

繰返しねじり・引張複合荷重下での
予き裂からの疲労き裂進展経路の予測*田中啓介*¹, 秋庭義明*¹
加藤拓也*², 高橋弘樹*³Prediction of Fatigue Crack Propagation Path from a Pre-Crack
under Combined Torsional and Axial LoadingKeisuke TANAKA*⁴, Yoshiaki AKINIWA,
Takuya KATO and Hiroki TAKAHASHI⁴ Department of Mechanical Engineering, Nagoya University,
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya-shi, Aichi, 464-8603 Japan

Fatigue tests of crack propagation from a pre-crack in thin-walled tubular specimens made of a medium-carbon steel were performed under cyclic torsion with and without superposed static or cyclic axial loading. The stress ratio of cyclic loading was -1 . The experimental path of fatigue crack propagation from a pre-crack was compared with the predictions based on the maximum tangential stress criterion. The direction of fatigue crack propagation was perpendicular to the direction of the maximum of the range of the tangential stress, $\Delta\sigma_{\theta\max}^*$, near the crack tip determined from the stress intensity factor which was calculated by considering the contacts of crack faces at the minimum load. The stress intensity factor calculated from the actual crack path by using the body force method showed that the mode II stress intensity factor range quickly got close to zero after a small amount of crack extension. In other words, fatigue cracks propagate to satisfy the local symmetry of the cyclic components of crack-tip deformation.

Key Words: Fatigue, Crack Propagation, Combined Stress, Fracture Mechanics, Crack Propagation Path, Crack Face Contact, Body Force Method

1. 緒 言

機械構造物の損傷許容設計では、複合荷重下や混合モード下での疲労き裂の進路経路の予測が重要である。混合モード下での疲労き裂の進展様式として、引張形とせん断形があるが⁽¹⁾、引張形の疲労き裂の進展基準(criterion)としては、最大接線応力基準(Maximum tangential stress criterion: MTS criterion)^{(2)~(4)}、局所対称性の基準(Local symmetry criterion)⁽⁵⁾⁽⁶⁾、最大き裂進展速度基準(Maximum crack propagation rate criterion)⁽⁷⁾、最大エネルギー解放率基準(Maximum energy release rate criterion)⁽⁸⁾等が提案されている。実際には、これらの基準によるき裂進展方向の予測の差は小さく、簡便さのためMTS基準が使用される場合が多い。

ところで、混合モード下での疲労き裂進展に関する従来の研究の大部分は、応力比が正の場合がほとんどで、両振り荷重下のようにき裂が閉口する場合の検討

は少ない^{(3)~(6)}。著者らは前報⁽⁹⁾において炭素鋼の薄肉円筒試験片を使用して、まず軸力繰返しによりモードIの予き裂を導入し、その後に、ねじりによりモードIIの繰返し荷重を負荷したときのき裂進展挙動の検討を行った。その結果、き裂が分岐したのちの初期進展方向はき裂先端の接線応力の振れ幅の最大の方向に垂直に進展することを明らかにした。しかし、き裂が分岐した後の疲労き裂の進展経路に関する検討は十分ではなく、また、実験条件も限られていた。

そこで、本研究では、同一材料について前報⁽⁹⁾の実験結果に繰返しねじりと軸力を同位相で負荷した場合を追加するとともに、疲労き裂進展のシミュレーションを行い、き裂の分岐後の進展経路について検討した。シミュレーションと実験結果との比較を基に、混合モード下の疲労き裂の進展経路の予測法を提案した。

2. 実験方法

2.1 材料および試験片 実験に用いた材料は機械構造用中炭素鋼(JIS S 45 C)である⁽⁹⁾。試験片は外径16 mmで、内径14 mmの薄肉円筒で、機械加工後、1123 Kで1 hの焼なましをした。上降伏点は316 MPa、引張強さは583 MPaである。弾性定数はヤン

* 原稿受付 2004年10月14日。

¹ 正員, 名古屋大学工学部(☎464-8603 名古屋市千種区不老町)。² ヤマハ発動機(株)(☎438-0025 磐田市新貝2500)。³ 名古屋大学大学院工学研究科。

E-mail: ktanaka@mech.nagoya-u.ac.jp

グ率 $E=216$ GPa, ポアソン比は $\nu=0.279$, ビッカース硬さは $H_v=164$ である。また, フェライト結晶の平均粒径は $18 \mu\text{m}$ である。試験片には, 0.2 mm の円孔を入れた後, 軸力の両振り繰返し引張圧縮(振幅 $\sigma_a=190$ MPa)により全長約 1 mm の疲労予き裂を導入した。疲労予き裂導入後に, 923 K, 1 h のひずみ取り焼なましをして疲労試験に供した。

2・2 疲労試験 疲労試験には電気油圧サーボ式引張圧縮ねじり複合疲労試験機(島津製作所製 EHF-ED 10/TQ 40 L)を使用した。予き裂導入後, 次の3条件で疲労試験を行った。

