

平板乱流境界層対数速度分布領域における 変動速度確率密度関数の特性*

(第2報, レイノルズ数依存性について)

辻 義之^{*1}, 宮地 圭^{*2}, 中村 育雄^{*3}

Invariant Assumption of PDF Profile and Universal Velocity Law in Turbulent Boundary Layers (2nd Report, Reynolds Number Dependence)

Yoshiyuki TSUJI^{*4}, Kei MIYACHI and Ikuo NAKAMURA^{*4} Department of Energy Engineering and Science, Nagoya University,
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya-shi, Aichi, 464-8603 Japan

The logarithmic velocity region is studied in zero-pressure-gradient turbulent boundary layers on the smooth wall. We have already proposed the new definition of log-law region with using the probability distribution function in the stream-wise velocity fluctuation. In this report the Reynolds number dependence of log-law region and PDF profile is discussed based on the experimental data. The measure called Kullback-Leibler divergence is applied for distinguishing the probability profiles. And the mean velocity profile around the edge of log-law region is derived from the PDF equation, which is slightly depending on Reynolds number. The PDF profiles are characterized here by the method adopting the conditional average of the stationary stochastic process. This enables us to understand the important physical quantities which have the relation to the shape of PDF in the log-law region.

Key Words: Turbulent Boundary Layer, Probability Density Function, Universal Velocity Law

1. 緒 言

壁乱流における普遍的な平均速度分布には、古典的な対数法則が知られている。対数法則は工学的に広く受け入れられ、速度分布のみならず、壁面での摩擦抵抗係数を評価するうえでも利用されてきた。しかし、近年この対数法則の存在に疑問を呈する研究が報告されている。それらは、普遍法則としてべき乗速度分布を支持する研究である^{(1)~(3)}。管内流ではべき乗速度分布が用いられることはあったが、それはあくまで測定データに基づく経験的なものにすぎなかった。BarenblattらやGeorgeらのように、何らかの仮定や近似を用いて理論的な根拠を示したことは、べき乗則を再評価する機会を与えてくれたといえる。

通常の室内実験で測定される平均速度分布が対数速度分布になるか、べき乗速度分布になるかを議論する場合、測定値そのものをグラフ上でフィットしてみても、さほどの説得力をもってそのいずれが正しいかを

主張することは難しいであろう。なぜなら、いずれの平均速度分布も誤差範囲内で実験結果によく一致するからである。

そこで、著者らは変動速度場の統計量に基づき、平板乱流境界層における普遍速度分布型を議論してきた⁽⁴⁾⁽⁵⁾。レイノルズ方程式から明らかのように、平均速度分布には変動速度の効果が内在されるからである。変動速度の統計は確率密度関数(以後、PDFと略記する)に集約されるため、PDF型の変化に注目した。変動速度rms値により無次元化される速度のPDF型が類似する領域、すなわち、変動速度分布が相似性を有することを仮定し(PDF不変仮説と呼ぶ)、著者らは壁近くで成立するPDF方程式から対数速度分布が半理論的に導かれることを明らかにした⁽⁴⁾⁽⁵⁾。本研究では普遍速度分布の存在と変動速度場の相似性に関して、そのレイノルズ数依存性を調べ、対数領域におけるPDF型を客観的に評価し、流体物理量との関連について議論した。平板乱流境界層における対数法則の存在は、大坂ら⁽⁶⁾やOsterlundら⁽⁷⁾の研究でも実験的に支持されている。しかし、レイノルズ数の大きな後者の報告では、対数法則の成立する範囲やカルマン定数などが通常の値と異なり、普遍法則としての位置付けにいくぶんの議論の余地が残されている。

* 原稿受付 2001年8月13日。

^{*1} 正員, 名古屋大学大学院工学研究科(〒464-8603 名古屋市千種区不老町)。^{*2} 石川島播磨重工業(株)。^{*3} 正員, 名城大学理工学部。

E-mail: c42406a@nucc.cc.nagoya-u.ac.jp

2. 実験条件

測定は圧力こう配のない二次元乱流境界層において、おもに前縁より1900 mm下流の位置で行った。測定条件は、層外主流速度 U_0 と動粘性係数 ν から単位レイノルズ数を $U_0/\nu=3.16, 5.27, 7.38, 9.49, 11.6, 13.71 \times 10^5 \text{ m}^{-1}$ に設定した。境界層は前縁シャープエッジより150 mm下流においてトリッピングワイヤ(直径1 mm)により、乱流境界層へと遷移させている。I型およびX型プローブは定温度形熱線風速計により駆動させ、同一条件下での数回の測定を行った。プローブ受感部は直径5 μm 、長さ1 mmおよび直径3.1 μm 、長さ0.6 mmのタングステン線を先端をとがらせた0.3 mmのステンレス線にスポット溶接して作成した。各測定データ出力は12 bit, 10 kHzでA/D変換し、約30 s記録した。散逸スペクトルから本測定条件での空間分解能を見積もると、Kolmogorovスケールの約2~5倍であった。

3. PDF不変仮説と対数領域

本章では変動速度のPDF型に注目した解析から、対数法則の導出とその成立範囲に関して議論する。対数法則に関する研究では、これまで多くの成果が報告されているが、対数法則の成立範囲に関して明確な議論がなされたことはない。

