

## 重力と非線形ばね特性の作用を受ける偏平軸の振動\*

### (内部共振の影響)

石田 幸 男<sup>\*1</sup>, 井上 剛 志<sup>\*1</sup>  
劉 軍<sup>\*2</sup>, 鈴木 昭 宏<sup>\*1</sup>

## Vibrations of an Asymmetrical Shaft with Gravity and Nonlinear Spring Characteristics (Effect of Internal Resonance)

Yukio ISHIDA<sup>\*3</sup>, Tsuyoshi INOUE,  
Jun LIU and Akihiro SUZUKI

<sup>\*3</sup> Department of Electronic Mechanical Engineering, Nagoya University,  
Furo cho, Chikusa ku, Nagoya shi, Aichi, 464 8603 Japan

When an asymmetrical shaft is supported horizontally by single row deep groove ball bearings, a difference in shaft stiffnesses, that of support stiffnesses, and nonlinear spring characteristics coexist, and various kinds of nonlinear forced oscillations and nonlinear parametric oscillations occur. In this paper, internal resonance phenomena in the neighborhood of the secondary critical speed and the major critical speed are investigated. The following are clarified in both cases: (1) two peaks of a superharmonic resonance with both a forward and a backward components appear, (2) almost periodic motion due to Hopf bifurcation and one verified from a super combination resonance occur.

**Key Words:** Vibration of Rotating Body, Asymmetrical Shaft, Gravity, Internal Resonance, Harmonic Vibration, Super Harmonic Vibration, Bifurcation, Almost Periodic Motion

### 1. ま え が き

発電機ロータなどの回転機械では、偏平軸を水平に支持している。前報<sup>(1)</sup>では、偏平軸を玉軸受で水平に支持した系の主危険速度付近の振動現象を解析した。このような系では、軸の偏平性、軸受のクリアランスによる非線形性、重力あるいは組立誤差とクリアランスの共存に起因する軸端支持剛性の方向差が同時に現れる。ただし、前報<sup>(1)</sup>ではジャイロモーメントが強く作用する場合、すなわち、前向きふれまわり振動様式の固有振動数  $p_f$  と後向きふれまわり振動様式の固有振動数  $p_b$  が、回転速度  $\omega$  に依存して比較的大きく変化し、各共振点が多分離れている場合について調べた。そして、主危険速度付近において、前向きふれまわり成分と後向きふれまわり成分をもつ調和型振動と  $p_f - p_b = 2\omega$  様式の超和差型振動が、強制振動あるいは係数励振振動として発生することを明らかにし、その振動特性を解明した(なお、ここでは強制振動と係

数励振振動の両方の特性を有する振動を「 $\dots$ 型」と称する)。

振動系において、その固有振動数間に整数比などの簡単な関係があるとき、系に存在する非線形性を通して、様々な特徴ある現象が現れる可能性がある<sup>(2),(3)</sup>。このような現象は内部共振現象とよばれる。回転軸系ではジャイロモーメントが作用するため、一般には固有振動数間に整数比の関係が成立しない。しかし、ジェフコットロータのように、弾性軸の中央に回転体を取り付けた系では、そのたわみ振動の前向き固有振動数  $p_f$  と後向き固有振動数  $p_b$  は回転速度によらず一定で、常に  $p_f : p_b = 1 : (-1)$  の関係をもつ(符号  $-$  は後向きふれまわり運動を表す)。円形断面の回転軸系に対するこの種の内部共振現象の影響についてはすでに報告した<sup>(4)-(6)</sup>。

本報では、重力と非線形ばね特性の作用を受ける偏平軸系の共振現象に対する内部共振の影響を調べた。特に、水平偏平軸で重要な主危険速度の約半分の回転速度(二次的危険速度<sup>(7)</sup>とよばれる)付近で発生する超調波振動と、主危険速度付近の調和型振動について内部共振の影響を明らかにしたので報告する。

\* 原稿受付 2000年3月19日。

<sup>\*1</sup> 正員, 名古屋大学大学院工学研究科 (〒464 8603 名古屋市千種区不老町)。

<sup>\*2</sup> 名古屋大学大学院。

E-mail: ishida@ishidalab.nuem.nagoya-u.ac.jp

## 2. 運動方程式と固有振動数線図

前報<sup>(1)</sup>と同様、図1に示す2自由度傾き振動モデルを用いて解析を行う。図中の円錐は軸受のクリアランスの範囲を表し、軸端がその内部にあれば単純支持、外部にあれば固定支持となり非線形性が生じる。回転体の位置における軸の傾き角  $\theta$  の  $xz$  平面,  $yz$  平面への投影角を  $\theta_x, \theta_y$  で表す。後述の実験装置 (4自由度系, 変数  $x, y, \theta_x, \theta_y$ ) では、重力の作用により軸の平衡位置がクリアランスの中心からずれ、軸端支持剛性の方向差と非対称非線形性を生じさせる。これに起因する現象を調べるため、 $yz$  平面内で重力と結果的に同じ効果をもつ一定モーメント  $\mu$  の作用を加える<sup>(1)</sup>と、無次元化された運動方程式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta}_x + i_p \omega \dot{\theta}_y + c \dot{\theta}_x + \theta_x - \Delta(\theta_x \cos 2\omega t + \theta_y \sin 2\omega t) \\ + N_{\theta_x} = F \cos(\omega t + \alpha) \\ \ddot{\theta}_y - i_p \omega \dot{\theta}_x + c \dot{\theta}_y + \theta_y - \Delta(\theta_x \sin 2\omega t - \theta_y \cos 2\omega t) \\ + N_{\theta_y} = F \sin(\omega t + \alpha) - \mu \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 $F = (1 - i_p)\tau\omega^2$ ,  $i_p$  は極慣性モーメントと直径に関する慣性モーメントの比,  $c$  は減衰係数,  $N_{\theta_x}, N_{\theta_y}$  は復元力中の非線形項,  $\tau$  は動不つりあい,  $\alpha$  は動不つりあいの角位置,  $t$  は時刻,  $\Delta$  は軸剛性の方向差 (偏平性) を示す。前報<sup>(1)</sup>と同様、実際の回転機械で比較的発生しやすい等方性の対称非線形成分  $N(0)$  と、非対称非線形成分  $N(1)$  のみを考慮する。以下では、 $N(0)$  成分と  $N(1)$  成分を表す項の係数をそれぞれ  $\beta^{(0)}$  と  $\epsilon_s^{(1)}$ ,  $\epsilon_c^{(1)}$  で表す。

