

偏平軸・円板系の内部共振現象*

(主危険速度付近とその3倍付近)

石田 幸男^{*1}, 井上 剛志^{*1}, 大石 真嗣^{*2}

Internal Resonance Phenomena of an Asymmetrical Shaft (In the Vicinities of the Major Critical Speed and Critical Speed of Three Times the Major Critical Speed)

Yukio ISHIDA^{*3}, Tsuyoshi INOUE and Masatsugu OISHI

^{*3} Nagoya University, Dept. of Electronic-Mechanical Engineering,
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya, Aichi, 464-8603 Japan

An asymmetrical shaft has been investigated for many years because unstable vibrations appear in this rotor system. However, when the natural frequencies hold simple integral relation exactly or approximately, an internal resonance may occur and the nonlinear phenomena change remarkably. In this study, the nonlinear oscillations and internal resonance phenomena of an asymmetrical shaft are investigated theoretically and experimentally in the vicinities of the major critical speed and critical speed of three times the major critical speed. Further, we clarified characteristics of nonlinear phenomena in the transition from the system with internal resonance to the system with no internal resonance.

Key Words: Vibration of Rotating Body, Nonlinear Vibration, Critical Speed, Subharmonic Resonance, Internal Resonance

1. まえがき

ジャイロモーメントが作用する多くの回転機械では、非線形共振の危険速度はお互い離れて存在する。従って、非線形振動が発生するとき、その振動は単独で起こる。

回転機械の振動解析では、ジェフコットロータが基本的なモデルとして広く用いられている。このモデルでは、円形断面軸の中央に回転体(円板)がつけられているため、前向き固有振動数 $p_f (> 0)$ と後向き固有振動数 $p_b (< 0)$ が $p_f : p_b = 1 : (-1)$ の整数比の関係を持つ。ここで、固有振動数は、そのモードの振れ回りの方向が軸の回転方向と同じものを正、逆のものを負とおく。本論文では、ほぼ $p_f : p_b = m : n$ の関係が成立するとき発生する共振を $m : n$ 型の内部共振と呼ぶことにする。著者らは既報^{(1),(2)}で、ジェフコットロータが非線形ばね特性を持つ場合に、主危険速度付近と、その2倍、3倍付近で発生する非線形現象を調べた。そして、 $1 : (-1)$ 型の内部共振の影響によりこの系の非線形現象は複雑に変化し、新たな安定解が発生したり、概周期運動という特異な振動現象が現れることを示した。そして、一般の機械で単独で発生する非線形振動の解

析モデルとして、このジェフコットロータを用いることは不適切であることを示した。

一方、発電機など、産業界で広く用いられている代表的な回転機械には偏平軸を持つものがある。線形ばね特性を持つ偏平軸において、(i)主危険速度付近で不安定振動が発生すること⁽³⁾、(ii)系に重力が作用すると主危険速度の半分の回転速度付近で2倍周波数振動の共振現象が発生することの2点は古くから知られており、このような意味で偏平軸は円形断面軸とは非常に異なった振動特性を示す系である。著者らは、この偏平軸・円板系に非線形性が存在するとき、その振動特性はさらに変化し、(iii)主危険速度付近の不安定振動が消えること⁽⁴⁾、(iv)分数調波振動 $[+2p_f]$ や和差調波振動 $[p_f - p_b]$ の共振点付近で不安定振動が発生すること^{(5),(6)}、(v)超和差調波振動 $[(p_f - p_b)/2]$ が発生しやすくなること⁽⁷⁾を報告した。(ここで、例えば記号 $[p_f - p_b]$ は、関係 $p_f - p_b = \omega$ が成立する時に発生する振動の種類を表す。)ただし、これらはすべて、非線形共振が単独で発生する場合(単一共振)について調べた研究である。

上記のような円形断面軸と偏平軸の振動特性の違いを考えると、偏平軸・円板系に対する内部共振の影響は円形断面軸の場合と異なった様式で現れる可能性がある。このような立場から、既報⁽⁸⁾では、非線形性を持つ偏平軸・円板系が、 $1 : (-1)$ 型の内部共振の影響を受け

* 原稿受付 1999年8月30日。

*1 正員, 名古屋大学大学院工学研究科(☎464-8603 名古屋市千種区不老町1)。

*2 シャープ株式会社(☎639-1186 大和郡山市美濃庄町492)。
E-mail: ishida@ishidalab.nuem.nagoya-u.ac.jp

るときの、主危険速度の2倍付近の振動について調べた。そして、内部共振が偏平軸・円板系に与える影響としては、共振曲線の形状に変化を与えるなどの円形断面軸の場合と同様な影響に加え、単一共振の場合に発生した不安定振動を消滅させるという円形断面軸の場合には無い影響があることを示した。

本報告では、非線形ばね特性を持つ偏平軸が、1:(-1)型の内部共振の影響を受けるときの、主危険速度付近とその3倍付近における共振現象を調べる。特に、各非線形振動の共振点が近く内部共振の影響する系から、共振点が離れ各非線形振動が単独で発生する系(単一共振の系)までの遷移過程における偏平軸系の振動特性の変化を詳細に調べていく。さらに実験を行い、理論解析の妥当性について検討を行う。

2. 運動方程式

図1(a)に偏平軸の2自由度傾き振動モデルを示す。回転体位置における軸の傾き角 θ の xz 平面, yz 平面への投影角を θ_x, θ_y で表す。このモデルの無次元表示の運動方程式は次式となる⁽⁵⁾。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta}_x + i_p \omega \dot{\theta}_y + c \dot{\theta}_x + \theta_x - \Delta(\theta_x \cos 2\omega t + \theta_y \sin 2\omega t) \\ + N_{\theta_x} = F \cos(\omega t + \alpha) \\ \ddot{\theta}_y - i_p \omega \dot{\theta}_x + c \dot{\theta}_y + \theta_y - \Delta(\theta_x \sin 2\omega t - \theta_y \cos 2\omega t) \\ + N_{\theta_y} = F \sin(\omega t + \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 $F = (1 - i_p)\tau\omega^2$ は動不つりあい τ に起因する不つりあい力であり、 i_p は極慣性モーメントと直径に関する慣性モーメントの比、 c は減衰係数、 Δ は軸剛性の方向差(偏平性)、 $N_{\theta_x}, N_{\theta_y}$ は復元力中の非線形項、 ω は回転角速度、 α は曲げ剛性 $(1 - \Delta)$ の方向に対する動不つりあいの角位置、 t は時刻を示す。 Δ は $O(\epsilon^0)$ の大きさとする。この系の振動数方程式は次式となる^{(5),(9)}。

$$G(p)G(\bar{p}) - \Delta^2 = (1 + i_p \omega p - p^2)(1 + i_p \omega \bar{p} - \bar{p}^2) - \Delta^2 = 0 \quad (2)$$