3.1 PDF方程式と平均速度分布 乱流境界層における対数法則の存在とその領域を議論するにあたり、著者たちは既報⁽⁴⁾⁽⁵⁾において流れ方向変動速度の確率密度関数型について考察した。PDF型が不変となることを仮定して、壁近くで成立するPDF方程式から対数法則を半理論的に導けることを示した。しかし、既報では参照した実測データが少なく、また壁近くでの精度も十分でなかったため、レイノルズ数依存性に関する議論を十分に行うことができなかった。そこで、読者の便宜のためにPDF不変仮説について簡略に説明し、実測データとの比較、理論の拡張をする。

流れ方向の変動速度 u' を無次元化する代表速度として、変動速度のrms値 u_r を考える。一点確率密度関数(fine-grained probability density function)は、デルタ関数を用いて以下で定義される⁽⁶⁾。

$$P_f(u_P) \equiv \delta(u - u_P), \quad u = u'/u_r \quad (1)$$

ここで、 u_P は状態変数である。通常、我々が用いる確率密度関数は、式(1)のアンサンブル平均として定義されている。

$$f(u_P) \equiv \langle P_f(u_P) \rangle \quad (2)$$

確率密度関数は位置の関数でもあるから、本来は、

$f(u_P, x, y, z)$ と表記されるべきであるが、以下では、省略して式(2)のように記述する。

流れ方向成分のNavier-Stokes方程式を式(1)の u に関する表記として変形し、また一点確率密度関数を導入した方程式を導く(PDF方程式)。方程式は、PDF不変仮説：

$$\partial f / \partial x = 0, \quad \partial f / \partial y = 0 \quad (3)$$

を用いて変形され、最終的には平均速度分布に関する以下の式が得られる(ただし、 z 方向は流れ場の二次元性から考慮しない)。

$$\frac{\partial^2 U^+}{\partial y^{+2}} - C \cdot u_r^+ \cdot \frac{\partial u_r^+}{\partial y^+} = 0 \quad (4)$$

ここで、 $C = -\langle u'v' \rangle / u_r^2$ であり、上付きの+は、慣例に従って、内層変数での無次元化を表す。よって、対数領域における u_r^+ の分布と、 C の値が確定すれば、式(4)から平均速度分布を導くことができる。両者ともに実測データの情報から得られるが、近似式として以下の関数型を提示した。

$$u_r^+ = \alpha + \beta_1(y^+ - \gamma_1)^{-1} + \beta_2(y^+ - \gamma_1)^{-2} + \dots \quad (5)$$

$$C = C_1 + \varepsilon \cdot \log_{10}(y^+ / p), \quad p = 10^{C_1/\varepsilon} \quad (6)$$

ここで、変動rms値の有理展開式(5)は $y^+ = \gamma_1$ で発散するため、単調減少する領域； $y^+ > \gamma_1$ で有効となる。この領域は、粘性応力に比べてレイノルズ応力が支配的な範囲を対象としており、それゆえ、 γ_1 は粘性底層外縁の位置($\gamma_1 \cong 5$)とした。定数 α は、 $y^+ \rightarrow +\infty$ における u_r^+ の漸近値である。式(6)中の C_1 は後述するが、 $C_1 = 0.2$ であり、 p は $C = C_1$ となる壁からの位置を表す。また、 ε は、 $O(10^{-1})$ 程度のレイノルズ数に依存する値である。

式(4)~(6)から、 $y \gg \gamma_1$ において、対数速度分布が導かれる。なお、式(5)、(6)の測定結果との比較、パラメータのレイノルズ数依存性に関しては後ほど議論する。

3.2 対数領域の定義 PDF不変仮説[式(3)]の基に、対数速度分布がPDF方程式から導かれることを略説した。このことは、すなわち、無次元化変動速度 u のPDF型が同一となる領域が、対数領域の定義となることを示唆している。ただし、実験より得られるPDFが厳密に同一形となることはなく、ここでは互いに類似することを意味する。PDF型の類似度を判断する客観的指標として、カルバックライブラーのダイバージェンス(Kullback-Leibler Divergence 以後、KLDと略す)を用いる⁽⁹⁾。KLDは微分情報幾何学でPDFを族とする関数空間の距離関数になる。位置 y および y' における離散化PDFを $P_y(s)$,

$P_y(s)$ とすると、ただし $\{s\} = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n\}$, KLD は

$$D(P_y \| P_{y'}) \equiv \sum_{(s)} P_y \cdot \ln(P_y / P_{y'}) \dots\dots\dots (7)$$

によって定義される。式から明らかなように、2点の確率分布が同一のとき、数値は零となり、また、両者の差異が大きいほど大きな値をとる。

PDF 型が互いに類似する領域 $[y_1, y_2]$ が KLD を用いて抽出される。

$$D(P_y \| P_{y'}) \leq \Gamma_{th}, \forall y, \forall y' \in [y_1, y_2] \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 Γ_{th} は PDF の類似する度合いの強さを規定すると考えられる。しかし、式(8)を満たす領域は Γ_{th} を固定したとしても、無数に存在するため、与えられた Γ_{th} に対して2点間の距離 $L = y_2 - y_1$ が最大となる場合を $[y_1^M, y_2^M]$ とすると、 y_1^M および y_2^M は一意的に確定する⁽⁶⁾。

