

重力と非線形ばね特性の作用を受ける偏平軸の振動*

(調和型振動と超和差型振動)

石田 幸 男^{*1}, 井 上 剛 志^{*1}
劉 軍^{*2}, 鈴 木 昭 宏^{*3}

Vibration of an Asymmetrical Shaft with Gravity and Nonlinear Spring Characteristics (Vibrations of Harmonic and Super-Combination Types)

Yukio ISHIDA^{*4}, Tsuyoshi INOUE,
Jun LIU and Akihiro SUZUKI

^{*4} Department of Electronic-Mechanical Engineering, Nagoya University,
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya-shi, Aichi, 464-8603 Japan

When an asymmetrical shaft is supported by single-row deep groove ball bearings, nonlinear spring characteristics appear due to clearance of bearings and the stiffness of support at the shaft end differs depending on the direction because the equilibrium position of the shaft center line shifts from the center of the clearance due to gravity and misalignment of assembly. Due to the coexistence of the rotating difference in shaft stiffness, the static difference in stiffness at bearing support and the nonlinear spring characteristics, various kinds of nonlinear parametric resonance and nonlinear forced resonance occur. In this paper, we studied vibrations of harmonic type and super-combination type. As a result, we clarified the following phenomena, such as, division of unstable range, convergence of an unstable vibration to a limit cycle, resonance curve of a hard spring type, and coexistence of a forward and a backward frequency components.

Key Words: Vibration of Rotating Body, Asymmetrical Shaft, Gravity, Nonlinear Vibration, Parametric Excitation, Harmonic Vibration, Super-Combination Vibration

1. ま え が き

回転機械には、発電機ロータなどのように、軸断面が円形ではない偏平軸を水平に支持しているものがある。線形ばね特性を持つ場合については、(1) 主危険速度付近で不安定振動が発生すること⁽¹⁾、(2) 重力が作用する水平軸では、主危険速度の約半分の回転速度付近で2倍周波数振動の共振現象が発生すること⁽²⁾が古くから知られている。また、著者の一人は、非線形ばね特性を持つ場合について、鉛直軸において発生する各種の非線形強制振動を報告した⁽³⁾⁻⁽⁶⁾。

一方、Footeら⁽⁷⁾、Messal-Bonthron⁽⁸⁾、沖島・近藤⁽⁹⁾、太田ら⁽¹⁰⁾、岩壺ら⁽¹¹⁾、小寺ら⁽¹²⁾、池田ら⁽¹³⁾は、軸受台のたわみ剛性に方向差がある偏平軸系の特性を線形系について調べている。このうちの一部の論文では、主危険速度付近の不安定領域が、いくつかに分かれることを明らかにした。

本研究では、偏平軸を玉軸受で水平に支持した系の

振動現象を理論的に解析し、実験により確認した。このような系では、軸の偏平性、軸受のクリアランスによる非線形性、さらに重力や組立誤差とクリアランスの共存に起因する軸端支持の方向差の共存によって、様々な現象が現れることが予想される。なお、この系では、軸受台自体は剛であり、軸端の境界条件として方向差が作られている。したがって、上記の多くの研究で扱われているたわみ軸受台の場合とは係数励振項の形が異なり、また、軸受台の質量と変位を考慮しないため、運動方程式の自由度も増えない。

本論文では、ジャイロモーメントが作用するため、前向き固有振動数 p_f と後向き固有振動数 p_b が、回転速度 ω に依存して比較的大きく変化する場合を考える。その系で発生する調和型振動と、 $p_f - p_b = 2\omega$ 様式の超和差型振動について調べる。

2. 運 動 方 程 式

図1(a)は、弾性偏平軸に1個の回転体を取り付けられた水平回転軸系を示している。鉛直軸で線形系の場合に対する運動方程式は、すでに山本・太田⁽¹⁴⁾によって導かれており、またその固有振動数 p_i 、

* 原稿受付 2000年5月22日。

^{*1} 正員, 名古屋大学大学院工学研究科(☎464-8603 名古屋市千種区不老町)。

^{*2} 正員, 名古屋大学大学院。

^{*3} 名古屋大学大学院。

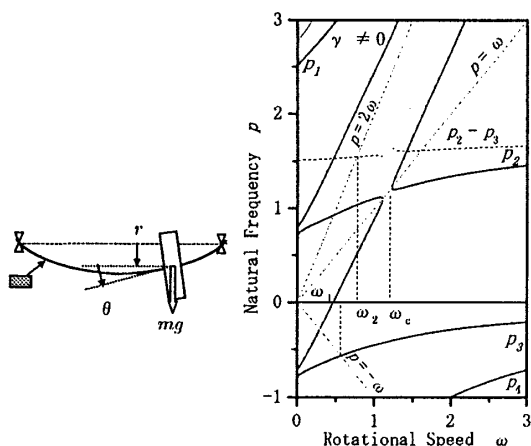
E-mail: ishida@ishidalab.nuem.nagoya-u.ac.jp

$\bar{p}_i = 2\omega - p_i$ ($i = 1 \sim 4$) の回転速度 ω に対する変化は図 1(b) で与えられている。なお、この図は後述の式 (2) で無次元化した後の図である。水平支持された場合の運動方程式は、それに重力 mg の作用を加え、次のように表される。

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} + \bar{\alpha}x + \bar{\gamma}\theta_x - \Delta\bar{\alpha}(x \cos 2\omega t + y \sin 2\omega t) \\
 - \Delta\bar{\gamma}(\theta_x \cos 2\omega t + \theta_y \sin 2\omega t) &= mew^2 \cos(\omega t + \xi_\gamma) \\
 m\ddot{y} + \bar{\alpha}y + \bar{\gamma}\theta_y - \Delta\bar{\alpha}(x \sin 2\omega t - y \cos 2\omega t) \\
 - \Delta\bar{\gamma}(\theta_x \sin 2\omega t - \theta_y \cos 2\omega t) &= mew^2 \sin(\omega t + \xi_\gamma) - mg \\
 I\ddot{\theta}_x + i_p\omega\dot{\theta}_y + \bar{\gamma}x + \bar{\delta}\theta_x - \Delta\bar{\gamma}(x \cos 2\omega t + y \sin 2\omega t) \\
 - \Delta\bar{\delta}(\theta_x \cos 2\omega t + \theta_y \sin 2\omega t) &= (I_p - I)\tau\omega^2 \cos(\omega t + \xi_\theta) \\
 I\ddot{\theta}_y - i_p\omega\dot{\theta}_x + \bar{\gamma}y + \bar{\delta}\theta_y - \Delta\bar{\gamma}(x \sin 2\omega t - y \cos 2\omega t) \\
 - \Delta\bar{\delta}(\theta_x \sin 2\omega t - \theta_y \cos 2\omega t) &= (I_p - I)\tau\omega^2 \sin(\omega t + \xi_\theta)
 \end{aligned} \tag{1}$$

