 、最大値と最小値の差を ΔI とすると、 $\Delta = \Delta I / I$ で与えられる。また、 κ は回転慣性とジャイロモーメントに、 α は非線形性に関する係数、 c は作用する各種の減衰を等価的に粘性減衰におきかえたときの減衰係数である。

変位 u, v 、横方向力 μ 、および不釣り合い e_ξ, e_η をモード関数 $\varphi_n(s) = \sin \nu_n \pi s$ ($\nu_n = n, n=1, 2, \dots$) で展開する。 a_n, b_n は e_ξ, e_η の、 μ_n は μ の、 u_n, v_n は u, v の各モードの成分である。式(1)からモード振幅 u_n, v_n に関する常微分方程式がつぎのように得られる。

$$\left. \begin{aligned} & (1 + \kappa \nu_n^2) \ddot{u}_n + c \dot{u}_n + 2\kappa \omega \nu_n^2 \dot{v}_n + \nu_n^4 u_n \\ & - \nu_n^4 \Delta (u_n \cos 2\omega t + v_n \sin 2\omega t) \\ & + \alpha \nu_n^2 u_n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\nu_j^2}{2} (u_j^2 + v_j^2) \\ & = \omega^2 (a_n \cos \omega t - b_n \sin \omega t) \\ & (1 + \kappa \nu_n^2) \ddot{v}_n + c \dot{v}_n - 2\kappa \omega \nu_n^2 \dot{u}_n + \nu_n^4 v_n \\ & - \nu_n^4 \Delta (u_n \sin 2\omega t - v_n \cos 2\omega t) \\ & + \alpha \nu_n^2 v_n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\nu_j^2}{2} (u_j^2 + v_j^2) \\ & = \omega^2 (a_n \sin \omega t + b_n \cos \omega t) + \mu_n \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$(n = 1, 2, \dots)$

この運動方程式で $c = \alpha = a_n = b_n = 0$ とおき、振動数方程式を導くと、それぞれのモード形状に対して、回転速度によって変化する前向きの固有振動数 p_{fn} と後向きの固有振動数 p_{bn} が得られる。この系の固有振動数線図を図2に示す。この図から分かるように、軸の長さ比べ軸の直径がはるかに小さい系では、同じ次数の前向き n 次モードの固有振動数 p_{fn} と後向き n

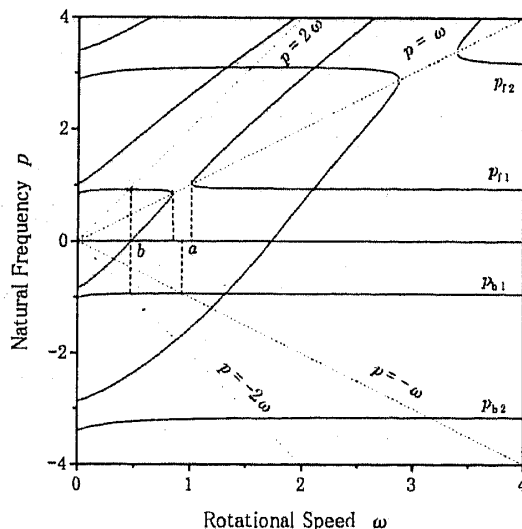


Fig. 2 Natural frequency diagram

次モードの固有振動数 p_{bn} に $p_{fn} \approx |p_{bn}|$ の内部共振の関係が成立する。したがって、点 a で与えられる主危険速度付近と、点 b で与えられる二次の危険速度付近の共振現象が内部共振の影響によって変化すると予想される。なお、両端単純支持された連続梁の非線形振動では次数の異なるモード間の連成を考えますが、本研究では、図 2 の固有振動数線図からわかるように、回転慣性の影響により $p_{f1} : p_{f2}$ に 1 : 4 の関係が成立していないので、この種の連成は考えませんでした。この仮定は後述の実験で得られたスペクトル線図で第二次モード成分が存在しないので妥当と考えます。

3. 主危険速度付近

3.1 基礎式の誘導 内部共振によって前向きと後向きのふれまわり運動が結びつけられ、その結果この共振点付近で前向きと後向きの調和振動が同時に発生すると仮定する。また、横方向力が作用するので定数項を考慮する。なお、 $O(\epsilon)$ の大きさの高次振動成分があると偏平性によって式 (3) の成分と同じ振動成分を派生する可能性があるが、それは $O(\epsilon^2)$ の大きさとなるので省略する。ここで、 ϵ は微小量を表すパラメータであり、 $O(\epsilon)$ は ϵ と同程度の大きさであることを表す。以上のことを考慮して $O(\epsilon)$ 精度の解をつぎのように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u_n &= P_{fn} \cos(\omega t + \beta_{fn}) + R_{bn} \cos(-\omega t + \delta_{bn}) \\ &\quad + A_{xn} \\ v_n &= P_{fn} \sin(\omega t + \beta_{fn}) + R_{bn} \sin(-\omega t + \delta_{bn}) \\ &\quad + A_{yn} \end{aligned} \right\} (3)$$