ここで、 p は固有振動数、また $\bar{p} = 2\omega - p$ である。

パラメータ $i_p = 0.03, \Delta = 0.3$ の場合の固有振動数線図を図1(b)に示す。この場合、固有振動数 p_f と p_b は主危険速度付近を除く回転速度領域においてほぼ1:(-1)の関係にある。このように、 i_p が0でない場合、この系の固有振動数は ω によって変化し、また、その変化の度合いは i_p の大きさによって決まる。

非線形項 $N_{\theta_x}, N_{\theta_y}$ の具体的な形は、既報^{(1),(10)}に示したが、方向角 φ が 2π 変化する間に増減する回数 n によって分類でき、その成分を記号 $N(n)$ で表す。座標の3乗までの非線形ばね特性を考えた場合、非線形成

分としては $N(0) \sim N(4)$ がある⁽¹⁰⁾。

実際の系では、軸受中心線の一致がよい場合には等方性の対称非線形成分 $N(0)$ のみが強く現れる。軸受中心線にずれがある場合には $N(0)$ に加え、非対称非線形成分 $N(1)$ が比較的強く現れる。以上を考慮し、本報では $N(0)$ と $N(1)$ のみが存在する系について解析する。 $N(0)$ の大きさを表す係数を $\beta^{(0)}$, $N(1)$ の大きさを表す係数を $\epsilon^{(1)}$ で表し⁽¹⁰⁾, これらの大きさは $O(\epsilon)$ とする。

3. 主危険速度付近の理論解析

3-1 基礎式の誘導

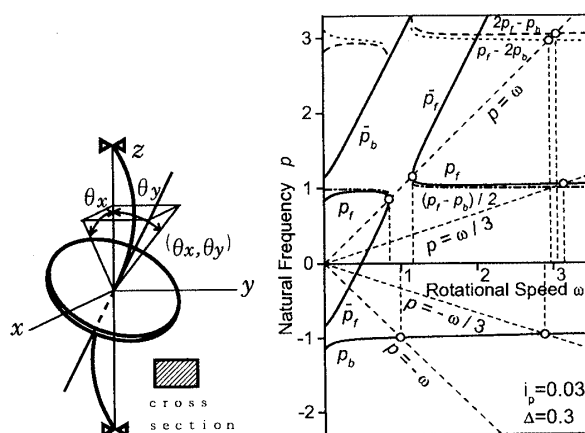
系に作用するジャイロモーメントが小さい場合、すなわち i_p が小さい偏平軸系では、主危険速度付近において、以下に示す3種類の非線形振動の共振点が近くなる。

- (1) 調和振動 $[+p_f]$
- (2) 後向き調和振動 $[-p_b]$
- (3) 超和差調波振動 $[(p_f - p_b)/2]$

超和差調波振動 $[(p_f - p_b)/2]$ は、円形断面軸では3乗までの非線形性では発生しにくい⁽¹¹⁾, 偏平性が存在すると発生しやすくなる非線形振動である⁽⁷⁾。図1(b)には、振動数 $(p_f - p_b)/2$ を鎖線で示した。

非線形成分 $N(0)$ と $N(1)$ をもつ偏平軸系では、 i_p が大きく各非線形振動の共振点が十分に離れた単一共振の場合は、調和振動 $[+p_f]$ のみが発生し、後向き調和振動 $[-p_b]$, 超和差調波振動 $[(p_f - p_b)/2]$ は発生しない。

この系に1:(-1)型の内部共振が影響すると、軸の回転方向と同じ向きの振動成分 ω から逆向きの振動成分 $-\omega$ が同程度の大きさで発生すると考えられる。また偏平軸であることから、 $+\omega$ 成分が式(1)中の偏平性 Δ の項を通して $2\omega - (+\omega) = +\omega$ の振動成分を生じ、 $-\omega$



(a) 2DOF inclination model (b) Natural frequencies

Fig.1 Analytical model

成分が $2\omega - (-\omega) = 3\omega$ の振動成分を発生させる。一方、 $O(\varepsilon)$ の非線形項を介して発生する定数成分は、本来、その大きさは $O(\varepsilon)$ で扱うべきであるが、後述のスペクトルからも分かるように大きさは $O(\varepsilon^{1/2})$ 程度であり、内部共振が発生する場合には系の特性に影響する⁽²⁾ ので考慮する。また、この定数成分も偏平性 Δ を通して $2\omega - (0) = 2\omega$ の振動成分を発生させる⁽⁵⁾。以上の振動成分の派生を考慮し、解を $O(\varepsilon)$ 精度で仮定する。なお、この仮定の際に必要な $O(\varepsilon)$ の大きさの成分は、上記の成分と同じ振動数の成分のみである。次式にはそのうちの $O(\varepsilon^{1/2})$ 以上の大きさの項のみを表す。

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= P \cos(\omega t + \beta) + R \cos(-\omega t + \delta) \\ &\quad + \bar{R} \cos(3\omega t - \delta) + R_{2\omega} \cos(2\omega t + \delta_{2\omega}) + A_x \\ \theta_y &= P \sin(\omega t + \beta) + R \sin(-\omega t + \delta) \\ &\quad + \bar{R} \sin(3\omega t - \delta) + R_{2\omega} \sin(2\omega t + \delta_{2\omega}) + A_y \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで、 P 、 R と \bar{R} は $O(\varepsilon^0)$ の大きさ、 A_x 、 A_y と $R_{2\omega}$ は $O(\varepsilon^{1/2})$ の大きさである。なお、各非線形振動が単独で発生するときは、式(3)の第1項のみを仮定することにより解析できる⁽⁴⁾。仮定した解を式(1)に代入し、各成分は時間に関してゆるやかに変化すると仮定の下に、各振動数について両辺の係数を等置する。まず、 $O(\varepsilon^0)$ 精度では、 R と \bar{R} に関する次の関係式を得る。

$$\bar{R} = \frac{G(-\omega)R}{\Delta} \quad (4)$$

次に、 $O(\varepsilon^{1/2})$ 精度では、 A_x 、 A_y と $R_{2\omega}$ に関する次の関係式を得る。

$$R_{2\omega} \cos \delta_{2\omega} = \frac{\Delta A_x}{G(2\omega)}, \quad R_{2\omega} \sin \delta_{2\omega} = \frac{-\Delta A_y}{G(2\omega)} \quad (5)$$

