

流体を伝えるつぶれやすい管の安定性解析*

(剥離点の移動に伴う擾乱と下流流路の長さの影響について)

青松達哉^{*1}, 松崎雄嗣^{*2}, 池田忠繁^{*2}

Stability Analysis of a Collapsible Tube Conveying Fluid (On Effects of Perturbations Induced by Movement of Separation Point and Length of Downstream Channel)

Tatsuya AOMATSU^{*3}, Yuji MATSUZAKI and Tadashige IKEDA

^{*3} Department of Aerospace Engineering, Nagoya University,
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya-shi, Aichi, 464-8063 Japan

Stability of the steady state of a collapsible tube conveying fluid is investigated, using a two-dimensional flexible channel model. The model consists of a pair of elastic membranes supported by distributed nonlinear springs equivalent to the hoop tension of the tube. Perturbation equations are numerically solved using a shooting method. In the present study examined are the effects of (1) perturbations of spatial distributions of separation coefficient and viscous resistance induced by the movement of separation point and (2) a length of downstream rigid channel connected to the collapsible segment on the stability. The results show that, depending on the length of downstream channel and the flow rate, the steady states become unstable to different modes of oscillation, while the perturbations induced by the movement of separation point does not affect the stability very much.

Key Words: Flow Induced Vibration, Internal Flow, Bio-Fluid Mechanics, Biomechanics, Collapsible Tube, Stability Analysis

1. 緒 言

柔らかく、つぶれやすい管(コラプシブルチューブ)の中を流体が流れると、流れと管の変形とが相互に作用し、条件次第で自励振動が起こる場合がある⁽¹⁾。

コラプシブルチューブの自励振動を解明することは、声の音源である声帯の振動⁽²⁾や、人工心肺装置の脱血回路に接続された大静脈の振動⁽³⁾等、生理的現象の理解や臨床医学上の問題の解決につながると考えられ、従来から数多くのモデル実験^{(4)~(7)}や数値解析^{(8)~(13)}が行われている。

数値解析において、Matsuzakiら⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾は、チューブの代わりに、チューブ則⁽¹¹⁾(チューブに作用する内外圧力差とチューブの断面積との関係)に従う上下二枚の弾性膜に挟まれた二次元流路の静的・動的特性を調べ、弾性流路の下流に接続された剛な流路の長さにより振動の様子が大きく変化することを示している⁽⁹⁾。また、実験においても、下流の流路抵抗の変化に対し

て、自励振動するシリコンゴムチューブの上流と下流での静圧の時間履歴は、正弦波に似た単純な波形からいくつかの振動数の波が含まれる複雑な波形まで、多様に変化することが観察されている⁽⁷⁾。

このような自励振動のパターンの多様性は、コラプシブルチューブとその中を流れる流体、そして下流の流路抵抗を含む周辺回路からなる系の非線形性に起因するため、その解析は容易でない。しかしながら、系は、流量などのパラメーターの変化に対して静的な平衡状態が不安定化する過程を経て、自励振動に至ることから、微小擾乱に対する安定性を調べることにより、振動パターンの変化の様子をある程度知ることができ、また、この問題は線形化により定式化されるため、解析は比較的容易になる。

そこで、本報では、Matsuzakiら⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾により提案された二次元弾性流路モデルを用いて、流量と下流流路の長さからなるパラメーター空間における系の不安定領域を調べる。

コラプシブルチューブの定常解の安定性に関してはJensenの研究⁽¹³⁾があるが、そこでは剥離点の移動に伴う剥離係数や粘性抵抗の分布の変化(以降、剥離点

* 原稿受付 2000年5月8日。

^{*1} 正員, 名古屋大学(☎ 464-8603 名古屋市中種区不老町)。

^{*2} 正員, 名古屋大学大学院工学研究科。

E-mail: aomatsu@smart.nuae.nagoya-u.ac.jp

の移動に伴う擾乱と呼ぶ)は考慮されていない。しかし、物理的観点から、剥離係数や粘性抵抗の分布は流路内の圧力分布に直接影響するため、剥離点の移動に伴うそれらの分布の変化を考慮することは重要であると考えられる。

この剥離点の移動に伴う擾乱が系の安定性に与える影響に対して明確な結論を出すことも重要であるので、本報では、まず、剥離点の移動に伴う擾乱を考慮して微小擾乱に対する定常解の安定性を調べ、次に、先に述べた下流の剛な流路の長さの影響について調べる。

2. 数 学 モ デ ル

2.1 二次元弾性流路モデル Matsuzaki ら⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾により提案された二次元弾性流路モデルの概要を説明する。モデルは図1に示すようにコラプシブルチューブ流れの実験装置と対応している。チューブは、分布バネに外側から支持された上下二枚の弾性膜からなる二次元流路に置き換えられている。流体は図において向かって左側から右側に流れる。最上流にある一定の水頭圧 P_r の貯水槽から流出した流体は、長さ L_1 、幅 $2B_0$ の剛な平行流路を通り弾性流路に入る。長さ L 、幅 $2B(X, T)$ の弾性流路は一定の外圧 P_e の圧力容器中に設置され、流路はチューブ則に従う復元力の非線形バネにより支持されている。弾性流路を通過した流体はその下流にある長さ L_2 、幅 $2B_0$ の剛な平行流路を経て、大気中に放出される。ただし、原点の位置を弾性流路の上流端の中央にとり、流れの方向に X 軸、それに垂直に Z 軸をとる。また、上下の弾性膜は Z 軸方向のみ運動し、 X 軸に関し対称に変形すると仮定している。