(1) ケース A: 応力比 $R=-1$ の繰返しねじり応力のみを負荷するモード II 疲労試験。ねじり応力振幅 $=100$ MPa。

(2) ケース B: 応力比 $R=-1$ の繰返しねじり応力にそれと等しい大きさの静的引張応力を負荷する混

合モード (I + II) 疲労試験。ねじり応力振幅 $=90$ MPa。

(3) ケース C: 応力比 $R=-1$ の繰返しねじり振幅に等しい大きさの動的軸方向引張圧縮応力振幅 ($R=-1$) を同位相で重畳させた混合モード (I + II) 疲労試験。ねじり応力振幅 $=100$ MPa。

ここで, ケース A と B は前報⁹⁾ で行い, ケース C は今回新たに行った疲労試験である。き裂の観察およびき裂長さの測定には, 試験中に採取したレプリカを, 光学顕微鏡を用いて詳細に観察した。

3. 疲労き裂進展のシミュレーション

3・1 解析モデル 解析モデルとしては, 図 1(a) に示すような無限遠で一様引張応力とせん断応力を受ける初期長さ $2c(=1$ mm) のき裂が存在する無限板を取扱う。き裂中心を原点としてき裂位置の座標を与え, 予き裂方向からの角度をき裂進展角 θ とした。実験では薄肉円筒試験片を使用しているが, シミュレーションは平板で行い, 曲率の応力拡大係数への影響は考えていない。き裂が進展したときの応力拡大係数は体積力法 (Body force method: BFM)⁽¹⁰⁾ を用いて解析を行った。

3・2 疲労き裂の進展基準 図 1(b) に示すようにき裂の先端が (x_1, y_1) である状態を考え, このときのき裂のモード I および II の応力拡大係数を K_I, K_{II} とする。このときのき裂先端の接線応力は次式となる。

$$\sigma_\theta = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos^3\left(\frac{\delta\theta}{2}\right) - 3 \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos^2\left(\frac{\delta\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\delta\theta}{2}\right) \dots\dots\dots (1)$$

この σ_θ が最大の方向は次式で与えられる。

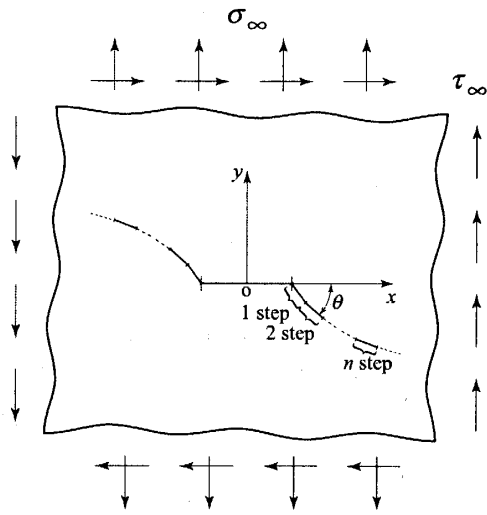
$$\tan\left(\frac{\delta\theta}{2}\right) = \frac{1}{4} \frac{K_I}{K_{II}} - \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8} \dots\dots\dots (2)$$

上式の σ_θ は荷重の一サイクルで変化する。本論文では, 混合モード下での疲労き裂進展の進展方向の基準として, き裂先端の応力場を基にした MTS 基準を取上げ, 両振り荷重状態でのき裂の閉口の取り入れ方の相違により, 次の三つ基準を検討した。

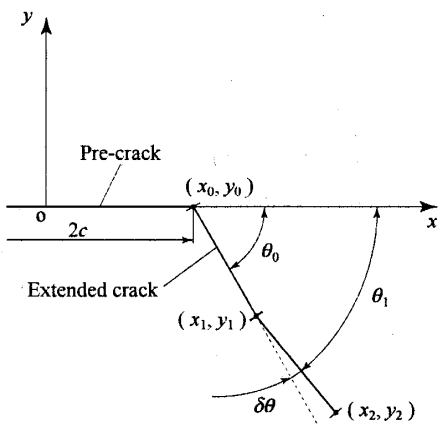
(1) $\Delta\sigma_{\theta\text{max}}$ 基準 圧縮も考慮した応力幅 $\Delta\sigma_\theta$ が最大となる方向にき裂が進展するとする基準である。つまり, 圧縮でもき裂が閉じない条件で計算することになる。

(2) $\Delta\sigma_{\theta\text{max}}^+$ 基準 引張応力のみがき裂進展に有効だとし, 正の応力幅 $\Delta\sigma_{\theta\text{max}}^+$ が最大になる方向にき裂が進展するとする基準である。

(3) $\Delta\sigma_{\theta\text{max}}^*$ 基準 両振り荷重下では, き裂表面



(a) General view



(b) Definition of crack tip coordinates and crack propagation angle

Fig.1 BFM model for crack propagation in infinite plate under tensile and shear stress

は最大荷重では開口しているが、最小荷重では接触している。この接触を考慮して最小の応力拡大係数を求める。この状態では、モード I 成分の最小は $K_{Imin}^* = 0$ となり、 $\Delta K_I^* = K_{Imax}$ となる。一方、モード II 成分は K_{IImin}^* は 0 にはならない。き裂の接触の計算も BFM 法で行ったが、き裂面は接触時に摩擦はないものとして K_{IImin}^* を計算した。このようにして求めた ΔK_I^* と ΔK_{II}^* を式(2)の K_I, K_{II} に置換えて、 $\Delta\sigma_\theta$ が最大となる方向 $\delta\theta$ を求めた。