式 (3) を式 (2) に代入し、振動数 $\pm\omega$ の成分と振動数 0 の項について両辺の係数を $O(\epsilon)$ の精度で等置すると、振幅 P_{fn} 、 R_{bn} と位相角 β_{fn} 、 δ_{bn} 、振動数 0 の項 A_{xn} 、 A_{yn} に関するつぎの微分方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} b_f P_{fn} &= -2c\omega P_{fn} - 2\nu_n^4 \Delta P_{fn} \sin(2\beta_{fn}) \\ &\quad - 2\omega^2 (a_n \sin \beta_{fn} - b_n \cos \beta_{fn}) \\ &\quad + (N_{u1c} + N_{v1s}) \sin \beta_{fn} + (N_{u1s} - N_{v1c}) \cos \beta_{fn} \\ b_b R_{bn} &= 2c\omega R_{bn} + (N_{u1c} - N_{v1s}) \sin \delta_{bn} \\ &\quad - (N_{u1s} + N_{v1c}) \cos \delta_{bn} \\ b_f P_{fn} \beta_{fn} &= 2\nu_n^4 P_{fn} - 2\nu_n^4 \Delta P_{fn} \cos(2\beta_{fn}) \\ &\quad - 2\omega^2 P_{fn} + 2\kappa \omega^2 \nu_n^2 P_{fn} \\ &\quad - 2\omega^2 (a_n \cos \beta_{fn} + b_n \sin \beta_{fn}) \\ &\quad + (N_{v1c} - N_{u1s}) \sin \beta_{fn} + (N_{u1c} + N_{v1s}) \cos \beta_{fn} \\ b_b R_{bn} \delta_{bn} &= 2\nu_n^4 R_{bn} - 6\kappa \omega^2 \nu_n^2 R_{bn} - 2\omega^2 R_{bn} \\ &\quad + (N_{u1s} + N_{v1c}) \sin \delta_{bn} + (N_{u1c} - N_{v1s}) \cos \delta_{bn} \\ 2\kappa \omega \nu_n^2 A_{yn} &= -\nu_n^4 A_{xn} - N_{ua} \\ 2\kappa \omega \nu_n^2 A_{xn} &= -\mu_n + \nu_n^4 A_{yn} + N_{va} \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} (4)$$

ここに $b_f = 4\omega$ 、 $b_b = -4\omega(1 + 2\kappa\nu_n^2)$ であり、 N_{u1c} 、 N_{u1s} 、 N_{v1c} 、 N_{v1s} および N_{ua} 、 N_{va} は非線形項を表す。たとえば、式 (4) の第 1 式の非線形項の具体的な形は $(N_{u1c} + N_{v1s}) \sin \beta_{fn} + (N_{u1s} - N_{v1c}) \cos \beta_{fn} = \alpha \nu_n^4 R_{bn} (A_{xn}^2 - A_{yn}^2) \sin(\beta_{fn} + \delta_{bn}) - 2\alpha \nu_n^4 R_{bn} A_{xn} A_{yn} \cos(\beta_{fn} + \delta_{bn})$ である。式 (4) で、左辺の時間微分を 0 とおくことにより定常解が求められる。また、解の安定性は、その定常解からの微小ずれを考え、その微小ずれの時間変化を調べることににより、Routh-Hurwitz の安定判別法を適用して調べることができる⁽⁷⁾。なお、以下の計算で用いたパラメータの値は、後述の実験装置の寸法に対応して決めた。

3.2 共振曲線

まず、線形の場合の前向き調和振動成分の共振曲線を図 3 に示す。このとき、後向き調和振動成分は発生しない。図中、実線は安定解、破線および一点鎖線は不安定解を表す⁽⁶⁾。不安定な分枝 CH の存在する振動数範囲は不安定領域となる。

つぎに、対称な幾何学的非線形性をもつ場合を示す。横方向の力のない鉛直軸に相当する $\mu_n = 0$ のときの共振曲線を図 4 に示す。共振曲線が高速側に傾いた漸硬型となり、線形の場合にはすべて不安定であった分