さて、 Γ_{th} を増加させると、 y_2^M は単調に増大するが y_1^M は単調減少したのち一定値に漸近することを既報で報告した⁽⁴⁾⁽⁵⁾。これは、壁近くと内層での PDF 型の差異が大きいためである。そこで、 y_1^M が最初に一定値に達したとき、 $[y_1^M, y_2^M]$ を対数領域として定義した。その妥当性については3・3節で議論する。

本解析では $\Gamma_{th} = 0.015$ に固定して、すべての実験条件におけるデータ解析を行った。なお、この0.015という値はPDFの離散化個数 n に依存するため、絶対不変な数量ではない。以後、抽出された対数領域の下限を δ_s 、上限を δ_L と表記する。図1には本方法により得られた対数領域の範囲をレイノルズ数に対して表示した。上限は運動量厚さの2倍程度であり、下限はレイノルズ数依存性が大きいことがわかる。

3・3 対数領域の妥当性 PDF 不変仮説に基づいて抽出された対数領域の妥当性について考察する。

平均速度分布から摩擦速度を算出する方法として、Clauser Chart 法が知られている。この方法は、対数法則の存在を前提にして、対数法則が存在する領域において、次式

$$\frac{U}{U_0} \sqrt{\frac{2}{C_f}} = A \cdot \log_{10} \left(\frac{U_0 y}{\nu} \sqrt{\frac{C_f}{2}} \right) + B \dots\dots (9)$$

を測定データにフィットさせることによって局所摩擦係数を算出する方法である。式から明らかなように対数速度分布と等価である。パラメータ A, B は通常は固定されるが、本解析では後に述べる理由から、 A のみを一定値 $[=1/(\kappa \log_{10} e), \kappa = 0.41]$ として扱う。式(9)を対数領域 $[\delta_s, \delta_L]$ においてフィットして求まる局所摩擦係数と Karman-Schonenherr および大坂ら⁽⁶⁾ によって提示された経験式を図2に表示した。本結果は $Re > 3000$ でこれらと一致する。

レイノルズ数が低い場合には、壁近くの平均速度分布(バッファーレイヤから対数領域の初めにかけて)が少し膨らむバンプ部分が認められる。仮にこの領域を含めて式(9)をフィットすると、局所摩擦係数は Karman-Schonenherr 式により近づくことになる。しかし、バンプ部分は PDF 不変仮説に基づき定義される対数領域からは除外されるため、低レイノルズ数において得られる結果が、これら経験式と相違したものと考えられる。なお、大坂らは直接測定から信頼性の高い局所摩擦係数を測定しており⁽⁶⁾、Karman-Schonenherr 式に対する修正式の提案が注目される。

以上より、本手法により抽出される対数領域 $[\delta_s, \delta_L]$ は、 $Re > 3000$ において客観的根拠をもつ妥当な範囲と考えられる。なお、以降の議論では、摩擦速度 u_* を用いた無次元化表示を用いるが、その際の u_* には、以上の理由から Karman-Schonenherr 式から定まる値を用いた。

内層変数で無次元化した場合の対数領域を図3に示した。対数領域の下限は、レイノルズ数の増加とともに $y^+ \cong 30$ に漸近する。上限は単調増加するが、その値は、Barenblatt らがべき乗則の存在を仮定している領域(図中の実線)に極めて近いのは興味深い。また、大坂らは境界層厚さでの無次元値 δ_L/δ を議論しており⁽⁶⁾、本結果と比較するとレイノルズ数が低い場合での差異が顕著となる。

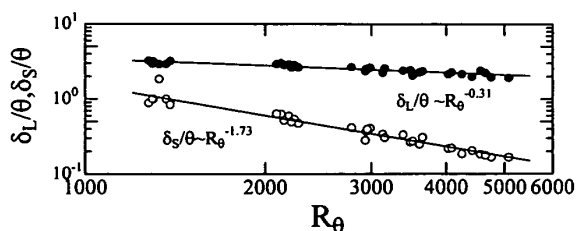


Fig. 1 Log-law region $[\delta_s, \delta_L]$ defined by the invariant assumption of PDF, which is normalized by momentum thickness

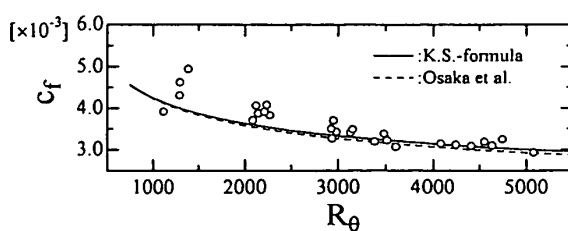


Fig. 2 Local skin friction is computed by fitting Eq. (9) over the log-law region $[\delta_s, \delta_L]$, and the empirical formulas are indicated by lines

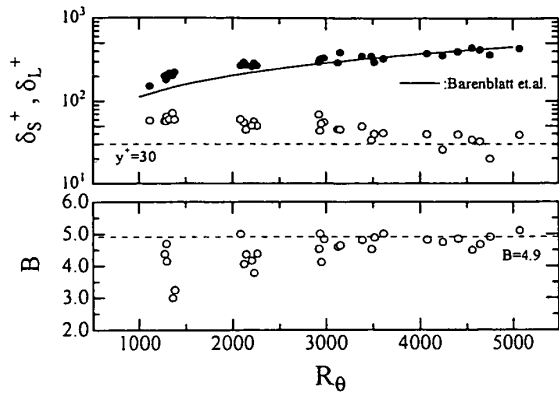


Fig. 3 Log-law region defined by the invariant assumption of PDF and the additive constant as a function of Reynolds number