2.2 弾性膜の運動方程式 膜の微小要素に作用する力の Z 軸方向の釣合を考えると、弾性膜の運動方程式は以下ようになる。

$$\rho_m H B_{,TT} + C_m B_{,T} + R_k(B) - NK = P - P_e \dots (1.1)$$

ただし、 ρ_m , H , C_m , $R_k(B)$, N , K , P はそれぞれ膜の密度、厚さ、減衰係数、非線形バネの復元力、膜に働く軸方向の張力、膜の曲率、膜に作用する流体の静圧である。また、添え字「 T 」、「 TT 」はそれぞれ時間 T による一階、二階の偏微分を表す。以降、添え字「 \cdot 」は同様な偏微分を表す。

非線形バネの復元力は、Elad ら⁽¹⁵⁾が考案したチューブ則を参考にし、

$$R_k(B) = K_P \left\{ \left(\frac{B}{B_0} \right)^{20} - \left(\frac{B}{B_0} \right)^{-1.5} \right\}$$

ただし、

$$K_P = \frac{E}{12(1-\nu_m^2)} \left(\frac{H}{B_0} \right)^3$$

とする。 E , ν_m は、それぞれヤング率、ポアソン比である。図2に上式に基づくチューブ則と、対応するチューブ断面の概略形状を示す。

弾性膜は自然長から伸展した状態で上流、下流の剛な流路に接続されているので初期張力が存在し、また、膜のたわみにより付加的な張力が誘起されるので、膜に働く張力 N は、初期歪、たわみによる歪みをそれぞれ ϵ_0 , ϵ_x として、以下のように表すことができる。

$$N = K_S(\epsilon_0 + \epsilon_x)$$

ただし、

$$K_S = \frac{EH}{1-\nu_m^2}, \quad \epsilon_x = \frac{1}{2L} \int_0^L (B_{,X})^2 dX$$

さらに曲率 K は以下の式で与える。

$$K = B_{,XX} \left\{ 1 + (B_{,X})^2 \right\}^{-1.5}$$

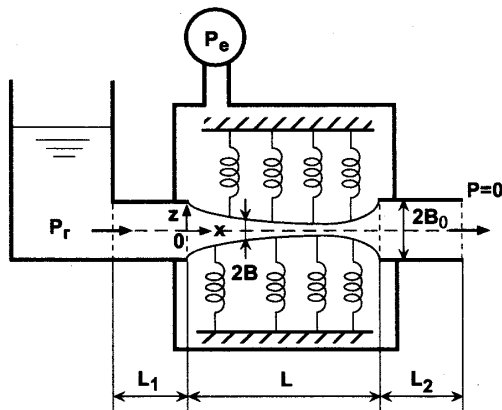


Fig.1 Two-dimensional flexible channel model

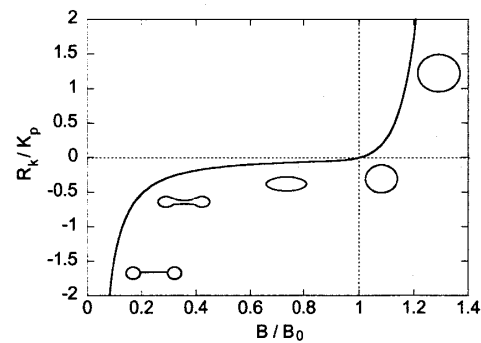


Fig.2 Relationships between the restoring force of the nonlinear springs and the channel width

2.3 流体の方程式 Matsuzaki ら⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾は、流れの剥離を考慮した Cancelli-Pedley⁽⁸⁾の一次元流モデルに基づき、流体の連続方程式と運動方程式を以下の式で表した。

$$B_{,T} + (BU)_{,X} = 0 \dots\dots\dots (1.2a)$$

$$U_{,T} + \bar{\chi} UU_{,X} = -\frac{1}{\rho} P_{,X} - F(U, B) ; F(U, B) = \frac{3vU}{B^2} G \dots\dots\dots (1.2b)$$

ただし、 U , $\bar{\chi}$, ρ , v は断面内平均流速、剥離係数、流体の密度と動粘性係数である。粘性抵抗 F は二次元 Poiseuille 流れの仮定により与えた。

剥離係数と粘性抵抗は剥離点近傍で連続的に変化するように $\bar{\chi}$ と G を以下の関数で与える。

$$\bar{\chi}(X, X_S) = 0.6 - 0.4 \tanh\{A(X - X_S)\} \dots\dots (1.3a)$$

$$G(X, X_S) = 0.5 [1 - \tanh\{A(X - X_S)\}] \dots\dots (1.3b)$$

X_S は剥離点の位置、 A は剥離点での関数の勾配に関わる定数である。 $\bar{\chi}(X, X_S)$ と $G(X, X_S)$ の概形を図3に示す。すなわち、剥離係数 $\bar{\chi}$ は、剥離点より十分に上流では 1.0、下流では 0.2 の値とし、剥離領域では粘性抵抗の値を 0 とする。また、流路が膨張しているとき流れは剥離しないものとする。