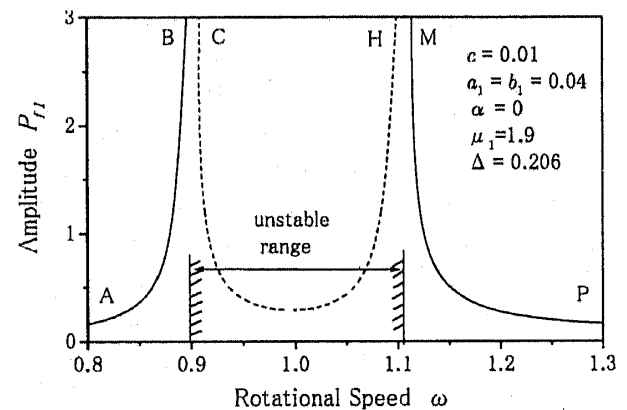


Fig. 3 Resonance curve of a linear system

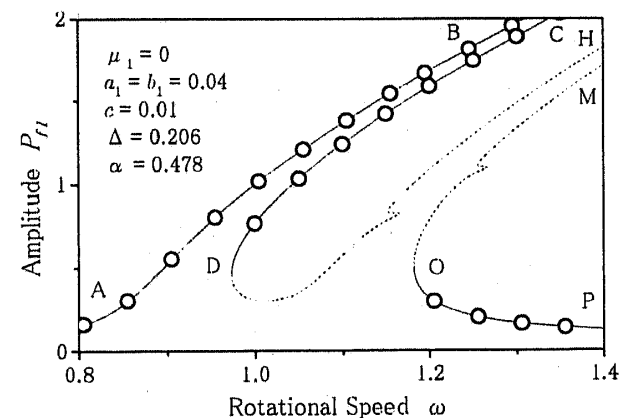


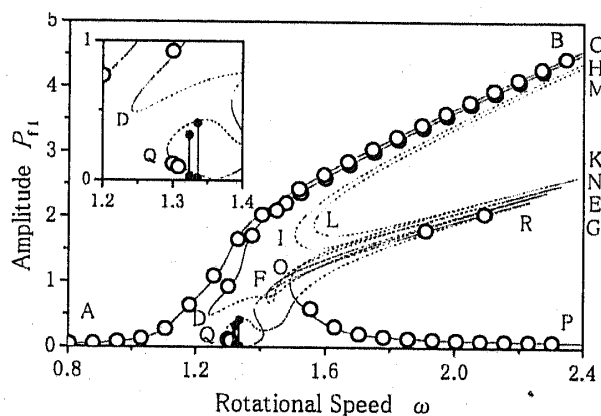
Fig. 4 Resonance curve of a vertical shaft

枝 CH の一部である分枝 CD が安定化し、すべて安定であった分枝 MP の一部である分枝 MO が不安定化している。また、線形の場合の不安定領域が消滅する。この場合には、内部共振の影響はなく、後向き調和振動は発生しない。式 (2) を直接数値積分した結果を ○ で表す。安定な分枝と ○ はよく一致しており、近似解析結果が妥当なことを示している。

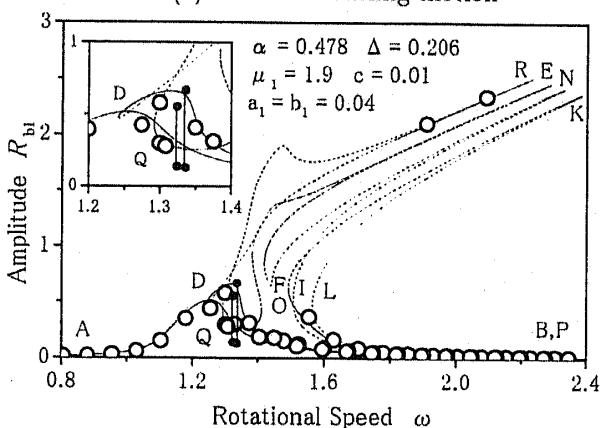
3.2.1 内部共振の影響 水平軸に働く重力のような横方向力が作用すると、軸に静たわみが生ずる。これによって、非対称非線形性が現われ、それが同じ次数の前向きと後向きモードを結びつけ、複雑な内部共振現象を引き起こす。代表例として $\mu_1 = 1.9$ の共振曲線を図 5 に示す。この横方向力の大きさは、水平軸の場合の重力の大きさに相当する。図 5(a) は前向き調和振動成分の振幅 P_{f1} 、図 5(b) は後向き調和振動成分の振幅 R_{b1} の共振曲線を表す。図 4 と図 5 の比較から、内部共振の影響の現れかたは分枝によって異なることがわかる。説明の便宜上、これらの分枝を 4 つのグループに分類する。第 1 グループには、分枝 AB, CD, HI, LM, OP が属する。これらの分枝に

