

平板乱流境界層対数速度分布領域における  
変動速度確率密度関数の特性\*

(第3報, 対数法則領域における整構造の役割)

辻 義之\*<sup>1</sup>, 宮地 圭\*<sup>2</sup>  
鈴木孝裕\*<sup>3</sup>, 中村育雄\*<sup>4</sup>Invariant Assumption of PDF Profile and Universal Velocity Law in  
Turbulent Boundary Layer

(3rd Report, Contribution from Coherent Structures to Log-law Profile)

Yoshiyuki TSUJI\*<sup>5</sup>, Kei MIYACHI,  
Takahiro SUZUKI and Ikuo NAKAMURA<sup>5</sup>Department of Energy Engineering and Science, Nagoya University,  
Chikusa-ku, Nagoya-shi, Aichi, 464-8603 Japan

In a zero-pressure gradient turbulent boundary layer, the multi-point measurement by 24 ch I-probes is performed. The relation between coherent structures and logarithmic velocity profile is studied by way of proper orthogonal decomposition technique and the stochastic estimation. It is found that the existence of coherent structures are necessary condition for the universal velocity profile, however it is not enough. Small-scale motions are also necessary to realize the log-law profile. The probability density profile in the overlap region is studied, and as a result, the invariant assumption of PDF in relation to the coherent structure is obtained. It was also evaluated how the velocity fluctuation in the log-region is affected by the coherent structures.

**Key Words:** Turbulent Boundary Layer, Log-law Region, Coherent Structure, Probability Density Function

## 1. はじめに

各種の壁面乱流について基本法則とみなされてきた対数法則について, 近年に到って対数則でよいのかベキ法則か, さらに他の形かと諸説が提出され, 一致した結論はでていない<sup>(1)~(5)</sup>. 一つ共通しているのは従来考えられていたよりレイノルズ数効果が大きいとする点である. これは, 著者らが見出したところと同一である. 圧力勾配のない平板乱流境界層について, 流れ方向変動速度のPDF(確率密度関数)に注目した解析をおこなった. 壁近くで成立するPDF方程式から対数速度分布  $U^+ = A \cdot \log y^+ + B$  を半経験的に導き,  $A$  は定数,  $B$  はレイノルズ数依存性を持つことを報告した<sup>(6)</sup>. また, 微分情報幾何学の基本量である Kullback-Leibler Divergence (以下, 適宜 KLD と略す) を用いて PDF 型を区別し, 実験データの解析から, PDF 不変仮説に基づき対数領域を抽出した<sup>(7)</sup>.

乱流場の渦スケールは多種あるが, 本問題のスケールの代表は対数領域の大きさ(高さ)である. 従

来からそれが整構造(本論文では Coherent Structure の訳語として用いる<sup>(8)</sup>)の大きさと同程度であるという報告があるが<sup>(9)</sup>, その物理的根拠や実験による詳しい解析は見当たらない. 一方, Kolmogorov の普遍相似仮説(K41 と略す)と対数法則をしばしば対応させた議論がある<sup>(10)</sup>. K41 での主要な現象論は, 高レイノルズ数での局所等方性, エネルギーカスケードと粘性の影響を受けない波数領域の存在(-5/3乗スペクトル)である. 一方, 対数領域ではエネルギー散逸と生成がほぼつりあい, 外層での大きなスケールと内層での小スケール間のエネルギー移動が規定され, K41 との類似性は確かに認められる. 対数領域での PDF 型の不変特性をもたらすものは整構造なのか, K41 の現象論的なことがあてはまるのか, 24点の多点測定データの解析をとおして考察する.

## 2. 実験条件

速度測定は圧力勾配のない二次元乱流境界層で, 単位レイノルズ数を  $U_0/\nu = 3.16, 5.27, 9.49 \times 10^5$  に設定し, 前縁より 1900mm 下流の位置においておこなった. 各条件下での本境界層の特性を表1にまとめる. プローブはI型を垂直方向に間隔1mmで24本配列したrakeを作成した(図1参照). 各I型プローブは, 直径5 $\mu$ m, 長さ1mmのタングステン線を先

\* 原稿受付 2003年6月23日.

<sup>1</sup> 正員, 名古屋大学大学院工学研究科(☎464-8603 名古屋市千種区不老町).<sup>2</sup> 石川島播磨重工業(株)航空宇宙事業本部.<sup>3</sup> (株)島津製作所航空機事業部.<sup>4</sup> 正員, 名城大学理工学部.

E-mail: c42406a@nucc.cc.nagoya-u.ac.jp

端を尖らせた 0.3mm のステンレス線にスポット溶接して作成した。定温度型熱線風速計は自作し、出力は 12bit, 10kHz で A/D 変換し、約 130 秒間記録した。図 2 は平均速度及び乱れの分布を、同一条件のもと、単独の I 型プローブで測定した結果と比較したものである。両者の一致は良好であり、本条件下での rake における各プローブの相互干渉の影響は無いものと考えられる。なお、今回の報告では rake を壁に最も近づけた測定領域の結果について報告する。

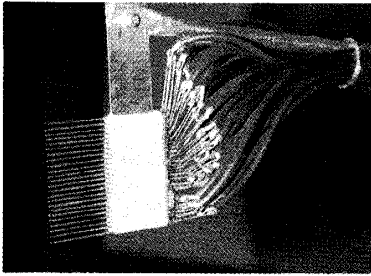


Fig. 1 24ch I-type hot wire rake.

Table 1 Boundary layer characteristics.  $U_0$ : free stream mean velocity,  $\delta$ : boundary layer thickness where the local mean velocity equals to  $0.995 \cdot U_0$ ,  $\theta$ : momentum thickness,  $R_\theta$ : Reynolds number based on  $U_0$  and  $\theta$ ,  $u_*$ : friction velocity.