また、流れは流路幅が最小となる位置で剥離し、弾性流路の下流端で再付着すると仮定する。つまり、剥離条件を次式で与える。

$$B_{,X}(X_S, T) = 0 \dots\dots\dots (1.4)$$

2.4 境界条件 弾性膜はその両端で剛な平行流路に接続されているので、

$$B(0, T) = B(L, T) = B_0 \dots\dots\dots (1.5a)$$

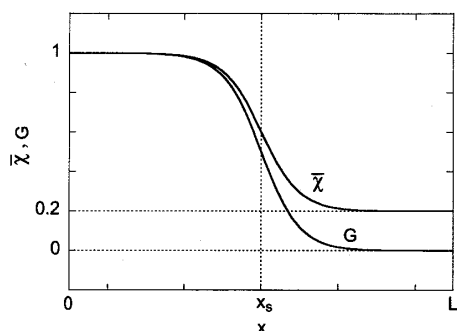


Fig.3 Continuous changes in separation coefficient $\bar{\chi}$ and viscous resistance parameter G across the separation point at $X=X_S$

となる。また、上流端、下流端の静圧は、貯水槽で総圧が P_r 、大気開放部で静圧が 0 であることを考慮して、流体の方程式(1.2)をそれぞれの剛な平行流路の長さに渡り積分することにより得られる。

$$P(0, T) = P_r - \frac{1}{2} \rho \{U(0, T)\}^2 - \rho L_1 U_{,T}(0, T) - \rho L_1 F(U(0, T), B_0) \dots\dots\dots (1.5b)$$

$$P(L, T) = \rho L_2 U_{,T}(L, T) + \rho L_2 F(U(L, T), B_0) \dots\dots\dots (1.5c)$$

2.5 無次元化 無次元化の基準量として、長さ、流速、圧力、時間に関してそれぞれ B_0 , C_0 , ρC_0^2 , B_0/C_0 を用いる。 $C_0 = \{(21.5 K_p)/\rho\}^{1/2}$ は自然状態にあるチューブ内の静止流体中を伝わる圧力波の伝播速度である。無次元化した変数等をアルファベットの小文字で表すと、弾性膜の運動方程式 (1.1)、流体の方程式 (1.2)、剥離条件 (1.4)、境界条件 (1.5) は以下のようになる。

$$mb_{,tt} + cb_{,t} + r_k(b) - n\kappa = p - p_e \dots\dots\dots (2.1)$$

$$b_{,t} + (bu)_{,x} = 0 \dots\dots\dots (2.2a)$$

$$u_{,t} + \chi uu_{,x} = -p_{,x} - f \frac{u}{b^2} \dots\dots\dots (2.2b)$$

$$b_{,x}(x_s, t) = 0 \dots\dots\dots (2.3)$$

$$b(0, t) = b(l, t) = 1 \dots\dots\dots (2.4a)$$

$$p(0, t) = p_r - \frac{1}{2} \{u(0, t)\}^2 - l_1 u_{,t}(0, t) - l_1 f_i u(0, t) \dots\dots\dots (2.4b)$$

$$p(l, t) = l_2 u_{,t}(l, t) + l_2 f_i u(l, t) \dots\dots\dots (2.4c)$$

ただし、

$$x = X/B_0, t = T/(B_0/C_0), b = B/B_0, p = P/(\rho C_0^2), u = U/C_0, n = N/(\rho C_0^2 B_0), l = L/B_0, \text{ etc.,}$$

$$r_k(b) = k_p (b^{20} - b^{-1.5}), n = k_s \left\{ \epsilon_0 + \frac{1}{2l} \int_0^l (b_{,x})^2 dx \right\},$$

$$\kappa = b_{,xx} \{1 + (b_{,x})^2\}^{-1.5},$$

$$\chi(x, x_s) = 0.6 - 0.4 \tanh\{a(x - x_s)\},$$

$$f = f_i g, g(x, x_s) = 0.5 [1 - \tanh\{a(x - x_s)\}],$$

$$m = \frac{\rho_m H}{\rho B_0}, c = \frac{C_m}{\rho C_0}, k_p = \frac{K_p}{\rho C_0^2}, k_s = \frac{K_s}{\rho C_0^2 B_0},$$

$$f_i = \frac{3v}{B_0 C_0} \dots\dots\dots (2.5)$$

3. 安定性解析

3・1 定常解 定常状態で成り立つ関係式は、支配方程式と境界条件(2.1)~(2.4)の時間微分項を除くことにより以下のように与えられる。

$$r_k(b_0) - n_0 K_0 = p_0 - p_e \dots\dots\dots (3.1)$$

$$(b_0 u_0)_{,x} = 0 \dots\dots\dots (3.2a)$$

$$\chi_0 u_0 u_{0,x} = -p_{0,x} - f_i g_0 \frac{u_0}{b_0^2} \dots\dots\dots (3.2b)$$

$$b_{0,x}(x_{s0}) = 0 \dots\dots\dots (3.3)$$

$$b_0(0) = b_0(l) = 1 \dots\dots\dots (3.4a)$$

$$p_0(0) = p_r - \frac{1}{2} \{u_0(0)\}^2 - l_1 f_i u_0(0) \dots\dots\dots (3.4b)$$

$$p_0(l) = l_2 f_i u_0(l) \dots\dots\dots (3.4c)$$

ただし、 $\chi_0(x) = \chi(x, x_{s0})$, $g_0(x) = g(x, x_{s0})$ であり、添字0は定常状態での量を意味する。