対しては、内部共振の影響が小さく、前向き調和振動成分が大きく発生し、共存する後向き調和振動成分はきわめて小さい。すなわち、内部共振のない図 4 の場合とほとんど同じ振動状態となる。第 2 グループには、分枝 DEFNI, LKO が属する。これらの分枝は、内部共振の影響により、前向き調和振動成分が図 4 の不安定な分枝 DH, OM から分岐して現れ、同時に、それに対応して後向き調和振動成分も現れて共存するものである。第 3 グループは、閉じた分枝 QR が属する。内部共振の影響により、前向きと後向き調和振動成分が共存するが、図 4 の分枝から分岐せずに新しく現れた分枝である。第 4 グループは、閉じた分枝 QR の Q 点近傍で Hopf 分岐によって発生する概周期運動が属する。その振幅の変動の最大値と最小値を記号 ● で示す。

3.2.2 横方向力の影響 内部共振の影響は、横方向力と非線形性との共存で現われる。したがって、横方向力が小さくなれば、内部共振の影響は小さくなる。一例として、横方向力が水平軸に作用する重力の 0.5 倍である場合 ($\mu_1 = 0.95$) の共振曲線を図 6 に示

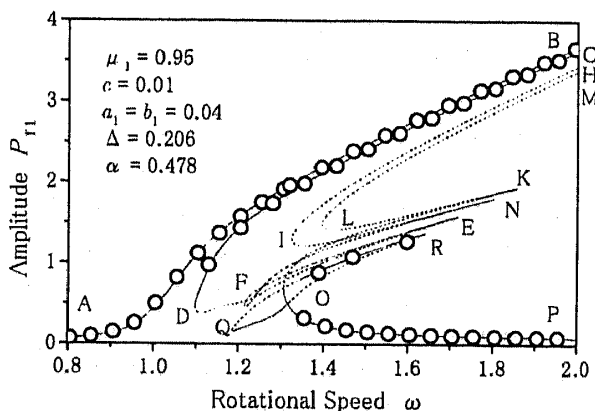


(a) Forward whirling motion

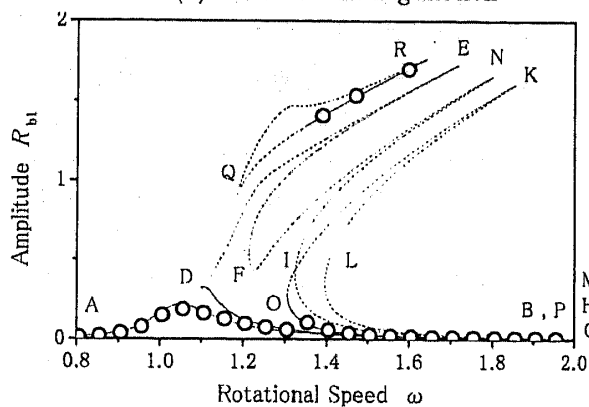


(b) Backward whirling motion

Fig. 5 Resonance curve(Major critical speed)



(a) Forward whirling motion



(b) Backward whirling motion

Fig. 6 Influence of a lateral force

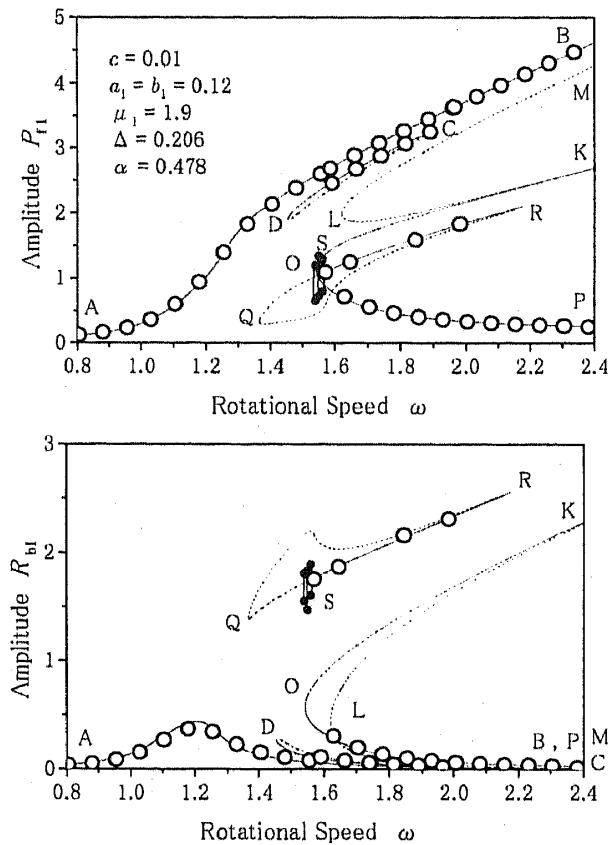


Fig. 7 Influence of dynamic unbalance of rotor

す。図5と比較して、概周期運動は消滅し、後向き調和振動成分の振幅が小さくなる。さらに横方向力を小さくすると、後向き調和振動成分は発生しなくなり、図4へと収束する。