3.3 疲労き裂進展のシミュレーション 疲労き裂進展のシミュレーションは段階的(step-by-step)に行った。図 1(b)は予き裂から 1 ステップだけ進んだき裂を示す。き裂先端の位置は (x_1, y_1) で、予き裂に対するき裂の角度は θ_0 である。このき裂に対して、応力拡大係数 K_I と K_{II} を BFM で求める。これより、上記のいずれかの基準によってき裂進展方向 $\delta\theta$ を求める。なお、式(2)からもわかるように、き裂の偏向

はモード II の応力拡大係数によってもたらされ、モード I 単独の場合にはき裂は直線的に進む。

き裂の進展距離 Δc は次式で決定した。

$$\Delta c = (dc/dN) \times N \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $N=1000$ サイクルである。本試験材料に関するモード I のき裂進展速度 dc/dN [m/cycle] と最大応力拡大係数 K_{max} [MPa] の関係は、き裂進展速度が 10^{-9} m/cycle 以上の Paris 領域に対して、次式が報告されている⁽¹¹⁾。

$$dc/dN = C(K_{max})^m \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $C=1.76 \times 10^{-12}$ また $m=3.69$ である。なお、上式は応力比が負の場合にもほぼ適用できることが確かめられている。また下限界の応力拡大係数範囲は、 $K_{maxth}=5.26 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ である。いま、最大応力拡大係数 K_{Imax} と K_{IImax} を受けるき裂が、1 ステップだけ進展するときのき裂のモード I の応力拡大係数を等価応力拡大係数 K_v とすると、その最大値 K_{vmax} は次式で与えられる。

$$K_{vmax} = \sigma_\theta \sqrt{2\pi r} \\ = K_{Imax} \cos^3\left(\frac{\delta\theta}{2}\right) - 3K_{IImax} \cos^2\left(\frac{\delta\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\delta\theta}{2}\right) \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 $\delta\theta$ がき裂の進展方向である。モード I 単独下ではき裂は $\delta\theta=0$ の方向に進むので $K_{vmax}=K_{Imax}$ である。混合モードき裂では上式の K_{vmax} 値を式(4)の K_{max} に代入するとき裂進展が求められる。き裂進展のシミュレーションはこの逐次計算を繰返すことによって行った。本シミュレーションでのき裂進展量は式(3)に従って決定しており、最初は $10 \mu\text{m}$ 程度であるが、進展とともに次第に大きくなる。

4. 実験結果およびシミュレーションとの比較

4.1 き裂進展経路 各ケースにおける試験後の疲労き裂全体を図 2 に示す。図中では円孔からの水平き裂部が予き裂である。図 2 に示されるようにケース A, B では各予き裂先端からき裂が分岐して、計 4 本のき裂が進展したが、ケース C の場合には 2 本のき裂のみが進展した。またケース A, B は両振りであり、4 本とも同一の長さになるべきだが、わずかな荷重の偏りのためか、写真で右下、左上のき裂は右上、左下のき裂に比べて長くなった。なお、ケース C でき裂が 2 本しか進展しない理由は、もう一方の主応力振幅の極大値が小さいためである。

図 3 には、実験より得られたき裂の進展経路をトレースしたものと、三つの基準によって進展経路を予測した結果を示す。ケース A では $\Delta\sigma_{\theta max}$ と $\Delta\sigma_{\theta max}$ 基