$U_0$ [m/s]	$\delta$ [mm]	$\theta$ [mm]	$R_\theta$	$u_*$ [m/s]
4.52	40.5	4.18	1320	0.20
7.54	38.5	4.00	2110	0.32
13.52	36.0	3.49	3310	0.55

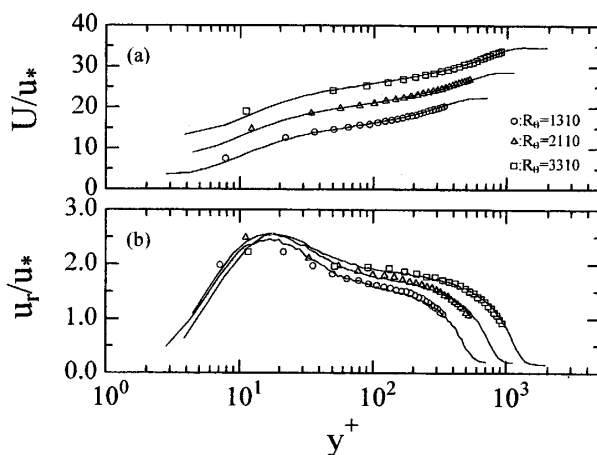


Fig. 2 (a) Mean velocity profile and (b) rms distribution. Open symbols and solid lines are measured by 24ch rake and a single I-probe, respectively. Graphs are shifted upward in (a).

### 3. 経験的固有直交展開

乱流境界層における整構造の存在は、これまでの実験的研究では明確な事実と考えられるが、その定義を一意的に与えることはできていない<sup>(11)</sup>。ここでは、乱れエネルギーの分布に寄与する主要な構造を客観的に定義できる手法として、経験的直交展開を用いる<sup>(12)</sup>。経験的直交展開 (Proper Orthogonal Decomposition とも呼ばれ、以後 POD と略す) は正規直交展開の一種であり、その特徴は基底関数を対象とする領域 I の速度場の性質を反映させて構成できるところにある。後の解析および考察のために、POD についての基本的な特性を簡単にまとめておく。

変動速度  $u'(y, t)$  は直交基底  $\phi_i(y)$  を用いて以下のように展開される。

$$u'(y, t) = \sum_{i=1}^N a_i(t) \phi_i(y), \quad (1)$$

ここに係数  $a_i$  は時間のみの関数とし、 $N$  は離散測定点数で、本実験条件では  $N = 24$  である。基底関数は領域 I における離散測定点の二点相関係数行列を求め、その行列の固有関数としてもとまる。即ち、基底関数は対象とする領域の情報に反映して構成される。相関係数行列の固有値を  $\lambda$  とし、領域内での全エネルギー  $E_T$  を以下のように定義すると、それは固有値の和としてあらわされる<sup>(12)</sup>。

$$E_T \equiv \int_I u_r(y)^2 dy = \sum_{i=1}^N \lambda_i, \quad (2)$$

ここで、 $u_r$  は変動速度の標準偏差値 ( $u_r = \sqrt{\langle u'^2 \rangle}$ ) とする。領域 I は測定領域であり、各実験条件では、 $5.6 \leq y^+ \leq 326.2$  ( $R_\theta = 1320$ )、 $8.8 \leq y^+ \leq 516.0$  ( $R_\theta = 2110$ )、 $11.1 \leq y^+ \leq 903.8$  ( $R_\theta = 3310$ ) となる。以後の解析では固有値の大きい順に番号をつけないおし、固有関数の番号もそれに一致させる。図 3 に  $R_\theta = 2110$  の場合における第 1 から第 8 基底までの形状を示す。高次になるほど振動が激しくなり、細かなスケールの乱れをとらえることができる。

POD の最大の特徴として、領域内での乱れエネルギーの分布に少数項数で収束する性質がある。式 (1) と基底の直交性を利用し、 $\langle a_i^2 \rangle = \lambda_i$  を用いて変形すると、以下の関係を得る。

$$u_r^2(y) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \phi_i(y)^2. \quad (3)$$

図 4 に示した収束の様子から明らかなように、第 5 基底までで、ほぼ乱れエネルギー分布に収束している

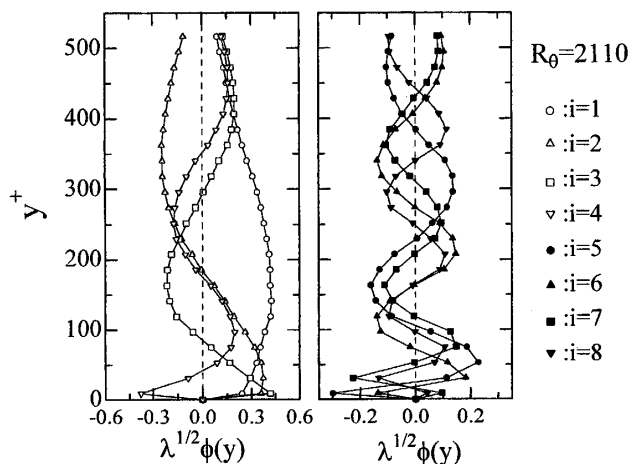


Fig. 3 POD eigenfunctions are normalized by each eigen value ( $R_\theta = 2110$ ).

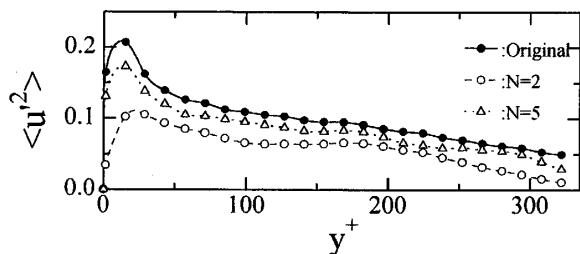


Fig. 4 Convergence to the turbulence intensity distribution by POD eigenfunctions ( $R_\theta = 2110$ ).