3.2.3 減衰の影響 減衰を大きくしていくと、まず内部共振によって現われた第4グループの概周期運動と第2、第3グループの新しい分枝が消滅していく。さらに大きくすると、内部共振の影響を受けない第1グループの前向き調和振動成分のみが大きく発生する分枝の最大振幅が小さくなる。

3.2.4 不釣りあい力の影響 図7に不釣りあいを大きくした場合の共振曲線の変化を示す。この不釣りあい力の影響の仕方は、分枝によって違いがある。図5の第1グループの分枝に対しては、それらが線形系でも不安定領域の境界線付近に存在する共振曲線が非線形ばね特性によって漸硬型に傾いたものであるため、あまり影響を受けない。第2、第3および第4グループの分枝に対しては、それらが強制振動として内部共振によって発生するものであるため、不釣りあいの影響を比較的強く受ける。その影響の仕方は単純ではなく、大きくなる分枝もあれば、消滅する分枝もある。さらに、この図7では共振曲線QRの一部が不安

定となり、その付近で概周期運動が発生している。

3.2.5 非線形性の影響 係数αが大きくなるにつれ全体として分枝は漸硬型になる。また、αが大きくなると内部共振の影響が大きくなり、一層複雑な共振現象となる。

4. 二次的危険速度付近

4.1 基礎式の誘導 前向きと後向きのお互い運動が内部共振により結びつけられる可能性がある。主共振点付近と同様な考察から、O(ε)精度の解をつぎのように仮定する。

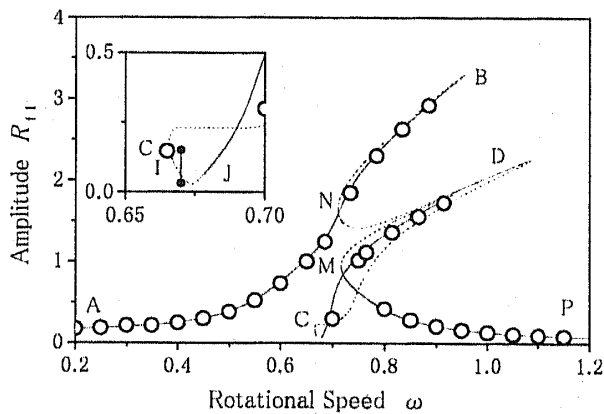
$$\left. \begin{aligned} u_n &= R_{fn} \cos(2\omega t + \delta_{fn}) + R_{bn} \cos(-2\omega t + \delta_{bn}) \\ &\quad + A_{xn} \\ v_n &= R_{fn} \sin(2\omega t + \delta_{fn}) + R_{bn} \sin(-2\omega t + \delta_{bn}) \\ &\quad + A_{yn} \end{aligned} \right\} (5)$$

式(5)を式(2)に代入し、振動数±2ωの成分と振動数0の項について両辺の係数をO(ε)の精度で等置すると、振幅R_{fn}、R_{bn}と位相角δ_{fn}、δ_{bn}、振動数0の項A_{xn}、A_{yn}に関するつぎの微分方程式を得る。

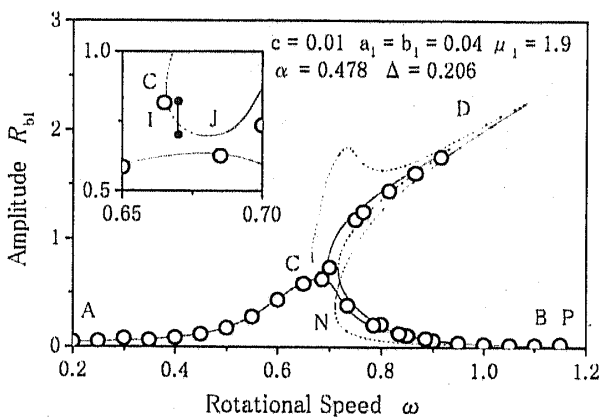
$$\left. \begin{aligned} b_f R_{fn} &= -4c\omega R_{fn} \\ &\quad - 2\Delta\nu_n^4 (A_{xn} \sin \delta_{fn} - A_{yn} \cos \delta_{fn}) \\ &\quad + (N_{u1c} + N_{v1s}) \sin \delta_{fn} + (N_{u1s} - N_{v1c}) \cos \delta_{fn} \\ b_b R_{bn} &= 4c\omega R_{bn} + (N_{u1c} - N_{v1s}) \sin \delta_{bn} \\ &\quad - (N_{u1s} + N_{v1c}) \cos \delta_{bn} \\ b_f R_{fn} \delta_{fn} &= 2\nu_n^4 R_{fn} - 8\omega^2 R_{fn} \\ &\quad - 2\Delta\nu_n^4 (A_{xn} \sin \delta_{fn} - A_{yn} \cos \delta_{fn}) \\ &\quad + (N_{v1c} - N_{u1s}) \sin \delta_{fn} + (N_{u1c} + N_{v1s}) \cos \delta_{fn} \\ b_b R_{bn} \delta_{bn} &= 2\nu_n^4 R_{bn} - 16\kappa\omega^2 \nu_n^2 R_{bn} - 8\omega^2 R_{bn} \\ &\quad + (N_{u1s} + N_{v1c}) \sin \delta_{bn} + (N_{u1c} - N_{v1s}) \cos \delta_{bn} \\ 2\kappa\omega \nu_n^2 A_{yn} &= -\nu_n^4 A_{xn} - N_{ua} + \Delta\nu_n^4 P_{fn} \cos \delta_{fn} \\ 2\kappa\omega \nu_n^2 A_{xn} &= -\mu_n + \nu_n^4 A_{yn} + \\ &\quad \Delta\nu_n^4 P_{fn} \sin \delta_{fn} + N_{va} \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} (6)$$