さらに、 $O(\varepsilon)$ の精度では、多少の近似計算⁽⁵⁾ ののち、振幅 P 、 R 、 \bar{R} 、 $R_{2\omega}$ 、位相角 β 、 δ 、 $\delta_{2\omega}$ と定数項 A_x 、 A_y に関する式を得るが、式(4)、(5)を代入して整理すると、最終的に次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} A_f \dot{P} &= -2\{\Delta P \sin 2\beta + \omega P + F \sin(\beta - \alpha)\} \\ &\quad + (N_{\theta x1c} + N_{\theta y1s}) \sin \beta + (N_{\theta x1s} - N_{\theta y1c}) \cos \beta \\ A_f P \dot{\beta} &= 2G(\omega)P - 2\Delta P \cos 2\beta - 2F \cos(\beta - \alpha) \\ &\quad + (N_{\theta x1c} + N_{\theta y1s}) \cos \beta - (N_{\theta x1s} - N_{\theta y1c}) \sin \beta \\ A_b \dot{R} &= 2\omega\{G(3\omega) + 3G(-\omega)\}R \\ &\quad + \{(N_{\theta x1c} - N_{\theta y1s}) \sin \delta - (N_{\theta x1s} + N_{\theta y1c}) \cos \delta\}G(3\omega) \\ &\quad + \{(N_{\theta x3c} + N_{\theta y3s}) \sin \delta - (N_{\theta x3s} - N_{\theta y3c}) \cos \delta\}\Delta \\ A_b R \dot{\delta} &= 2R\sigma \\ &\quad + \{(N_{\theta x1c} - N_{\theta y1s}) \cos \delta + (N_{\theta x1s} + N_{\theta y1c}) \sin \delta\}G(3\omega) \\ &\quad + \{(N_{\theta x3c} + N_{\theta y3s}) \cos \delta + (N_{\theta x3s} - N_{\theta y3c}) \sin \delta\}\Delta \\ 0 &= (1 - \Delta^2/G(2\omega))A_x + N_{\theta xa} \\ 0 &= (1 - \Delta^2/G(2\omega))A_y + N_{\theta ya} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここで、 $A_f = 2\omega(2 - i_p)$ 、 $A_b = -2\omega\{(2 + i_p)G(3\omega) + (6 - i_p)G(-\omega)\}$ 、 $\sigma = G(-\omega)G(3\omega) - \Delta^2$ である。なお、ここでは、主危険速度付近で $p_f \simeq \omega$ と $p_b \simeq -\omega$ が同時に成立する場合を考えているので、式(2)より、 σ は $O(\varepsilon)$ の大きさである。 $N_{\theta x1c}, \dots, N_{\theta ya}$ は、非線形項 $N_{\theta x}, N_{\theta y}$ から派生する項の係数を表す。

3.2 内部共振が影響する系から内部共振の影響が無い系へ遷移するときの共振現象

パラメータ i_p が大きく、単一共振の場合の主危険速度付近の振動については既報⁽⁴⁾で報告した。以下では、このパラメータ i_p を0から徐々に大きくしたとき、内部共振が系の動特性に与える影響の変化を調べる。

(A) $i_p = 0$ (ジャイロモーメントが作用しない系)

調和振動成分 P の共振曲線を図2(a)に示す。図中の実線は安定解、破線と鎖線は不安定解を示す。安定判別には、Routh-Hurwitzの安定判別法を用いた。この安定判別法には、安定性を判別するための2つの条件があるが、破線と鎖線は、そのうちの満足しない条件の違いを表す⁽¹²⁾。また、○は数値シミュレーション結果の定常解を、●は概周期運動の振幅の最大値と最小値を示す。▼の間の斜線で示した領域は調和振動 $[+p_f]$ の共振領域を表し、▽は後向き調和振動 $[-p_b]$ の共振点を表す。次に、図2(a)中の点aと点bにおける時刻歴、およびスペクトル線図を図2(b)に示す。これらの図は、単一

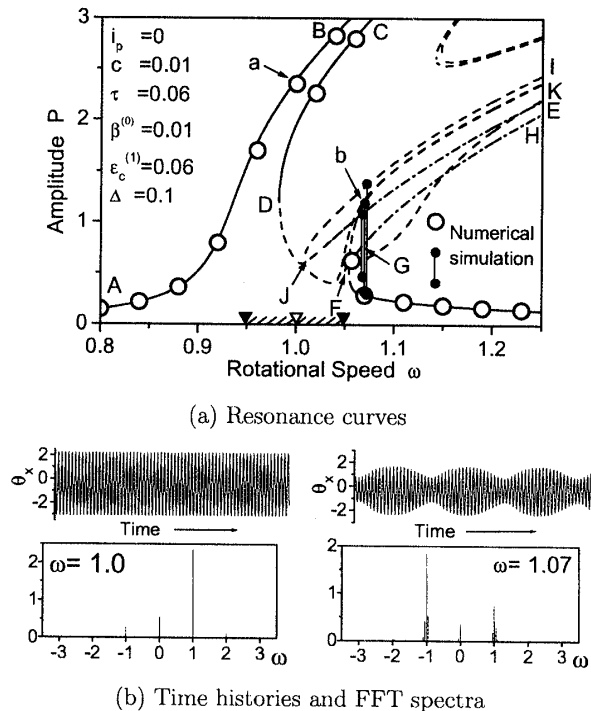


Fig.2 Internal resonance in asymmetrical shaft (The major critical speed)

