

異方性と損傷を考慮した皮質骨の非弾性構成式の定式化*

岩本 正実^{*1}, 田中 英一^{*2}
伝田 耕平^{*3}, 山本 創太^{*4}

Inelastic Constitutive Modelling of Cortical Bone Taking Account of Anisotropy and Damage

Masami IWAMOTO, Eiichi TANAKA^{*5},
Kohei DENDA and Sota YAMAMOTO^{*5} Department of Mechanical Science and Engineering, Nagoya University,
1 Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya-shi, Aichi, 464-8603 Japan

An anisotropic inelastic constitutive model of cortical bone was formulated to predict deformation and failure behavior in traffic accidents or falling by utilizing the framework of viscoplasticity and damage mechanics. The model can represent characteristic features of cortical bone, such as anisotropic elastic coefficients with strain rate dependency, viscoplasticity with strength anisotropy as well as strength asymmetry of tension and compression. The damage evolution equation also enables us to predict bone failure with rate dependency. Experimental data of uniaxial compressive or tensile loading tests of human cortical bone at various strain rates were used to validate the proposed model. Predicted stress-strain curves and failure points agreed well with those of experimental data at wide range of strain rates. This shows the present model can be used to predict bone failure in various impact simulations of traffic accidents or falling.

Key Words: Biomechanics, Constitutive Equation, Anisotropy, Cortical Bone, Damage Mechanics, Rate Dependency

1. 緒 言

近年, 交通事故や転倒事故時に人体が受ける外傷を, 計算機上に作成した人体の有限要素モデルを用いて解析・予測することにより, 人体の安全性を評価する研究が多くの研究者によって行われている⁽¹⁾⁻⁽³⁾. 岩本ら⁽¹⁾は, 前面衝突時の自動車乗員の安全性を評価することを目的として, 下肢の有限要素モデルを開発し, 足裏から衝撃を受けたときの乗員の下肢骨折予測を行っている. 高橋ら⁽²⁾は, 歩行者保護装置の有効性を評価するため, 下肢の有限要素モデルを開発し, 自動車の衝突を側方から受けたときの歩行者の下肢骨折予測に利用している. 一方, 田中ら⁽³⁾は, 高齢者の大腿骨頸部転倒骨折防止用ヒッププロテクタの有効性を評価するため, 大腿部の有限要素モデルを作成し解析を行っている.

しかしながら以上の研究では, 骨をモデル化する際

に, その形状を再現しつつも力学特性については単純化している. 例えば皮質骨では, 均質等方な線形弾性体⁽³⁾, 弾塑性体⁽¹⁾, あるいは弾粘塑性体⁽²⁾としてモデル化し, さらに骨折は応力あるいはひずみがしきい値を超えたときに発生するという単純な基準を用いている. したがって, これらのモデルは, 実験結果に見られる皮質骨のいくつかの特徴⁽⁴⁾, 例えば(1)弾性係数の持つひずみ速度依存性, (2)弾性係数や強度の異方性, (3)引張りと圧縮に対する弾性係数や強度の相違, (4)骨折を生じる応力値あるいはひずみ値のひずみ速度依存性, を表現できない. そのため, 皮質骨強度の異方性や引張りと圧縮強度の相違, 骨折強度のひずみ速度依存性が密接に関連する骨折パターン⁽⁵⁾や骨折時期を定量的に予測することは困難である.

骨折パターンは, 骨折完治までにかかる治療期間に大きな影響を与えるといわれており, それを予測できれば, 車両安全装置や保護具の評価において, 長期的疾患の可能性の検討が可能となる.

本研究では, 交通事故や転倒事故における人体の安全性を計算機上で評価することを目的として, 骨折発生の危険度や骨折パターンを精確に予測できるモデルの開発を目指す. すなわち, 交通事故や転倒事故時に想定されるひずみ速度範囲での単調負荷条件下での骨

* 原稿受付 2004年9月17日.

^{*1} 正員, (株)豊田中央研究所(☎480-1192 愛知県愛知郡長久手町).^{*2} 正員, フェロー, 名古屋大学大学院工学研究科(☎464-8603 名古屋市千種区不老町1).^{*3} 名古屋大学大学院工学研究科.^{*4} 正員, 名古屋大学大学院工学研究科.

E-mail: iwamoto@mosk.tytlabs.co.jp

折を予測できるモデルの開発を対象とする。そのため、皮質骨の変形は弾性部分と非弾性部分からなるものと考え、さらに Carter と Hayes⁽⁶⁾ が示した弾性係数とひずみ速度の関係式を一般化することで弾性部分のひずみ速度依存性を考慮した。非弾性部分の変形挙動には、粘弾性変形、クリープ、損傷の影響があると考え、強度の異方性や引張りと圧縮の強度の違いを表現できる Tsai-Wu 基準⁽⁷⁾を用いた粘塑性モデルに、クリープを考慮した等方硬化変数の発展式と骨折時期のひずみ速度依存性を表現するための損傷発展式を組み合わせた。提案した構成式の適用性を確認するため、文献で報告されているヒト皮質骨に関する実験結果、すなわち、種々のひずみ速度の単軸引張・圧縮試験⁽⁸⁾⁽⁹⁾、骨の長軸方向および横断面方向の引張・圧縮試験⁽¹⁰⁾、およびヒト大腿骨皮質骨の引張・圧縮・ねじり試験⁽¹¹⁾ から得られた応力-ひずみ関係について、計算結果と実験結果を比較検討した。

2. 皮質骨の構成式の定式化

Cowin ら⁽⁴⁾ はヒトや牛の皮質骨に対する材料試験結果に基づき、皮質骨の応力-ひずみ関係や剛性・強度について報告している。一例として、種々のひずみ速度の単軸圧縮試験から得られたヒト大腿骨の応力-ひずみ関係を図 1 に示す⁽⁶⁾。なお、以下の各図において、各種記号は実験結果を、実線は後述の定式化したモデルによる予測結果を、点線は損傷変数の変化を表す。また各種記号の最終点は実験の骨折点に対応し、モデルにより予測される骨折時期を*印で示す。図 1 の実験結果から、応力-ひずみ関係はひずみ速度に強く依存するが、各関係とも変形の初期において線形的