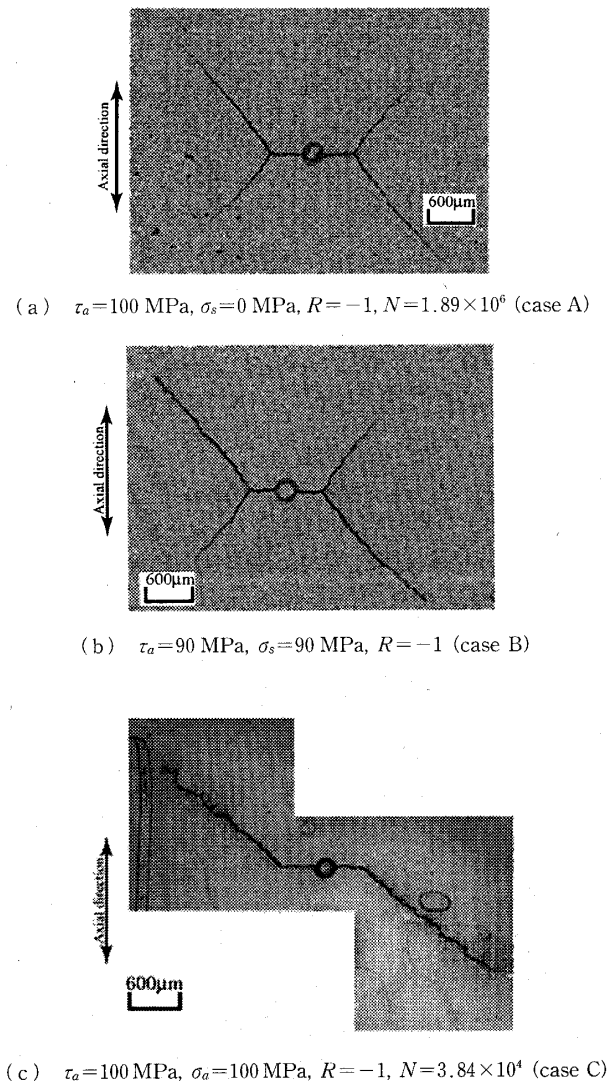


Fig. 2 Micrographs of not arrested cracks

準は全く同じ結果を予測するが、 $\Delta\sigma_{\theta_{max}}^*$ 基準はわずかに違う経路を予測している。ケース B では、三つの基準はそれぞれ違う結果を予測している。 $\Delta\sigma_{\theta_{max}}^*$ 基準による予測のほうが $\Delta\sigma_{\theta_{max}}$ 基準による予測よりもやや内側になっており、実験による進展経路に近い予測がされている。ケース C では、三つの基準はほぼ同じ予測をしている。

き裂進展初期は微細組織の影響を受けてジグザグに進展している。そのため、き裂進展経路を二次関数により近似した。図 4 には疲労き裂進展角度の実験結果と各基準による予測を示す。き裂進展角度 θ は図中の挿入図のように予き裂方向(水平方向)からの角度とした。またき裂長さ c は予き裂からき裂進展方向に測定した長さである。各ケースとも $\Delta\sigma_{\theta_{max}}^*$ 基準によ