対数速度分布の切片 B は、圧力こう配のない平板乱流境界層において、レイノルズ数が大きい場合には、 $B \cong 4.9$ が報告されている⁽⁶⁾。本研究ではレイノルズ数の増加に伴い単調増加し、上記の値に漸近する。レイノルズ数が低い場合には大坂らの傾向と異なるが、これはバッファレイヤ外縁に認められるバンプ部分(前述)を対数領域として含めるかどうかによる。バンプ部を対数領域の一部とみなすと、切片 B は大きな値を示す。著者らの既報においても、その傾向は認められた⁽⁴⁾⁽⁵⁾。しかし、レイノルズ数が大きい場合 [$R_\theta \cong O(10^4)$] には、対数領域の始まりが $y^+ \cong 150$ となること、また、切片も通常値より小さくなることが報告されている⁽⁶⁾。これらの結果と本解析結果を統一的に解釈することは今のところ困難である。

4. 対数速度分布形の導出とその拡張

本章では、実測データの近似式として提案された式(5)、(6)について考察し、式(4)からの対数速度分布の導出とその拡張について議論する。

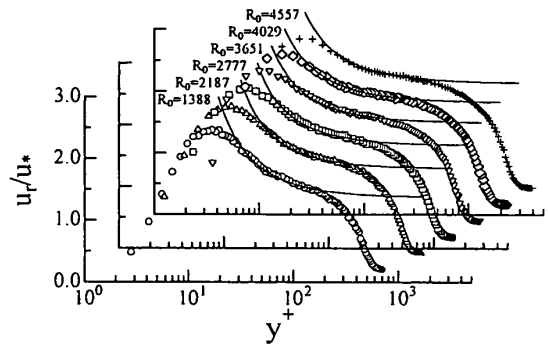
4.1 変動速度 rms 値とレイノルズ応力分布

u_r^+ が単調減少する $y^+ > 30$ の範囲において、式(5)の第3項までを用い、最小二乗法により係数を求めた[図4(a)参照]。レイノルズ数の増加に伴い分布形状の変化が認められるが、そのいずれも式(5)の関数型があてはまる。係数 α と β_1 のレイノルズ依存性は、

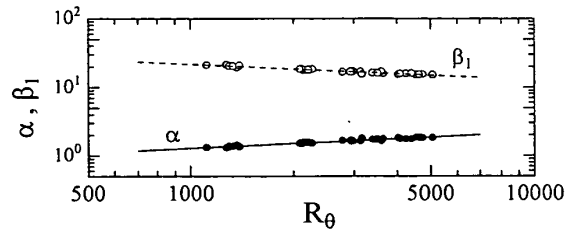
$$\alpha = e^{4.654 \cdot R_\theta^{-0.228}}, \beta_1 = e^{-1.322 \cdot R_\theta^{0.228}} \dots (10)$$

とべき乗近似が可能である。つまり、両者の積はレイノルズ数に依存せず $\alpha\beta_1 \cong 28.0$ となる。

次にレイノルズ応力分布について考える。平板乱流境界層においては、Townsend が用いた structure parameter; $a_1 \equiv -\langle u'v' \rangle / [u_r^2 + v_r^2 + w_r^2]$ が対数領域で $a_1 \cong 0.13$ と見積もられることが報告されている。



(a) Normalized turbulence intensity and the interpolation formula presented by Eq.(5)



(b) Reynolds number dependence of α and β_1

Fig. 4

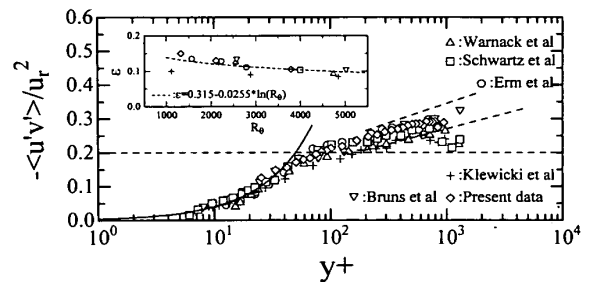


Fig. 5 Normalized Reynolds stress distribution as a function of the distance from the wall

また、Ferenholz がレビューしたデータ⁽¹⁰⁾を参考にして変動 rms 値の大きさを、対数領域において、 $v_r/u_r = 0.45$, $w_r/u_r = 0.65$ と近似することができれば、無次元化レイノルズ応力 [式(6)] は、

$$C = a_1 \cdot \{1 + (v_r/u_r)^2 + (w_r/u_r)^2\} = 0.2 \dots (11)$$

となる。図5には比較のために他の測定者による結果も含めて表示した。図5中の実線は式(6)である。これらの実測データから判断する限り、対数領域 [δ_s, δ_L] の中心部分において $C \cong C_1$ が、第1近似として成り立つ。対数領域上限から後流領域にかけては、式(6)の右辺第2項からの寄与を考慮する必要がある。また、 ϵ はレイノルズ数の関数であり、参照した実験データの補間から以下のように見積もられる。

$$\epsilon = 0.315 - 0.0255 \cdot \ln(R_\theta) \dots (12)$$

一方、対数領域の下限近くからバッファレイヤにか

けて, C_1 からのわずかなずれが認められる。それらは, 壁近くにおいて, 乱れの強度が $u_r \propto y$, $-\langle uv \rangle \propto y^3$ と振舞うことから⁽¹⁰⁾,

$$C = -\langle u'v' \rangle / u_r^2 = \lambda \cdot y^+, \lambda = O(10^{-3}) \dots (13)$$