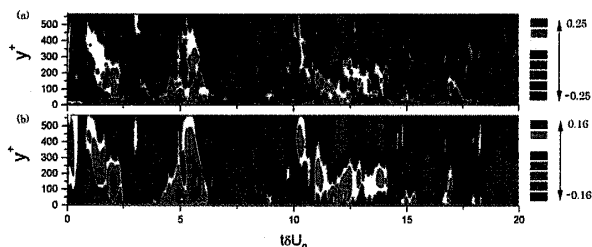


Fig. 5 (a) Instantaneous velocity field, (b) Reconstructed velocity field from first three POD modes for  $R_\theta = 2110$ .

(表2に各固有値の割合をまとめる). POD基底の形を整構造に対応させて考えるのは, このように乱れエネルギー分布への寄与の大きさを評価の基準にすることに起因している. 円柱後流や混合層などのように, 視覚的に明確な整構造(渦)が乱れエネルギーの生成に寄与している場合には, 各基底の形は整構造を再現できる<sup>(13)</sup>. しかし, 乱流境界層では単独の基底のみから特定の整構造の存在を見出すことが難しい. それゆえ, 乱れエネルギーへの寄与の割合を考慮して, 幾つかの基底の和として考えるのが妥当であろう.

図5に瞬時変動速度と第3基底までを用いて再構成した速度場を等値面で示した(層外主流速度 $U_0$ で

無次元化した値を色別にしてある). 主流速度の20パーセント近くの大きな乱れ(正および負の変動)を持った空間に局在する整構造の存在が明らかであり, それらはPODの3つの基底によって捉えられることがわかる. 表2から分かるように, 整構造が全乱れエネルギーにしめる割合は第3基底までで約70%あり, 極めて高い割合を示している. 直交基底の型はレイノルズ数依存性を示すが, 各基底の占めるエネルギーの割合は, 本実験範囲内ではほぼ一定であった. 以後, 整構造とはPODの第3基底までで再構成された速度場の構造を表すこととして議論を進める.

Table 2 The ratio of POD eigen-mode energy to the total energy.

$R_\theta$	$E_1/E_T$	$(E_1 + E_2)/E_T$	$(E_1 + E_2 + E_3)/E_T$
1320	0.375	0.579	0.704
2110	0.371	0.558	0.679
3310	0.375	0.556	0.668

#### 4. PDF 不変仮説と対数領域

乱流境界層における対数法則の存在を議論するにあたり, 著者たちはまず流れ方向変動速度の確率密度関数について考察した. その際, PDFの型が不変となることを仮定した. PDF不変仮説を実験的に確認するためには, PDF型を精度よく評価する測度が必要である. そこで, 序論で述べたようにKLDを利用してPDF型を比較し, 対数領域を抽出した<sup>(6)(7)</sup>. これまでの研究と同様に, 流れ方向変動速度( $u'$ )をそのrms値で無次元化した値( $u = u'/u_r$ )の確率分布を考える. 壁法則では摩擦速度( $u_*$ )での無次元化を考えるのが定説であるが, この研究ではrms値を代表速度としてきた. 壁からの距離 $y, y'$ における $u$ の確率分布を $P_y(s), P_{y'}(s), \{s\} = \{s_1, s_2, s_3, \dots\}$ とし, KLDは次のように定義される非負の統計量である<sup>(17)</sup>.

$$D(P_{y'} \| P_y) \equiv \sum_{\{s\}} P_{y'}(s_i) \log_e (P_{y'}(s_i) / P_y(s_i)). \quad (4)$$

確率分布 $P_y, P_{y'}$ が互いに類似しているほど小さな値をとり, 同一のときのみその値はゼロとなる. 確率分布を要素とする空間においては, KLDは距離関数の役割を果たすといえるが, 交換則は成り立たず,  $D(P_y \| P_{y'}) \neq D(P_{y'} \| P_y)$ である.

#### 5. 解析結果および考察

POD展開により抽出した構造がPDF型にどのように寄与するのか, また不変仮説との関わりについて考察する.

### 5.1 整構造のPDF型への寄与 式(1)において

て, 第  $n$  項までで再構成される無次元変動速度を  $u_n \equiv \sum_{i=1}^n a_i \phi_i / \sigma$ , そのPDFを  $P_y(u_n)$  と表記する. ただし,  $\sigma$  は第  $n$  項までで再構成される速度の標準偏差である. 本節ではPDF型に関する収束について考えてみる. 図6には  $D(P_{y'}(u_n) || P_y(u))$  の等値面を示した. カラーはKLDの分布 ( $0 \leq D(P_{y'}(u_n) || P_y(u)) \leq C_{max}$ ) を8等分して表示してある. ただし,  $C_{max} = 0.2$  とした. 以後の等値面図でも同様に  $C_{max}$  を設定して, 8等分した色の配色をおこなった. 項数が増加するに従い, 対角線を境にした上下の分布が類似することがわかる. 即ち, 確率分布  $P(u_n)$  が項数  $n$  の増加に従い  $P(u)$  に漸近することを表している. しかし,  $n=1$  のときダイバージェンスは, 横軸の  $P_y(u)$  の変化に対して一定値を示しており,  $P_{y'}(u_1)$  が壁からの距離  $y'$  によって変化していない. これは, 物理的現象を反映したものではなく, POD展開が備える1つの性質である. 各展開係数  $a_i$  ( $i=1, 2, \dots, 24$ ) の分布が標準偏差  $\lambda_i$  の Gauss 分布で良く近似できる<sup>(12)</sup>. つまり,  $P_y(u_1)$  は POD 展開する信号の如何によらず, Gauss 分布に近い分布となる. 図6(f)は  $D(P_{y'}(u) || P_y(u))$  の等値面である. 点線の正方形はPDF型が類似する領域をあらわし, 本論文で定義する対数領域に対応する. 図6(b)と(f)を比較すると, PDF型への整構造 ( $1 \leq n \leq 3$ ) からの寄与は支配的であるとは考えられない.