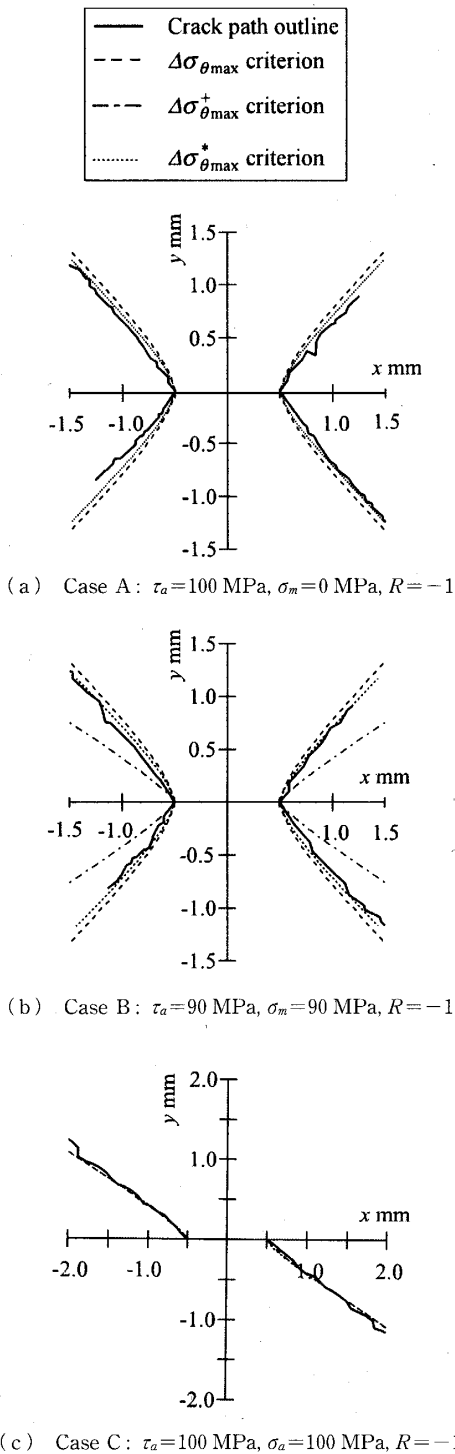


Fig. 3 Crack path outline and the predicted propagation path

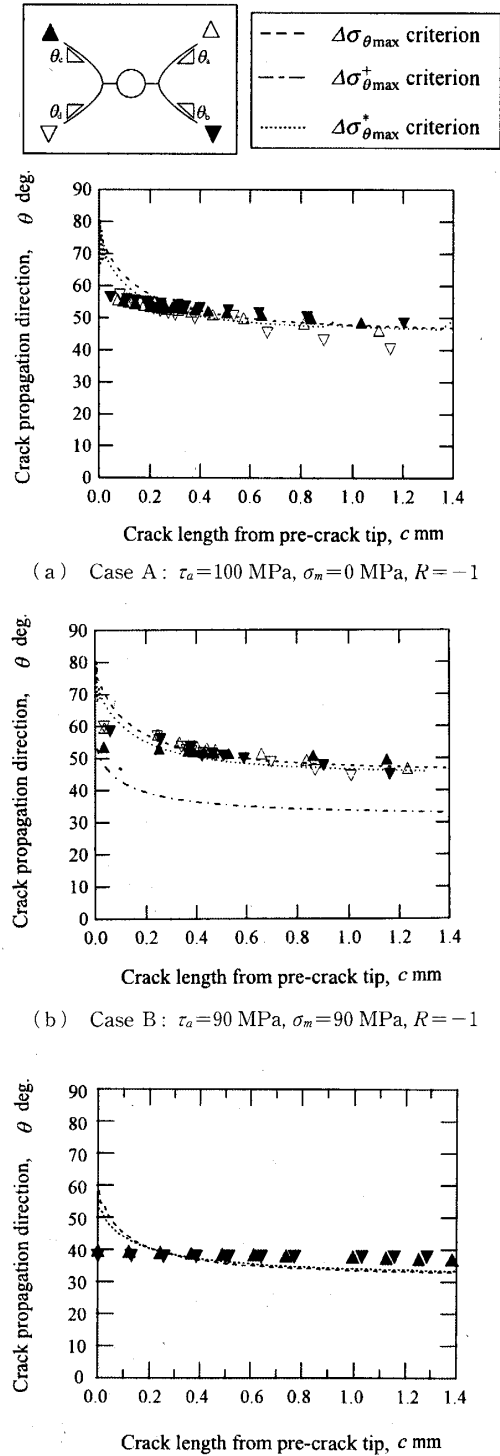


Fig. 4 Fatigue crack propagation direction

り予測されるき裂進展角度は $\Delta\sigma_{\theta_{\max}}$ 基準による結果より低めになっているが、予測の差は小さい。実験結果は $\Delta\sigma_{\theta_{\max}}$ 基準および $\Delta\sigma_{\theta_{\max}}^*$ 基準による予測と一致している。ケース A と C では、 $\Delta\sigma_{\theta_{\max}}^*$ 基準による予測もほぼ一致しているが、ケース B では、 $\Delta\sigma_{\theta_{\max}}^*$ 基準により予測は $\Delta\sigma_{\theta_{\max}}$ と $\Delta\sigma_{\theta_{\max}}^*$ 基準の予測よりかなり小さい。実験結果は $\Delta\sigma_{\theta_{\max}}^*$ 基準による予測とは大きく離れている。さらに詳細に検討すると、き裂進展量が約 0.2 mm 程度以下では実験結果は $\Delta\sigma_{\theta_{\max}}$ と $\Delta\sigma_{\theta_{\max}}^*$ 基準の予測結果よりも低めの角度になってい

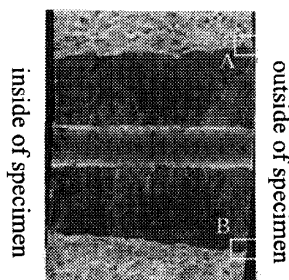
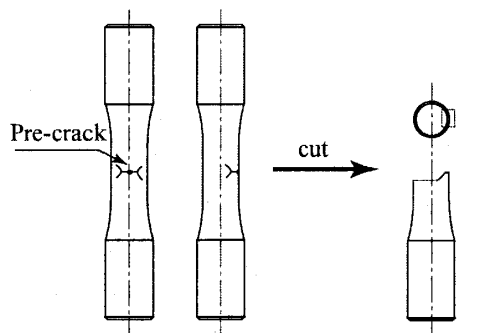
る。しかし、き裂が進展するに伴い $\Delta\sigma_{\theta_{\max}}$ と $\Delta\sigma_{\theta_{\max}}^*$ 基準の予測はケース A, B では、45 度方向に漸近し、ケース C では 32° 方向に漸近していく。また実験結果もこれに一致している。これらの角度は、公称応力の変動成分の最大主応力方向に垂直であり、き裂は進展とともに、予き裂の影響域を脱して、徐々にき裂の方向を変える。き裂の進展方向は負荷公称応力の変動成分によって支配されることを示している。

ここで、初期の進展経路について検討する。き裂進展開始の 0.2 mm 程度以下のき裂長さの領域では、き裂進展方向がばらついており、き裂進展初期においては材料の微視組織の影響を大きく受けると考えられる。また、き裂は表面上では 1 mm であるが、試験片の内部では初期き裂の長さが長くなっている可能性がある。このとき、表面き裂の進展経路も影響を受け、本来の予測角度よりも低めの進展方向になることが考えられる。

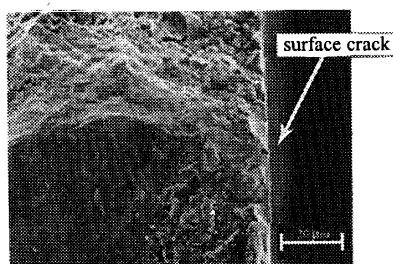
そこで、薄肉円筒試験片の予き裂破面の走査形電子顕微鏡 (SEM) 観察を行った。き裂の予き裂下面の SEM 写真を図 5 に示す。図 5 の写真はどちらも写真右側が試験片表面、左側が試験片内面側になっている。予き裂長さは内面側と表面では違い、内面側に向かうほど短くなっている。一方、表面近傍ではき裂がやや丸くなり、表面に現れているき裂はやや短くなっている。この表面近傍においてき裂が短くなっている長さはおおよそ 30 μm 程度である。この影響がき裂進展初期の進展角度に影響し、き裂進展初期における予測結果との違いが生じると考えられる。