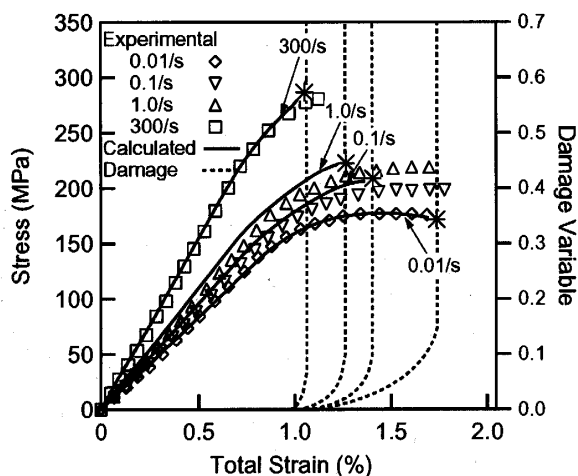


Fig. 1 Experimental stress-strain curves at various strain rates under uniaxial compressive loading⁽⁶⁾, and the corresponding simulation results

であり、その後非線形な挙動を示すことがわかる。Cowin らは、線形部分をフックの法則に従う弾性領域、非線形部分を非弾性領域としており、上述のひずみ速度依存性は弾性係数にひずみ速度依存性を導入することによって表現している。この材料特性は厳密に言えば弾性ではないが、本研究においても彼らに従い、皮質骨の応力-ひずみ曲線の線形部分を便宜上弾性領域、非線形部分を非弾性領域と呼ぶことにする。以下では、微小変形理論の枠組で扱うこととし、直角座標系 (x_1, x_2, x_3) により運動を記述する。このとき全ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ を弾性部分 $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ と非弾性部分 $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ の和として

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p \dots\dots\dots (1)$$

のように表すことにする。

2.1 弾性部分のモデル化 Carter と Hayes⁽⁶⁾

は、皮質骨および海綿骨の弾性領域の単軸変形特性を、ひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ と応力速度 $\dot{\sigma}$ 、および縦弾性係数 E を用いて、

$$\dot{\sigma} = E \dot{\epsilon} \dots\dots\dots (2)$$

により表現するとき、縦弾性係数 E がひずみ速度と骨密度 ρ の関数として

$$E = \bar{E} \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\bar{\epsilon}} \right)^{0.06} \left(\frac{\rho}{\bar{\rho}} \right)^3 \dots\dots\dots (3)$$

により表現できることを示した。ここで、 \bar{E} 、 $\bar{\epsilon}$ 、 $\bar{\rho}$ はそれぞれ縦弾性係数、ひずみ速度、骨密度の基準値である。式(1)の弾性部分が式(2)および式(3)の枠組で表せるものとするれば、多軸形にて、例えば

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \dots\dots\dots (4)$$

$$E_{ijkl} = \bar{E}_{ijkl} \left(\frac{P(\dot{\epsilon}_{ij}^e)}{\bar{\epsilon}^e} \right)^{n_1} \dots\dots\dots (5)$$

$$P(\dot{\epsilon}_{ij}^e) = \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{pr}^e \dot{\epsilon}_{pr}^e} \dots\dots\dots (6)$$

と一般化できる。ここで、 $\dot{\sigma}_{ij}$ は応力速度テンソル、 E_{ijkl} と \bar{E}_{ijkl} は弾性係数テンソルとその基準値、 $\bar{\epsilon}^e$ と $P(\dot{\epsilon}_{ij}^e)$ は弾性ひずみ速度の基準値と弾性ひずみ速度テンソルの二次不変量、 n_1 は定数を表す。またテンソルの指標に関して総和規約を採用している。なお、式(4)では、密度がほぼ一定の皮質骨だけを対象とすることに留意して、式(3)での密度の影響を無視しており、また式(2)および式(3)のひずみ速度を弾性ひずみ速度に置換えている。さらに式(5)の弾性係数テンソルは、その異方特性が \bar{E}_{ijkl} だけによって定まる形をしており、弾性ひずみ速度依存の部分は等方形をしている。これは、その定式化に不可欠なひずみ速度依存性が方向によりどのように変化するか情報がなく、第一近似として導入したためである。

さて、皮質骨は部位によって種々の異方性を示すが、大腿骨や脛骨等の長管骨については、縦弾性係数が骨幹軸方向に直交する横断面内でほぼ同じであることから、横等方性として扱われている⁽¹²⁾。本モデルの主な対象も大腿骨や脛骨であるので、ここでは横等方性を仮定し、 \bar{E}_{ijkl} を次のように表す⁽¹³⁾。

$$\begin{aligned} \bar{E}_{ijkl} = & \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \alpha (\delta_{ij} h_k h_l \\ & + \delta_{kl} h_i h_j) + \beta (\delta_{ik} h_j h_l + \delta_{jk} h_i h_l + \delta_{il} h_j h_k \\ & + \delta_{jl} h_i h_k) + \gamma h_i h_j h_k h_l \dots \dots \dots (7) \end{aligned}$$

ここで、 $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma$ はひずみ速度には依存しないスカラー弾性係数であり、また、 $h_i (i=1, 2, 3)$ は横等方の軸方向の単位ベクトルの成分である。本研究では以後、第3軸を横等方の軸方向、第1, 2軸を横等方の軸に直交する等方な面内の軸として扱うことにする。このとき、 $h_i = \delta_{i3}$ となる。