ここに $b_f = 4\omega(2 + \kappa\nu_n^2)$ 、 $b_b = -4\omega(2 + 3\kappa\nu_n^2)$ であり、 $N_{u1c}, N_{u1s}, N_{v1c}, N_{v1s}$ および N_{ua}, N_{va} は非線形項を表す。たとえば、式(6)の第1式の非線形項の具体的な形は $(N_{u1c} + N_{v1s}) \sin \delta_{fn} + (N_{u1s} - N_{v1c}) \cos \delta_{fn} = \alpha\nu_n^4 R_{bn} (A_{xn}^2 - A_{yn}^2) \sin(\delta_{fn} + \delta_{bn}) - 2\alpha\nu_n^4 R_{bn} A_{xn} A_{yn} \cos(\delta_{fn} + \delta_{bn})$ である。式(6)で、左辺の時間微分を0とおくことにより定常解が求められる。後の処理とパラメータの値は前節と同じである。

4.2 内部共振の影響 共振曲線の一例を図8に示す。図8(a)は前向き超調波振動成分の振幅R_{f1}、図8(b)は後向き超調波振動成分の振幅R_{b1}の共振曲線を表す。



(a) Forward whirling motion



(b) Backward whirling motion

Fig. 8 Resonance curve(Secondary critical speed)

これらの図から、共振曲線には二つのピークが存在することがわかる。第1は、分枝ABで表される振動状態である。この前向き成分は線形でも発生する。前向き超調波成分は大きく発生するが、内部共振の影響により発生する後向き超調波成分は小さい。第2は、分枝CDで表される振動状態である。この場合には、内部共振の影響により、前向きと後向き超調波振動成分がいずれも大きく現れて共存する。また、前向きと後向き超調波振動成分が共存する分枝CDの一部に一点鎖線で表される不安定区間IJが現れたが、Hopf分岐によって、概周期運動が発生したことがわかった。

各パラメータの影響は以下のとおりである。横方向力が小さくなると、前向き成分については、分枝CDは消え、分枝AB, BN, MPが残る。後向き成分はいずれも消える。減衰が大きくなると、振幅は小さくなる。さらに非線形性が小さくなると、前向き成分のAB, BN, MPの分枝が残り、その傾きは小さくなる。

5. 実験

5.1 実験装置 実験装置の概要を図9に示す。

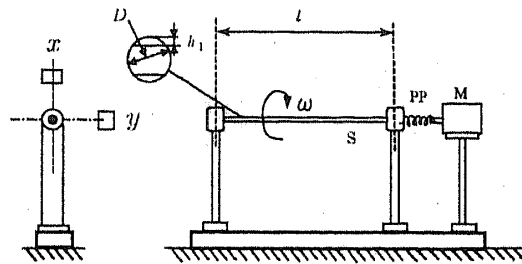


Fig. 9 Experimental setup

直径 $D = 4\text{mm}$ の円形断面の両側を平行にそれぞれ高さ $h_1 = 0.3\text{mm}$ だけ全長にわたって削った軸 S の両端を複列自動調心玉軸受 ($\#1200$) で水平に単純支持した。軸受中心間距離 $l = 800\text{mm}$ である。両端玉軸受の外輪の軸方向の移動を拘束し、非線形性を作った。この弾性軸はやわらかいプラスチックのパイプ PP を介してモータ M に結合されている。このパイプの曲げ剛性は軸に比べてはるかに小さく、駆動力のみを伝える。また、モータからの外乱はこのパイプにより遮断され、主系に伝わらないようになっている。