共振の場合と異なり、以下に示す特徴を持つ。(i) 分枝の数が多くなり、共振曲線が著しく複雑になる。(ii) ω 成分に加え、 $-\omega$ 成分、定数成分と 2ω 成分が発生する。(iii) 鎖線の分枝付近で、概周期運動が発生する。(iv) 概周期運動のスペクトルにおいて、 ω 成分、 $-\omega$ 成分、および定数成分の両側に数本の比較的大きな振動成分が互いに等間隔にわずかに離れて発生する。なお、Ehrich は、スクイズフィルムダンパ軸受に関する実験と数値シミュレーションにおいてこれと類似な現象を観察し、この現象をサイドバンディングと呼んでいる⁽¹³⁾。

非線形成分 $N(0)$ と $N(1)$ の影響は、円形断面軸で内部共振が影響する場合と定性的に同じである⁽²⁾。この内部共振が影響する系において $N(0)$ が小さいときの共振曲線の一例を図3に示す。ここで、点線は背骨曲線を表す。なお、図の見やすさのために、共振曲線中に数値シミュレーション結果は示さない。調和振動 $[+p_f]$ の共振点 ∇ の間の斜線の共振領域において低振幅部に安定解は存在しないが、図2(a)の分枝 EFH と IJK が変形した2つの解曲線が存在する。これらの解曲線は、対応する背骨曲線が後向き調和振動の共振点 ∇ から発生していることから、内部共振の影響により後向き調和振動に関連した分枝が発生したものであることが分かる。

(B) $i_p = 0 \sim 0.1$ (ジャイロモーメントがわずかに作用する系)

図2(a)のパラメータの値から、 i_p を増加させ、共振点がある程度ずれた場合の共振曲線を、図4に示す。 i_p が少し増加し、 $i_p = 0.03$ となると図2(a)の分枝 CD と IJK は結合し、図4(a)の分枝 CLI と KM になる。 $i_p = 0.075$ とさらに少し増加すると、図4(b)に示されるように、後向き調和振動の共振点 ∇ に対応するように分枝 EFGH が低速側へ移動する。なお、この図4(a)(b)のパラメータの値では、後向き調和振動成分も調和振動成分と同

程度の大ききで発生している。パラメータ i_p がもう少し大きくなり、 $i_p = 0.09$ のときの共振曲線が、図4(c)である。図4(b)の分枝 AB と EF は、分枝 ANF と分枝

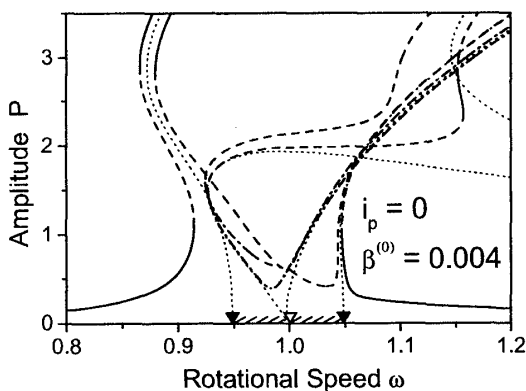


Fig.3 Influence of nonlinear component $N(0)$
(The major critical speed)

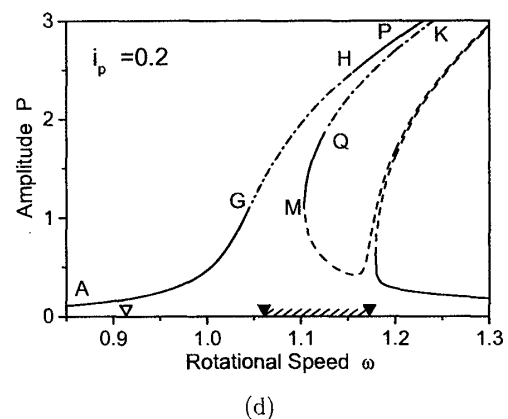
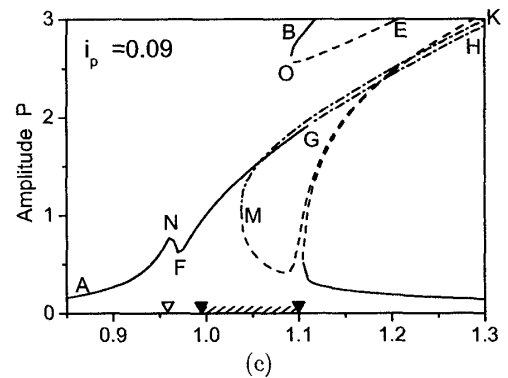
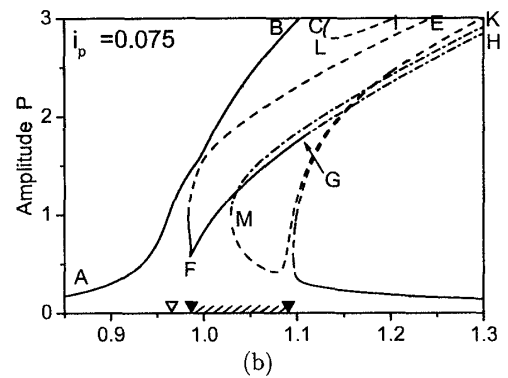
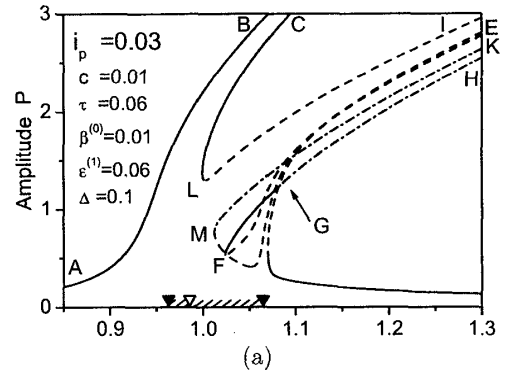


Fig.4 Influence of parameter i_p
(The major critical speed)

BOEに分かれ、後向き調和振動の共振点 ∇ におけるピークの振幅は小さくなっていく。

(C) $i_p = 0.2$ (各共振点が互いにある程度離れた系)