と見積もることができよう。すなわち, C については, 対数領域両端においての y^+ 依存性が無視できない。

4.2 対数速度分布とその拡張 微分方程式(4) および, 式(5), (6)から対数速度分布が導出されることを示した⁽⁴⁾⁽⁵⁾。これは, 対数速度分布の存在と PDF 不変仮説が等価であることを示したことになる。このとき, 対数速度分布:

$$U^+ = A \cdot \log_{10}(y^+) + B, A = \alpha \beta_1 C_1 \dots (14)$$

の傾きは, 式(10), (11)から, レイノルズ数に依存せず $A \cong 5.6$ であるが, 切片 B は導出の過程からレイノルズ数依存性をもつことを示した。これが, 3.3節における Clauser Chart 法の任意定数 B の取扱いを規定した理由である。

さて, パラメータ C は微分方程式(4)を解く過程で, 対数領域内では一定値 C_1 をとるものとして扱った。しかし, 測定データ(図5)からわかるように, 対数領域の上限および下限においては, C の y^+ 依存性を考慮したほうがよい。そこで, 式(6), (13)を用いて, 式(4)を解いてみる。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U^+}{dy^{+2}} &= C \cdot u_r \cdot \frac{du_r^+}{dy^+} \\ &= [C_1 + \varepsilon \cdot \log_{10}(y^+/b)] \\ &\quad \times [\alpha + \beta_1(y^+ - \gamma_1)^{-1} + \dots] \\ &\quad \times [-\beta_1(y^+ - \gamma_1)^{-2} - 2\beta_2(y^+ - \gamma_1)^{-3} + \dots] \end{aligned} \dots (15)$$

上式を変形して整理すると,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U^+}{dy^{+2}} &= - \left[\alpha \beta_1 \varepsilon + \frac{2\varepsilon \beta_1^2}{y^+ - \gamma_1} \right] \\ &\quad \times \frac{\log y^+}{(y^+ - \gamma_1)^2} + O(y^{+4}) \dots (16) \end{aligned}$$

となり, $y^+ \gg \gamma_1$ で省略できる高次項を無視して, 上式を順次積分すれば, 平均速度分布が導かれる。

$$\begin{aligned} U^+ &= \frac{\alpha \beta_1 \varepsilon}{2} \cdot (\log y^+)^2 + \frac{\varepsilon}{2} \left(2\alpha \beta_1 - \frac{\beta^2}{y^+} \right) \cdot \log y^+ \\ &\quad - \frac{3\beta_1^3 \varepsilon}{4} \cdot \frac{1}{y^+} + D \dots (17) \end{aligned}$$

ここで, D はグラフを上下移動するための任意定数である。壁から離れた位置においては $1/y^+ \cong 0$ と考えられ, 右辺第1項と第2項が重要となる。上限での対数側からのずれはおもに第1項に起因している。

一方, 対数領域下限においては, 式(13)を用いて同様に式変形すると,

$$\begin{aligned} U^+ &= \lambda \beta_1 \cdot (2\alpha \gamma_1 + \beta_1 - \alpha y) \cdot \log(y^+ - \gamma_1) \\ &\quad + \lambda \beta_1 \cdot [\alpha(y^+ - \gamma_1) - \beta_1 \gamma_1 / 2(y^+ - \gamma_1)] \\ &\quad + E_1 \cdot y^+ + E_2 \dots (18) \end{aligned}$$

ここで, E_1, E_2 は定数である。その他のパラメータは, R_0 が決めれば一意的に与えられる。式(14)は対数領域, 式(17)は対数領域上限から後流域に至る部分を, 式(18)は対数領域下限からバッファーレイヤに至る部分に対応する。図6には測定データとの比較を示した。

5. 対数領域における確率密度関数の特徴

対数領域においては, PDF 型が互いに類似することをみてきた。本章ではその分布形状の特性とレイノルズ数依存性について考察する。

著者らは PDF 型を特徴付けるために, その一般型として提案された関数について考察した⁽¹¹⁾。

$$\begin{aligned} P(u) &= c_1 \cdot \exp \{ -c_2 [\sqrt{c_3^2 + (u - c_4)^2} \\ &\quad - (u - c_4)]^{c_5} / 2 \\ &\quad - c_6 [\sqrt{c_3^2 + (u - c_4)^2} - (u - c_4)]^{c_7} / 2 \} \dots (19) \end{aligned}$$

ここで, c_1 は規格化定数, $c_2 \sim c_7$ は PDF 形状を表すパラメータである。正規分布, 指数型, べき型などの分布を表現でき, 特に分布のすそ野を評価するのに有用である。例えば, $u \rightarrow +\infty$ のとき,

$$P(u) \approx c_1 \cdot \exp \{ -c_2 |u - c_4|^{c_5} / 2^{c_5 - 1} \} \dots (20)$$