2.2 非弾性部分のモデル化 Martinら⁽⁶⁾は、骨が曲げ荷重を受けたときに生じるバタフライ形の骨折パターンやねじり荷重を受けたときに生じるらせん形の骨折パターンの発生メカニズムを皮質骨の強度の異方性や引張りと圧縮強度の違いを用いて説明し、骨折は引張り、圧縮、ねじりやそれらの組合せ荷重により起きることを示した。一方、Cezayirliogluら⁽¹²⁾は、金属や複合材料に対して用いられてきた降伏条件を、大腿骨や脛骨等の長管骨に対する皮質骨の引張り、圧縮、ねじりを含む組合せ荷重試験の結果に適用した。その結果、皮質骨の降伏条件として、等方性材料に対する von Mises の降伏条件や直交異方性材料に対する Hill の降伏条件は適切ではなく、引張りと圧縮の強度の違いを表現できる Tsai-Wu の基準⁽⁷⁾、

$$C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + H_{ij} \sigma_{ij} = 1 \dots \dots \dots (8)$$

において、横等方性を仮定した降伏条件の適用が最も適切であることを示した。ここで、 C_{ijkl} および H_{ij} はそれぞれ4階および2階の強度テンソルを表す。Cowinら⁽⁴⁾によれば、皮質骨を横等方性と仮定したとき、これらの定数と、横等方の軸方向(h_i の方向)の引張、圧縮およびせん断降伏応力 $\sigma_0^+, \sigma_0^-, \tau_0$ 、横等方の軸に直交する面内での引張、圧縮およびせん断降伏応力 $\sigma_{90}^+, \sigma_{90}^-, \tau_{90}$ 、横等方面内応力が異方軸方向の強度に与える影響を表す応力相互作用係数 F は次のように関係づけられる。

$$\begin{aligned} C_{1111} = C_{2222} = & 1/\sigma_{90}^+ \sigma_{90}^-, C_{3333} = 1/\sigma_0^+ \sigma_0^- \\ C_{1313} = C_{1331} = & C_{3131} = C_{3113} = 1/4 \tau_0^2 \\ C_{2323} = C_{2332} = & C_{3232} = C_{3223} = 1/4 \tau_0^2 \\ C_{1212} = C_{1221} = & C_{2121} = C_{2112} = 1/4 \tau_{90}^2 \\ C_{1122} = C_{2211} = & 1/\sigma_{90}^+ \sigma_{90}^- - 1/2 \tau_{90}^2 \\ C_{1133} = C_{3311} = & C_{2233} = C_{3322} = F \end{aligned}$$

その他の $C_{ijkl} = 0$

$$H_{11} = H_{22} = 1/\sigma_{90}^+ - 1/\sigma_{90}^-, H_{33} = 1/\sigma_0^+ - 1/\sigma_0^-$$

その他の $H_{ij} = 0 \dots \dots \dots (9)$

本研究では、骨折の発生危険度や骨折パターンの予測を可能とするため、皮質骨に非弾性変形が生じる条件として Tsai-Wu の基準を採用する。

他方 Jepsenら⁽¹⁴⁾は、式(1)の非弾性部分の変形が生じる原因として、粘塑性変形、クリープ、損傷の影響を挙げている。本研究では、まず皮質骨の粘塑性変形の影響を考慮するため、粘塑性流れ理論⁽¹⁵⁾を非弾性部分の定式化の基本的枠組として採用する。

以上の考察に基づき、等散逸ポテンシャル面 g を

$$g = \sigma_y \sqrt{C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + H_{ij} \sigma_{ij}} \dots \dots \dots (10)$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{3\sigma_0^+ \sigma_0^- \sigma_{90}^+ \sigma_{90}^-}{2\sigma_0^+ \sigma_0^- + \sigma_{90}^+ \sigma_{90}^-}} \dots \dots \dots (11)$$

で表し、式(1)の非弾性部分を

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{in} = \left\langle \frac{g - \sigma_y - R}{K} \right\rangle^{n_2} n_{ij} \dots \dots \dots (12)$$

$$n_{ij} = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} / \sqrt{\frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}}} \dots \dots \dots (13)$$

で表現する。ここで、 K は抗応力、 R は等方硬化変数、 n_2 は流動応力のひずみ速度依存性を表現する指数である。また、 n_{ij} は非弾性ひずみ速度の方向を表す正規化テンソルであって、等散逸ポテンシャル面に対して外向き法線方向を向く。なお、記号 $\langle \rangle$ は

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x & \text{when } x > 0 \\ 0 & \text{when } x \leq 0 \end{cases} \dots \dots \dots (14)$$

で定義されるマコーレかっこである。なお、本研究では、交通事故や転倒事故時の単調負荷過程を主な研究対象とするので、非弾性部分の構成式(12)においては等方硬化変数 R だけを導入し、主に繰返し変形を記述する際に必要となる移動硬化変数は採用しなかった。

2.3 等方硬化変数に対する発展式のモデル化

Fondrkら⁽¹⁶⁾は皮質骨の実験結果に基づき、皮質骨がクリープ特性を有することを示した。本研究では、この影響を主に等方硬化変数の発展式で表現することとし、Lemaitreら⁽¹⁵⁾のモデルを修正して

$$\dot{R} = b(R_\infty - R) \left(\dot{\epsilon}_{eq}^{in} - \left(\frac{R}{B} \right)^c \right) \dots \dots \dots (15)$$

と定式化した。ここで、 b, c, R_∞ は定数である。また、引張り、圧縮、ねじりの各試験で見られる硬化の違いを表現するため、式中のパラメータ B を

$$B = B_0(1 - |\bar{J}_3|) + B_t \langle \bar{J}_3 \rangle + B_c \langle -\bar{J}_3 \rangle \dots \dots (16)$$

のように表現した。ここで、 \bar{J}_3 は、偏差応力テンソル $S_{ij} [= \sigma_{ij} - (1/3)\sigma_{kk}\delta_{ij}]$ の第二不変量 $J_2 [= (1/2)S_{ij}S_{ij}]$ および第三不変量 $J_3 [= (1/3)S_{ij}S_{jk}S_{ki}]$

を用いて,

$$\bar{J}_3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} J_3 / J_2^{3/2} \quad (-1 \leq \bar{J}_3 \leq 1) \quad \dots\dots\dots (17)$$