この検討を行うため、仮想的に初期長さを種々のき裂進展角度 θ_0 で与えた。仮想的に伸ばした長さを Δc_0 とし、この値は想定している材料の組織の平均粒径が 18 μm であることより 36 μm とした。その後のき裂進展挙動について $\Delta\sigma_{\theta_{\max}}^*$ 基準を用いて検討した。初期き裂角度 θ_0 を 0~60° と変化させ、ケース A の右下のき裂と比較した結果を図 6(a) に示す。初期角度 45~60° では、初期角度にかかわらず初期角度を与えずに予測した曲線に漸近していくのがわかる。しかし、初期角度 30° からはその傾向が少なくなり、15° ではむしろ初期角度 0° による予測曲線に近い。図 6(b) は初期角度 0° の場合の進展後の経路であるが、き裂が長くなった範囲でもよく一致している。このようにき裂の進展初期の表面での経路は内部の影響を受けていたものと考えられる。

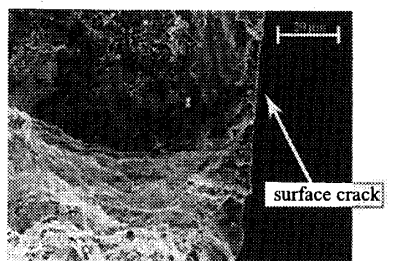
4・2 応力拡大係数の変化挙動 予き裂からのき裂進展シミュレーションでは、進展に伴う応力拡大係数の変化を BFM を用いて計算した。次いで、実験で



(a) Fracture surface of pre-crack



(b) Enlargement of A



(c) Enlargement of B

Fig. 5 Scanning electron micrographs of under fracture surface of pre-crack (case A)

のき裂進展経路の近似曲線上の座標をもとに BFM モデルを作成し応力拡大係数の変化も計算した。最大荷重を負荷しているときは右下と左上のき裂のみのモデルを作成し、左下と右上のき裂は閉じているとしてき裂の応力拡大係数を BFM により求めた。計算では予き裂の分割数を 100, 分岐き裂の分割数を 10 とした。

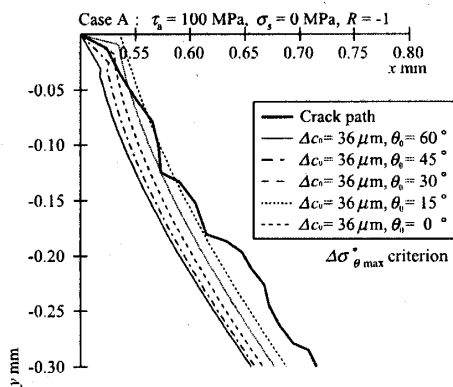
図 7 はケース A と B の場合のき裂経路に対する最大応力拡大係数の結果を、 $\Delta\sigma_{\theta\max}^*$ 基準と $\Delta\sigma_{\theta\max}$ 基準による予測結果とともに示す。図中の白印は逆負荷したときの左下と右上のき裂に対する値である。最大応力拡大係数 $K_{I\max}$ はき裂進展とともに単調に増加し、実験と予測はよく一致している。一方、 $K_{II\max}$ はケース A ではき裂進展につれて零に近づくが、ケース B ではき裂進展とともに大きくなる傾向がある。

図 8 は $\Delta\sigma_{\theta\max}^*$ 基準によるケース A と B の場合の ΔK_I と ΔK_{II} のき裂進展に伴う変化を示す。いずれの場合もき裂進展とともに応力拡大係数 ΔK_{II} は零に近づく。つまり、ケース B では $K_{II\max}$ はき裂進展とともに増大したが、 $\Delta K_{II\max}$ は零に近づく。また、 ΔK_I の変化挙動は実験と予測でほぼ等しい。

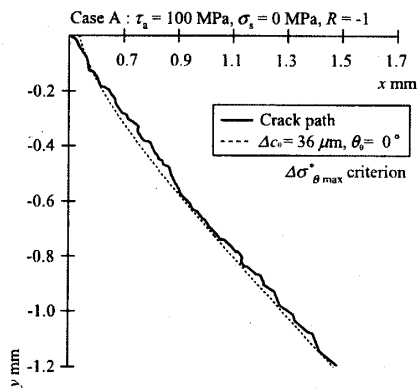
本実験の 3 ケースの結果を総合すると、実際の疲労

き裂の進展経路は、 $\Delta\sigma_{\theta\max}^*$ 基準が最も実験結果に近い結果を与えるといえる。これは疲労き裂進展が、き裂先端での局所塑性変形によって支配されていることと関係している。仮に、最大き裂進展速度基準⁽⁷⁾によってき裂進展速度が最大となる方向にき裂が進展するとすると、き裂の進展方向は $\Delta\sigma_{\theta\max}^*$ 基準に一致するはずである。しかしながら、ケース B の結果に見られるように実験結果とは一致しない。