パラメータ i_p をさらに大きくすると、図4(c)の分枝BOEは高速・大振幅の領域に移動していき、共振曲線は図4(d)となる。この系では、後向き調和振動 $[-p_b]$ の共振点 ∇ は調和振動 $[+p_f]$ の共振点 \blacktriangledown の間の共振領域からある程度離れるため、 ∇ における共振曲線の振幅変化はなくなる。なお、このパラメータでは、後向き調和振動成分の振幅は調和振動成分と比較してある程度小さく発生する。

(D) 各共振点が互いに十分に離れた系

さらに i_p を増加させると、内部共振の影響はさらに小さくなり、図4(d)の分枝GHと分枝QKの鎖線の不安定解は安定になり、単一共振の場合の調和振動 $[+p_f]$ の共振曲線となる。また、後向き調和振動成分は発生しなくなる。

3.3 偏平性 Δ の影響 内部共振の影響が偏平性 Δ によりどのように変化するかを調べる。パラメータ Δ が増加するに従い、調和振動の2つの共振点 \blacktriangledown の間の共振領域が広がる。前節で調べた、1:(-1)型

の内部共振が影響する系である図4(c)のパラメータから、偏平性の大きさを表すパラメータ Δ の値を大きくしたときの共振曲線を図5に示す。偏平性 Δ が少し大きくなり、後向き調和振動の共振点 ∇ が斜線で示した調和振動の共振領域に近づくと、内部共振の影響により後向き調和振動に関連した分枝ANFが大きく成長し、 $\Delta = 0.15$ では、図4(c)の分枝ANFとBOEは結合し、図5(a)の分枝ABとEFになる。さらに、偏平性を大きくしていくと、パラメータ i_p が小さいとき(図2(a))と同様に、後向き調和振動の共振点 ∇ が調和振動の共振領域内に存在するようになり、 $\Delta = 0.25$ の図5(b)に示すように、共振点 ∇ に対応して、後向き調和振動に関連した分枝EFHとIJKが現れるようになる。

図5に示した偏平性 Δ を増加させたときの共振曲線の変化は、図4のパラメータ i_p を小さくする方向の共振曲線の変化(図4(c)(b)(a), 図2(a)の変化)とほぼ対応した様相を示した。

従って、偏平軸系では、作用するジャイロモーメントの大きさや軸の偏平性の大きさにより調和振動の共振点 \blacktriangledown と後向き調和振動の共振点 ∇ が移動するが、後向き調和振動の共振点 ∇ が調和振動の共振領域内あるいはその近くに存在するときに内部共振現象が発生することがわかる。

4. 主危険速度の3倍付近の理論解析

4.1 基礎式の誘導 系に作用するジャイロモーメントが小さい場合、すなわち i_p が小さい偏平軸系では、主危険速度の3倍付近において、以下に示す4種類の非線形振動の共振点が近くなる。

- (1) 前向き1/3次分数調波振動 $[+3p_f]$
- (2) 後向き1/3次分数調波振動 $[-3p_b]$
- (3) 和差調波振動 $[2p_f - p_b]$
- (4) 和差調波振動 $[p_f - 2p_b]$

図1(b)には振動数 $2p_f - p_b$ と $p_f - 2p_b$ を破線と点線で示した。 $N(0)$ と $N(1)$ をもつ偏平軸系では、単一共振の場合は、後向き1/3次分数調波振動 $[-3p_b]$ 、和差調波振動 $[p_f - 2p_b]$ のみならず、前向き1/3次分数調波振動 $[+3p_f]$ も発生せず、和差調波振動 $[2p_f - p_b]$ のみが発生する^{(5),(6)}。しかし、ここでは、この偏平軸系に1:(-1)型の内部共振が影響すると、振動成分 $(1/3)\omega$ が発生する可能性があるとして予想し、解析を試みる。振動成分 $(1/3)\omega$ の発生を予想すると、内部共振の影響により、 $-(1/3)\omega$ の振動成分が同程度の大きさで発生すると考えられる⁽²⁾。以降は、主危険速度の場合と同様な考察から振動成分の派生を考慮し、解を $O(\epsilon)$ 精度で仮定する。次式にはそのうちの $O(\epsilon^{1/2})$ 以上の大きさの項のみ

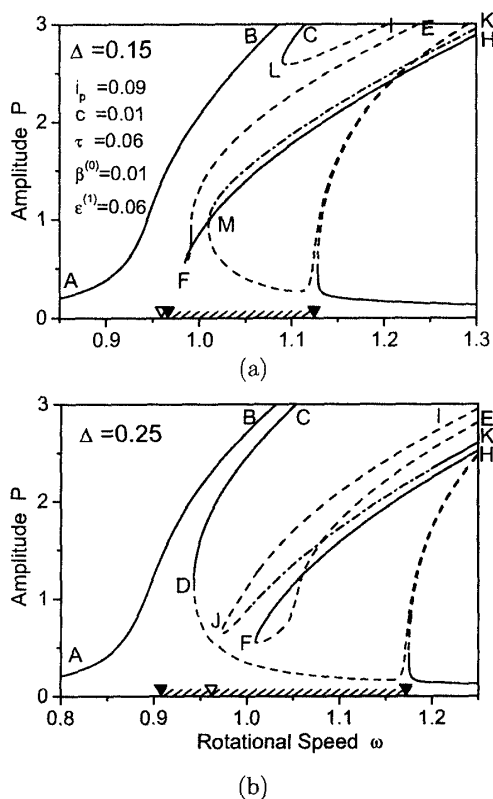


Fig.5 Influence of asymmetry Δ
(The major critical speed)

を表す.