ここに、 $r(x, y)$, $\theta(\theta_x, \theta_y)$ は回転体の変位と傾き、 m , I_p , I は回転体の質量、極慣性モーメント、直径に関する慣性モーメント、 $\bar{\alpha}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{\delta}$ と $\Delta\bar{\alpha}$, $\Delta\bar{\gamma}$, $\Delta\bar{\delta}$ はばね定数とその方向差、 e と τ は静不つりあいと動不つりあい、 ξ_γ , ξ_θ はそれらの角位置を表す。

図 1 の軸端を玉軸受で支持すると、軸受のクリアランスが原因で非線形ばね特性が現れ、また重力による静たわみにより軸中心線がクリアランスの中央からずれ、軸端の支持剛性に方向差を生じる。なお、この方向差は、組立誤差によって軸受台が傾くことによっても生じる。このような非線形系では、様々な非線形強制振動及び係数励振振動が発生する。たとえば、図 1(b) において、 $p_2 = \omega$ となる ω_c 付近では調和型振動、 $p_3 = -\omega$ となる ω_1 付近では後向きふれまわり様式の調和型振動、 $p_2 - p_3 = 2\omega$ となる ω_2 付近では超



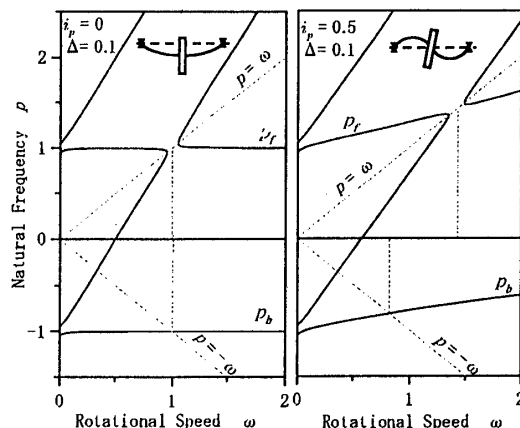
(a) Model (b) Natural frequencies

Fig. 1 4DOF rotor model

和差型振動が発生する。このようにジャイロモーメントが作用する系では、これらの振動は単独の共振現象として発生する。

この 4 自由度系の方程式で、非線形ばね特性を考慮して解析を行うときわめて複雑になる。そこで簡単のため、回転体が軸の中央についているときに得られる 2 自由度系を用いて解析する。回転体が中央にあるときは弾性復元力の連成項が 0 となるので、上式で $\bar{\gamma} = \Delta\bar{\gamma} = 0$ とおくと、第 1, 2 式はたわみ振動、第 3, 4 式は傾き振動を支配する互いに独立な 2 自由度系の式となる。後者にのみジャイロモーメントを表す回転儀項 (第 3, 4 式の第 2 項) が入っており、したがって、それらを無次元化 (後述の式 (2)) した系の固有振動数 p_f , p_b は、図 2 のように、前者では一定、後者では回転速度の関数として変化する。

上述の 3 つの振動を 2 自由度系で解析する場合、図 2(a) に示すたわみ振動系では $p_f = -p_b (= \text{一定})$ の関係があるため、それらが同じ回転速度領域で同時に発生する。非線形系では、このような共振点の一致がある場合、それらの共振は内部共振現象により互いに影響を受け、単一共振の場合とは著しく異なる現象が現



(a) Deflection model (b) Inclination model

Fig. 2 Natural frequency diagrams of 2DOF analytical model

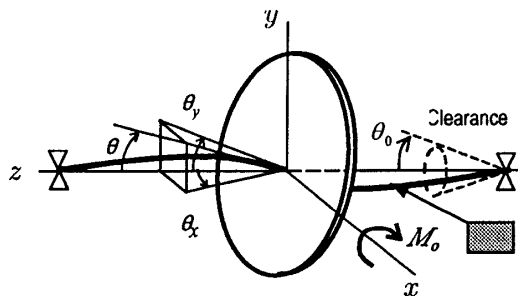


Fig. 3 2DOF Theoretical model (inclination)

れることが知られている⁽¹⁵⁾。したがって、単一共振として現れる4自由度系の現象を、この2自由度たわみ振動系で解析することはできない。

そこで本研究では、ジャイロモーメントが作用する2自由度傾き振動系(図2(b)参照)を用いて解析する。式(1)の重力 mg は、非連成系の場合、たわみ振動系だけに現れ、傾き振動系には作用しない。そこで4自由度系における、重力によって生じる軸中心線のずれと同じ効果を考慮するため、図3のように一定のモーメント M_0 を2自由度傾き振動系に作用させる。このモデルでは軸端が角度 θ_0 の範囲のクリアランスをもつ軸受で支持されているものとする。このモーメント M_0 によって軸中心線の平衡位置がクリアランスの中心からずれ、非対称非線形性と剛性の方向差が生じる。

静たわみ $e_{st} = mg/\bar{\alpha}$ を用いて無次元量

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= x/e_{st}, \quad \dot{y} = y/e_{st}, \quad \dot{\theta}_x = \theta_x \sqrt{I/m}/e_{st} \\ \dot{\theta}_x &= \theta_x \sqrt{I/m}/e_{st}, \quad i_p = I_p/I, \quad \dot{t} = t\sqrt{\bar{\alpha}/m} \\ \dot{\omega} &= \omega \sqrt{\bar{\alpha}/m}, \quad \dot{\gamma} = \bar{\gamma} \sqrt{m/I/\bar{\alpha}}, \quad \dot{\delta} = m\bar{\delta}/(\bar{\alpha}I) \\ \dot{e} &= e/e_{st}, \quad \dot{r} = r \sqrt{I/m}/e_{st} \\ \Delta &= \Delta \bar{\alpha}/\bar{\alpha} = \Delta \bar{\gamma}/\bar{\gamma} = \Delta \bar{\delta}/\bar{\delta} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