壁からの位置を固定した場合に, PDF型の収束の様子を図7に示す. 横軸はPOD展開の次数 ( $2 \leq n$ ) であり, 縦軸は図6と同様のKLDである.  $y^+ = 55$  と  $y^+ = 210$  におけるPDFでは収束の様子が異なるが, その値は  $O(10^{-2})$  と小さな値を示しており, POD展開の低次少数モードからの寄与が大きいと考えられる. しかし, 十分な収束のためには10項程度が必要となる.

### 5.2 整構造とPDF不変仮説, 対数領域の大きさ

ある領域内に含まれる任意の位置  $y'$  と  $y$  に対して, ダイバージェンス  $D(P_{y'}(u) || P_y(u))$  がある敷居値以下の値を示すことを条件にして, PDF不変領域を抽出した<sup>(6)</sup>. そのような領域は, 図6の等値面図内では必ず正方形として示される. 等値線に接するような正方形領域が存在することが必要となる. 例えば図6(a)では, 広い範囲にわたってダイバージェンスの小さな領域(青色の部分)が存在する. しかし, それは長方形をしており条件を満足しない. 図6(f)における正方形の点線が, 本論文で対象とする対数領域にあたる. PDF不変領域は一点波線で示したより広い範囲にわ

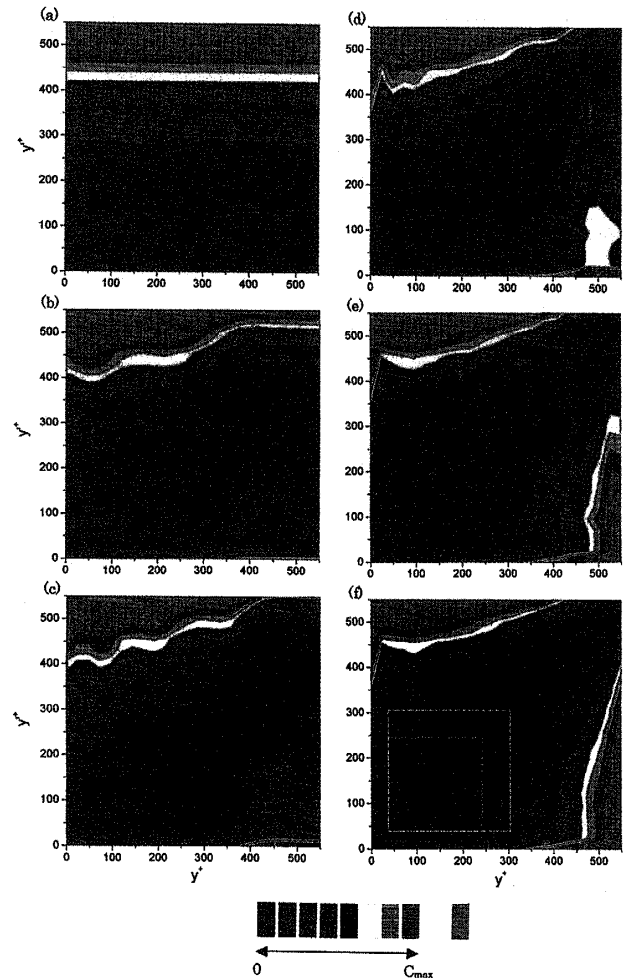


Fig. 6 Contour of KL-divergence  $D(P_{y'}(u_n) || P_y(u))$  for  $Re = 2110$ .  $P_y(u_n)$  is the probability of velocity reconstructed by Eq.(1) up to  $n$ th order. Each axis indicates the distance from the wall. (a)  $n=1$ , (b)  $n=3$ , (c)  $n=5$ , (d)  $n=7$ , (e)  $n=12$ , (f)  $n=24$ . Each color indicates the contour value from 0 to  $C_{max}$ . Here  $C_{max}$  is fixed at 0.2.

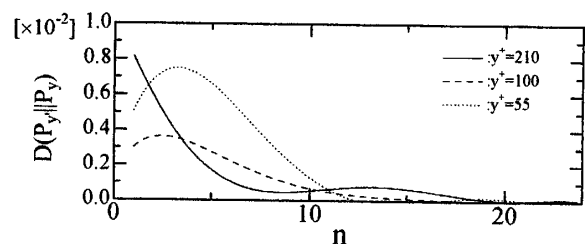


Fig. 7 KL-divergence  $D(P_{y'}(u_n) || P_y(u))$  as a function of  $n$  for  $Re = 2110$ . The location from the wall is fixed.

たって存在すると考えられるが, 前述のようにレイノルズ数が低い場合には対数領域とPDF不変領域との差異はわずかであり, ここでは議論の対象としない.

PDF 不変仮説と整構造の役割について考える. 図 8 には, ダイバージェンス  $D(P_{y'}(u_n)||P_y(u_n))$  の等値面 ( $n = 3, 5, 7, 12$ ) が表示してある. 本論文では, 整構造を POD 展開の 3 次のモードまでで再構成される変動速度  $u_c$ ;

$$u_c(y, t) = \sum_{i=1}^3 a_i(t) \phi_i(y), \quad (5)$$

と定義した.  $u_c$  の PDF には, 図 8 (a) から,  $y^+ \simeq 300$  を境にして壁側領域と外層側で大きな相違があることがわかる. 図 6 (f) と同様の正方形を書き入れると, 一点波線の正方形が外縁の等値線に接するように収まっている. これは, 瞬時速度場に内在する PDF 不変領域が, 整構造のみから構成される速度場にも存在し, その上限が整構造によって規定されていると考えられる. しかし, 詳しく見ると, 壁近く ( $y^+ \leq 30$ ) での KLD の分布は異なるし, PDF が不変となる領域は, 赤点線で示した  $300 \leq y^+ \leq 550$  にも存在する. 即ち, 特定の少数モードの寄与のみでは, PDF 不変領域を一意に決定できない. モード数  $n$  の増加とともに PDF 型の類似領域は広がるが, 図 6 (f) と比べると, やはり壁近くでの分布が再構成されていないことがわかる. PDF 不変仮説が成立するために,  $u_c$  からの寄与は必要十分ではないといえる. つまり,  $u_c$  を除いた他の項の和から求めた PDF では不変領域は存在しないが,  $u_c$  のみでは PDF 型の不変性を完全には再現できない.