と定義される。\$\bar{J}_3\$ は単軸引張時に 1, 単軸圧縮時に -1, 純ねじり時に 0 の値をとるので, 定数 \$B_0, B_t, B_c\$ は, ねじり, 引張り, 圧縮試験時の \$B\$ の値となる。

さらに, \$\dot{\epsilon}_{eq}^{in}\$ は相当非弾性ひずみ速度であり, 非弾性仕事率の等価性を仮定して次のように定義する。

$$\dot{\epsilon}_{eq}^{in} = \frac{\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{in}}{g} \quad \dots\dots\dots (18)$$

2.4 損傷のモデル化

図 1 の応力-ひずみ曲線の実験値に見られる皮質骨の破断時期はひずみ速度に依存しており, 応力値やひずみ値がある一定の値に達すると破断が生じるという仮説は成立しない。Davy ら⁽¹⁷⁾ は, 皮質骨が繰返し負荷・除荷を受ける場合や, 本研究で対象としている比較的大きなひずみや高いひずみ速度の単調負荷を受ける場合, 損傷の累積が応力-ひずみ曲線の示す非線形な挙動に大きな影響を与え, 骨折の判定基準として, 降伏応力や極限応力より, 損傷の累積のしきい値のほうが適切であるとしている。また, Jepsen ら⁽¹⁴⁾ は, 損傷の累積の基本的なメカニズムを示し, 皮質骨はその非弾性変形過程において回復できない微小き裂や欠損を生じ, それらが累積することにより大きなき裂に成長し破断に至るとしている。

そこで, 本研究においても損傷の累積が重要な役割を果たすと考え, 等方損傷理論の枠組とひずみ等価性の仮説⁽¹⁵⁾を導入する。このとき, 応力 \$\sigma_{ij}\$ は以後

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{1-D} \quad (0 \leq D < 1) \quad \dots\dots\dots (19)$$

で定義される実質応力に置換えて考える必要がある。ここで \$D\$ は損傷変数である。

次に, 損傷変数 \$D\$ に対する発展式について検討する。Davy ら⁽¹⁷⁾ は, 皮質骨の単軸引張試験の結果を再現するために, 等方損傷理論に基づき皮質骨の弾粘塑性構成式と損傷発展式を提案した。しかし, 彼らの損傷発展式を試したところ計算が不安定になったので, 村上ら⁽¹⁸⁾ が計算上の不安定性を回避するために提案した式を参考に, 損傷発展式を

$$\dot{D} = A \left\langle \frac{g - \sigma_y - R}{\sigma_y} \right\rangle^p \exp(QD) \dot{\epsilon}_{eq}^{in} \quad \dots\dots\dots (20)$$

と表現した。ここで, \$A, p\$ は定数である。また, 引張り, 圧縮, ねじりの各試験に見られる破断時期の違いを表現するため, パラメータ \$Q\$ を

$$Q = Q_0(1 - |\bar{J}_3|) + Q_t \langle \bar{J}_3 \rangle + Q_c \langle -\bar{J}_3 \rangle \quad \dots\dots\dots (21)$$

とおいた。ここで, \$Q_0, Q_t, Q_c\$ はねじり, 引張, 圧縮試験時の \$Q\$ の値である。なお, 本研究では, 皮質骨の

破断は損傷変数 \$D\$ がしきい値 \$D_{cr}\$ に達したときに生じるとする骨折判定基準を採用し, この条件を満足した状態を骨折時期と定める。

2.5 構成式のまとめと計算手順

以上で定式化した構成式の主要部はひずみの分割の定義式(1), 弾性関係式(4), 非弾性関係式(12), 等方硬化変数の発展式(15), 損傷発展式(20)からなる。ただし, 各式とそれに付随する式に現れる応力テンソルは, すべて式(19)によって定義される実質応力テンソルによって置換えられているものとみなす。速度境界値問題を考えるとき, これらの各式は以下のように用いられる。

ある瞬間において, \$\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}, \epsilon_{ij}^e, \epsilon_{ij}^{in}, R, D\$ の各値が既知であるとする。するとまず式(19)により \$\bar{\sigma}_{ij}\$ が求まる。式(10)により \$g\$ を, そして式(12)により \$\dot{\epsilon}_{ij}^{in}\$ を求めることができる。\$\dot{\epsilon}_{ij}^{in}\$ が求めれば, 式(18)により \$\dot{\epsilon}_{eq}^{in}\$ が, 式(15)と式(20)により \$\dot{R}\$ と \$\dot{D}\$ を求めることができる。

さて, 全ひずみ速度 \$\dot{\epsilon}_{ij}\$ が与えられた場合を考える。式(1)から \$\dot{\epsilon}_{ij}^e\$ を, そして式(4)~(7)を用いて実質応力速度 \$\dot{\sigma}_{ij}\$ が求められる。式(19)を時間微分すると

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{\dot{\sigma}_{ij}}{1-D} - \frac{\sigma_{ij} \dot{D}}{(1-D)^2} \quad \dots\dots\dots (22)$$

が得られるので, それを変形した式

$$\dot{\sigma}_{ij} = (1-D) \dot{\bar{\sigma}}_{ij} + \dot{D} \bar{\sigma}_{ij} \quad \dots\dots\dots (23)$$

により \$\dot{\bar{\sigma}}_{ij}\$ を求めることができる。

他方, 応力速度 \$\dot{\sigma}_{ij}\$ が与えられる場合には, 式(4)が弾性ひずみ速度に関する非線形関係式のため, 工夫が必要である。まず, \$\dot{\bar{\sigma}}_{ij}\$ は式(22)により求められる。次に, 式(4)の関係を

$$\dot{\sigma}_{ij} = \bar{E}_{ijkl} \left(\frac{P(\dot{\epsilon}_{ij}^e)}{\dot{\epsilon}^e} \right)^{n_1} \dot{\epsilon}_{kl}^e \equiv \bar{E}_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^{0e} \quad \dots\dots\dots (24)$$