3・2 擾乱方程式 各変数は定常解とその周りの微小な擾乱の和で表されると仮定する。

$$b(x, t) = b_0(x) + b_1(x, t) \dots\dots\dots (3.5a)$$

$$p(x, t) = p_0(x) + p_1(x, t) \dots\dots\dots (3.5b)$$

$$u(x, t) = u_0(x) + u_1(x, t) \dots\dots\dots (3.5c)$$

添字1は微小な量を意味する。

さて、系が定常状態から少しずれると、剥離点の位置 x_s は剥離条件(2.3)を満たしながら移動する。このとき、 $x_s(t)$ は、

$$x_s(t) = x_{s0} + x_{s1}(t) \dots\dots\dots (3.6)$$

と表せる。そして、式(3.6)を式(2.3)の左辺に代入して $x = x_{s0}$ の周りに Taylor 展開し、 x_{s1} は微小であるから2次以上の項を無視し、さらに式(3.5a)を代入すると、

$$\begin{aligned} b_{,x}(x_s, t) &= b_{,x}(x_{s0} + x_{s1}, t) \\ &\equiv b_{,x}(x_{s0}, t) + b_{,xx}(x_{s0}, t) \times x_{s1}(t) + o(x_{s1}^2) \\ &= b_{0,x}(x_{s0}) + b_{1,x}(x_{s0}, t) \\ &\quad + \{b_{0,xx}(x_{s0}) + b_{1,xx}(x_{s0}, t)\} \times x_{s1}(t) \end{aligned}$$

となる。三番目の式の右辺第1項は式(3.3)より0、また右辺第4項は2次の微小量なので無視すると、剥離条件は最終的に、

$$b_{1,x}(x_{s0}, t) + b_{0,xx}(x_{s0}) \times x_{s1}(t) = 0$$

と表され、移項して以下の関係を得る。

$$x_{s1}(t) = -\frac{b_{1,x}(x_{s0}, t)}{b_{0,xx}(x_{s0})} \dots\dots\dots (3.7)$$

さらに、剥離点の移動に伴う擾乱を考慮した場合の χ と f の分布関数は以下ようになる。

$$\chi(x, x_s) = \chi_0(x) + \chi_1(x, x_s) \dots\dots\dots (3.8a)$$

$$f(x, x_s) = f_0(x) + f_1(x, x_s)$$

$$= f_i g_0(x) + f_i g_1(x, x_s) \dots\dots\dots (3.8b)$$

式(3.8a)の左辺の x_s に式(3.6)を代入し、 x_{s0} の周りに Taylor 展開し、2次以上の微小項を無視すると、

$$\chi(x, x_{s0} + x_{s1}) \equiv \chi_0(x) + \chi_{,x_s}(x, x_{s0}) \times x_{s1}(t)$$

となり、式(3.8a)の右辺と比較して、

$$\chi_1(x, x_s) = \chi_{,x_s}(x, x_{s0}) \times x_{s1}(t) \dots\dots\dots (3.9a)$$

$g(x, x_s)$ についても同様にして、

$$g_1(x, x_s) = g_{,x_s}(x, x_{s0}) \times x_{s1}(t) \dots\dots\dots (3.9b)$$

支配方程式(2.1), (2.2), 境界条件(2.4)に式(3.5), (3.8)を代入し、 $b_1, p_1, u_1, \chi_1, f_1$ に関して2次以上の微小項を無視し、定常状態で成り立つ関係式(3.1), (3.2), (3.4)を用いて方程式を整理することにより、擾乱方程式(3.10)と境界条件(3.11)が得られる。

$$\begin{aligned} m b_{1,tt} + c b_{1,t} + r_{k,b}(b_0) b_1 - p_1 - n_0 \{1 + (b_{0,x})^2\}^{-1.5} b_{1,xx} \\ + 3 n_0 b_{0,x} b_{0,xx} \{1 + (b_{0,x})^2\}^{-2.5} b_{1,x} = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (3.10a)$$

$$b_{1,t} + b_0 u_{1,x} + b_{0,x} u_1 + u_0 b_{1,x} + u_{0,x} b_1 = 0 \dots\dots (3.10b)$$

$$\begin{aligned} u_{1,t} + \chi_0(u_0 u_{1,x} + u_{0,x} u_1) + \chi_1 u_0 u_{0,x} + p_{1,x} \\ + f_i g_0 \left(\frac{u_1}{b_0^2} - \frac{2 u_0 b_1}{b_0^3} \right) + f_i g_1 \frac{u_0}{b_0^2} = 0 \dots\dots (3.10c) \end{aligned}$$

$$b_1(0, t) = b_1(l, t) = 0 \dots\dots\dots (3.11a)$$

$$p_1(0, t) = -u_0(0) u_1(0, t) - l_1 u_{1,t}(0, t) - l_1 f_i u_1(0, t) \dots\dots\dots (3.11b)$$