を定義し、式(1)を無次元化する。なお、表現の簡化のため以下では無次元量を表す記号'を省略する。無次元化した式の第3, 4式で $\gamma = \Delta\gamma = 0$ とおいた式に減衰係数 c 、非線形項 N_{θ_x} 、 N_{θ_y} 、モーメント μ (図3の M_0 に対応する無次元量)を追加すると、つぎの運動方程式が得られる。ここで、 $F = (1 - i_p)\tau\omega^2$ である。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta}_x + i_p\omega\dot{\theta}_y + c\dot{\theta}_x + \theta_x - \Delta(\theta_x \cos 2\omega t + \theta_y \sin 2\omega t) \\ + N_{\theta_x} &= F \cos(\omega t + \xi_\theta) \\ \ddot{\theta}_y - i_p\omega\dot{\theta}_x + c\dot{\theta}_y + \theta_y - \Delta(\theta_x \sin 2\omega t - \theta_y \cos 2\omega t) \\ + N_{\theta_y} &= F \sin(\omega t + \xi_\theta) - \mu \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ポテンシャルエネルギー V を、変換式 $\theta_x = \theta \cos \phi$ 、 $\theta_y = \theta \sin \phi$ によって与えられる極座標 θ, ϕ を用いて表す⁽⁵⁾。実際の系で強く現れる成分のみを考慮すると、 V はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} V &= V_0 + V_N \\ &= \frac{1}{2}\theta^2 + (\epsilon_c^{(1)} \cos \phi + \epsilon_s^{(1)} \sin \phi)\theta^3 + \beta^{(0)}\theta^4 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで、上付の()中の数字は、 θ を一定に保ちながら方向角 ϕ を0から 2π まで変化させたときに、そのポテンシャルエネルギーが変化する回数を表す。そして、 $\beta^{(0)}$ と $\epsilon_s^{(1)}$ 、 $\epsilon_c^{(1)}$ の項をそれぞれ $N(0)$ 成分、 $N(1)$ 成分とよぶ。これに対応して、 N_{θ_x} 、 N_{θ_y} は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} N_{\theta_x} &= \epsilon_c^{(1)}(3\theta_x^2 + \theta_y^2) + 2\epsilon_s^{(1)}\theta_x\theta_y \\ &\quad + 4\beta^{(0)}\theta_x(\theta_x^2 + \theta_y^2) \\ N_{\theta_y} &= \epsilon_s^{(1)}(\theta_x^2 + 3\theta_y^2) + 2\epsilon_c^{(1)}\theta_x\theta_y \\ &\quad + 4\beta^{(0)}\theta_y(\theta_x^2 + \theta_y^2) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで、 $\epsilon_s^{(1)}$ と $\epsilon_c^{(1)}$ は非対称非線形ばね特性、 $\beta^{(0)}$ は対称非線形ばね特性の大きさを表す。

3. 数値シミュレーション

式(3)を用いた数値計算により、主危険速度付近およびその低速度側で発生する振動を調べる。その結果得られた共振曲線とスペクトルを図4に示す。図4(a)は動不つりあいが存在する場合、図4(b)は動不つりあいが存在しない場合である。なお、スペクトルで、+は前向きふれ回り振動、-は後向きふれ回り振動の成分を表す。この共振曲線はつぎの特徴をもつ。(1)点Aと点C付近で調和型振動が現れ、その共振曲線は非線形ばね特性のため漸硬形となる。(2)点C付近のピークは大きく、また、前向きふれ回り成分が優勢である。一方、点A付近のピークは小さく、後向きふれ回り成分が優勢である。(3)点B付近で、分岐により $p_f - p_b = 2\omega$ 様式の超和差型振動が発生する。(4)振動数 2ω のピークが2本存在する。

4. 固有値解析

静止平衡点付近の微小振動を考慮して、固有振動数線図を求める。式(3)で $r = 0, c = 0$ とおくと、運動方程式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta}_x + i_p\omega\dot{\theta}_y + \theta_x - \Delta(\theta_x \cos 2\omega t + \theta_y \sin 2\omega t) \\ + N_{\theta_x} &= 0 \\ \ddot{\theta}_y - i_p\omega\dot{\theta}_x + \theta_y - \Delta(\theta_x \sin 2\omega t - \theta_y \cos 2\omega t) \\ + N_{\theta_y} &= -\mu \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

図5に示すように、つぎの変換式により、重力が作用したときの非回転時における軸の平衡位置に、座標原点を移動する。

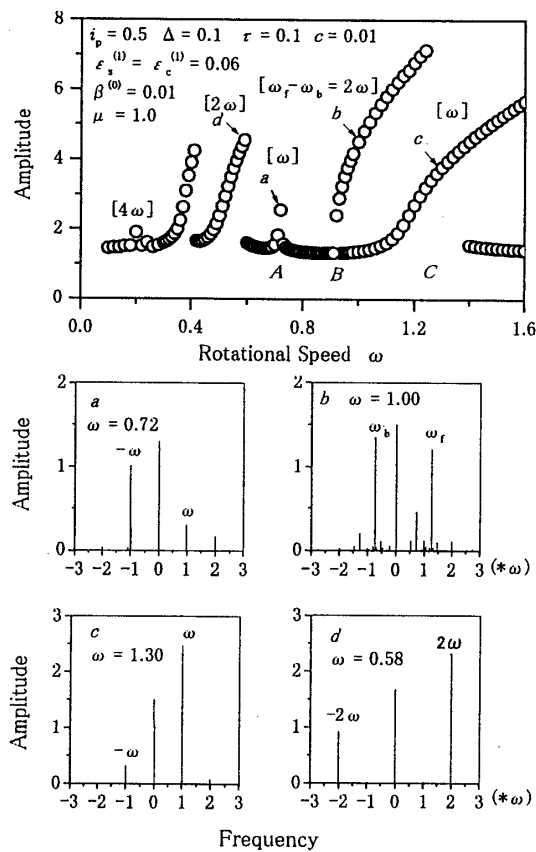
$$\theta_x = \theta'_x, \quad \theta_y = \theta'_y - \mu \quad (7)$$