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= R_f \cos((1/3)\omega t + \delta_f) + R_b \cos(-(1/3)\omega t + \delta_b) \\ &\quad + \bar{R}_f \cos((5/3)\omega t - \delta_f) + \bar{R}_b \cos((7/3)\omega t - \delta_b) \\ &\quad + P \cos(\omega t + \beta) + R_{2\omega} \cos(2\omega t + \delta_{2\omega}) + A_x \\ \theta_y &= R_f \sin((1/3)\omega t + \delta_f) + R_b \sin(-(1/3)\omega t + \delta_b) \\ &\quad + \bar{R}_f \sin((5/3)\omega t - \delta_f) + \bar{R}_b \sin((7/3)\omega t - \delta_b) \\ &\quad + P \sin(\omega t + \beta) + R_{2\omega} \sin(2\omega t + \delta_{2\omega}) + A_y \end{aligned} \right\} (7)$$

ここで, P, R_f, R_b, \bar{R}_f と \bar{R}_b は $O(\varepsilon^0)$ の大きさ, A_x, A_y と $R_{2\omega}$ は $O(\varepsilon^{1/2})$ の大きさである. 仮定した解を式(1)に代入し, 各振動数成分について両辺の係数を等置する. $O(\varepsilon^0)$ 精度では, R_f, R_b, \bar{R}_f と \bar{R}_b に関する関係式と, P と β に関する関係式を得る.

$$\bar{R}_f = \frac{G_1 R_f}{\Delta}, \quad \bar{R}_b = \frac{G_{-1} R_b}{\Delta} \quad (8)$$

$$P \cos \beta = \frac{F \cos \alpha}{G(\omega) - \Delta}, \quad P \sin \beta = \frac{F \sin \alpha}{G(\omega) + \Delta} \quad (9)$$

次に, $O(\varepsilon^{1/2})$ 精度では, $R_{2\omega}$ と $\delta_{2\omega}$ に関する前節で得られた式(5)を得る. さらに, $O(\varepsilon)$ の精度では, 振幅 $R_f, R_b, \bar{R}_f, \bar{R}_b, R_{2\omega}$ と位相角 $\delta_f, \delta_b, \delta_{2\omega}$, 定数項 A_x, A_y に関する式を得るが, これらの式(8), (9), (5)を代入して整理すると, 最終的に次式を得る.

$$\left. \begin{aligned} A_f \dot{R}_f &= -(2/3)(G_5 - 5G_1)\omega R_f \\ &\quad + \{(N_{\theta x1c} + N_{\theta y1s}) \sin \delta_f + (N_{\theta x1s} - N_{\theta y1c}) \cos \delta_f\} G_5 \\ &\quad + \{(N_{\theta x5c} + N_{\theta y5s}) \sin \delta_f - (N_{\theta x5s} - N_{\theta y5c}) \cos \delta_f\} \Delta \\ A_f R_f \dot{\delta}_f &= 2R_f \sigma_f \\ &\quad + \{(N_{\theta x1c} + N_{\theta y1s}) \cos \delta_f - (N_{\theta x1s} - N_{\theta y1c}) \sin \delta_f\} G_5 \\ &\quad + \{(N_{\theta x5c} + N_{\theta y5s}) \cos \delta_f + (N_{\theta x5s} - N_{\theta y5c}) \sin \delta_f\} \Delta \\ A_b \dot{R}_b &= (2/3)(G_7 + 7G_{-1})\omega R_b \\ &\quad + \{(N_{\theta x1c} - N_{\theta y1s}) \sin \delta_b - (N_{\theta x1s} + N_{\theta y1c}) \cos \delta_b\} G_7 \\ &\quad + \{(N_{\theta x7c} + N_{\theta y7s}) \sin \delta_b - (N_{\theta x7s} - N_{\theta y7c}) \cos \delta_b\} \Delta \\ A_b R_b \dot{\delta}_b &= 2R_b \sigma_b \\ &\quad + \{(N_{\theta x1c} - N_{\theta y1s}) \cos \delta_b + (N_{\theta x1s} + N_{\theta y1c}) \sin \delta_b\} G_7 \\ &\quad + \{(N_{\theta x7c} + N_{\theta y7s}) \cos \delta_b + (N_{\theta x7s} - N_{\theta y7c}) \sin \delta_b\} \Delta \\ 0 &= (1 - \Delta^2/G(2\omega))A_x + N_{\theta xa} \\ 0 &= (1 - \Delta^2/G(2\omega))A_y + N_{\theta ya} \end{aligned} \right\} (10)$$

ここで, $A_f = 2\omega\{((2/3) - i_p)G_5 - ((10/3) - i_p)G_1\}$, $A_b = -2\omega\{((2/3) + i_p)G_7 + ((14/3) - i_p)G_{-1}\}$, $\sigma_f = G_1 G_5 - \Delta^2$, $\sigma_b = G_{-1} G_7 - \Delta^2$ (ここで, $G_n = G((n/3)\omega)$) である. なお, σ_f と σ_b は $O(\varepsilon)$ の大きさである. $N_{\theta x1c}, \dots, N_{\theta ya}$ は, 非線形項 $N_{\theta x}$, $N_{\theta y}$ から発生する項の係数を表す.

4.2 内部共振の影響する系から内部共振の影響の無い系へ遷移するときの共振現象 主危険速度付近と同様に, パラメータ i_p を 0 から徐々に大きくしたときの, 非線形成分 $N(0)$ と $N(1)$ のみを持つ偏平軸系に与

える内部共振の影響を調べる.

パラメータ i_p を増加させたときの前向き 1/3 次分数調波振動成分 R_f の共振曲線を, 図6に示す. 図中の記号の説明は前節と同様であり, \blacktriangledown と \blacktriangledown はそれぞれ, 前向き 1/3 次分数調波振動 $[+3p_f]$ と後向き 1/3 次分数調波振動 $[-3p_b]$ の共振点を示す. パラメータ $i_p = 0$ で, \blacktriangledown と \blacktriangledown がほぼ一致する系における共振曲線は図6(a)のようになり, 2種類の安定な定常解が発生する. また, 数値シミュレーションでは, これらの2つの安定な定常解の間の領域に概周期運動が発生する.

i_p が 0.02 と増加すると, ジャイロモーメントの影響により \blacktriangledown と \blacktriangledown はある程度離れ, 前向き 1/3 次分数調波振動成分の共振曲線は図6(b)に示されるように高速側に移動し, その低速側では, 図6(a)においても発生していた概周期運動が, 広い回転速度範囲で発生する. i_p をより増加させていくと, 内部共振の影響が消えてゆくため, 図6(a)の共振曲線は高速側に移動あるいは消滅し, 前向き 1/3 次分数調波振動は発生しなくなる. 数値シミュレーションでは, 図6(b)における概周期運動の振幅の変化幅が小さくなり, 和差調波振動 $[2p_f - p_b]$ へととれんする.