$$p_1(l, t) = l_2 u_{1,t}(l, t) + l_2 f_i u_1(l, t) \dots\dots\dots (3.11c)$$

各擾乱の時間依存性を以下のように仮定する。

$$b_1(x, t) = \text{Re}(\tilde{b}(x) \exp(st)) \dots\dots\dots (3.12a)$$

$$u_1(x, t) = \text{Re}(\tilde{u}(x) \exp(st)) \dots\dots\dots (3.12b)$$

$$p_1(x, t) = \text{Re}(\tilde{p}(x) \exp(st)) \dots\dots\dots (3.12c)$$

ただし、 $s = \sigma + i\omega$ (i は虚数単位) であり、実部 σ は振幅の増幅率、虚部 ω は無次元化された角振動数を意味する。式(3.7), (3.9), (3.12)を擾乱方程式(3.10)に代入し、変数を列ベクトルの形で整理すると、最終的に以下の線形常微分方程式が得られる。

$$y_{,x}(x) = \mathbf{A}(x, s) y(x) + \mathbf{B}(x) y(x_{s0}) \dots\dots\dots (3.13a)$$

$$y(x) = [\tilde{b} \quad \tilde{b}_{,x} \quad \tilde{p} \quad \tilde{u}]^T \dots\dots\dots (3.13b)$$

ただし、行列 \mathbf{A} , \mathbf{B} の要素は、 a_{ij}, b_{ij} を行列 \mathbf{A} , \mathbf{B} の i 行 j 列要素として、以下のように表される。

$$a_{12} = 1, \quad a_{21} = \frac{m s^2 + c s + r_{k,b}(b_0)}{n_0 \{1 + (b_{0,x})^2\}^{-1.5}}$$

$$a_{22} = \frac{3b_{0,x} b_{0,xx}}{1+(b_{0,x})^2}, \quad a_{23} = -\frac{\{1+(b_{0,x})^2\}^{1.5}}{n_0}$$

$$a_{31} = \frac{sq\chi_0}{b_0^2} - \frac{q^2\chi_0 b_{0,x}}{b_0^4} + \frac{2qf_i g_0}{b_0^4}, \quad a_{32} = \frac{q^2\chi_0}{b_0^3}$$

$$a_{34} = -s + \frac{2q\chi_0 b_{0,x}}{b_0^2} - \frac{f_i g_0}{b_0^2}, \quad a_{41} = -\frac{s}{b_0} + \frac{qb_{0,x}}{b_0^3}$$

$$a_{42} = -\frac{q}{b_0^2}, \quad a_{44} = -\frac{b_{0,x}}{b_0}$$

$$b_{32} = \frac{qf_i g_{,x_s}(x, x_{s0}) - q^2 b_{0,x} \chi_{,x_s}(x, x_{s0})}{b_0^3 b_{0,xx}(x_{s0})}$$

そのほかの要素は全て0である。また、式(3.2a)より $b_0 u_0$ は x に関して一定となるので $q \equiv b_0 u_0$ とした。

剥離点の移動に伴う擾乱は式(3.13a)の右辺第2項に集約されており、この項を除くと Jensen の解析⁽¹³⁾ とほぼ等価な式が得られる。

境界条件についても同様にして、

$$C_u(s)y(0) = 0, \quad C_d(s)y(l) = 0 \quad \dots\dots\dots (3.14)$$

ただし、

$$C_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q + l_1 f_i + s l_1 \end{bmatrix},$$

$$C_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_2 f_i - s l_2 \end{bmatrix}$$

3.3 固有値問題 線形常微分方程式(3.13)、境界条件(3.14)からなる境界値問題を解くために、shooting法を用いる。

計算手順として、まず、定常状態の支配方程式(3.1)、(3.2)を差分法により離散化し、弾性膜の形状 $b_0(x)$ を数値的に求める。これにより方程式(3.13)の行列 **A**、**B** の各要素は未知数 s のみで表される。そして、 s の値を変えながら、上流側の境界条件を満たすベクトル $y(0)$ を用いて、方程式(3.13)を下流へ向かって数値積分し、下流側の境界条件を満たす s を見つける。

得られた固有値 s は擾乱の時間発展性を表し、 $\sigma > 0$ のとき定常解は不安定である。

4. 結果と考察

数値解析において、Conrad⁽⁴⁾ と Ohba ら⁽⁵⁾ の実験を参考にして、作動流体として $\rho=1000 \text{ kg/m}^3$ 、 $\nu=1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ の水を考え、弾性流路として、 $E=1.6 \times 10^5 \text{ Pa}$ 、 $H=0.001 \text{ m}$ 、 $\nu_m=0.5$ の二枚のゴム膜からなる、 $L=0.2 \text{ m}$ 、 $B_0=0.01 \text{ m}$ の流路を考える。また、特に断らない限り、以下の無次元パラメーターの値を基準値として用いる。

$$m=c=0, \quad h=0.1, \quad k_p=0.047, \quad k_s=56, \quad a=10,$$

$$f_i=0.00049, \quad \varepsilon_0=0.2, \quad p_c=0.5, \quad l_1=l_2=20$$

..... (4)

a の値に関しては、大きく取ると計算上 χ 、 f の値が不連続に変化してしまい、また、小さすぎても現実的ではないので、ここでは任意に $a=10$ とした。また、弾性膜の分割数 N を 200、すなわち刻み幅 Δx を 0.1 とし、式(3.13)で与えられる常微分方程式の数値解法として二次精度の Runge-Kutta 法を用いる。

図4は、コラプシブルチューブの静特性を表す差圧 $\Delta p (=p_0(0)-p_0(l))$ -流量 $q (=b_0 u_0)$ 曲線上に、定常状態が不安定になる領域を振動モード別に表示している。実線、点線はそれぞれ安定、不安定な領域を表し、曲線上の○、□、△はそれぞれ二次、三次、四次の振動モードの不安定領域の限界を表す。この場合、剥離点の移動に伴う擾乱は考慮されていない。図中、系は二