のように書き直し, \$\dot{\epsilon}_{ij}^{0e}\$ について解く。\$\dot{\epsilon}_{ij}^{0e}\$ に関して二次不変量 \$P(\dot{\epsilon}_{ij}^{0e})\$ を計算し, \$P(\dot{\epsilon}_{ij}^e)\$ との関係を求めて, \$\dot{\epsilon}_{ij}^e\$ を \$\dot{\epsilon}_{ij}^{0e}\$ で表せば, 次式を得る。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = \left(\frac{P(\dot{\epsilon}_{ij}^{0e})}{\dot{\epsilon}^e} \right)^{-n_1/(1+n_1)} \dot{\epsilon}_{ij}^{0e} \quad \dots\dots\dots (25)$$

これと式(1)を用いて, \$\dot{\epsilon}_{ij}\$ を求めることができる。

このようにして各変数の時間変化率を求めることができ, それらを時間に関して積分すれば, 次の瞬間の各変数の値を求めることができる。

2.6 材料定数の同定方法

定式化した構成式モデルは, 弾性関係式, 非弾性関係式, 等方硬化変数の発展式, 損傷発展式の四つの部分にモジュール化されており, ほぼ独立に材料定数を決定できる。特に弾性

関係式に関する定数は弾性領域の変形挙動だけに注目して定めればよく、また損傷の影響は非弾性領域の初期では顕著ではないので、その領域のデータを用いて、損傷発展式の影響を無視して非弾性関係式の定数を同定することができる。以下ではより具体的な同定方法について述べる。なお、前と同様に、3軸方向を横等方の軸方向にとって考える。

(1) 弾性関係式の定数の同定 3軸および1軸方向の単軸引張/圧縮試験や1-3面内のせん断試験から得られる応力 σ_{ij} とひずみ ϵ_{ij} の弾性関係は、

$$\begin{aligned} \epsilon_{33} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma_{22} + \frac{1}{E_3} \sigma_{33} \\ \epsilon_{11} &= \frac{1}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{22} - \frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma_{33} \\ \epsilon_{13} &= \frac{1}{2G_{13}} \sigma_{13} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(26)$$

のように記述できる⁽¹⁹⁾。ここで $E_1, E_3, G_{13}, \nu_{12}, \nu_{13}$ は材料定数である。式(26)と式(4)との対応を考えると、式(5)の弾性ひずみ速度依存の部分に留意する必要がある。すなわち、式(5)中の二次不変量の値が同一になるように各実験のひずみ速度値を選んで材料試験を実施し、 $E_1, E_3, G_{13}, \nu_{12}, \nu_{13}$ の値を定めれば、定数 $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma$ は、次の関係式から決定できる。

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{E_1(E_1\nu_{12} + E_3\nu_{13}^2)}{(1 + \nu_{12})\Delta}, \quad \mu = G_{12} \\ \alpha &= \frac{E_1E_3\nu_{13}}{\Delta} - \lambda, \quad \beta = G_{13} - G_{12} \\ \gamma &= \frac{E_1E_3(1 - \nu_{12} - 2\nu_{13})}{\Delta} + \lambda + 2G_{12} - 4G_{13} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(27)$$

ただし、 $\Delta = E_1 - E_1\nu_{12} - 2E_3\nu_{13}^2$ とおいた。

なお、実験結果によると E_3 と E_1 は引張りと圧縮で値が異なるので、式(17)で定義した \bar{J}_3 を用いて、

$$\begin{aligned} E_3 &= E_{3t}(1 + \bar{J}_3)/2 + E_{3c}(1 - \bar{J}_3)/2 \\ E_1 &= E_{1t}(1 + \bar{J}_3)/2 + E_{1c}(1 - \bar{J}_3)/2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(28)$$

のように修正した。ただし3軸方向の引張、圧縮側の弾性係数を E_{3t}, E_{3c} 、1軸方向の引張、圧縮側の弾性係数を E_{1t}, E_{1c} とおいた。

次に、定数 n_1 は、各ひずみ速度に対する弾性係数を適切に表現できる条件から決定できる。なお、本研究では式(5)の弾性ひずみ速度の基準値 $\bar{\epsilon}^e$ を 1.0/s とした。

(2) 非弾性関係式の定数の同定 非弾性関係式の定数は損傷の影響が小さい非弾性領域の初期の応力-非弾性ひずみ曲線に基づいて同定することができ

る。このとき、実質応力と応力の差は無視できる。なお、ここで述べた非弾性ひずみは、実験から得られる各ひずみ速度に対する応力-ひずみ曲線から、次のようにして求められる。すなわち初期の線形部分の傾きを弾性定数として弾性ひずみを求め、全ひずみからそれを差引くことにより求めることができる。

さて、定数 $\sigma_0^+, \sigma_0^-, \tau_0$ と $\sigma_{90}^+, \sigma_{90}^-, \tau_{90}$ は、第一近似として、記述の対象とするひずみ速度の範囲で最も低い条件下での、異方軸方向と横等方面内の引張、圧縮、せん断試験の初期降伏応力として求められる。一方定数 F は二軸応力試験により決定すべきであるがその試験は著しく困難であり、骨に対して過去に実施された例はない。このため Cowin ら⁽⁴⁾ がヒト大腿骨の単軸引張試験データから推定した値 $F = -(200 \text{ MPa})^{-2}$ を本研究では採用した。

上記定数が定めれば式(9)~(11)により初期降伏時の等散逸ポテンシャル面 g を求めることができる。

このとき、第3軸について式(12)を変形すると、

$$g = \sigma_y + K |\dot{\epsilon}_{33}^{1/n_2}| + R \quad \dots\dots\dots(29)$$

の関係を得る。 g は

$$g = \sigma_y \sqrt{\left(\frac{1}{\sigma_0^+} - \frac{1}{\sigma_0^-}\right) \bar{\sigma}_{33} + \frac{1}{\sigma_0^+ \sigma_0^-} \bar{\sigma}_{33}^2} \quad \dots\dots\dots(30)$$