となり, ばらつきの多い測定データを補間するのに便利である。対数領域内での各係数の変化を調べたが, その詳細に関しては文献(11)を参照されたい。

対数領域内では PDF 型がガウス分布に近いことから, Cram-Charlier 級数展開したときの係数の変化についても調べた⁽⁴⁾⁽⁵⁾。

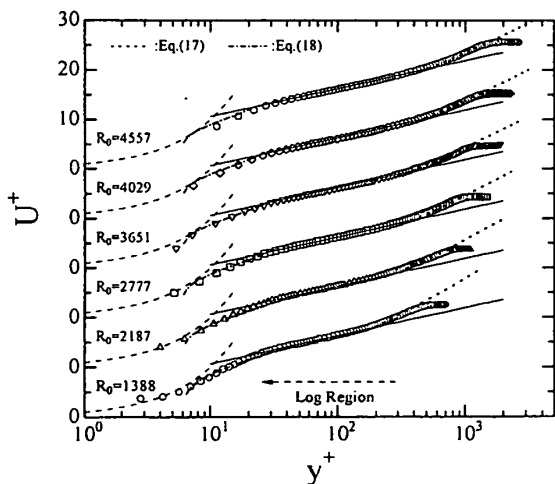


Fig. 6 Mean velocity profile defined by Eqs(14), (17), (18) and the experimental data (symbols)

$$P(u) = d_0 \phi(u) + \frac{d_1}{1} \phi^{(1)}(u) + \dots + \frac{d_n}{n!} \phi^{(n)}(u),$$

$$\phi^{(n)}(u) = (-1)^n H_n(u) \phi(u) \dots \dots \dots (21)$$

ここで, $H_n(x)$ はエルミート関数, $\phi(x)$ は標準正規分布関数で, $\phi^{(n)}(x)$ は直交基底となる. 各係数は

$$d_0 = 1, d_1 = d_2 = 0, \\ d_3 = -m_3/u^3, d_4 = m_4/u^4 - 3 \dots \dots \dots (22)$$

となり, 三次, 四次のモーメント; m_3, m_4 の関数として表される. 五次以降の係数についても同様である. $P(u)$ がガウス分布に一致する場合には, 三次以降の係数はすべて零となる. それゆえ, 確率密度関数型のガウス分布からの偏差は, 各係数の分布から定量的に評価される. 対数領域内での解析結果については, 文献(5)を参照していただき, ここではレイノルズ数依存性について報告する.

対数領域内における各係数値はほぼ一定と考えられるので, その平均値を用いて再構成される PDF 型;

$$P(u) = \langle d_0 \rangle \phi(u) + \frac{\langle d_1 \rangle}{1} \phi^{(1)}(u) + \dots + \frac{\langle d_n \rangle}{n!} \phi^{(n)}(u) \dots \dots \dots (23)$$

の変化を図7に示した. ここで, 構成には $n=10$ 次までの係数を用いている.

PDF 型は平均速度値付近でわずかに正にかたより, ガウス分布よりも小さな値を示している. また, レイノルズ数の増加に伴い, 正の変動確率は減少, 負の確率は増加しており, ガウス分布(対称分布)へ近づく傾向を示す. この傾向は, Gram-Charlier 級数での奇数次係数が零に漸近することに対応する. これに対して確率の裾野 ($2.0 < |u|$) では, 逆の傾向を示している. 正の変動確率はレイノルズ数の増加に伴い, ガウス分布に近づくが, 負の変動確率はガウス分布からの差異が大きくなる.

レイノルズ数の高い大気乱流場の変動速度 PDF 型を観察すると, 負の確率のすそ野はガウス分布よりも小さく, 正の部分はガウス分布に一致する. これは上

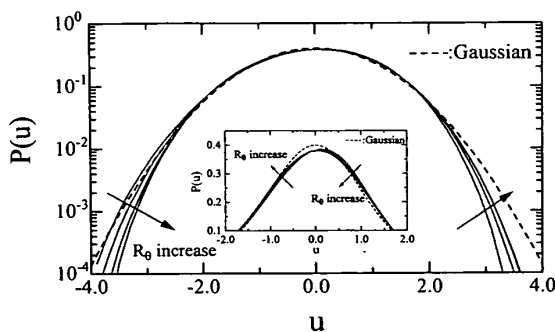


Fig. 7 Probability density functions in the log-law region and their Reynolds number dependence

図の傾向に一致している. また, 平均速度付近でのガウス分布からのわずかな偏差は, 他の流れ場と比較しても特徴的であり, 対数領域における特性と考えられる.

以上の解析から明らかなように, PDF 不変仮説は絶対不変な PDF 型を想定しているのではなく, レイノルズ数依存をもつ PDF 型が, 対数領域内では互いに類似することを述べている. また, レイノルズ数が十分に大きくなれば ($Re \gg 3000$), PDF 型は普遍的な形状へと漸近することが期待される.

PDF 型の客観的な特徴づけは上記の二方法で十分と考えられる. しかし, 各係数と流体物理量との関係があいまいなため, 現象を理解するための困難さがある. そこで, 流体物理量と対数領域における PDF 型との関係を考察してみたい.