5.2 実験結果

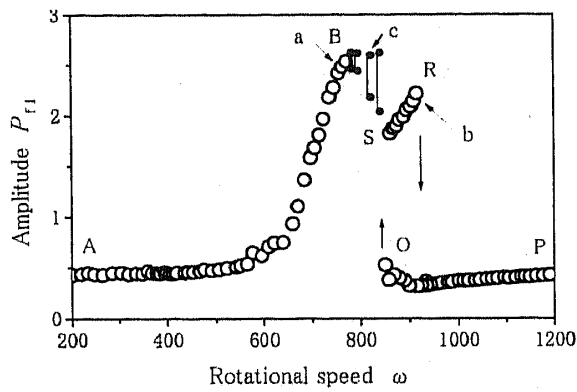
5.2.1 主危険速度付近 図10(a)に前向き調和振動成分 P_{f1} 、図10(b)に後向き調和振動成分 R_{b1} の共振曲線を示す。この場合には理論解析における図7に示された曲線AB, OP, SRに対応する定常振動が得られた。なお、図7の曲線DCに対応するものは得られなかったが、これはその解に導く初期値の範囲が比較的狭く、したがって数値シミュレーションでは得られたが実験では危険なため、十分繰り返して実験することが難しかったからである。点a, b, cにおける時刻歴とFFT解析結果を図10(c), (d), (e)に示す。

5.2.2 二次的危険速度付近 図11(a)に前向き超調波振動成分 R_{f1} 、図11(b)に後向き超調波振動成分 R_{b1} の共振曲線を示す。この場合には理論解析の図8の場合と定性的に似た結果が得られた。すなわち、図8の曲線AB, MP, CDに対応する定常振動と、曲線IJの範囲で発生する概周期運動が得られた。点a, b, cにおける時刻歴とFFT解析結果を図11(c), (d), (e)に示す。

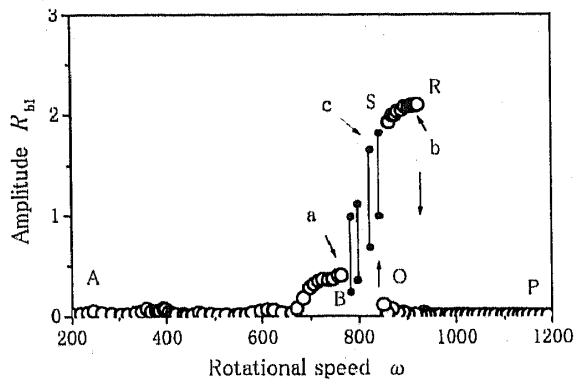
6. 結論

幾何学的非線形性をもつ、一様な水平偏平連続回転軸の主危険速度付近、および二次的危険速度付近における振動特性について、以下の結論を得た。

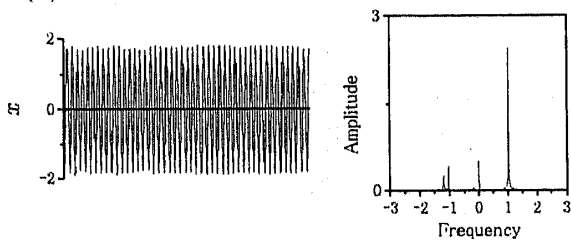
(1) 軸が細い場合には、前向きと後向きのふれまわり運動の固有振動数が $1: (-1)$ の内部共振の関係を満足する。さらに、軸に横方向の力が作用すると、前



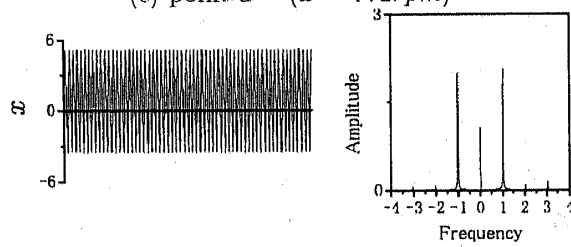
(a) Resonance curves of forward component



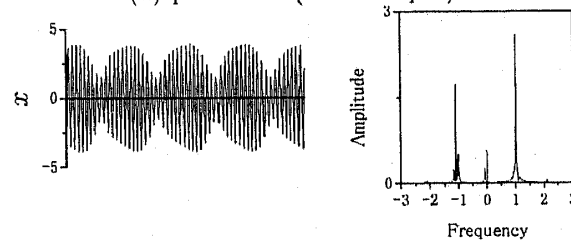
(b) Resonance curves of backward component



(c) point a ($\omega = 772rpm$)