この系の固有振動数線図を図2に示す。このモデルでは、固有振動数  $p_f, p_b$  は回転速度  $\omega$  の関数として変化し、その変化の度合いは  $i_p$  によって決まる。図2(a)は  $i_p = 0$  の場合であり、このときはジェフcottロータと同様、ジャイロモーメントは作用しない。しかし、この系では軸端支持の方向差のため固有振動数が二重になる。図2(b)は  $i_p \neq 0$  の場合である。ジャイロモーメントの作用により固有振動数が回転速度の関数として変化し、また図2(a)で二重となった線の

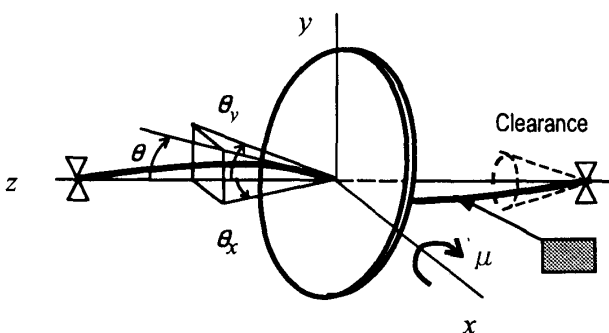
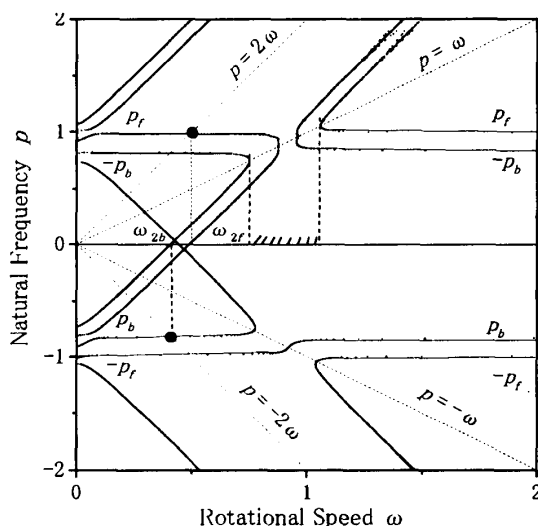


Fig. 1 2DOF theoretical model (inclination)

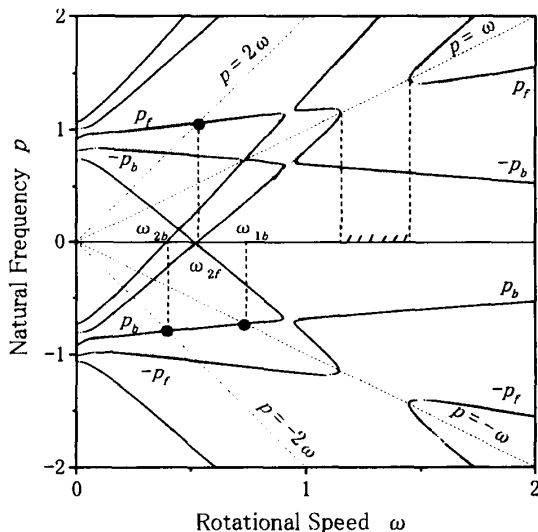
間隔も広がっている。前報<sup>(1)</sup>でこの線図を描くときに説明したように、これらの固有振動数は  $O(\epsilon^0)$  の大きさの  $p_f, p_b$  と  $O(\epsilon)$  以下の大きさのそれらの派生成分  $-p_f, -p_b$  などからなっている。共振点は  $O(\epsilon^0)$  の大きさの成分により決まり、それらは図中の●印の点で与えられる。内部共振の影響はこれらの●印の位置の近接の程度によって決まる (なお、不安定領域の場合の共振点は特定しにくいので、●は描かない)。

## 3. 二次的危険速度付近

前向き固有振動数  $p_f$  の曲線と直線  $p = 2\omega$  の交点付近の共振現象を調べる。この付近に不安定領域は無い (図2参照)。また、対応する線形系では、重力と偏平性により  $p_f = +2\omega$  様式の前向き超調波振動は発生



(a) Case of  $i_p = 0$



(b) Case of  $i_p = 0.5$

$\mu = 1.0 \quad \Delta = 0.2 \quad \beta^{(0)} = 0.01 \quad \epsilon_c^{(1)} = \epsilon_s^{(1)} = 0.06$

Fig. 2 Natural frequency diagram

するが、 $p_b = -2\omega$  様式の後向き超調波振動は発生しないことに注意する。

**3.1 基礎式の誘導** 1: (-1) 型の内部共振の影響により、振動数  $+2\omega$  の成分と  $-2\omega$  の成分が同時に発生すると予想し、解を  $O(\epsilon)$  精度でつぎのように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= R_f \cos(2\omega t + \delta_f) + R_b \cos(-2\omega t + \delta_b) + A_x \\ \theta_y &= R_f \sin(2\omega t + \delta_f) + R_b \sin(-2\omega t + \delta_b) + A_y \end{aligned} \right\} (2)$$