定常確率過程の確率分布が, ランダム変数の条件付統計量により一意的に構成される表記を用いる⁽⁸⁾.

$$P(x) = \frac{F}{q(x)} \exp \left[\int_0^x \frac{r(x')}{q(x')} dx' \right] \dots \dots \dots (24)$$

$$q(x) \equiv \langle \dot{X}^2 | X=x \rangle / \langle \dot{X}^2 \rangle \dots \dots \dots (25)$$

$$r(x) \equiv \langle \dot{X} | X=x \rangle / \langle \dot{X}^2 \rangle \dots \dots \dots (26)$$

ここで, ランダム変数 X は無次元化変動速度 u とし, 上付きの記号 \bullet は時間に関する微分を表す. パラメータ F は規格化定数である. 関数 $q(x)$ は変動速度の時間微分の二乗であるから, 等方性と凍結乱流を仮定したときの条件付エネルギー散逸率に対応する. また, 関数 $r(x)$ は条件付加速度に対応すると考えられる. 特に前者は流体乱流の運動を考えるうえでは重要な情報を含む. 図8に境界層中のいくつかの測定位置での式(24)による近似結果を示すが, 確率分布のすそ野まで良好に表現されている.

確率密度関数型の特徴は, 関数 $q(x)$ と $r(x)$ がど

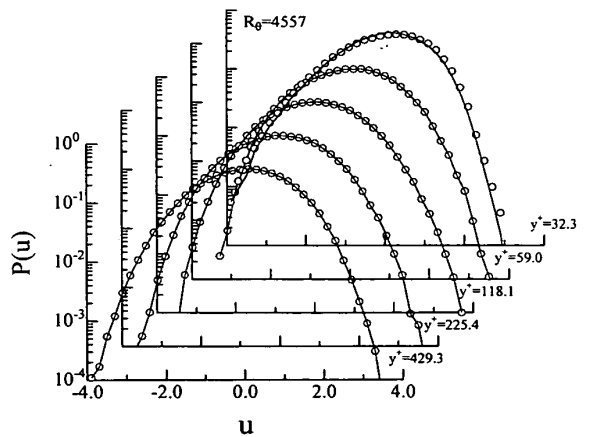


Fig. 8 Probability density function (circle) and the reconstructed PDF defined by Eq. (24) (solid line)

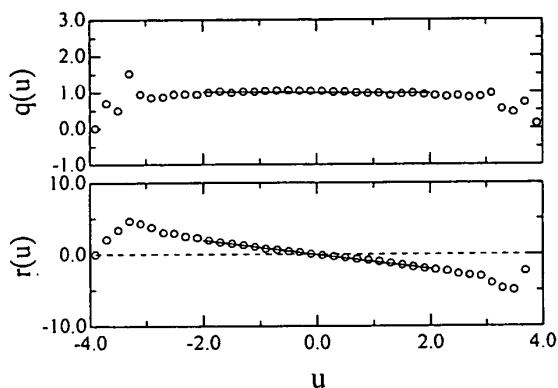


Fig. 9 First and second order derivative conditioned by velocity fluctuation defined by Eqs. (25), (26). Solid lines indicate Eq. (27)

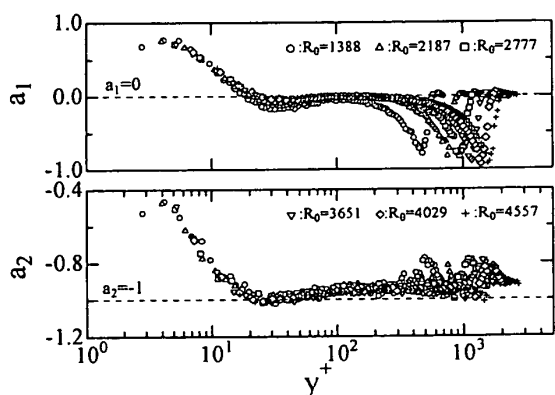


Fig. 10 Variation of coefficients defined in Eq. (27) in the boundary layers

のような分布をもつかによって決まる。例えば、 $q(x)$ が一定値、 $r(x) = -x$ のときには PDF はガウス分布になることは明らかであろう。対数領域におけるこれら関数型の代表的な一例を図9に示した。 $q(x)$ はほぼ一定値、 $r(x)$ は単調減少関数となる。 x が大きなところでは傾向が異なるが、それらは確率分布のすそ野の形状に対応している。

対数領域固有の PDF 型の特徴は平均値付近でのガウス分布からの偏差であることを前述した。そこで、特に PDF 型の中心部分 ($-1.5 \leq x \leq 1.5$) を評価するため、以下の一次近似を行う (図9中の実線)。

$$q(x) = a_1 \cdot x + b_1, \quad r(x) = a_2 \cdot x + b_2 \quad \dots \dots \dots (27)$$

各係数の変化を境界層内で調べた結果を図10に示す。対数領域内においては、 $a_1 \cong 0$ 、 a_2 は -1 から外層に向かい若干増加傾向にある。係数 $b_1 \cong 1$ であり、 b_2 は、ほぼ零であった。

対数領域内では関数 $q(x)$ が一定値になり、無次元化されたエネルギー散逸率 [式(25)] が、変動速度に依存しない。つまり、特定の速度変動 u が $\langle (du/dt)^2 \rangle$