図 9 にはケース B に関して各基準で求めた ΔK_I と ΔK_{II} の変化を示す。 $\Delta\sigma_{\theta\max}$ および $\Delta\sigma_{\theta\max}^*$ 基準では $\Delta K_{II}=0$ となるのに対して $\Delta\sigma_{\theta\max}$ 基準では ΔK_{II} が零とはならない。 ΔK_{II} によるひずみ場は非対称であり、き裂を偏向させる要因となる。つまり、 $\Delta\sigma_{\theta\max}^*$ 基準の方向は $K_{I\max}$ が最大となり、き裂進展速度の最大が予測されるが、 ΔK_{II} が零でないためき裂の偏向が引起

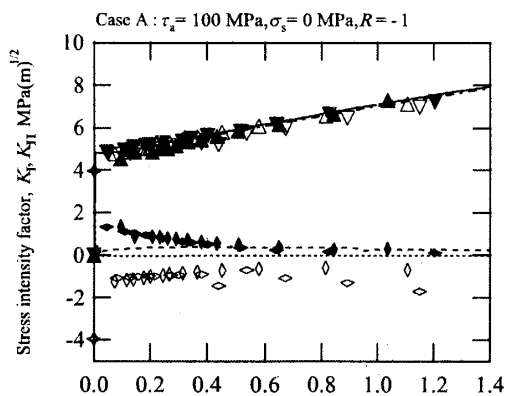
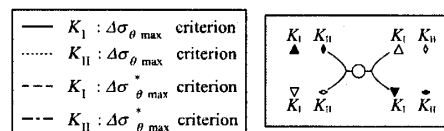


(a) Crack path and predicted line with initial angles

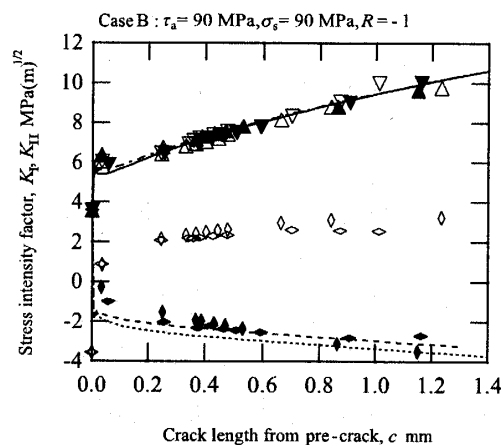


(b) Crack path and predicted line with an initial length ($\Delta c_0 = 36 \mu\text{m}$)

Fig. 6 Crack path and predicted line



(a) Case A



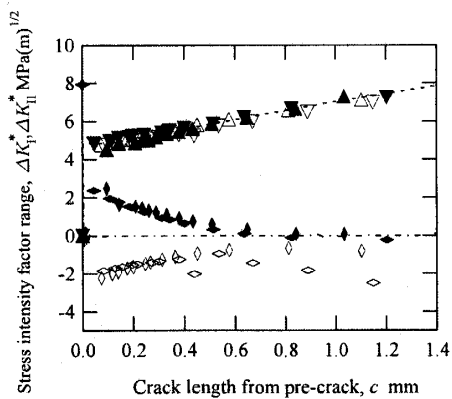
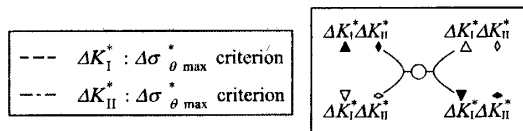
(b) Case B

Fig. 7 Change of maximum stress intensity factor with crack length

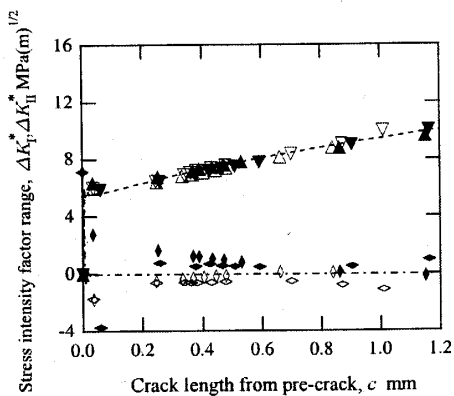
こされるものと理解される。つまり疲労き裂進展方向は応力変動成分の局所対称性を満足する方向に進むと結論できる⁽⁵⁾⁽⁶⁾。このことは、単軸下でのモード I き裂の進展速度が、応力比が負の場合において K_{max} で支配されることとは矛盾しない。モード I 単独の場合、 ΔK_{II} 成分がないためき裂の偏向は生じず、き裂進展速度最大の方向とき裂進展方向が一致している。

ところで、本研究においては $\Delta\sigma_{\theta max}^*$ 基準の場合の BFM による接触計算では摩擦係数は零としているが、これが無限大であると K_I が零となった後はき裂は完全にロックされることになり、閉口時にはモード II の変形が生じないことになる。このとき、 $\Delta\sigma_{\theta max}^*$ 基準に従った方向に進展するものと予想されるが、実際にはこのような材料はなく、 $\Delta\sigma_{\theta max}^*$ 基準ではき裂の進行方向を予測できないことになる。