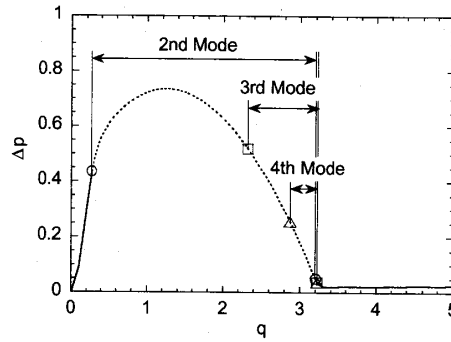


Fig.4 Stability of the steady states to each oscillatory mode, shown on the Δp - q curve : the solid and dotted curves represent stable and unstable regions, respectively

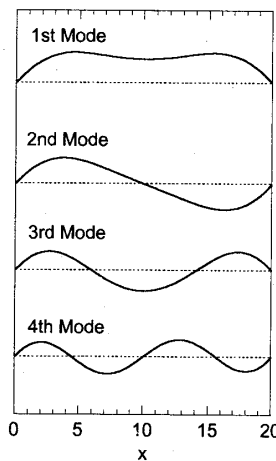


Fig.5 Shapes of the first to fourth oscillatory modes of the disturbance of a half-width of the channel, b_1 , for $q=0$

次, 三次, 四次の振動モードに対して $0.27 \leq q \leq 3.20$, $2.32 \leq q \leq 3.22$, $2.87 \leq q \leq 3.22$ の範囲で不安定になっている。二次の振動モードに対する不安定領域が支配的であり, 高次の振動モードほど不安定領域は狭くなっている。

図5に, $q=0$ に対する, 流路半幅の擾乱 b_1 の一次から四次までの固有振動モードの形状を示す。ただし, 振動モードの次数は固有振動モードが 0 を横断する回数の少ない順に決めた。また, 次数が大きいくほど対応する固有角振動数の値も大きく, 一次から四次の振動モードの固有角振動数は順に 0.088, 0.18, 0.41, 0.72 である。理論的に無限個の振動モードが存在するが, 流れの支配方程式(1.2)を導出する際に長波長近似を用いているため, 高次の振動モードを考慮することは無意味である。ゆえに, 解析では四次の振動モードまでを対象とする。

4.1 剥離点の移動に伴う擾乱の影響 表1は, 剥離点の移動に伴う擾乱の影響を調べた結果である。剥離点の移動に伴う擾乱を考慮した場合, 二次の振動モードに対して小流量側の不安定限界は減少し, また, 四次の振動モードに対して大流量側の不安定限界は増加するため, 全体の不安定領域は広がる。しかし, その影響は非常に小さい。この理由について考えてみる。固有値問題の基礎方程式(3.13)において, 行列 **A** は一つの定常解に対して不変であるので, 行列 **B** のみが剥離点の移動に伴う擾乱に関係する。しかし, 行列 **B** の唯一の要素 b_{32} ,

$$b_{32} = \frac{qf_{,x_s}(x, x_{s0}) - q^2 b_{0,xx} \chi_{,x_s}(x, x_{s0})}{b_0^3 b_{0,xx}(x_{s0})} \\ = \frac{0.5 f_{,x_s} q - 0.4 a q^2 b_{0,xx}}{b_0^3 b_{0,xx}(x_{s0}) \cosh^2 \{a(x - x_{s0})\}},$$

は剥離点の近傍でのみ有限な値をとり, その範囲外の大半の積分区間では0となる。従って, 式(3.13)の解の性質は主に剥離点の移動に伴う擾乱を含まない行列 **A** に左右され, 行列 **B** は大勢に影響しないことが予想される。このことは, 式(4)のパラメーターの値に限らず, 他のパラメーターの値についても言えることであり, 一般的に剥離点の移動に伴う擾乱は小さいことが分かる。ゆえに, 以下の解析では剥離点の移動に伴う擾乱は考慮しない。

Cancelli-Pedley は自励振動の主要な機構として剥離点の移動が重要であると主張している⁽⁸⁾。しかしながら, 本解析により, 自励振動が発生する段階, すなわち定常流が不安定化する過程においては剥離点の移動

Table 1 Unstable regions for (A) the case where perturbations induced by the movement of separation point are taken into account and (B) the case where they are not taken into account

	(A)	(B)
1st Mode	Stable	Stable
2nd Mode	0.26~3.20	0.27~3.20
3rd Mode	2.32~3.22	2.32~3.22
4th Mode	2.87~3.23	2.87~3.22
Whole	0.26~3.23	0.27~3.22

はあくまでも二次的なものであり本質的でないことが明らかになった。

また, Matsuzaki ら⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾や Cancelli-Pedley⁽⁸⁾が考慮している剥離のヒステリシスも, 微小擾乱による剥離点の移動量が少ないので, 剥離点の移動に伴う擾乱が小さいことと同様に, 定常流の安定性に関する限りほとんど影響しないものと推察される。