なお、実際の機械で存在する不つりあい起因する調和振動成分は、小さいので省略した。式(2)を式(1)に代入し、振動数  $\pm 2\omega$  と振動数 0 の項について両辺の係数を  $O(\epsilon)$  の精度で等置すると、振幅  $R_f, R_b$  と位相角  $\delta_f, \delta_b$ 、振動数 0 の項  $A_x, A_y$  に関するつぎの微分方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} b_f \dot{R}_f &= -4c\omega R_f - 2A_x \Delta \sin \delta_f - 2A_y \Delta \sin \delta_f \\ &\quad + (N_{\theta x 2c} + N_{\theta y 2s}) \sin \delta_f + (N_{\theta x 2s} - N_{\theta y 2c}) \cos \delta_f \\ b_b \dot{R}_b &= -4c\omega R_b + (N_{\theta y 2s} - N_{\theta x 2c}) \sin \delta_b \\ &\quad - (N_{\theta x 2s} + N_{\theta y 2c}) \cos \delta_b \\ b_f R_f \dot{\delta}_f &= 2R_f G(2\omega) - 2A_x \Delta \cos \delta_f \\ &\quad + (N_{\theta y 2c} - N_{\theta x 2s}) \sin \delta_f + (N_{\theta x 2c} + N_{\theta y 2s}) \cos \delta_f \\ &\quad + 2A_y \Delta \sin \delta_f \\ b_b R_b \dot{\delta}_b &= 2R_b G(-2\omega) - (N_{\theta x 2s} + N_{\theta y 2c}) \sin \delta_b \\ &\quad - (N_{\theta x 2c} - N_{\theta y 2s}) \cos \delta_b \\ i_p \omega \dot{A}_y &= -A_x + \Delta R_f \cos \delta_f - N_{\theta x a} \\ i_p \omega \dot{A}_x &= \mu + A_y + \Delta R_f \sin \delta_f + N_{\theta y a} \end{aligned} \right\} (3)$$

ここで、 $b_f = 2\omega(4 - i_p)$ 、 $b_b = 2\omega(4 + i_p)$  であり、 $N_{\theta x 2c}, \dots, N_{\theta y a}$  は、非線形項  $N_{\theta x}, N_{\theta y}$  から現れる非線形成分を表す。たとえば、式(3)の第1式 of 非線形項の具体的な形は  $(N_{\theta x 2c} + N_{\theta y 2s}) \sin \delta_f + (N_{\theta x 2s} - N_{\theta y 2c}) \cos \delta_f = 4R_b [\{\sin(\delta_f + \delta_b)A_x^2 - 2\cos(\delta_f + \delta_b)A_x A_y - \sin(\delta_f + \delta_b)A_y^2\} 2\beta^{(0)} + \{\sin(\delta_f + \delta_b)A_x - \cos(\delta_f + \delta_b)A_y\} \epsilon_c^{(1)} - \{\cos(\delta_f + \delta_b)A_x + \sin(\delta_f + \delta_b)A_y\} \epsilon_s^{(1)}]$  である。 $G(2\omega), G(-2\omega)$  は、 $G(p) = 1 + i_p \omega p - p^2$  という関数で、 $p = 2\omega$  あるいは  $p = -2\omega$  を代入したものである。式(3)で左辺 = 0 とおくと非線形代数方程式が得られる。それをブレント法により解くと定常解が得られる。また、その定常解からの微小ずれを考えて、式(3)から特性方程式を導き、Routh-Hurwitz の安定判別法を適用して定常解の安定性を調べる。以下の共振曲線ではその安定解を実線、不安定解を破線で記入する。また、これらの近似解の精度を確認するため、運動方程式(1)を直接アダムス法によって数値積分し、その結果を  $\circ$  印で示す。

**3.2 共振曲線の形状**

(A)  $i_p = 0$  の場合 式(3)において  $i_p = 0$  とし

た場合は、ジャイロモーメントが作用せず、図2(a)のように前向きと後向きの超調波振動の各共振点が最も近接する。この場合の共振曲線  $R_f, R_b$  を図3に示す。

この場合、共振曲線は以下のような特徴をもつ。(1) 前向き超調波振動成分  $+2\omega$  と後向き超調波振動成分  $-2\omega$  が同時に発生する。(2) (後述の単一共振の場合と比較すると) 共振曲線が複雑に変化する。すなわち安定解について言えば、4本の分枝 AB, DC, FE, GH の安定解がある。(3) この振動はいくつかのピークを形成するが、分枝 AB では前向き成分、FE では後向き成分、DC では前向きと後向きの2つの成分が共に大きくなる。

(B)  $i_p = 0.5$  の場合 パラメータ  $i_p = 0.5$  における共振曲線を図4に示す。これは図2(b)に対応し、ジャイロモーメントの影響により各共振点がさらに離れた場合である。図4中の鎖線はホップ分岐による不安定解を示す。数値シミュレーションにおいて概周期運動が確認され、図中ではその振幅(図5の時刻歴を参照)の最大値と最小値を記号  $\bullet$  で示す。