であって3軸方向の応力成分 $\bar{\sigma}_{33}$ と直接関連しているので、式(29)は引張りあるいは圧縮の応力-非弾性ひずみ関係の解析解を表すと考えることができる。図1の実験結果において、線形部分から非線形部分に移行する点を表すいわゆる初期降伏応力のひずみ速度依存性と式(29)を照らし合わせて考えれば、これは、主に右辺第2項に対応することがわかる。したがって、定数 K と n_2 は、異なるひずみ速度条件下での応力-非弾性ひずみ曲線における初期降伏応力の違いを表現できるという条件から定められる。

(3) 等方硬化変数の発展式に関する定数の同定

以上の同定により、式(29)の右辺第2項の変数 R の値は $\bar{\sigma}_{33}$ の実験値と計算により求めた他の項の値を用いれば既知となる。したがって変数 R の挙動を表現できるように発展式に含まれる定数を調整すればよい。その際、定数 b は硬化の速度、定数 R_∞ は硬化の漸近値を定めること、高ひずみ速度の場合には式(15)のパラメータ B と定数 c を含む項の効果は小さいことに留意して、最も高いひずみ速度に対する硬化曲線に適合するように定数 b と R_∞ を最初に決定する。次に、 B と c は粘性の影響を表すことに留意して、各ひずみ速度に対する硬化曲線を再現するように定める。その際、最も高いひずみ速度と低いひずみ速度の硬化曲線の差から B と c のおおよその値を推定できる。

(4) 損傷発展式に関する定数の同定 最後に、損傷発展式に関する定数は、これまでに述べた試験の非弾性領域の後半に着目して決定できる。式(21)で定まるパラメータ Q と定数 ρ は、ひずみ速度が異なる条件の応力-非弾性ひずみ曲線において、骨折時期の違いを支配する。これに対し定数 A は、ひずみ速度に関わりなく全般的に損傷の累積速度を定める。したがって、同定に当たっては、最初に A と Q に仮の値を与え、 ρ を最も高いひずみ速度と最も低いひずみ速度の実験に対する骨折時期の差異を表現するよう定める。続いて Q を最も低いひずみ速度に対する骨折時期に適合するように調整する。最後に応力-ひずみ曲線の形を表現するよう A の値を調整する。なお、骨折判定に用いる損傷変数のしきい値 D_{CR} は、 D_{CR} の値を種々変えて計算した結果と実験結果との比較により、本研究が対象としたひずみ速度の範囲にある実験結果を良好に再現した 0.7 に決定した。

3. 構成式モデルの適用性の検討

定式化した構成式モデルの適用性を検討するため、文献のヒト皮質骨実験データと、定式化したモデルによる予測値を比較検討した。比較対象の実験データには、以下の4種類を用いた。

3.1 種々のひずみ速度のもとでの単軸圧縮実験

種々のひずみ速度の単軸圧縮試験データとして、McElhaney らが実施した防腐処理後のヒト大腿骨のデータ⁽⁹⁾を用いた。4種類のひずみ速度 0.01, 0.1, 1.0, 300/s に対する応力-ひずみ曲線について、実験結果と計算結果を図1に示す。また、骨折判定に用いた損傷変数の変化のようすを図1に併せて示す。計算

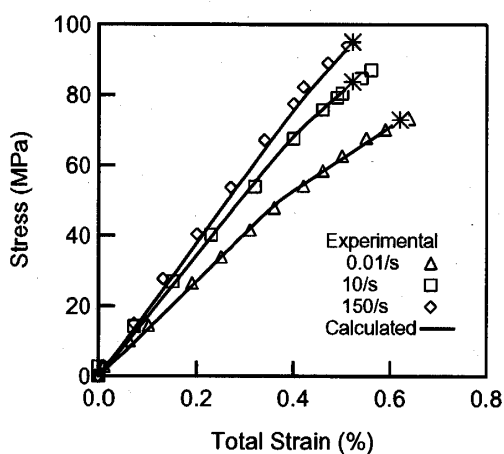


Fig. 2 Comparisons of simulation results with the corresponding experimental data⁽⁹⁾ for the stress-strain curves of monotonic tension at various strain rates

に用いた材料定数は以下のとおりである。

$$\begin{aligned}
 E_{1t} &= 11.5 \text{ GPa}, & E_{3t} &= 24.5 \text{ GPa} \\
 E_{1c} &= 11.5 \text{ GPa}, & E_{3c} &= 22.1 \text{ GPa} \\
 G_{13} &= 3.3 \text{ GPa}, & \nu_{12} &= 0.58, \nu_{13} = 0.31 \\
 n_1 &= 0.06, & K &= 28 \text{ MPa}, n_2 = 5.5 \\
 \sigma_0^+ &= 80 \text{ MPa}, & \sigma_0^- &= 127 \text{ MPa}, \sigma_{90}^+ = 36 \text{ MPa} \\
 \sigma_{90}^- &= 84 \text{ MPa}, & \tau_0 = \tau_{90} &= 54 \text{ MPa}, b = 500 \\
 R_\infty &= 40 \text{ MPa}, & B_0 &= 0 \text{ MPa}, B_t = 0 \text{ MPa} \\
 B_c &= 200 \text{ MPa}, & c &= 1.8, A = 1.0, Q_0 = 0 \\
 Q_t &= 0, & Q_c &= 6.5, \rho = 4.0
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

図1より、弾性係数のひずみ速度依存性については、理論は実験結果をよく再現することがわかる。硬化挙動や損傷の発達による骨折の発生時期に関しても、骨の個体差や不均一性等による実験の困難さを考えれば、精度はおおむね良好であると判断できる。