式(7)を式(6)に代入し、線形化すると次式を得る。

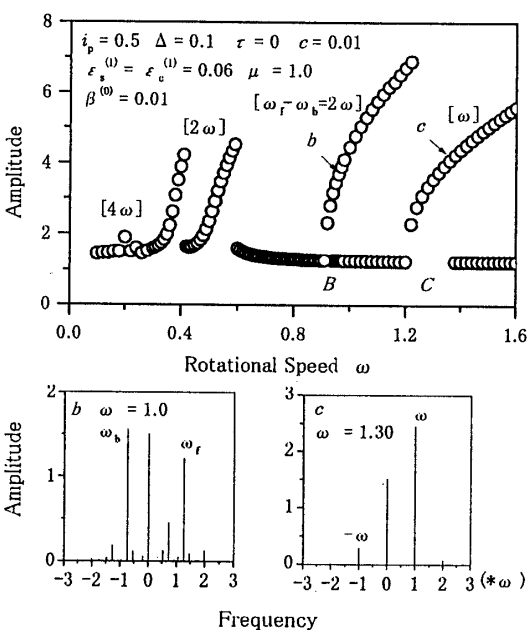
$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta}'_x + i_p\omega\dot{\theta}'_y - \Delta(\theta'_x \cos 2\omega t + \theta'_y \sin 2\omega t) \\ + \Delta\mu \sin 2\omega t + (1 + 2k)\theta'_x - k\theta'_y - \eta\dot{\theta}'_y &= 0 \\ \ddot{\theta}'_y - i_p\omega\dot{\theta}'_x - \Delta(\theta'_x \sin 2\omega t - \theta'_y \cos 2\omega t) \\ - \Delta\mu \cos 2\omega t + (1 + 2k)\theta'_y + k\theta'_x - \eta\dot{\theta}'_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここで、 $k = 4\mu^2\beta^{(0)} - 2\mu\epsilon_s^{(1)}$ 、 $\eta = 2\mu\epsilon_c^{(1)}$ である。複素変数 $z = \theta'_x + i\theta'_y$ を用いると、式(8)はつぎのようになる。

$$\ddot{z} - i \cdot i_p\omega\dot{z} + (1 + 2k)z - k\bar{z} - \Delta\bar{z}e^{i \cdot 2\omega t} - i \cdot \eta\bar{z} = 0 \quad (9)$$



(a) With unbalance ($\tau \neq 0$)



(b) Without unbalance ($\tau = 0$)

Fig. 4 Numerical Simulation

式(9)の系では、偏平性 Δ と静止した剛性の方
向差 k が共存する。したがって、固有振動数 p
でふれ回る振動成分が存在すると、偏平性 Δ
を通じて $2\omega - p$,

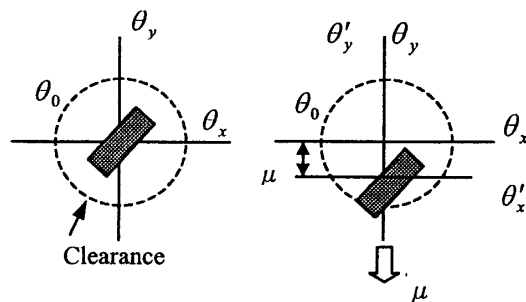


Fig. 5 Shift of static equilibrium position due to constant moment

Table 1 Derivation of vibration components

		Δ			
	(0) p	(1) $2\omega - p$	(2) p	(3) $2\omega - p$	
	(1) $-p$	(2) $-2\omega + p$ $2\omega + p$	(3) $-p$ $4\omega - p$	(4) \dots	
k	(2) p	(3) $2\omega - p$ $-2\omega - p$	(4) \dots	(5) \dots	
	(3) $-p$	(4) \dots	(5) \dots	(6) \dots	

方向差の k を通じて $-p$ の成分が現れる。ここで、偏平性 Δ と方向差 k は、いずれも $O(\epsilon)$ の大きさであると仮定する。このような派生する振動数成分を順次考えると、表1のようになる。なお、たとえば表1中の(2)は派生する項が $O(\epsilon^2)$ の大きさであることを示す。

表1を参照して、解を $O(\epsilon^3)$ の精度で考えると、つぎのようになる。

$$\begin{aligned}
 Z = & R e^{i \cdot p t} + a_1 e^{i \cdot (2\omega - p)t} + b_1 e^{-i \cdot p t} + a_2 e^{-i \cdot (2\omega - p)t} \\
 & + b_2 e^{i \cdot (2\omega + p)t} + c_3 e^{-i \cdot (2\omega + p)t} + a_3 e^{i \cdot (4\omega - p)t} \quad (10)
 \end{aligned}$$

式(10)を式(9)に代入し、それぞれの振動数について係数を比較する。得られた式の係数行列式を0とおくことにより、つぎの振動数方程式が得られる。

$$\begin{vmatrix}
 G_1 & & & & & & \\
 0 & G_1 & & & & & \\
 -\Delta & 0 & G_2 & & & & \\
 0 & \Delta & 0 & G_2 & & & \text{sym.} \\
 -k & -\eta & 0 & 0 & 0 & G_3 & \\
 -\eta & k & 0 & 0 & 0 & 0 & G_3 \\
 0 & 0 & -k & -\eta & 0 & 0 & 0 & G_4 \\
 0 & 0 & -\eta & k & 0 & 0 & 0 & 0 & G_4 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\Delta & 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta & 0 & 0 & 0 & G_5
 \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

ここで、 $G(p) = 1 + i_p \omega p - p^2$, $G_1 = G(p) + 2k$, $G_2 = G(2\omega - p) + 2k$, $G_3 = G(-p) + 2k$, $G_4 = G(-2\omega + p) + 2k$, $G_5 = G(2\omega + p) + 2k$, $G_6 = G(-2\omega - p)$, $G_7 = G(4\omega - p)$ の記号を用いた。式(11)の $G_6 = 0, G_7 = 0$

から得られる振動数 p は $O(\epsilon^3)$ の大きさであり、また、不安定領域は現れない。式 (11) の行列式の部分から、図 6 の固有振動数線図を得る。なお、説明の便宜上 $i_p = 0.2$ の値を用いた。また、以下の説明において、記号 $O(\epsilon)$ は ϵ と同程度の大きさであることを示す。