これらの曲線は図3の場合からつぎのように変化する。(1) 前向きと後向きの成分がいずれも大きく現れる高速側のピークと、後向き成分の優勢な低速側の

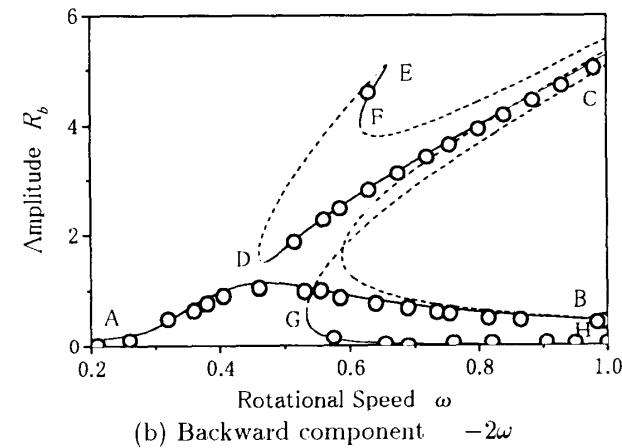
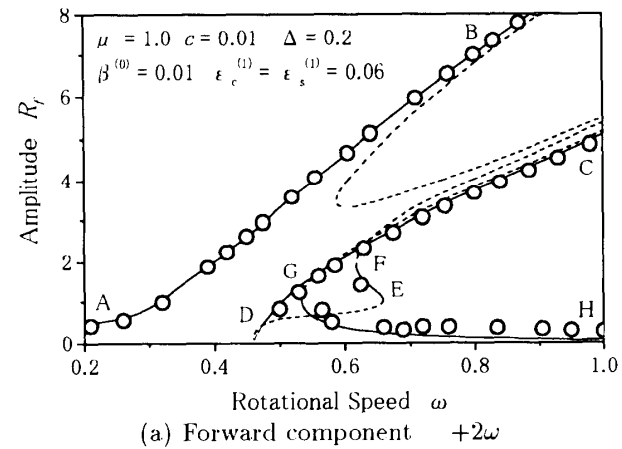


Fig. 3 Resonance curves (case of  $i_p = 0$ )

ピークをもつ。(2) ホップ分岐による不安定解の分枝IJの近傍( $\omega = 0.45$  近傍)で, 概周期運動(X型とする)が発生する。(3) 回転速度 $\omega = 0.53$  近傍と,  $\omega = 0.58$  近傍で, 式(3)では対応する定常解のない概周期運動(Y型とする)が発生する。

上述のX型, およびY型の概周期運動について, 数値シミュレーションの時刻歴とポアンカレ写像を図5に示す。ここで, さらにX型の特徴を, 式(3)を数値積分することにより調べる。図6に相平面図, およびそこから求めた分岐図を示す。なお, 同図中に式(3)による定常解も示す。 $\omega = 0.44$  近傍から現れた1重のリミットサイクルは,  $\omega = 0.48$  付近で周期倍分岐により2重,  $\omega = 0.49$  付近で4重のリミットサイクルとなり, さらに分岐を繰り返した後に消滅した。

(C)  $i_p = 1.5$ の場合 十分に共振点が離れている例として,  $i_p = 1.5$  の場合の共振曲線を図7に示す。このときは前向き成分が強く発生する共振だけが大きく発生した。

以上の結果を総合的に比較して, 共振点のずれの影響, すなわち, 内部共振の影響を検討する。それらは

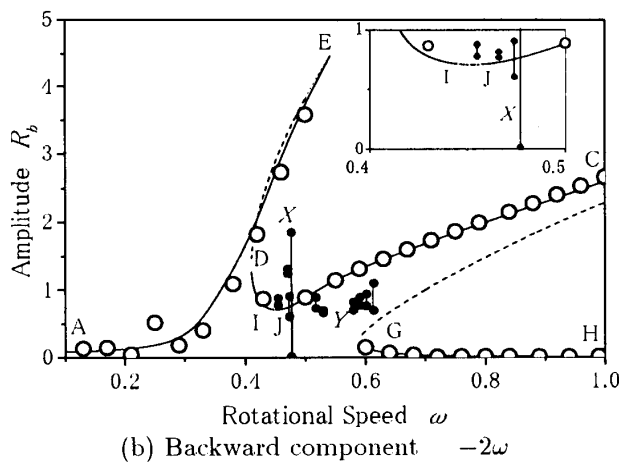
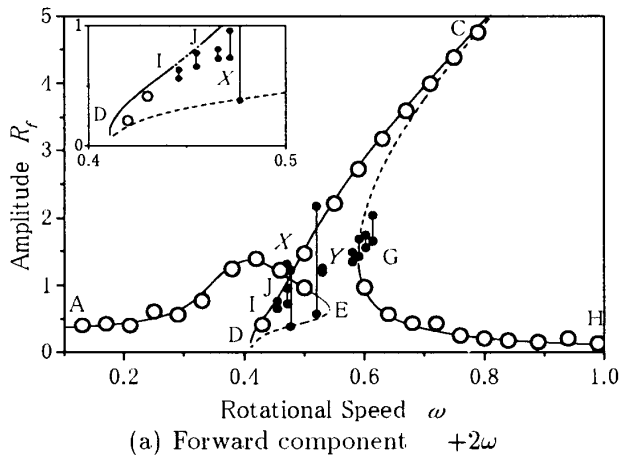


Fig. 4 Resonance curves (case of  $i_p = 0.5$ )

以下の変化をもたらす。(1) 超調波振動の共振曲線を2つのピークをもつものへと変化させる。(2) ジャイロモーメントに関するパラメータ $i_p$ のある範囲内で,