4.2 下流流路長の影響 下流流路長による定常状態の安定性への影響を整理したのが図6である。縦軸に下流流路の長さ l_2 , 横軸に流量 q をとっている。また, 零次から四次までの振動モードに対する不安定領域の限界がそれぞれ ∇ , \diamond , \circ , \square , \triangle の記号で示され, 各振動モードの不安定領域が(a)から(e)の図で表示されている。ただし, ここでは一次の振動モードのうち固有角振動数が0になる場合を零次の振動モードと呼ぶことにする。また, 各図において S, US はそれぞれ安定, 不安定な領域を意味する。

l_2 が比較的小さい場合 ($l_2 < 100$), 不安定領域において二次の振動モードの範囲はほぼ全域を占め((c)), また, 三次, 四次の振動モードになるにつれ不安定領域は狭くなり, それらは大流量側の不安定限界付近に偏在している((d), (e)). 続いて $100 < l_2 < 200$ で一次の振動モードに対する不安定領域が顕著になり((b)), 同時に二次の振動モードの不安定領域は中流量域から小流量, 大流量側の各々の不安定限界に向かって狭くなる((c)). さらに l_2 を増加すると ($l_2 > 200$), 中流量域において零次の振動モードに対して系は不安定になり始め((a)), 徐々にその領域は拡大し支配的になる。この時点で三次, 四次の振動モードの不安定領域は消失する((d), (e)で $l_2 > 300$ のとき)。このように, 定常解の安定性は下流流路の長さや流量の組み合わせに強く依存し, 下流流路が長くなるに伴い全体の不安定領域の範囲は狭まり, また, 定常解が不安定となる振動モードのうち支配的な振動モードは二次, 一次, 零次の順に変わる。

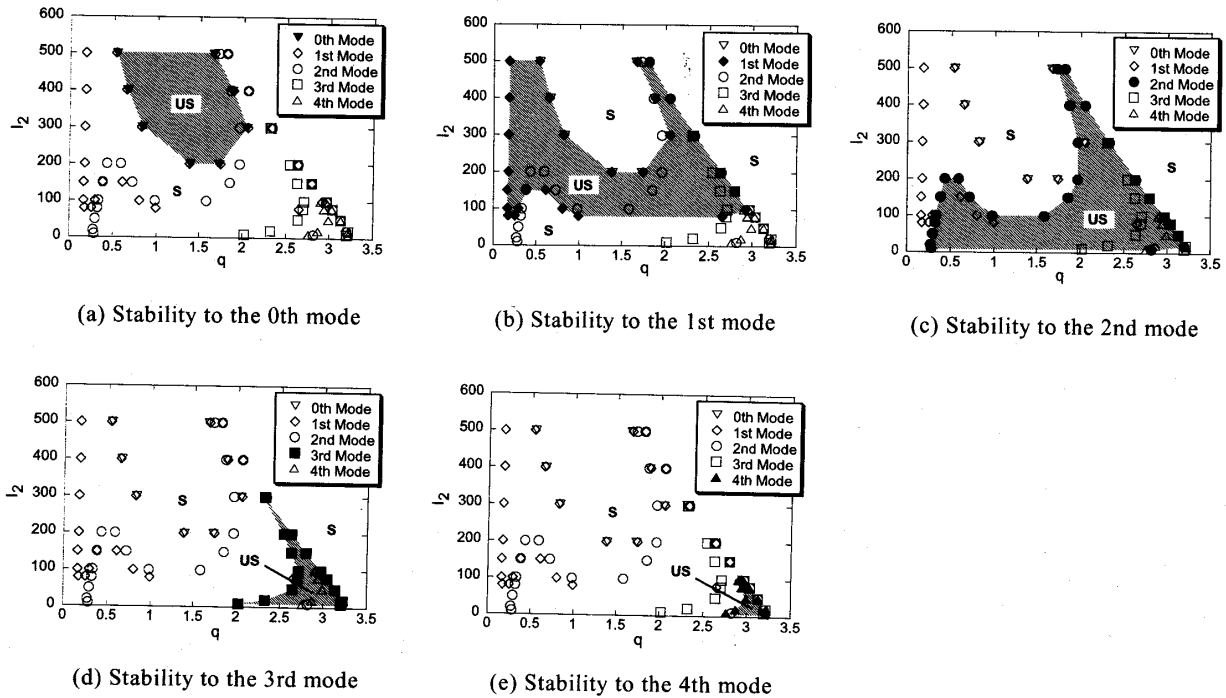


Fig.6 Effect of the length of downstream rigid channel, l_2 , on the stability of the steady solutions to each oscillatory mode

下流流路の長さや流量からなるパラメーター平面上には、単一の振動モードの不安定領域だけでなく、複数の振動モードの不安定領域が重なる部分もあり、それらの組み合わせも様々である。例えば、 $(q, l_2)=(1.5, 400)$ 付近では零次の振動モードのみ、 $(q, l_2)=(2.0, 100)$ 付近では一次、二次の二つの振動モード、さらに、 $(q, l_2)=(3.0, 20)$ 付近では二次、三次、四次の三つの振動モードに対して定常解は不安定になる。コラプシブルチューブは下流流路抵抗の変化に対して様々な自励振動のパターンを示すが⁽⁷⁾⁽⁹⁾、これは、自励振動が開始するとき、すなわち、定常状態が不安定になるときの振動モードの次数とそれらの組み合わせが少なからず反