表 1 を参照すると、図 6 はつぎの特徴をもつ。なお、式 (6) を $O(\epsilon^0)$ 精度で考えて求めた振動数を $p_f > 0, p_b < 0$ で表す。(1) 剛性の方向差 k により、 p_f, p_b に加えて $-p_f, -p_b$ の振動数成分が $O(\epsilon)$ 精度で現れる。(2) 偏平性 Δ により $2\omega - p_f, 2\omega - p_b$ の成分が $O(\epsilon)$ 精度で現れる。(3) 方向差 k と偏平性 Δ により $2\omega + p_f, 2\omega + p_b, -2\omega + p_f, -2\omega + p_b$ が $O(\epsilon^2)$ 精度で現れる。(4) その他に $O(\epsilon^3)$ 以上の精度で現れる振動数成分もあるが、それに関してはここでは省略する。(5) 曲線 $2\omega - p_f, 2\omega + p_b$ と曲線 p_f, p_b の交点付近で振動数 p が複素数となり、3つの不安定領域 A, B, C が現れる。(6) 不安定領域 A, B, C は、シミュレーションによる共振曲線の図 4 の領域 A, B, C に対応している。(7) 不安定領域 A, C における複素固有値の実部は $\pm\omega$ である。(8) 不安定領域 B における複素固有値の実部 ω_f, ω_b には $\omega_f - \omega_b = 2\omega$ の関係がある。(9) 成分 p_f の曲線と Δ を介して派生する成分 $2\omega - p_f$ の交点 C の不安定領域は、 k を介して派生する成分 $-p_b$ の曲線と Δ と k を介して派生する成分 $2\omega + p_b$ の交点 A の不安定領域よりかなり広い。なお、パラメータ i_p の値が大きくなると、不安定領域 B は非常に狭くなることも明らかになった。

5. 調和型振動の解析

5.1 基礎式の誘導 図 4 と図 6 の C 点および A

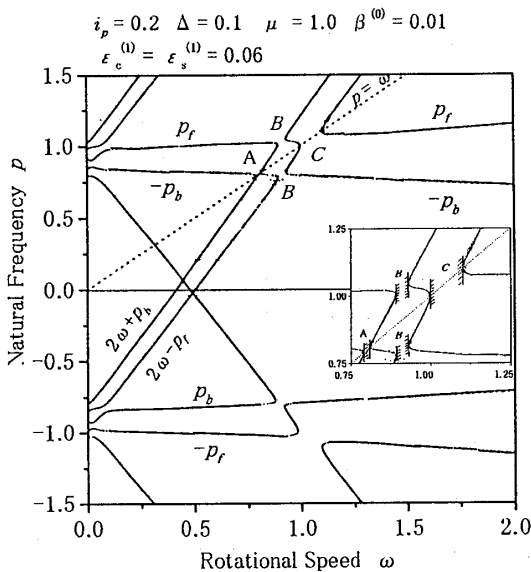


Fig. 6 Natural frequency diagram

点付近で発生する調和型振動を考える。図 4 の $\omega = 1.3$ と $\omega = 0.72$ における振動スペクトルでは、振動数 0 の成分、 $\pm\omega$ の成分が明確に現れている。したがって、 A 点と C 点で発生する前向きと後向きの振動成分 ω の大きさをいずれも $O(\epsilon^0)$ の大きさと考え、解をつぎのように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= P \cos(\omega t + \beta) + R \cos(-\omega t + \delta) + A_x \\ \theta_y &= P \sin(\omega t + \beta) + R \sin(-\omega t + \delta) + A_y \end{aligned} \right\} (12)$$

式 (12) を式 (3) に代入し、振動数 ω と振動数 0 の項について両辺の係数を $O(\epsilon)$ の精度で等置すると、振幅 P, R と位相角 β, δ 、振動数 0 の項 A_x, A_y に関する次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} b_f \dot{P} &= 2F \sin(\xi_\theta - \beta) - 2Pc\omega - 2P\Delta \sin(2\beta) \\ &\quad + (N_{\theta x1c} + N_{\theta y1s}) \sin \beta + (N_{\theta x1s} - N_{\theta y1c}) \cos \beta \\ b_b \dot{R} &= 2c\omega R + (N_{\theta x1c} - N_{\theta y1s}) \sin \delta \\ &\quad - (N_{\theta x1s} + N_{\theta y1c}) \cos \delta \\ b_f P \dot{\beta} &= 2P G(\omega) - 2P\Delta \cos(2\beta) \\ &\quad + (N_{\theta y1c} - N_{\theta x1s}) \sin \beta + (N_{\theta x1c} + N_{\theta y1s}) \cos \beta \\ &\quad - 2F \cos(\xi_\theta - \beta) \\ b_b R \dot{\delta} &= 2R G(-\omega) + (N_{\theta x1s} + N_{\theta y1c}) \sin \delta \\ &\quad + (N_{\theta x1c} - N_{\theta y1s}) \cos \delta \\ i_p \omega \dot{A}_y &= -A_x - N_{\theta xa} \\ i_p \omega \dot{A}_x &= \mu + A_y + N_{\theta ya} \end{aligned} \right\} (13)$$

ここで、 $b_f = 2\omega(2 - i_p)$ 、 $b_b = -2\omega(2 + i_p)$ であり、 $N_{\theta x1c}, \dots, N_{\theta ya}$ は、非線形項 $N_{\theta x}, N_{\theta y}$ から現れる非線形成分を表す。たとえば、式 (13) の具体的な形は $(N_{\theta x1c} + N_{\theta y1s}) \sin \beta + (N_{\theta x1s} - N_{\theta y1c}) \cos \beta = 4R(2(\sin(\beta + \delta)A_x^2 - 2\cos(\beta + \delta)A_x A_y - \sin(\beta + \delta)A_y^2)\beta^{(0)} + (\sin(\beta + \delta)A_x - \cos(\beta + \delta)A_y)\epsilon_c^{(1)} - (\cos(\beta + \delta)A_x + \sin(\beta + \delta)A_y)\epsilon_s^{(1)})$ である。係数 $\beta^{(0)}$ と $\epsilon_c^{(1)}$ 、 $\epsilon_s^{(1)}$ が含まれていることから、非線形成分 $N(0)$ 、 $N(1)$ が関与しているがわかる。 $G(\omega), G(-\omega)$ は、前節で用いた $G(p)$ と同じ関数である。式 (13) で、左辺の時間微分を 0 とおくことにより定常解が求まる。解の安定性は Routh-Hurwitz の安定判別法を適用して調べる。

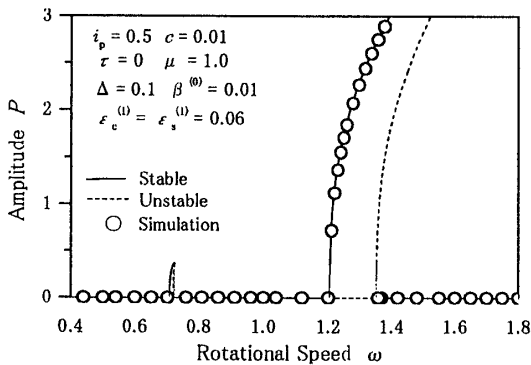
調和型振動成分 P の共振曲線を図 7 に示す。実線は安定解、破線は不安定解である。また、○ はアダムス法による数値シミュレーションの結果を示す。