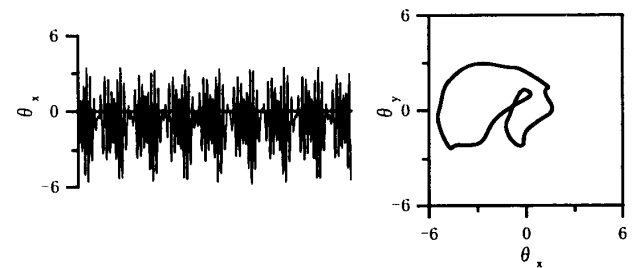
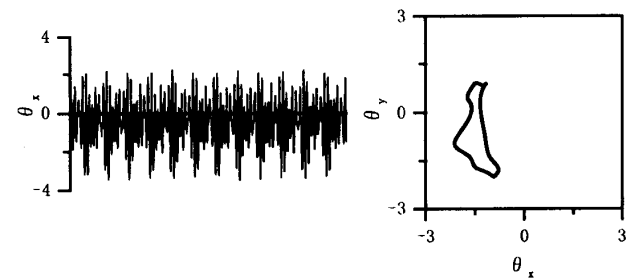


Fig. 5 Time histories and Poincaré maps

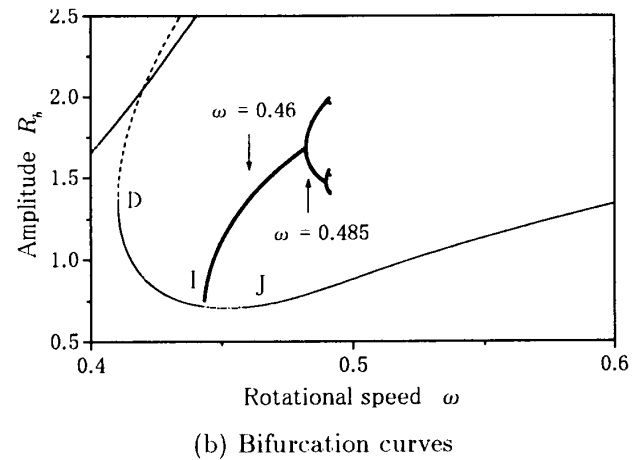
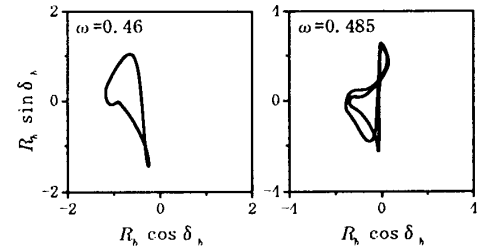


Fig. 6 Bifurcation curves and Phase planes of backward component ( $-2\omega, i_p = 0.5$ )

概周期運動を発生させる。ここで、 $X$ 型および $Y$ 型の概周期運動が発生する回転速度範囲を数値シミュレーションで求めた結果を図8にまとめる。図中、実線で囲まれた範囲はホップ分岐による $X$ 型の概周期運動、点線で囲まれた範囲は $Y$ 型の概周期運動を表す。 $X$ 型の概周期運動は、 $Y$ 型の概周期運動に比べて、広い $i_p$ の範囲で発生することが確認できる。

4. 主危険速度付近

各共振点が十分離れている場合については前報<sup>(1)</sup>で報告した。本報では $i_p$ が小さい場合に注目し、系の動特性に対する内部共振の影響を調べる。

4.1 基礎式の誘導 調和振動成分 $+\omega$ に対して内部共振により $-\omega$ の成分が発生することを考慮し、解をつぎのように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= P \cos(\omega t + \beta) + R \cos(-\omega t + \delta) + A_x \\ \theta_y &= P \sin(\omega t + \beta) + R \sin(-\omega t + \delta) + A_y \end{aligned} \right\} (4)$$

偏平軸の場合、偏平性を介しても $-\omega$ の成分が現れるので、結局内部共振の有無に関わらず、解の形は前報<sup>(1)</sup>と同じものとなっている。したがって、前報<sup>(1)</sup>と同様なつぎの微分方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} b_f \dot{P} &= 2F \sin(\alpha - \beta) - 2Pc\omega - 2P\Delta \sin(2\beta) \\ &\quad + (N_{\theta x1c} + N_{\theta y1s}) \sin \beta + (N_{\theta x1s} - N_{\theta y1c}) \cos \beta \\ b_b \dot{R} &= 2c\omega R + (N_{\theta x1c} - N_{\theta y1s}) \sin \delta \\ &\quad - (N_{\theta x1s} + N_{\theta y1c}) \cos \delta \\ b_f P \dot{\beta} &= 2P G(\omega) - 2P\Delta \cos(2\beta) \\ &\quad + (N_{\theta y1c} - N_{\theta x1s}) \sin \beta + (N_{\theta x1c} + N_{\theta y1s}) \cos \beta \\ &\quad - 2F \cos(\alpha - \beta) \\ b_b R \dot{\delta} &= 2R G(-\omega) + (N_{\theta x1s} + N_{\theta y1c}) \sin \delta \\ &\quad + (N_{\theta x1c} - N_{\theta y1s}) \cos \delta \\ i_p \omega \dot{A}_y &= -A_x - N_{\theta xa} \\ i_p \omega \dot{A}_x &= \mu + A_y + N_{\theta ya} \end{aligned} \right\} (5)$$

ここに $b_f = 2\omega(2 - i_p)$ 、 $b_b = -2\omega(2 + i_p)$ である。以下では前報<sup>(1)</sup>と異なり、 $i_p$ が小さく内部共振現象が現れる場合について検討する。

4.2 共振曲線の形状 調和型振動成分 $P$ の共振曲線の一例を図9に示す。なお、前節の二次の危険速度の場合と同様、共振点が完全には一致せず、少し離れた場合の現象が特徴的であるので、その例を示す。