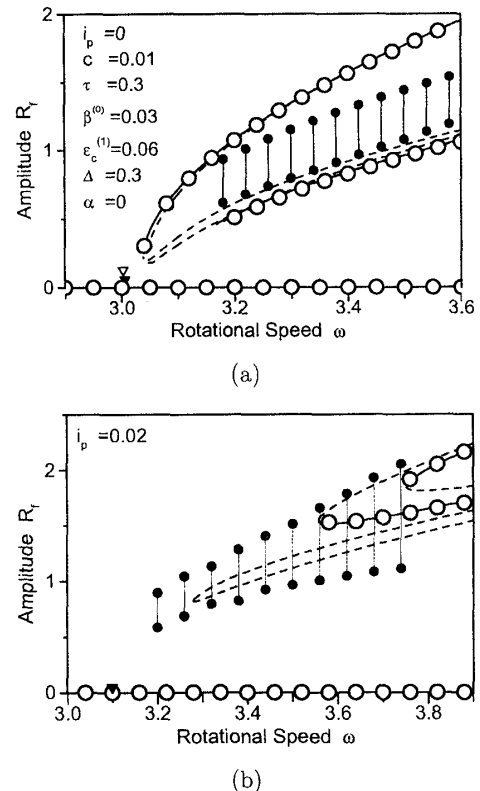


Fig.6 Influence of parameter i_p

(Critical speed of three times the major critical speed)

4.3 偏平性 Δ の影響 既報⁽⁵⁾で著者らは、単一共振の場合の偏平軸系の前向き 1/3 次分数調波振動の解析結果は円形断面軸におけるものと全く同じであり、従って、偏平性 Δ は単一共振の前向き 1/3 次分数調波振動の動特性に全く影響を与えないことを報告した。

ここでは、偏平軸系の前向き 1/3 次分数調波振動が内部共振の影響を受けるときの、軸の偏平性が系に与える影響を調べる。様々な非線形成分 $N(0)$ と $N(1)$ 及びパラメータ i_p の組み合わせを決め、それぞれの状態において偏平性の大きさを表すパラメータ Δ を変えたときの共振曲線の形状変化を観察した。その結果、 Δ が変化しても共振曲線の形状に定性的な変化は見られなかった。従って、解析式 (8), (9), (10) においてパラメータ Δ は内部共振を介して式中に存在するにもかかわらず、この Δ が実際に前向き 1/3 次分数調波振動に与える影響は非常に小さい。以上から、偏平性 Δ の大きさに関わりなく、内部共振は前向き 1/3 次分数調波振動に対し同様な影響を与える。

5. 実験

5.1 実験装置 実験装置の概要と上下軸受の設定を図 7 に示す。上下の軸受中心間距離 $l = 700$ mm, 直径 $d = 12$ mm の軸 S が、その下端で単列深みぞ玉軸受 (# 6204), 上端で複列自動調心玉軸受 (# 1200) により支持されている。軸は図の l_1 を除いた部分を、図示のように、厚さ $h = 8$ mm に削り、断面が円形である l_1 部に、直径 300 mm, 厚さ 14 mm の回転体 D を取り付けた。軸中央から回転体中央までの距離を a とする。

この実験装置は軸の質量が円板の質量に対してはるかに小さいため、回転体のたわみと傾きに関する 4 自

由度集中定数系として考えることができる。回転体を軸中央から離れた位置に設定した場合、この系はたわみ振動と傾き振動が連成する 4 自由度系で表すことができ、すべてのモードはジャイロモーメントの影響を受ける⁽¹⁾。実験では、これらのモードのうち、低次のモード(たわみ振動が支配的なモード)の主危険速度付近及びその 3 倍付近の共振現象を調べた。

系の運動に作用するジャイロモーメントの大きさは、実験装置では円板の軸中央からの距離を変えることにより、また、上述の理論モデルではパラメータ i_p の大きさを変えることにより調整できる。軸中央に回転体がある時は、低次のモードにはジャイロモーメントは働かず、また、その振動は理論解析で $i_p = 0$ とおいた系で解析できる。

この実験装置は、下端の単列深みぞ玉軸受のクリアランスに起因して非線形ばね特性を持つ。このクリアランスは、図 7 に斜線で示したように現れ、その大きさは角度で $0.2^\circ \sim 0.5^\circ$ 程度であり、上端軸受部における水平方向距離に換算すると 2.5 mm ~ 6 mm 程度に相当する。

下側軸受の軸受中心線と上側軸受の軸受中心線との水平距離を δ で表す。組立状態がよい時 ($\delta \approx 0$) は、等方性の対称非線形ばね特性となり、この場合は、理論解析における $N(0)$ のみを考慮した系に対応する。一方、軸受中心線のずれ δ があるときは、等方性の対称非線形性に加えて非対称非線形性が現れる。その系は、理論解析における $N(0)$ と $N(1)$ を考慮した系に対応する。これらの成分は、 $N(0)$ は $\delta = 0$ のとき強く現れ、 $N(1)$ は δ が増加すると強く現れる。クリアランスに起因する断片線形的な非線形ばね特性を持つときには、適当な δ の大きさのとき、最も $N(1)$ が大きくなる。

5.2 実験結果

5.2.1 主危険速度付近 発生した振動の x, y 方向の振動をスペクトル解析し、調和振動成分のみを取り出し、その振幅を計算して共振曲線を求めた。

円板位置を $a = (1/4)l$ と軸中央からある程度ずらし、軸受中心間のずれ $\delta = 2$ mm に設定した系において得られた共振曲線を図 8(a) に示す。得られた 2 種類の安定な定常解を ○ と ● で示し、概周期運動は ● で示した。図 8(a) 中の点 a において得られた概周期運動の時刻歴およびその FFT 解析結果を図 8(b) に示す。この実験結果は、理論解析における $i_p = 0.2$ の場合 (図 4(d)) と、(1) 共振曲線が漸硬形であること、(2) 理論解析の分枝 MQ に対応して、830 ~ 900 rpm で ● でしめす安定な定常解が発生したこと、(3) 理論解析の鎖線の分