5.2 共振曲線とその特徴 理論解析と数値シミュレーションの結果はよく一致している。これらの共振曲線は以下の特徴をもつ。(1) 動不つりあいがない図 7(a) の場合、 $\omega = 1.3$ と $\omega = 0.7$ 付近で振幅 0 の状態が不安定になっている。これは図 6 の固有振動数線図で不安定領域が発生する範囲 C と A に対応している。

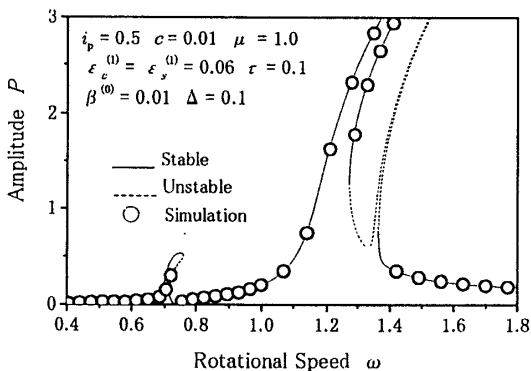
(2) 線形系ならば A, C 付近で係数励振作用による不安定領域が見れるが、この場合は非線形ばね特性のために不安定振動がリミットサイクルに収束し、振幅が一定値に収まっている。(3) 図 7(a) の A 点付近では、調和振動の振幅 P は小さい、これは図 6 から分かるように、この A 点付近の不安定領域が固有振動数 p_b に関連するものであるためであり、後向き成分の振幅 R の共振曲線を描くと大きく現れる。(4) 動不つりあいがある場合の図 7(b) では、共振曲線は振幅 0 の解から分岐していない、また、有限振幅の定常解は、回転速度に対して最大 5 個存在する。これは係数励振振動だけでなく、強制振動としての応答の寄与が加わったためである。

6. 超和差型振動の解析

6.1 基礎式の誘導 図 4 の点 B 付近で発生した $p_f - p_b = 2\omega$ 様式の超和差型振動を解析する。図 4 の $\omega = 1.00$ におけるスペクトルから、振動数 ω , $\omega_f (\cong p_f)$, $\omega_b (\cong p_b)$, $-\omega_f (\cong -p_f)$, $-\omega_b (\cong -p_b)$ の成分と振動数 0 の成分が大きき $O(\epsilon^0)$ で存在することが分かる。したがって、解を $O(\epsilon^0)$ 精度で次のように仮定する。



(a) Without unbalance ($\tau = 0$)



(b) With unbalance ($\tau \neq 0$)

Fig. 7 Resonance curves (Harmonic Type Vibration)

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= P \cos(\omega t + \beta) + R_f \cos(\omega_f t + \delta_f) \\ &\quad + Q_f \cos(-\omega_f t + \delta_{f1}) + R_b \cos(\omega_b t + \delta_b) \\ &\quad + Q_b \cos(-\omega_b t + \delta_{b1}) + A_x \\ \theta_y &= P \sin(\omega t + \beta) + R_f \sin(\omega_f t + \delta_f) \\ &\quad + Q_f \sin(-\omega_f t + \delta_{f1}) + R_b \sin(\omega_b t + \delta_b) \\ &\quad + Q_b \sin(-\omega_b t + \delta_{b1}) + A_y \end{aligned} \right\} (14)$$

振動数 $\omega, \omega_f, \omega_b$ と振動数 0 の項について両辺の係数を等置する。振動数 ω_f, ω_b については $O(\epsilon)$ 精度で計算するが、振動数 0 の項と振動数 ω の項については簡単のため $O(\epsilon^0)$ の精度で得られる次式 (15), (16) を用いることにする。

$$A_x = 0, A_y = -\mu \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} P &= (1 - i_p) \tau \omega^2 \sqrt{\left(\frac{\cos \xi_\theta}{G(\omega) - \Delta}\right)^2 + \left(\frac{\sin \xi_\theta}{G(\omega) + \Delta}\right)^2} \\ \tan \beta &= \left(\frac{G(\omega) - \Delta}{G(\omega) + \Delta}\right) \tan \xi_\theta \end{aligned} \right\} (16)$$

振動数 ω_f, ω_b は、回転速度に比例したつぎの値をとるとする。

$$\omega_f = \frac{\omega_{f0}}{\omega_0} \omega, \quad \omega_b = \frac{\omega_{b0}}{\omega_0} \omega \quad (17)$$

ここで、 ω_0 は $p_f - p_b = 2\omega$ が成立するときの回転速度、 ω_{f0}, ω_{b0} はそのときの固有振動数である。

係数比較の結果、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} r_f \dot{R}_f &= -2\Delta \sin(\delta_f + \delta_{b1}) Q_b - 2c\omega_f R_f \\ &\quad (N_{xfc} + N_{yfs}) \sin \delta_f + (N_{xfs} - N_{yfc}) \cos \delta_f \\ r_b \dot{R}_b &= -2c\omega_b \omega_b + (N_{xbc} + N_{ybs}) \sin \delta_b + \\ &\quad (N_{xbs} - N_{ybc}) \cos \delta_b \\ q_f \dot{Q}_f &= 2c\omega_f Q_f + (N_{xfc} - N_{yfs}) \sin \delta_{f1} - \\ &\quad (N_{xfs} + N_{yfc}) \cos \delta_{f1} \\ q_b \dot{Q}_b &= 2c\omega_b Q_b - 2\Delta R_f \sin(\delta_f + \delta_{b1}) + \\ &\quad (N_{xbc} - N_{ybs}) \sin \delta_{b1} - (N_{xbs} + N_{ybc}) \cos \delta_{b1} \\ r_f R_f \dot{\delta}_f &= 2R_f G(\omega_f) - 2\Delta Q_b \cos(\delta_f + \delta_{b1}) + \\ &\quad (N_{yfc} - N_{xfs}) \sin \delta_f + (N_{xfc} + N_{yfs}) \cos \delta_f \\ r_b R_b \dot{\delta}_b &= 2R_b G(\omega_b) + (N_{ybc} - N_{xbs}) \sin \delta_b + \\ &\quad (N_{xbc} + N_{ybs}) \cos \delta_b \\ q_f Q_f \dot{\delta}_{f1} &= 2Q_f G(-\omega_f) + (N_{xfs} + N_{yfc}) \sin \delta_{f1} + \\ &\quad (N_{xfc} - N_{yfs}) \cos \delta_{f1} \\ q_b Q_b \dot{\delta}_{b1} &= 2Q_b G(-\omega_b) - 2\Delta R_f \cos(\delta_f + \delta_{b1}) \\ &\quad + (N_{xbs} + N_{ybc}) \sin \delta_{b1} + (N_{xbc} - N_{ybs}) \cos \delta_{b1} \end{aligned} \right\} (18)$$