この共振曲線は、内部共振の影響により前節の二次の共振点付近と同様な特徴、すなわち、前向き成分と後向き成分が同時に発生すること、2つのピークを持つこと、 $i_p$ の特定の範囲で概周期運動が発生することなどの特徴をもつが、その他、次のような特徴も現れる。(1) 鎖線の不安定解の分枝AB,CD,EFの近傍で、ホップ分岐により概周期運動が発生する。なお、分枝ABで発生した概周期運動は超和差調波振動に対応する。(2) 回転速度 $\omega = 1.08$ 近傍で、式(5)では対応する定常解のない概周期運動が発生する。

4.3 鉛直偏平軸との比較 著者らは先に、鉛直偏平軸の主危険速度付近の内部共振現象について報告

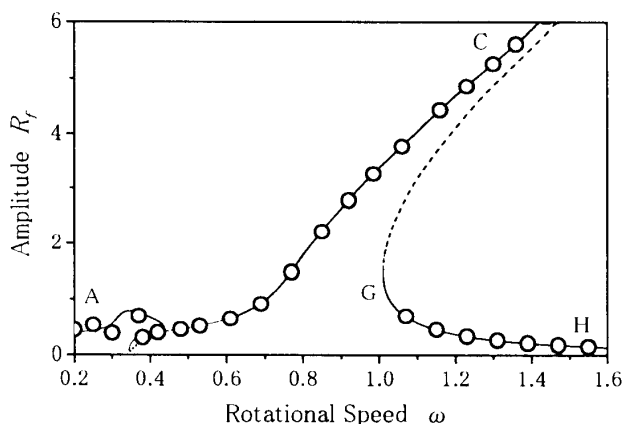


Fig. 7 Resonance curves  $+\omega$  (case of  $i_p = 1.5$ )

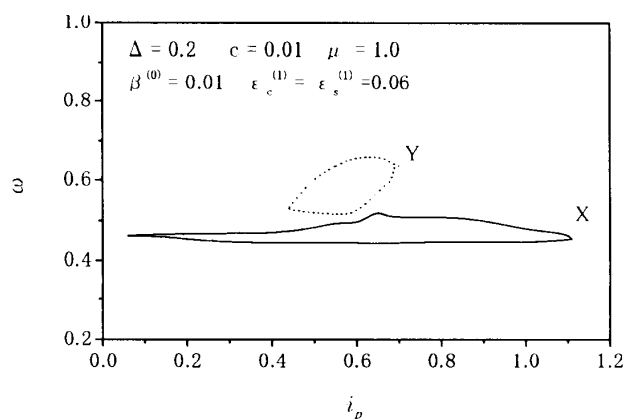


Fig. 8 Ranges of almost periodic motions

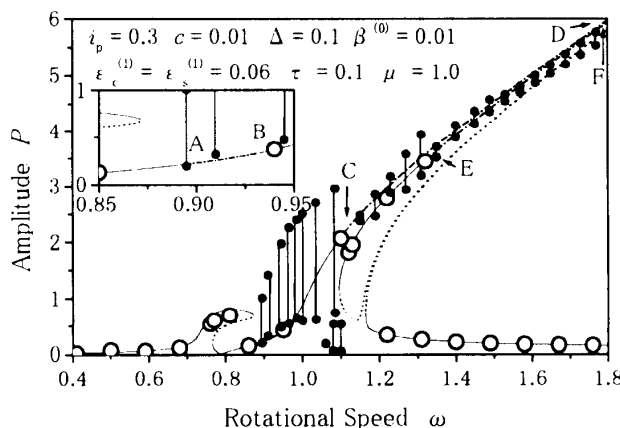


Fig. 9 Resonance curves  $+\omega$

した<sup>(8)</sup>. その場合には, 静止した方向差がそれほど強く現れないので, 係数励振作用による超和差調波振動から生じた AB 間の概周期運動は発生しない. また, 低速側のピークも現れない.

5. 実験

5.1 実験装置 実験装置の概要を図 10 に示す. その基本形状は前報<sup>(1)</sup>と同じである. 軸受中心間距離  $a + b = 700\text{mm}$ , 直径  $d = 12\text{mm}$  の軸 S を単列深みぞ玉軸受 (#6204) と複列自動調心玉軸受 (#1200) で水平に支持した. 軸 S は, 図の  $l_1$  部分を除いた部分を厚

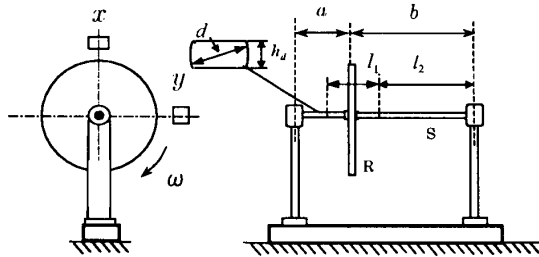
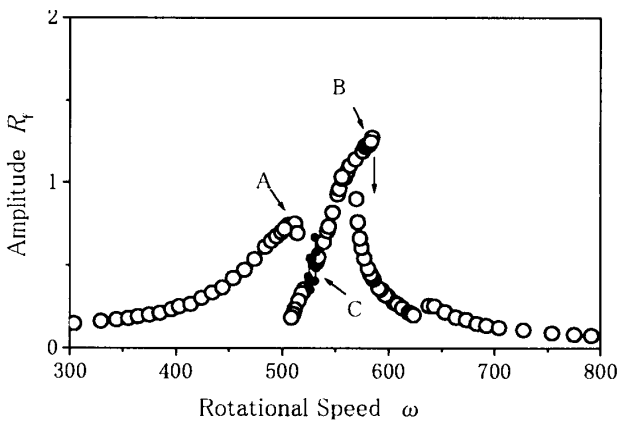