それでは, 対数領域の大きさはどのようにして決まるのであろうか? 従来の研究では, 対数領域は  $y^+ \simeq 30$  から始まり, その上限 ( $\delta_L$ ) はレイノルズ数依存性を示している. 境界層厚さで無次元化した場合,  $\delta_L/\delta$  はレイノルズ数の増加に伴い減少し,  $R_\theta \simeq 5000$  でほぼ 0.2 となる<sup>(7)</sup>. 対数領域の大きさが境界層中の特定構造のスケールに対応するという考えは確かに魅力的である. 本研究で定義した整構造は, PDF 型の類似性から判断する限り, 対数領域の上限を与える何らかの役割を果たすと考えられる.

次に確率的予測法 (Stochastic Estimation) により, 整構造と対数領域との関係を考察してみる. これは, 位置  $y$  での速度変動を参照位置  $y_r$  の情報から予測する方法である. 最も簡単な場合には, 残差  $\langle |u(y) - A(y, y_r)u(y_r)|^2 \rangle$  が最小となる線形作用素  $A(y, y_r)$  を決めることになる.  $A(y, y_r)$  は, 条件付き平均  $\langle u(y)|u(y_r) \rangle$  として与えられる. 式 (1), (2) から行列  $A$  を POD 基底を用いてあらわすと,

$$A(y, y_r) = \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i \phi_i^*(y_r) \phi_i(y)}{\sum_{j=1}^N \lambda_j |\phi_j(y_r)|^2}, \quad (6)$$

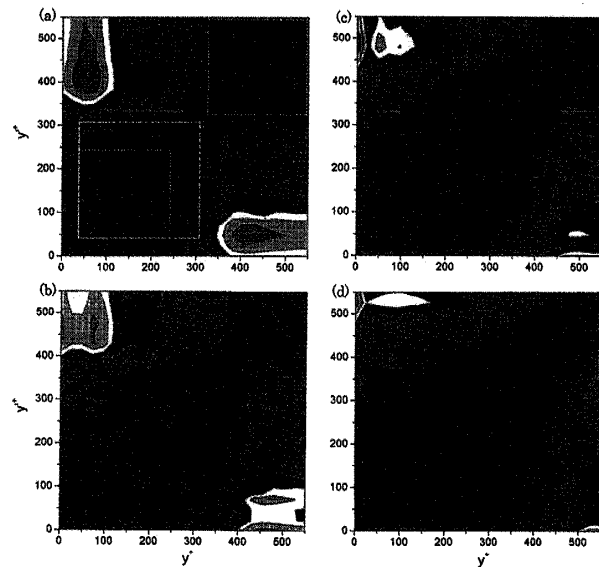


Fig. 8 The contour of KL-divergence distribution for (a) the velocity field  $u_c$ , (b) the velocity field  $u_5$ , (c) the velocity field  $u_7$ , (d) the velocity field  $u_{12}$  ( $R_\theta = 2110$ )

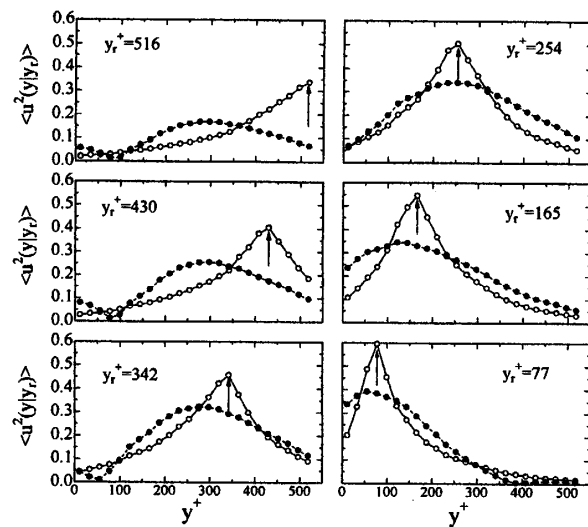


Fig. 9 The turbulence energy at the point  $y$  is predicted from the velocity at the reference point  $y_r$  by the linear stochastic estimation ( $R_\theta = 2110$ ).

となる<sup>(12)</sup>. 参照位置  $y_r$  の速度変動から予測される位置  $y$  での乱れエネルギーを  $\langle u^2(y|y_r) \rangle$  とし, また, 整構造からの寄与を  $\langle u_c^2(y|y_r) \rangle$  とする. 図 9 にそれらの計算結果を示した. 図中の矢印の位置が参照点  $y_r$  にあたる.  $\langle u^2(y|y_r) \rangle$  (O印) は, ほぼ参照点位置で最大値を持つ一方, 整構造からの寄与は必ずしもそうとは限

らない。参照点が対数領域よりも外層にある場合には、 $\langle u_c^2(y|y_r) \rangle$  (●印) は、ほぼ対数領域外縁 ( $y^+ \simeq 250$ ) で大きな値をとり、対数領域内では壁方向へ減少する。壁近く ( $y^+ \leq 50$ ) への影響は少ない。これに対して参照点が壁近くの場合には、 $\langle u_c^2(y|y_r) \rangle$  は壁近くで最大値をとる傾向にあり、対数領域へは十分な貢献をするものの、外層への影響は少ない。つまり、対数領域の大きさは、外層を通過する整構造と内層のそれが互いに影響の及ぼしあう範囲として考えるのが妥当であろう。これは、従来から言われている内層と外層の重なり領域として、対数領域を考えることと定性的に一致する。特定の大きさを持った整構造に規定されて、対数領域の大きさが決まるわけではない。