ここで、 $r_f = 2(2\omega_f - i_p\omega)$, $r_b = 2(2\omega_b - i_p\omega)$, $q_f = -2(2\omega_f + i_p\omega)$, $q_b = -2(2\omega_b + i_p\omega)$ である。 N_{xfc}, \dots, N_{ybs} は、非線形項 $N_{\theta x}, N_{\theta y}$ から発生する非線形成分を表す。その具体的な形は冗長であるため、

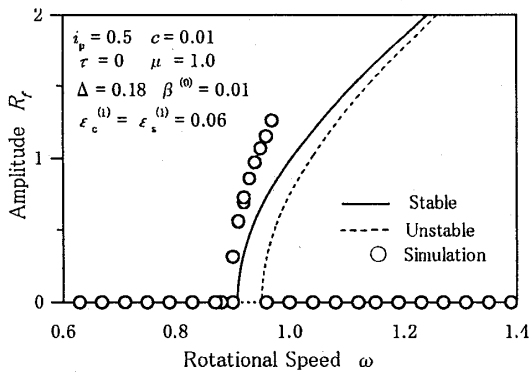
ここでは省略する。数値シミュレーションで得られた振動波形から、たとえば、発生振動数 $d(\omega_f t + \delta_f)/dt$ はこの値 ω_f とは異なっていることが分かる。すなわち、 δ_f は 0 とならない。また、式 (18) では、位相解については、 $\delta_f + \delta_{f1}, \delta_b + \delta_{b1}, -\delta_{b1} - \delta_f, \delta_b + \delta_{b1} - \delta_f - \delta_{f1}$ の形で右辺に含まれている。そこで、 $\psi = \delta_f - \delta_b, \phi = \delta_f + \delta_{f1}, \lambda = \delta_b + \delta_{b1}$ とおき、未知数 $R_f, R_b, Q_f, Q_b, \psi, \phi, \lambda$ について解く。

振幅 R_f の共振曲線を図 8 に示す。

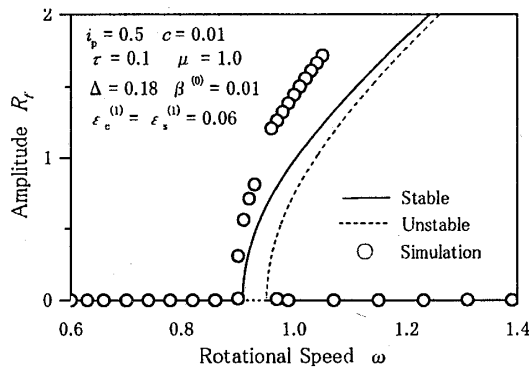
6.2 共振曲線とその特徴 超和差型振動は以下の特徴をもつ。(1) 図 6 の固有振動数線図の不安定領域 B に対応して、超和差型振動が発生する。(2) 振幅 0 以外の分枝の数は、動不つりあい τ の有無にかかわらず常に 2 つある。(3) 上記 (1) の共振曲線は $\tau \neq 0$ でも振幅 0 の解から分岐する。(4) この超和差型振動は、線形系では、不安定振動として発生する。すなわち、この振動の発生原因は軸の方向差 k と偏平性 Δ 相乗効果であり、非線形項 $N(0), N(1)$ は発生の有無には関係しない。

7. 実験

7.1 実験装置 実験装置の概要を図 9 に示す。



(a) Without unbalance ($\tau = 0$)



(b) With unbalance ($\tau \neq 0$)

Fig. 8 Resonance Curves (Super-Combination Type Vibration)

軸受中心間距離 $a + b = 700\text{mm}$ 、直径 $d = 12\text{mm}$ の軸 S が水平に支持されている。左端は単列深みぞ玉軸受 (#6204)、または複列自動調心玉軸受 (#1204)、右端は複列自動調心玉軸受 (#1200) により支持されている。軸は、図の l_1 部分 ($l_1 = 140\text{mm}, l_2 = 438\text{mm}$) を除いた部分を削り、厚さ h_d の偏平軸にした。この軸に直径 48mm 、厚さ 5.5mm の円板を取り付けた。系に働くジャイロモーメントの大きさは、円板が軸中央から離れる程大きくなる。この効果は、理論解析における i_p の大きさの効果と対応する。本研究では、次の 3 種類のロータ系を用いて実験を行った。

- 系 1: $h_d = 10.0\text{mm}$ $a : b = 1 : 3$ 左端 (#1204)
- 系 2: $h_d = 9.6\text{mm}$ $a : b = 1 : 2$ 左端 (#6204)
- 系 3: $h_d = 10.0\text{mm}$ $a : b = 1 : 3$ 左端 (#6204)

系 2, 3 の装置は、単列深みぞ玉軸受のクリアランスに起因する非線形ばね特性を持つ。このクリアランスは角度で $0.2^\circ \sim 0.5^\circ$ 程度の大きさである。

本実験装置では重力のたわみは比較的小さく、非対称線形性は主に軸受中心線のずれによって作られている。その成分の大きさは、ずれの大きさを変化させることによって調整できる。

7.2 実験結果 共振曲線の実験結果を図 10, 図 11 と図 12 に示す。縦軸は発生した振動の x, y 方向の変位から計算した振幅 $\sqrt{x^2 + y^2}$ の最大値を示している。

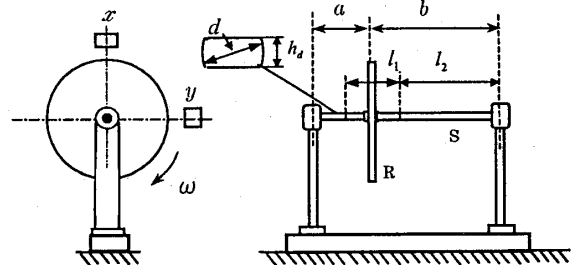


Fig. 9 Experimental setup

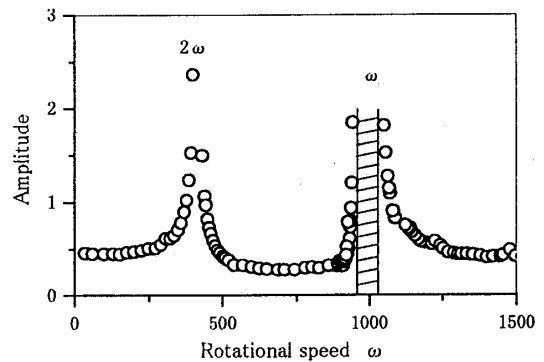


Fig. 10 Result of Experiment (System 1)