Fig. 10 Experimental setup

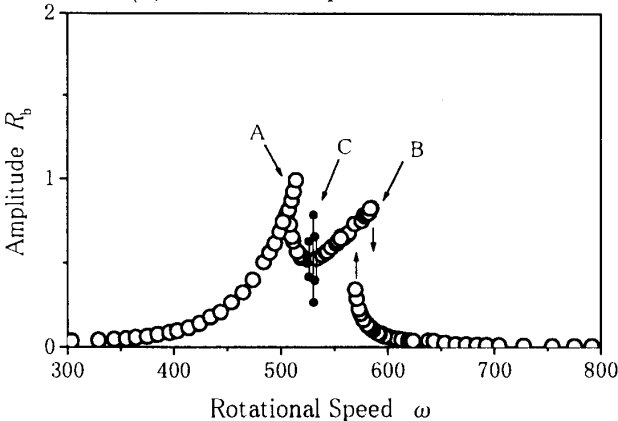
さ  $h_d = 9.6\text{mm}$  に削った偏平軸である ( $l_1 = 140\text{mm}$ ,  $l_2 = 438\text{mm}$ ). この軸に直径 260mm, 厚さ 10mm の円板を取り付けた. この回転体の位置が軸中央から離れるほど, 系に働くジャイロモーメントの大きさが大きくなる. この効果は, 理論解析における  $i_p$  の大きさの効果と対応する. 本実験では, ジャイロモーメントがある程度作用するように回転体を  $a : b = 1 : 3$  の位置に取り付けた.

5.2 実験結果 以下に 2 つの危険速度付近の結果を示すが, それらの組立状態は異なっている.

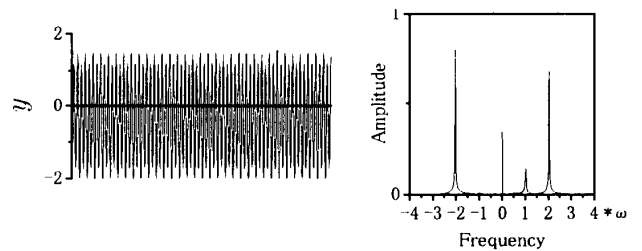
5.2.1 二次の危険速度付近 図 11(a) に前向き超調波振動成分  $R_f$ , 図 11(b) に後向き超調波振動成分  $R_b$  の共振曲線を示す. この場合には理論解析の, 図 4 に示した  $i_p = 0.5$  の場合と, ピークの数, その大小関係, 概周期運動の発生位置などについて定性的に似た結果が得られた. この実験結果はつぎの特徴をもつ. (1) 低速側と高速側にそれぞれ  $\pm 2\omega$  成分が共存する共振現象が発生した. 点 A, B における時刻歴と FFT 解析結果を図 11(c), (d) に示す. (2) この高速側のピーク上に, 概周期運動が発生した. 点 C の時刻歴



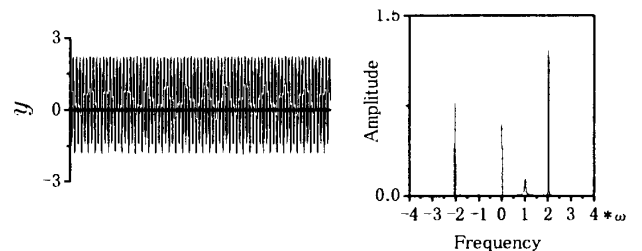
(a) Forward component  $+2\omega$



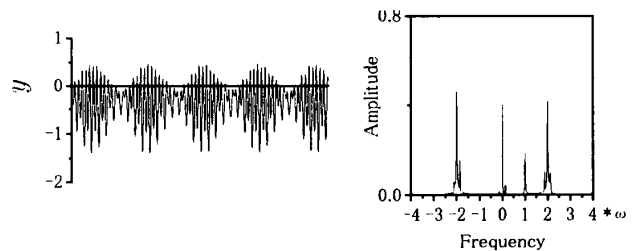
(b) Backward component  $-2\omega$



(c) point A ( $\omega = 510\text{ rpm}$ )



(d) point B ( $\omega = 582\text{ rpm}$ )

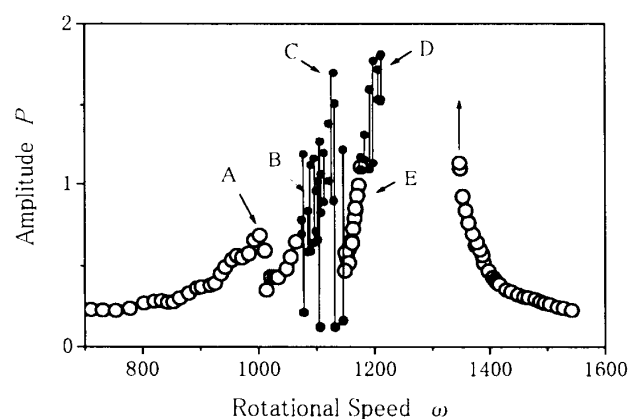


(e) point C ( $\omega = 528\text{ rpm}$ )

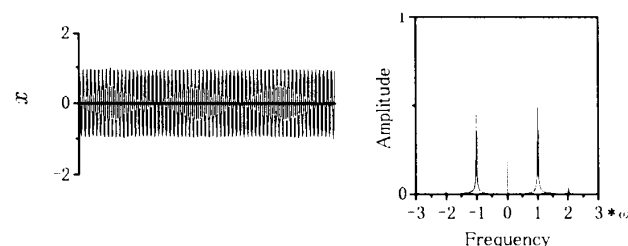
Fig. 11 Experimental results(Secondary critical speed)