確率的予測法では、確率的に最も生起しやすい事象を議論している。図9の結果についてもそのように解釈する必要がある。外層から寄与する整構造は常に同じ大きさのものではないし、内層についても同様である。つまり、重なり領域では多くの特徴的スケールを持った整構造が混在していると予測できる。これは、Robinsonの直感的モデル<sup>(11)</sup>を客観的に裏付ける結果である。

5.3 二点同時確率密度関数の分布

これまで空間内の一点PDF型について考察してきたが、ここでは対数領域における二点での同時確率密度関数について考察する。位置  $y_1, y_2$  での確率分布を  $p(u_1), p(u_2)$  とする。対数領域では  $p(u_i)$  の型は互いに類似し、ガウス分布に近いことをこれまでの議論から明らかにした<sup>(6)</sup>。さて、一点確率密度関数は二点同時確率密度関数  $p(u_1, u_2)$  と以下の関係を満たし、

$$p(u_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(u_i, u_j) du_j, \quad i, j = 1, 2, \quad (7)$$

それらは、周辺確率密度関数と呼ばれる。 $p(u_1, u_2)$  が結合正規(ガウス)分布になるとき各周辺確率密度関数はガウス分布に従うが、逆は常には成り立たない。そこで、対数領域における同時確率密度関数の特性をこれまでと同様の手法で解析してみる。

確率密度関数  $p(u_1, u_2)$  は、Gram-Charlier級数により以下のように  $M$  次近似される<sup>(14)</sup>。

$$p(u_1, u_2) = p_G(u_1, u_2) \sum_{l+k \leq M} A_{l,k} H_{l,k}(u_1, u_2), \quad (8)$$

ここで、 $p_G(u_1, u_2)$  は結合正規分布、係数  $A_{l,k}$  は一般化した相関係数  $K_{m,n} \equiv \langle u_1^m u_2^n \rangle / (\sigma_1^m \cdot \sigma_2^n)$  の和としてあらわされ、関数  $H_{l,k}$  は  $K_{1,1}$  のみを含む基底である。 $M$  次近似とは、 $l+k > M$  の係数を全てゼロとする ( $A_{l,k} = 0$ ) ことであり、次数が高くなるほど近

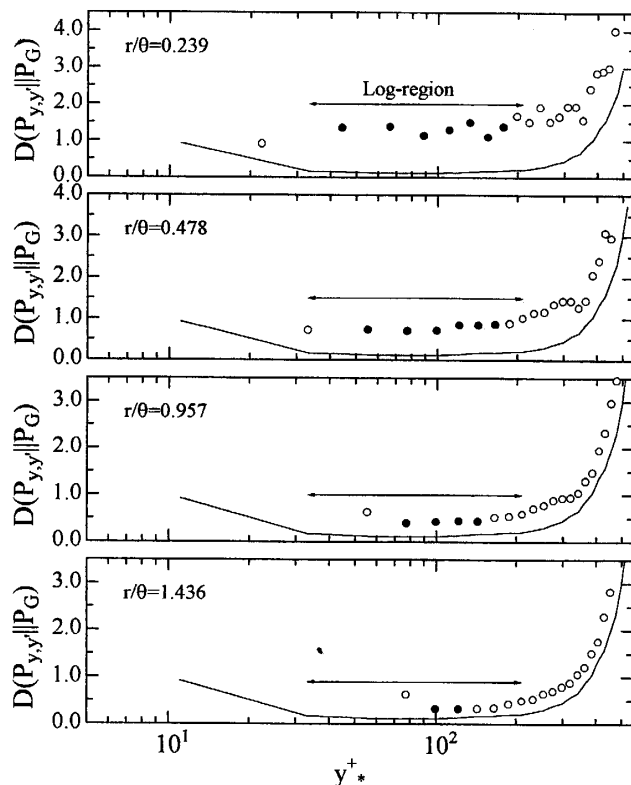


Fig. 10 KL-divergence distribution computed by the two-point velocity and Gaussian PDF ( $Re_\theta = 2110$ ).

似精度は向上する。式から明らかなように任意の整数  $m, n$  に対して、係数  $K_{m,n}$  が同一の値をもてば、確率分布  $p(u_i, u_j)$  は同一となる。

二点間の距離を  $r = |y_1 - y_2|$  とし、その中心位置を  $y_* = (y_1 + y_2)/2$  とする。 $r$  を固定して  $y_*$  を移動させたときの、二点同時確率密度関数と結合正規分布 ( $p_G$ ) との KLD を図10に示す。図中の実線は、 $r = 0$  の場合、即ち一点確率密度関数の結果 (ただし、値は10倍にして表示) である。距離  $r$  が小さな時には、KLD は大きな値を示し、 $p(u_1, u_2)$  が結合正規分布から大きくずれることを表している。図中の●印は、位置  $y_1, y_2$  が共に対数領域内に存在するときの  $y_*$  である。この場合には、KLD が各  $r$  の大きさにおいて、ほぼ一定値を示している。即ち、 $p(u_1, u_2)$  の型が互いに類似していることを表し、相関係数  $K_{m,m}$  が  $r$  を固定したときに同程度の値を示すことに対応している。この解釈に付いては、後のPOD展開の固有値分布との関連で議論する。また、 $p(u_1, u_2)$  の型が一定の  $r$  に対して類似することは、これまでの一点PDF不変仮説となら矛盾するものではなく、式(7), (8) から明らかなようにその一般的拡張と解釈できる。図11に

同時確率密度分布を示した。結合正規分布は同心円状となるから、 $r$  が小さい場合の  $p(u_1, u_2)$  が  $p_G(u_1, u_2)$  と異なることがよくわかる。