まず、図 10 はロータ系 1 における実験結果を示している。このロータ系は線形であり、 $\omega = 1000\text{rpm}$ 付近で不安定領域（ハッチングで示す）が、また、 $\omega = 400\text{rpm}$ 付近で重力作用による振動数 2ω の共振現象が現れている。

次に、左端の軸受を単列深みぞ玉軸受に交換すると以下に示すような様々な変化が現れる。図 11 はロータ系 2 を用いたときの共振曲線、および FFT 解析結果である。数多くのピークが観察されたが、FFT 解析の結果から、 A, C は調和型振動、 B は $p_f - p_b = 2\omega$ 様式の超和差型振動であることが確認できる。この結果は、図 4(a) の数値シミュレーションや図 7(b)、図 8(b) の理論解析結果と定性的に一致している。

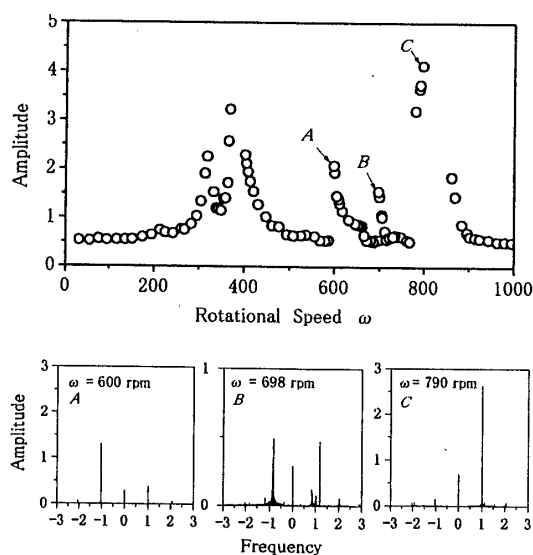


Fig. 11 Result of Experiment (System 2)

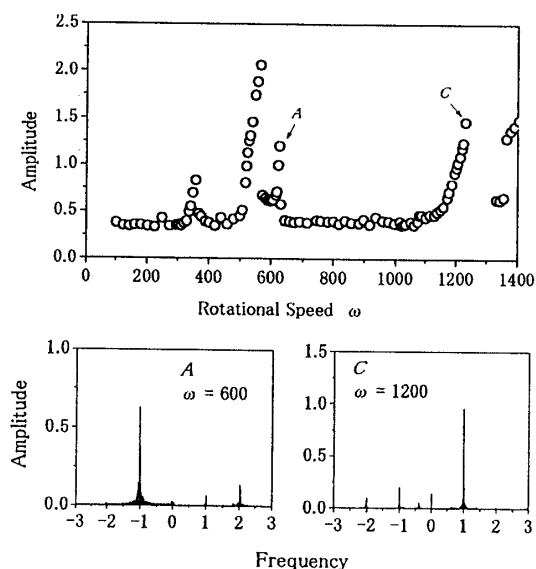


Fig. 12 Result of Experiment (System 3)

また、図 12 は、ジャイロモーメントの作用が大きいロータ系 3 を用いたときの共振曲線及び FFT 解析の結果を示す。この場合、調和型振動のピーク A, C は確認できたが、超和差型振動のピーク B は現れなかった。この結果は、4 節の (9) で述べた線形固有値解析で調べたパラメータ i_p の影響と定性的に一致している。

8. 結 論

重力と非線形ばね特性の作用を受ける偏平軸系で発生する調和型振動、および $p_f - p_b = 2\omega$ 様式の超和差型振動について理論的、実験的に調べた結果、以下の結論が得られた。

- (1) 偏平軸を単列深みぞ形玉軸受のようなクリアランスをもつ軸系で支持すると、静止した剛性の方向差 k 、回転する剛性の方向差 Δ および非線形ばね特性が共存する係数励振系となる。
- (2) 静止した方向差 k は、重力と軸受のクリアランスの共存、あるいは軸受台のずれと軸受のクリアランスの共存により作られる。
- (3) 静止した剛性の方向差 k と偏平性 Δ の相乗効果により、線形近次した系では、主危険速度付近の不安定領域が複数に分かれる。
- (4) 主危険速度付近、およびその低速側で、振動数 2ω の共振が 2 個、調和型振動の共振が 2 個、および $p_f - p_b = 2\omega$ 様式の超和差型振動の共振が 1 個が現れた。
- (5) 係数励振作用により、調和型振動の不安定領域と超和差型振動の不安定領域が現れるが、非線形ばね特性の作用で、定常振動となる。

文 献

- (1) Taylor, H.D. J. Appl. Mech., Vol.7, (1940), 71.
- (2) Laffoon, C.M., Trans. AIEE. Vol.59 (1940), 30.
- (3) 山本・石田, 機論, 47-418 (1981), 719.
- (4) 山本・石田, 機論, 44-382 (1978), 1934.
- (5) 山本, ほか 2 名, 機論, 46-405 (1980), 465.
- (6) 山本・石田, 機論, 49-448 (1983), 2133.
- (7) Foote, W.R., ほか 3 名, J. Appl. Mech., 10-2 (1943) A77
- (8) Messal, E.E. and Bonthron, R.J., Trans. ASME, J. Eng. Ind. 98-4 (1976), 1161
- (9) 沖島・近藤, 機論, 40-338 (1974), 2832.
- (10) 太田, ほか 2 名, 機論, 44-380 (1978), 1225.
- (11) 岩壺, ほか, 機論, 45-398 (1979), 1055.
- (12) 小寺, ほか 2 名, 機論, 46-409 (1980), 1033.
- (13) 池田・中川, 機論, 59-566 (1993), 152.
- (14) 山本・太田, 機論, 28-188 (1962), 475.
- (15) Nayfeh, A. H., Balachandran, B., Applied Mechanics Review vol.42, no.11 Part2, (1989), 175.