3.2 種々のひずみ速度のもとでの単軸引張実験

種々のひずみ速度の単軸引張試験データとして、Wood らの新鮮なヒト頭蓋骨を用いた実験データ⁽⁹⁾を用いた。3種類のひずみ速度 0.01, 10, 150/s に対する各応力-ひずみ曲線の実験結果と計算結果を図2に示す。材料定数は以下のとおりである。

$$\begin{aligned}
 E_{1t} &= 11.0 \text{ GPa}, & E_{3t} &= 16.0 \text{ GPa} \\
 E_{1c} &= 11.5 \text{ GPa}, & E_{3c} &= 22.1 \text{ GPa} \\
 G_{13} &= 3.3 \text{ GPa}, & \nu_{12} &= 0.58, \nu_{13} = 0.31 \\
 n_1 &= 0.035, & K &= 15 \text{ MPa}, n_2 = 6 \\
 \sigma_0^+ &= 40 \text{ MPa}, & \sigma_0^- &= 63 \text{ MPa}, \sigma_{90}^+ = 18 \text{ MPa} \\
 \sigma_{90}^- &= 42 \text{ MPa}, & \tau_0 = \tau_{90} &= 27 \text{ MPa}, b = 50 \\
 R_\infty &= 300 \text{ MPa}, & B_0 &= 0 \text{ MPa}, B_t = 500 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

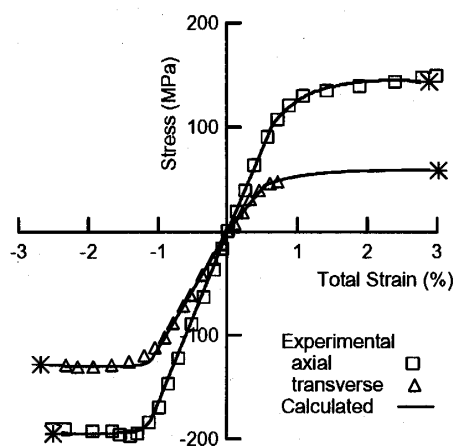


Fig. 3 Comparisons of simulation results with the corresponding experimental data⁽¹⁰⁾ for the stress-strain curves of tension and compression along axial or transverse direction of anisotropy

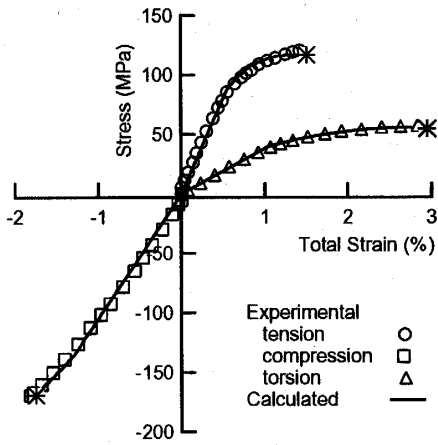


Fig. 4 Comparisons of simulation results with the corresponding experimental data⁽¹⁾ for the stress-strain curves of tension, compression and torsion

$$\begin{aligned}
 B_c &= 0 \text{ MPa}, \quad c = 1.8, \quad A = 1.0, \quad Q_0 = 0 \\
 Q_t &= 110, \quad Q_c = 0, \quad p = 5.0 \\
 &\dots\dots\dots (32)
 \end{aligned}$$

図2から、すべてのひずみ速度条件に対して、理論は実験で観察された弾性係数のひずみ速度依存性、骨折時期をよく再現できたことがわかる。

3.3 異方性ならびに引張りと圧縮の非対称性

横等方性の軸方向およびその軸に直交する断面内での骨の単軸引張・圧縮試験データとして、Gibsonら⁽¹⁰⁾のデータを用いた。図3に実験結果と計算結果を示す。また材料定数は以下のとおりである。

$$\begin{aligned}
 E_{1t} &= 11.0 \text{ GPa}, \quad E_{3t} = 21.0 \text{ GPa} \\
 E_{1c} &= 15.0 \text{ GPa}, \quad E_{3c} = 22.0 \text{ GPa} \\
 G_{13} &= 3.3 \text{ GPa}, \quad \nu_{12} = 0.58, \quad \nu_{13} = 0.31 \\
 n_1 &= 0.06, \quad K = 10 \text{ MPa}, \quad n_2 = 7 \\
 \sigma_0^+ &= 95 \text{ MPa}, \quad \sigma_0^- = 172 \text{ MPa}, \quad \sigma_{90}^+ = 40 \text{ MPa} \\
 \sigma_{90}^- &= 120 \text{ MPa}, \quad \tau_0 = \tau_{90} = 54 \text{ MPa}, \quad b = 300 \\
 R_\infty &= 30 \text{ MPa}, \quad B_0 = 250 \text{ MPa}, \quad B_t = 350 \text{ MPa} \\
 B_c &= 80 \text{ MPa}, \quad c = 1.8, \quad A = 1.0, \quad Q_0 = 47 \\
 Q_t &= 47, \quad Q_c = 97, \quad p = 1.0 \\
 &\dots\dots\dots (33)
 \end{aligned}$$

図3から、軸方向特性については、引張側、圧縮側ともに理論は実験結果をよく表現している。他方、断面内の引張、圧縮特性については、特に引張側の骨折時期の予測について実験結果との間に大きな違いが認められる。この問題については、実験結果の再現性を含めて今後の検討が必要である。この他の点では、引張側と圧縮側との弾性係数や初期降伏応力の違いも含めてよく再現している。