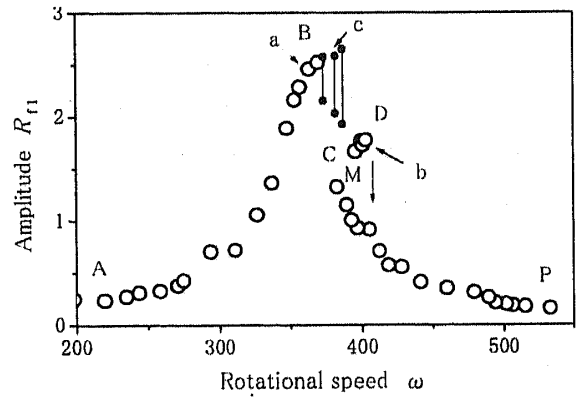


(d) point b ($\omega = 916rpm$)

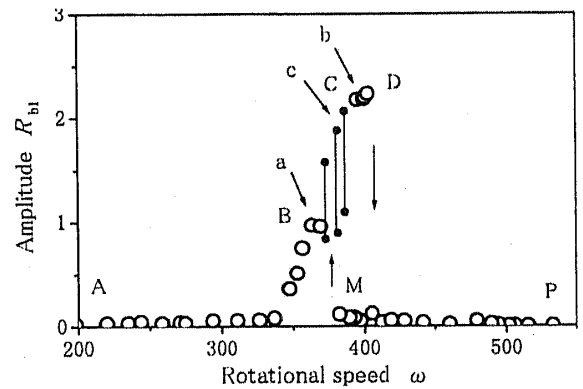


(e) point c ($\omega = 842rpm$)

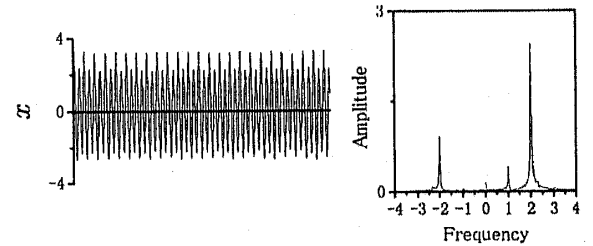
Fig. 10 Experiment result (Major critical speed)



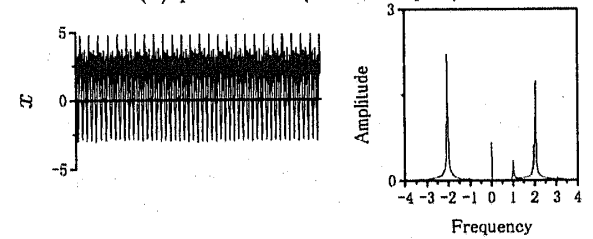
(a) Resonance curves of forward component



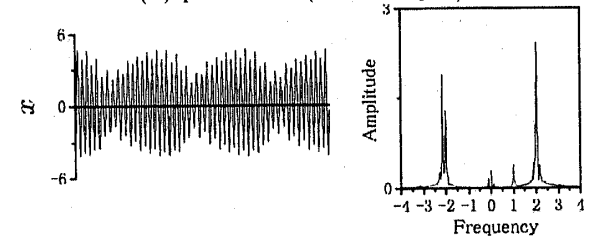
(b) Resonance curves of backward component



(c) point a ($\omega = 362rpm$)



(d) point b ($\omega = 401rpm$)



(e) point c ($\omega = 386rpm$)

Fig. 11 Experiment result (Secondary critical speed)

向きと後向きの振動モードを結びつける非対称非線形性が現れ、その結果、内部共振の影響により、前向き調和振動成分に加え、後向き調和振動成分が同時に発生する。

(2) 主危険速度付近について:

(a) 線形るとき発生する不安定領域の境界線が高速側に傾くため、不安定領域が消滅する。

(b) 上記 (a) の境界線の両側にある共振曲線の分枝の安定性が変化する。

(c) 上記 (b) の共振曲線に加え、内部共振の影響により、新しく枝分かれした分枝、独立な分枝、および概周期運動が発生する。

(3) 二次的危険速度付近について:

(a) 内部共振の影響により、前向きと後向きの超調波振動成分が共存する二つのピークが現れる。

(b) 線形でも発生する低速側の前向き超調波振動成分は横方向力によって変化しないが、後向き超調波

振動成分と高速側の前向きと後向き成分は著しい影響を受ける。

(4) 理論解析で得られた結果の妥当性を実験によって確認した。

文 献

- (1) 山本・ほか2名, 機論, 44-382(1978), 1934
- (2) 山本・ほか2名, 機論, 46-405(1980), 465
- (3) 石田・ほか3名, 機論, 62-596(1996), 1256
- (4) 石田・ほか3名, 機論, 63-611(1997), 2206
- (5) 石田・ほか3名, 機論, 60-576(1994), 2684
- (6) 石田・ほか2名, 機論, 65-638(1999), 3912
- (7) 山本・安田, 機論, 42-358(1976), 1693