と FFT 解析結果を図 11(e) に示す。

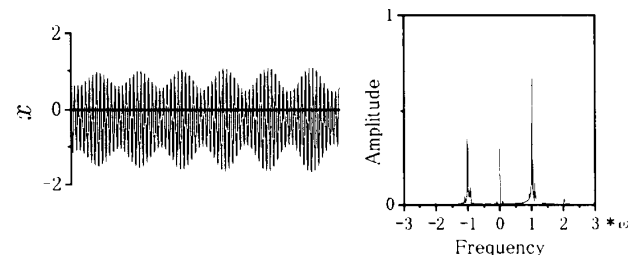
**5.2.2 主危険速度付近** 図 12(a) に前向き調和振動成分  $P$  の共振曲線を示す。この場合には理論解析の図 9 に示した  $i_p = 0.3$  の場合と、ピークの数、その大小関係、概周期運動の発生位置などについて定性的に似た結果が得られた。この実験結果はつぎの特徴をもつ。(1) 低速側と高速側にそれぞれ  $\pm\omega$  成分が共存する共振現象が発生した。点 A, C における時刻歴と FFT 解析結果を図 12(b),(f) に示す。(2)  $\omega \simeq 1070 \sim 1150$  rpm の範囲で振幅変動の大きな概周期運動と小さな概周期運動が、また、 $\omega \simeq 1180 \sim 1210$  rpm の範囲で概周期運動が発生している。これらの概周期運動を図 9 の解析結果と明確に対応させることは難しいが、理論解析で予想した複数種類の概周期運動が観察されたという点では同様である。各概周期運動の点 B, C, D の時刻歴と FFT 解析結果を図 12(c),(d),(e) に示す。



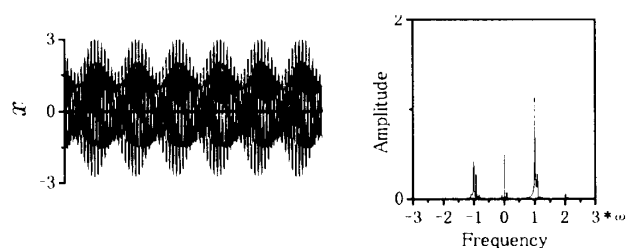
(a) Resonance curves  $+\omega$



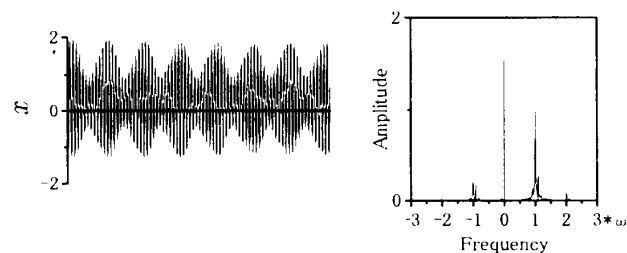
(b) point A ( $\omega = 993$  rpm)



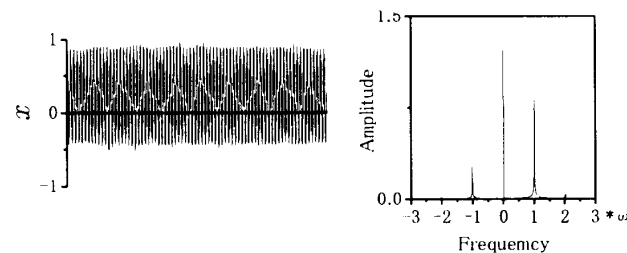
(c) point B ( $\omega = 1083$  rpm)



(d) point C ( $\omega = 1135$  rpm)



(e) point D ( $\omega = 1195$  rpm)



(f) point E ( $\omega = 1171$  rpm)

Fig. 12 Experimental results(Major critical speed)

## 6. 結 論

非線形ばね特性をもち、重力の作用を受ける水平偏平軸系に対する内部共振の影響について調べた結果、以下の結論が得られた。

### 6.1 二次的危険速度付近

- (1) 前向き超調波振動成分  $+2\omega$  と後向き超調波振動成分  $-2\omega$  が同時に発生する。また、その共振曲線は、複数のピークを持つ。
- (2) 共振点がある程度近接したとき、複数種類の概周期運動が発生する。
- (3) 概周期運動には、超調波振動の共振曲線からホップ分岐により発生したものと、その共振曲線とは独立に発生したのものがある。
- (4) 理論解析で得られた上記の結果を実験によって確認した。

### 6.2 主危険速度付近

- (1) 前向き調和型振動成分  $+\omega$  と後向き調和型振動成分  $-\omega$  が同時に発生する。

- (2) 共振点がある程度近接したとき、内部共振により複数種類の概周期運動が発生する。  
(3) 理論解析で得られた上記の結果を実験によって確認した。

### 文 献

- (1) 石田・ほか3名, 機論 C, 67-657(2001), 1338-1345  
(2) Sethna, P. R., Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics, 27-1(1960), 187-195.  
(3) Nayfeh, A. H., Balachandran, B., Applied Mechanics Review vol.42, no.11 Part2,(1989), 175-201.  
(4) 石田・井上, 機論 C, 63-606(1997), 321-327.  
(5) 石田・ほか2名, 機論 C, 63-614(1997), 3335-3342.  
(6) 井上・ほか2名, 機論 C, 66-642(2000), 370-377.  
(7) Den Hartog, J.P., Mechanical Vibrations, (1956), 336, McGraw-Hill.  
(8) 石田・ほか2名, 機論 C, 66-646(2000), 1769-1776.
-