3.4 引張、圧縮、ねじり特性相互の関係 一般

に皮質骨のねじり特性は、引張あるいは圧縮特性を基

に等方性を仮定して予測したものと大きく異なる。そのため、骨の長軸方向の引張、圧縮、ねじり試験データとして Yamada ら⁽¹¹⁾のデータを用い、モデルがそれらの特性を表現できるかを確かめた。図4に、実験結果と計算結果の比較を示す。なお、材料定数は以下のとおりである。

$$\begin{aligned}
 E_{1t} &= 8.0 \text{ GPa}, \quad E_{3t} = 21.0 \text{ GPa} \\
 E_{1c} &= 14.5 \text{ GPa}, \quad E_{3c} = 14.0 \text{ GPa} \\
 G_{13} &= 3.3 \text{ GPa}, \quad \nu_{12} = 0.58, \quad \nu_{13} = 0.31 \\
 n_1 &= 0.06, \quad K = 10 \text{ MPa}, \quad n_2 = 7 \\
 \sigma_0^+ &= 80 \text{ MPa}, \quad \sigma_0^- = 129 \text{ MPa}, \quad \sigma_{90}^+ = 32 \text{ MPa} \\
 \sigma_{90}^- &= 110 \text{ MPa}, \quad \tau_0 = \tau_{90} = 37 \text{ MPa}, \quad b = 350 \\
 R_\infty &= 35 \text{ MPa}, \quad B_0 = 1500 \text{ MPa}, \quad B_t = 250 \text{ MPa} \\
 B_c &= 1330 \text{ MPa}, \quad c = 1.8, \quad A = 1.0, \quad Q_0 = 98 \\
 Q_t &= 98, \quad Q_c = 448, \quad p = 1.0 \\
 &\dots\dots\dots (34)
 \end{aligned}$$

図4から計算結果は実験結果と非常によく一致しており、引張、圧縮、ねじり時の応力-ひずみ曲線や骨折時期を精度良く表現できることがわかる。

4. 結 言

本研究では、交通事故や転落・転倒事故などの衝突事象で見られる広範囲の速度条件において、皮質骨の変形や破損を精度良く記述できる構成式モデルを定式化した。その際、皮質骨の特徴である、弾性係数のひずみ速度依存性、変形・強度の異方性、引張・圧縮の変形・強度特性に関する非対称性、損傷の累積による骨折、を表現できるよう工夫した。次に、定式化したモデルの適用性を確認するため、文献から得たヒト皮質骨を用いた実験結果と本モデルによる計算結果を比較した。その結果、本モデルが上述の特徴を精度良く記述できることを確認した。

今後、本モデルを有限要素解析ソルバに組み込み、衝突時の骨折パターンの予測精度について検討する予定である。

本研究の一部は、日本学術振興会平成16-17年度科学研究費補助金基盤研究(C)(2)(No.16560068)、ならびに文部科学省平成15-18年度科学研究費補助金特定領域研究(No.15086208)の支援を受けた。ここに謝意を表す。

文 献

(1) Iwamoto, M., Tamura, A., Furusu, K., Kato, C., Miki, K., Hasegawa, J. and Yang, K. H., Development of a Finite Element Model of the Human Lower Extremity for Analyses of Automotive Crash Injuries, SAE Trans. J. Passenger Car. Mech. Sys., 109-6 (2000), 846-

- 853.
- (2) Takahashi, Y., Kikuchi, Y., Konosu, A. and Ishikawa, H., Development and Validation of the Finite Element Model for the Human Lower Limb of Pedestrians, *Stapp Car Crash J.*, **44** (2000), 335-355.
- (3) 田中英一・山本創太・尾関重宣・水野幸治・原田敦・水野雅士, ヒッププロテクタによる大腿骨頸部転倒骨折予防の生体力学的検討, *機論*, **70-697, A**(2004), 1193-1200.
- (4) Cowin, S. C., Van Buskirk, W. C. and Ashman, R., Properties of Bone, *Handbook of Bioengineering*, Chap. 2, (1987), 2.1-2.27, McGraw-Hill.
- (5) Martin, R. B., Burr, D. B. and Sharkey, N. A., *Skeletal Tissue Mechanics*, (1998), 138-139, Springer.
- (6) Carter, D. R. and Hayes, W. C., Bone compressive strength: The influence of density and strain rate, *Science*, **194** (1976), 1174-1176.
- (7) Tsai, S. and Wu, E., A General Theory of Strength for Anisotropic Materials, *J. Compos. Mater.*, **5-1** (1971), 58-80.
- (8) McElhaney, J., Dynamic response of bone and muscle tissue, *J. Appl. Phys.*, **21** (1966), 1231-1236.
- (9) Wood, J., Dynamic response of human cranial bone, *J. Biomech.*, **4** (1971), 1-12.
- (10) Gibson, L. J. and Ashby, M. F. (大塚正久訳), セル構造体, (1993), 436-437, 内田老鶴園.
- (11) Yamada, H., *Strength of Biological Materials*, (1970), 19-34, Williams & Wilkins Company.
- (12) Cezayirlioglu, H., Bahniuk, E., Davy, D. T. and Heiple, K. G., Anisotropic Yield Behavior of Bone Under Combined Axial Force and Torque., *J. Biomech.*, **18-1** (1985), 61-69.
- (13) Jaunzemis, W., *Continuum Mechanics*, (1967), 298-308, Macmillan Company, New York.
- (14) Jepsen, K. J., Davy, D. T. and Akkus, O. (Cowin, S. C. 編), Observation of Damage in Bone, *Bone Mechanics HANDBOOK Second Edition*, (2001), 17.1-17.18, CRC Press.
- (15) Lemaitre, J. and Chaboche, J. L., *Mechanics of Solid Materials*, (2002), 276-340, CAMBRIDGE.
- (16) Fondrk, M., Bahniuk, E. and Davy, D., A Damage Model for Nonlinear Tensile Behavior of Cortical Bone, *J. Biomech. Eng.*, **121** (1999), 533-541.
- (17) Davy, D. T. and Jepsen, K. J. (Cowin, S. C. 編), Bone Damage Mechanics, *Bone Mechanics HANDBOOK Second Edition*, (2001), 18.1-18.25, CRC Press.
- (18) Murakami, S. and Liu, Y., Mesh-Dependence in Local Approach to Creep Fracture, *Int. J. Damage Mech.*, **4** (1995), 230-250.
- (19) Cowin, S. C. (編), Mechanics of Materials, *Bone Mechanics HANDBOOK Second Edition*, (2001), 6.1-6.24, CRC Press.