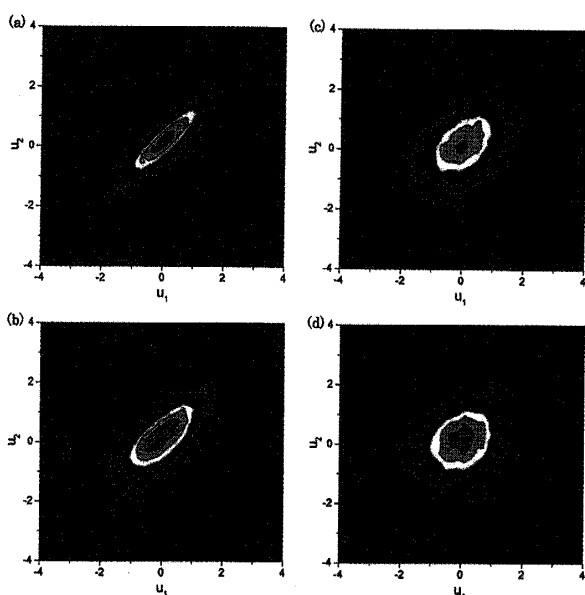


Fig. 11 Joint probability density functions. (a)  $r/\theta = 0.25$ ,  $C_{max} = 0.3$ , (b)  $r/\theta = 0.5$ ,  $C_{max} = 0.2$ , (c)  $r/\theta = 1.0$ ,  $C_{max} = 0.18$ , (d)  $r/\theta = 1.5$ ,  $C_{max} = 0.16$  ( $R_\theta = 2110$ ).

**5.4 小スケール変動の統計** 対数領域における確率分布  $p(u)$  を別の角度から考察してみたい。ランダム変数を  $X$ , その状態変数を  $x$  とする定常確率過程の確率分布は,

$$p(x) = \frac{C}{q(x)} \int \frac{r(x)}{q(x)} dx, \quad (9)$$

$$q(x) = \langle \dot{X}^2 | x \rangle, \quad r(x) = \langle \dot{X} | x \rangle, \quad (10)$$

として、数学的に厳密に表現される<sup>(16)</sup>。係数  $C$  は正規化のための定数で、 $\langle \cdot | \cdot \rangle$  は条件付き平均、 $\dot{\cdot}$  は微分をあらわす。ランダム変数を変動速度とした場合には、 $q(x), r(x)$  は速度の小スケール変動を特徴付ける統計量であり、特に  $q(x)$  はエネルギー散逸率に比例する。既報での解析により、式(9),(10)から計算されるPDFと実験値はよく一致する<sup>(7)</sup>。また、条件付平均値を以下の1次式で近似でき、

$$q(x) = \alpha_1 x + \beta_1, \quad r(x) = \alpha_2 x + \beta_2, \quad (11)$$

対数領域内ではPDF型が不変となることから、係数の分布も一定になることが予想される。実際、エネルギー散逸率に対応する  $q(x)$  の係数  $\alpha_1$  は、対数領域においてほぼ、 $\alpha_1 \approx 0$  であった<sup>(7)</sup>。これは、状態変数  $x$  (変動速度  $u$ ) の大きさによらず一定の散逸率が対数領

域内で分布していることに対応している。また、他の係数についても、対数領域内では  $\beta_1 \approx 1.0$ ,  $\alpha_2 \approx -1$ ,  $\beta_2 \approx 0$  であった。エネルギー散逸率  $\varepsilon$  は、散逸領域での局所等方向性が成り立てば、 $\varepsilon = 15\nu \langle (\partial u / \partial x)^2 \rangle$  として流れ方向の変動速度微分値から得られる(ただし、実際の計算には凍結乱流仮説を適用する)。従来の研究から、 $\varepsilon$  は壁方向にむかって単調に増加することが分かっているが、ここでの解釈は若干異なっていることに注意する必要がある。まず、 $q(x)$  の1次近似は大部分の変動速度成分について精度良い近似になっているが、確率的に稀にしか起こらない事象は除外させていること。第2に、 $\varepsilon$  の直接計算には、局所平均速度の影響が凍結乱流仮説から取り込まれるが、ここでは係数  $\alpha_1$  の大きさを問題にしている。そのため散逸率の大きさではなく、条件付きされる変動速度の大きさへの依存性を議論していることである。つまり、係数  $\alpha_1 \approx 0$  であるとは、ある位置(時刻)でのエネルギー散逸率が、その位置(時刻)での変動速度に依存せず、一定になることを意味している。そして、この傾向は対数領域内で成立する<sup>(7)</sup>。

**5.5 エネルギーカスケード** これまでの解析から、整構造は対数法則の成立に必要条件として関与しているが、対数領域の大きさは特定の大きさの整構造から決まるものではないことを明らかにした。また、対数領域内は外層および内層に起因する多くの整構造の寄与が認められるが、それらの速度スケールには依存しない様なエネルギー散逸率が分布していることを議論した。以上のような対数領域における現象論的推量をさらに推し進めるために、POD展開の特徴を利用して、エネルギーカスケードについて考える。

対象とする領域  $I$  における各POD基底が占めるエネルギーは、固有値の大きさで表される(式(2)参照)。また、基底の形は図3に示したように固有値が小さくなるにつれて、振動が激しくなり、細かな速度変動に対応するようになる。固有値については、係数  $a_i$  の分布を Gauss 分布と仮定することによって、指数的な減衰、 $\lambda_i \propto \exp(-\gamma \cdot i)$  が近似的に導かれる<sup>(12)</sup>。指数  $\gamma$  は流れ場の情報を反映して決まり、対象とする領域  $I$  の特性に依存する。また、 $\lambda$  が各モードのエネルギーを表すことから、この値は大きなスケールから小スケールへのエネルギーの伝播(カスケード)を評価すると考えられる。指数  $\gamma$  が大きいほど、エネルギーが小スケールへ伝達される割合が急激になる。解析対象  $I$  を対数領域とした場合に、指数  $\gamma$  を計算した結果を図12に示す。実験条件の範囲では、 $\gamma \approx 0.55$  であり、レイノルズ数依存性は認められない。つまり、