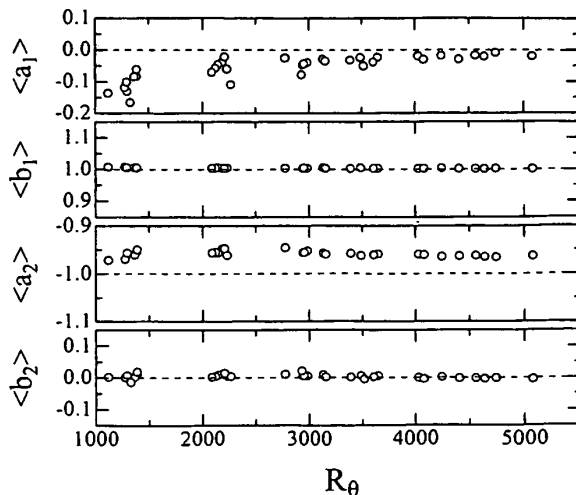


Fig. 11 Reynolds number dependence of coefficients averaged within the log-law region

に寄与しているわけではなく、大きな散逸率を担う特徴的なスケール変動は存在しない。対数領域をこのように特徴付けることも可能である。

各係数の対数領域内での平均値をとり、レイノルズ数依存性を図11に示した。レイノルズ数が低い場合には、係数 a_1 も零からのずれが無視できない。しかし、 $R_0 \geq 3000$ では各係数は漸近値をとり一定とみなせるようになる。

普遍速度分布(対数法則)領域の大きさがいかなる要因から決まるのかは興味ある課題である。境界層中の整構造の大きさが関係すると考えるのは無理のない発想である。しかし、これまでの解析から、あえて対数法則の存在に対して物理的な解釈を試みると以下のようなになる。外層から取り込まれる主流のエネルギーが壁近くへと輸送される過程で、外層の非等方的要素(乱流/非乱流分布、Kolmogorov 仮説での局所非等方性)が壁からの粘性の影響で消失し、そこに変動速度分布が相似となる普遍的領域が形成される。その範囲内では、無次元化されたエネルギー散逸率は変動速度の大きさに依存せず、一様な分布をもつと考えられる。このような変動速度場の性質が反映され、平均速度場に現れる普遍的構造が対数法則と推測される。

6. 結 論

圧力こう配のない平板乱流境界層において、主流方向変動速度の確率密度関数型とそのレイノルズ依存性を実験的に調べ、以下の結論を得た。

- (1) 乱流境界層には、無次元変動速度 u の PDF 型が類似する領域が存在する。その PDF 型はレイノルズ数に依存して微妙に変化する。

(2) 各レイノルズ数において, PDF型が類似する領域を対数領域 $[\delta_s, \delta_L]$ として定義すると, この範囲内において Clauser Chart 法(ただし, B はオープンパラメータとする)から求まる局所摩擦係数は, 過去の実験結果と $R_\theta \geq 3000$ でよく一致する. 対数領域の上限 δ_L および下限 δ_s のレイノルズ数依存性は, おおの, $\delta_L/\theta \propto R_\theta^{-0.31}$, $\delta_s/\theta \propto R_\theta^{-1.73}$ であった.

(3) 対数領域 $[\delta_s, \delta_L]$ 内では, PDF型が平均速度付近においてガウス分布からわずかに正にずれる傾向が認められる. これは, 対数領域特有の特徴である. PDF型は, $R_\theta \geq 3000$ において漸近的傾向を示す.

(4) 対数領域における PDF型の不変性は, 等方性と凍結乱流仮説から, 無次元化されたエネルギー散逸率が変動速度の大きさに依存しないことと解釈できる. また, 対数領域をそのように特徴付けることが可能である.

文 献

- (1) Barenblatt, G. I., Scaling Laws for Fully Developed Shear Flows, *J. Fluid. Mech.*, **248** (1993), 513-520.
- (2) George, W. K. and L. Castillo, Zero-Pressure Gradient Boundary Layer, *Appl. Mech. Rev.*, **50** (1997), 689-729.
- (3) 早川道雄, 乱流境界層における速度欠損分布の相似性, *ながれ*, **18-3** (1999), 171-179.
- (4) 辻 義之・鈴木孝裕・佐藤昌彦・中村育雄, 平板乱流境界層対数速度分布領域における確率密度関数の特性, *機論*, **63-613**, B (1997), 2977-2984.
- (5) Tsuji, Y. and Nakamura, I., Probability Density Function in the Log-Law Region of Law Reynolds Number Turbulent Boundary Layer, *Phys. Fluids*, **11** (1999), 647-658.
- (6) 大坂英雄・亀田孝嗣・望月信介, 滑面乱流境界層の局所摩擦抵抗係数と平均量特性, *機論*, **62-598**, B (1996), 2230-2237.
- (7) Osterlund, J. M., Johansson, A. V., Nagib, H. M. and Hites, M. H., A Note on the Overlap Region in Turbulent Boundary Layers, *Phys. Fluids*, **12** (2000), 1-4.
- (8) Pope, S. B. and Ohing, E. C. S., Stationary Probability Density Functions: an Exact Result, *Phys. Fluids*, **5** (1993), 1529-1531.
- (9) Kullback, S., *Information Theory and Statistics*, (1959), 1-157, Wiley, London.
- (10) Fernholz, H. H. and Finley, P. J., The Incompressible Zero-Pressure-Gradient Turbulent Boundary Layer: an Assessment of the Data, *Prog. Aerosp. Sci.*, **32** (1996), 245-311.
- (11) Nakamura, I., Tsuji, Y. and Suzuki, T., An Application of Differential-Geometrical Methods in Statistics to a Turbulent Flow Field, *Proc. 10th Symp. Turbulent Shear Flow*, Pennsylvania, (1995), 2. 55-2. 59.