映されているためと推測される。

不安定限界における定常状態の弾性膜の形状と振動モードの関係について考察する。図7に一次から四次の振動モードに対して定常状態が不安定となる場合の代表的な流路形状を示す。①～⑥に対応するパラメーターの値は、それぞれ $(q, l_2)=(0.17, 300)$, $(0.29, 50)$, $(0.7, 50)$, $(2.02, 10)$, $(2.87, 20)$ である。ただし、図において x 軸は弾性流路の中心軸に一致している。まず、一次の振動モードに対する小流量側の不安定領域では、弾性流路全体はつぶれ(①)、流路幅が最も狭いスロート(①の○)は流路中央($x=10$)よりやや下流に位置している。二次の振動モードに対しては、小流量側の不安定限界の極近傍では、流路全体はつぶれているが(②)、一次の振動モードの場合と比べてスロート(②の○)はさらに下流に位置し、スロートの上流に変曲点(②の●)が一つ存在する形状となる。また、不安定領域ではスロートの上流側は上に凸の形状となる(③)。さらに、三次、四次の振動モードに対しては、小流量側の不安定領域では、弾性流路の大半は膨らみ(それぞれ④、⑤)、下流端付近にそれぞれの振動モードの形状の半波長に相当する長さ程度の狭窄部が認められる。これらの弾性流路の形状はそれぞれの振動モードが励起されやすいものとなっていると考えられる。一方、大流量側の不安定限界では、前述の振

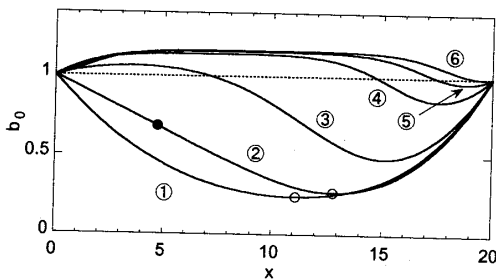


Fig.7 Representative channel shapes when the steady states are unstable to each oscillatory mode

動モード全てに共通して、弾性流路はほぼ全域に渡り膨らみ(6), 流路幅は下流端の近傍もしくは下流端で極小となっている。

以上より、不安定限界付近の定常状態においては、弾性膜の形状と不安定となる振動モードの形状との間に類似性が認められ、弾性膜の形状が定常状態の安定性に強く影響していることが分かる。

基準値である式(4)以外のパラメーターの値に対しても、 $q=0$ で流路全体がつぶれた状態から q が増加し流路全体が膨らむ状態に至るまでの間、弾性流路の形状は定性的に同じ過程を経て変化すると考えられる。従って、前述したように不安定となる振動モードが弾性流路の形状に強く依存することと合わせて考えると、流量と下流流路長からなるパラメーター平面上において、不安定となる振動モードの領域の傾向もまた式(4)以外のパラメーターの値に対しても定性的には変わらないと推測される。

結 言

二次元弾性流路モデルに対して、剥離点の移動に伴う擾乱を考慮した擾乱方程式を導出し、剥離点の移動に伴う擾乱と下流流路の長さが定常解の安定性に及ぼす影響を調べた。その結果、以下のことが明らかになった。

- (1) 剥離点の移動に伴う、剥離係数と粘性抵抗の分布の変化は安定性にほとんど影響しない。
- (2) 定常解が不安定となる振動モードは下流流路の長さや流量に強く依存し、流路が長くなるに従って支配的な振動モードは二次、一次、零次の順に変わる。

- (3) 不安定限界付近の定常状態における弾性膜の形状と不安定となる振動モードの形状との間に類似性が認められ、弾性膜の形状が定常状態の安定性に強く影響していることが分かった。

文 献

- (1) Kamm, R. D. and Pedley, T. J., *Trans. ASME, J. Biomech. Eng.*, **111**(1989), 177-179.
- (2) 池田・松崎, 機論, **60**-572, B(1994), 1226-1233.
- (3) 辻・ほか8名, 人工臓器, **7**(1978), 435-438.
- (4) Conrad, W. A., *IEEE Bio-Med. Eng.*, **BME-16**(1969), 284-295.
- (5) Ohba, K., ほか3名, *Technol. Rep. Kansai Univ.*, **25**(1984), 1-13.
- (6) Matsuzaki, Y., ほか3名, *Trans. ASME, J. Biomech. Eng.*, **120**(1998), 594-601.
- (7) Bertram, C. D., ほか2名, *J. Fluids Struct.*, **4**(1990), 125-153.
- (8) Cancelli, C. and Pedley, T. J., *J. Fluid Mech.*, **157**(1985), 375-404.
- (9) Matsuzaki, Y. and Matsumoto, T., *Trans. ASME, J. Biomech. Eng.*, **111**(1989), 180-184.
- (10) Matsuzaki, Y., ほか3名, *Trans. ASME, J. Biomech. Eng.*, **116**(1994), 469-476.
- (11) Ikeda, T. and Matsuzaki, Y., *Trans. ASME, J. Biomech. Eng.*, **121**(1999), 153-159.
- (12) Jensen, O. E. and Pedley, T. J., *J. Fluid Mech.*, **206**(1989), 339-374.
- (13) Jensen, O. E., *J. Fluid Mech.*, **220**(1990), 623-659.
- (14) 例えば, Kececioglu, I., ほか3名, *J. Fluid Mech.*, **109**(1981), 367-389.
- (15) Elad, D., ほか2名, *Trans. ASME, J. Biomech. Eng.*, **109**(1987), 1-9.