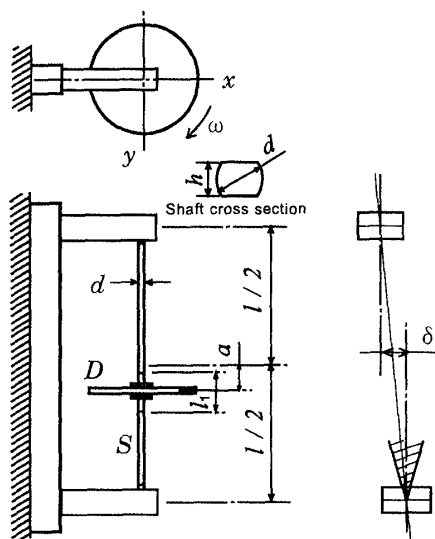


Fig.7 Experimental system

枝 GH に対応して、730 ~ 760 rpm で概周期運動が発生したこと、の点で定性的に一致しており、理論解析の妥当性が確認できる。

5.2.2 主危険速度の3倍付近 主危険速度付近の場合と同様な方法で前向き 1/3 次分数調波振動成分の共振曲線を求めた。

円板位置を軸中央に設置したときの共振曲線を図 9(a) に示す。また、点 a における定常振動と点 b における概周期運動の時刻歴およびその FFT 解析結果を図 9(b)(c) に示す。図 9(b) から、前向きと後向きの 1/3 次分数調波振動が同時に発生したことが確認できる。この定常振動と概周期運動は、理論解析における $i_p = 0$ の場合の共振曲線図 6(a) の $\omega = 3.05$ から発生した安定解と、●で表した数値シミュレーション結果の概周期運動と対応していると考えられる。なお、様々な δ についても実験を行ったが、図 6(a) の $\omega = 3.2$ から発生した安定解に対応する 1/3 次分数調波振動の定常解は、確認できなかった。

6. 結論

非線形ばね特性を持つ偏平軸系が、1 : (-1) 型の内部共振の影響を受けるときの、主危険速度付近とその3倍付近の振動について以下の結論を得た。

(1) 主危険速度付近では、調和振動の共振領域と後向き調和振動の共振点の位置関係により内部共振の影響は変化する。調和振動の共振領域内、あるいはその近傍に後向き調和振動の共振点が存在すると内部共振が起こり、(i) 単一共振の場合には発生しない後向き調和振動成分

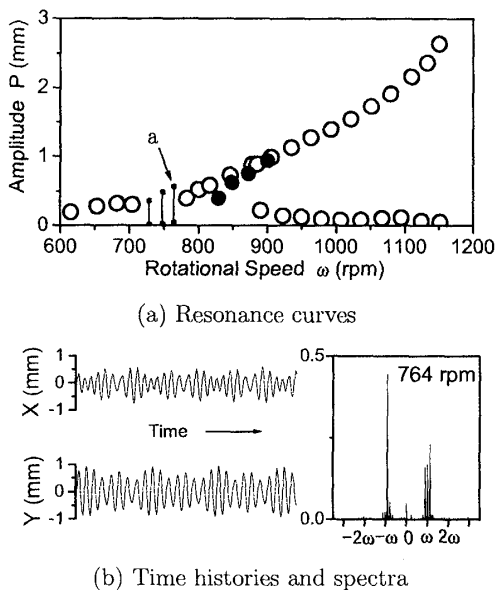


Fig.8 Experimental result (The major critical speed)

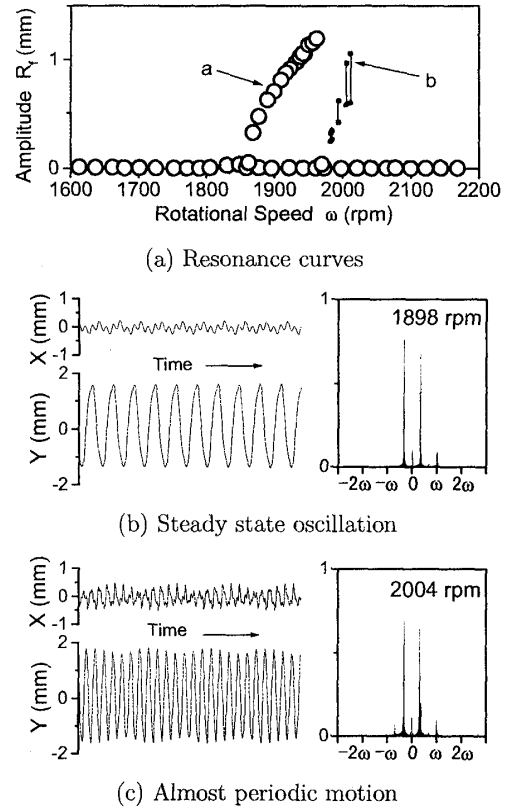


Fig.9 Experimental result

(Critical speed of three times the major critical speed)

の発生, (ii) 新しい分枝の発生, (iii) 安定な分枝の不安定化, (iv) 概周期運動の発生などの現象が現れる。

(2) 主危険速度の3倍付近では、内部共振の影響は円形断面軸の場合と定性的に同じである。すなわち、(i) 単一共振のとき発生する和差調波振動 $[p_f - p_b]$ は概周期運動となって発生する、(ii) 単一共振のときに発生しない前向き 1/3 分数調波振動が発生し、2本の安定解が現れる、(iii) 前向き 1/3 分数調波振動成分と同時に後向き 1/3 分数調波振動成分も現れる。

文献

- (1) 石田・井上, 機論, 63-606(1997), 321
- (2) 石田・ほか2名, 機論, 63-614(1997), 3335
- (3) Taylor, H.D., *J. Appl. Mech.*, 7-2(1940-6), A-71
- (4) 山本・ほか2名, 機論, 49-448(1983), 2133
- (5) 山本・ほか2名, 機論, 44-382(1978), 1934
- (6) 山本・ほか2名, 機論, 46-405(1980), 465
- (7) 山本・ほか3名, 機論, 47-418(1981), 719
- (8) 石田・ほか2名, 機論, 65-638(1999), 3912
- (9) 山本・太田, 機械力学, 朝倉書店
- (10) 山本・石田, 機論, 41-345(1975), 1374
- (11) 山本・ほか2名, 機論, 50-456(1984), 1391
- (12) 山本・安田, 機論, 42-358(1976), 1693
- (13) F.F.Ehrich, *Trans. ASME, J. Vib. Acoust.*, Vol. 114, (1992), pp498-505