対数領域における普遍的特性であり、対数領域における現象論としては **K41** に類似したエネルギーのカスケードが実験データの特性にあてはまる。

対数領域内の二点同時確率密度関数  $p(u_1, u_2)$  は、二点間の距離  $r$  が一定の場合には、互いに類似となることを明らかにした (5.3 節)。二点確率密度関数と対数法則との関係は別途報告する。ここでは POD 展開との関係を考えてみる。位置  $y_1, y_2$  における二点相関係数を  $R_{1,2}$  とすると、5.3 節の解析から  $R_{i,j} = C_r \cdot f(R_\theta)$  とおくことができるであろう。ただし、対数領域内では  $C_r$  は二点間の距離  $r = |y_i - y_j|$  のみの関数、 $f(R_\theta)$  はレイノルズ数依存性である。領域 **I** を対数領域に限定した場合、指数  $\gamma$  が  $R_\theta$  依存性を持たなかった原因は、二点相関係数行列  $\mathbf{R}$  を  $f(R_\theta)$  で規格化すれば、固有値の分布は同一となるためである。即ち、この結果は固有値分布の特性を示す。

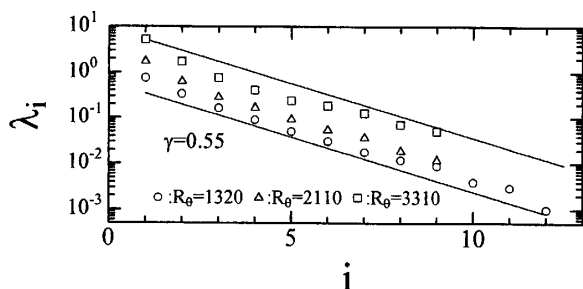


Fig. 12 POD energy cascade in log-law region.

## 6. 結 論

圧力勾配の無い平板乱流境界層において、24点の多点同時測定データに基づく解析の結果、以下の結論を得た。

- (i) POD 展開の第3基底までを用いて定義される整構造 (式 (5)) は、PDF 不変領域が形成されるための必要条件となる。従って、対数領域が存在するための必要条件ともなる。
- (ii) 対数領域の大きさは特定の整構造により規定されるわけではなく、確率的予測法から、内層及び外層に起因する整構造スケールの重なり合いと対応して形成される。
- (iii) 対数領域における二点同時確率密度関数は、二点間距離  $r$  に依存するが、 $r$  を固定した場合の PDF 型は対数領域内ではほぼ相似である。
- (iv) 対数領域内における POD 展開の固有値は、指数的に減衰し、その減衰指数  $\gamma$  はレイノルズ数によらず一定となる。

## 文 献

- (1) G. I. Barenblatt, A. J. Chorin, and V. M. Prostokishin, Self-similar Intermediate Structures in Turbulent Boundary Layers at Large Reynolds Numbers, *J. Fluid Mech.*, **410**(2000), 263-283.
- (2) W. K. George, and L. Castillo, Zero-pressure-gradient Turbulent Boundary Layer, *Appl. Mech. Rev.*, **50**(1997), 689-729.
- (3) M. Oberlack, A Unified Approach for Symmetries in Plane Parallel Turbulent Shear Flow, *J. Fluid Mech.*, **427**(2001), 299-328.
- (4) M. H. Bushmann, and M. Gad-el-Hak, Debate Concerning the Mean-Velocity Profile of a Turbulent Boundary Layer, *AIAA Journal*, **41**(2003), 565-571.
- (5) M. H. Bushmann, and M. Gad-el-Hak, Generalized Law and its Consequences, *AIAA Journal*, **41**(2003), 40-48.
- (6) 辻 義之, 中村育雄, 他2名, 平板乱流境界層対数速度分布領域における変動速度確率密度関数の特性, 日本機学会論文集 (B編), **63-613**(1997), 75-82.
- (7) 辻 義之, 宮地 圭, 他1名, 平板乱流境界層対数速度分布領域における変動速度確率密度関数の特性; 第二報 レイノルズ数依存性について, 日本機学会論文集 (B編), **68-667**(2002), 149-156.
- (8) 中村育雄, 乱流現象, 朝倉書店, (1992).
- (9) L. P. Purtell, P. S. Klebanoff, and F. T. Buckley, Turbulent Boundary Layer at Low Reynolds Number, *Phys. Fluids*, **24**(1981), 802-811.
- (10) A. S. Monin and A. M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics*, MIT, Cambridge, MA, (1975).
- (11) S. K. Robinson, Coherent Motions in the Turbulent Boundary Layer, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **16**(1991), 601-639.
- (12) P. Holmes, J. L. Lumley, and G. Berkooz, *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*, Cambridge Monographs on Mechanics, (1996).
- (13) T. Ito, Y. Tsuji, H. Nakamura, and Y. Kukita, Application of Ultrasonic Velocity Profile Meter to Vortex Shedding and Empirical Eigenfunctional Analysis, *Experiments in Fluids*, **31**(2001), 324-335.
- (14) F. Frenkiel and P. S. Klebanoff, Higher-order Correlations in a Turbulent Field, *Phys. Fluids*, **10**(1967), 507-520.
- (15) K. R. Sreenivasan and R. A. Antonia, The Phenomenology of Small-scale Turbulence, *Ann. Rev. Fluid Mechanics*, **29**(1997), 435-472.
- (16) S. B. Pope and E. C. S. Ohing, Stationary Probability Density Functions: an Exact Result, *Physics of Fluids*, **5**(1993), 1529-1531.
- (17) S. Kullback, *Information Theory and Statistics*, Wiley, London, (1959).