さて、 $\Delta\sigma_{\theta max}$ 基準は、き裂の閉口を無視しており



(a) Case A ($\tau_a=100$ MPa, $\sigma_s=0$ MPa, $R=-1$)



(b) Case B ($\tau_a=90$ MPa, $\sigma_s=90$ MPa, $R=-1$)

Fig. 8 Change of stress intensity factor range with crack length (prediction based on $\Delta\sigma_{\theta}^*$ max criterion)

$\Delta\sigma_{\theta max}$ 値そのものは実際のき裂の応力状態を表してない。しかしながら、 $\Delta\sigma_{\theta max}$ 基準で予測されるき裂進展方向は ΔK_{II} が零の方向で、 $\Delta\sigma_{\theta max}^*$ 基準による ΔK_{II}^* が零の方向とほぼ一致している。つまり、 $\Delta\sigma_{\theta max}$ 基準によるき裂進展方向が局所対称性基準とほぼ同一であるため、結果的に実験結果とほぼ一致するものと理解される。

5. 結 言

モード I の予き裂を有する炭素鋼中空試験片に繰返しねじり単独、静的軸引張りを重畳した場合、および繰返し引張圧縮を重畳した場合の 3 条件での疲労き裂の進展挙動を観察し、最大接線応力基準を基にした疲労き裂進展シミュレーション結果と比較した。分岐き裂の応力拡大係数は体積法により計算した。主な結論は次のとおりである。

- (1) 予き裂からの分岐した疲労き裂の進展経路は、き裂閉口を考慮した応力拡大係数から求められるき裂先端の接線応力の変動幅 $\Delta\sigma_{\theta}$ が最大となる方向に垂直にき裂が進展するとしてシミュレーションした経路とほぼ一致する。き裂進展の初期には予き裂の板厚内部の三次元的形状の影響により予測の経路とはやや異なる。
- (2) き裂は進展とともに、予き裂の影響域を脱して、徐々にき裂の方向を変えて、負荷公称応力の変動

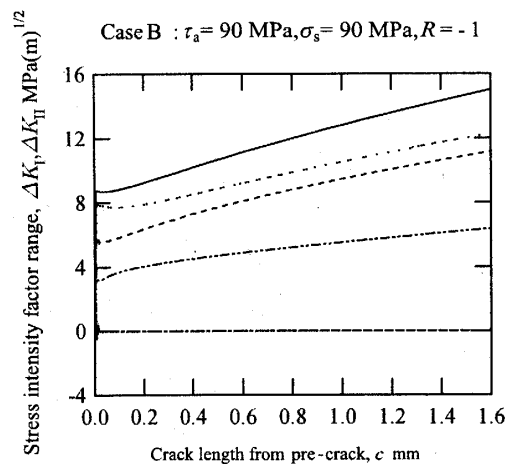
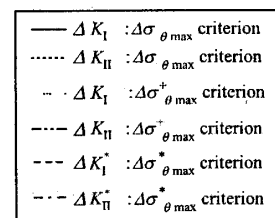


Fig. 9 Change of stress intensity factor range with crack length (case B)

成分に関する最大主応力に対して垂直に進展する。

(3) き裂の進展とともにき裂のモードIIの応力拡大係数範囲 ΔK_{II} は零に近づき、き裂先端での局所対称性基準を満たすように進展する。 ΔK_{II} が存在すると、き裂先端での繰返し塑性変形が非対称となり、このためき裂が偏向する。

(4) き裂閉口を無視して荷重の変動成分のみから求めた最大接線応力基準によって求めたき裂進展方向も、き裂閉口を考慮した場合とほぼ同一の方向を与えるが、これはき裂閉口を無視して求めた最大接線応力方向が、モードIIの応力拡大係数範囲が零となる方向と一致しているためである。

文 献

- (1) Otsuka, A., Mori, K. and Miyata, T., *Eng. Fract. Mech.*, **7** (1975), 429-439.
- (2) Erdogan, F. and Sih, G. C., *J. Basic Eng.*, **85** (1963), 519-527.
- (3) Richard, H., Linning, W. and Henn, K., *Forensic Eng.*, **3** (1991), 99-109.
- (4) Schollmann, M., Richrad, H. A., Kullmer, G. and Fuland, M., *Int. J. Fract.*, **117** (2002), 129-141.
- (5) 北川英夫・結城良治, 機論, **41-346** (1975), 1641-1649.
- (6) Sumi, Y., Nasser, S. N. and Keer, L. M., *Int. J. Fract.*, **21** (1983), 67-79.
- (7) Palaniswamy, K. and Knauss, W. G., *Mechanics Today*, **4** (1978), 30, Pergamon.
- (8) Hourlier, F., d'Hondt, H., Truchon, M. and Pineau, A., *Multiaxial Fatigue*, ASTM STP 853 (Miller, K. J. and Brown, M. W. 編) (1985), 228-248.
- (9) 田中啓介・秋庭義明・御厨照明・田中光一, 機論, **67-664**, A (2001), 2032-2038.
- (10) 西谷弘信・陳代行・才本明秀, 体積法による二次元応力解析汎用プログラム (1994), 124-129, 培風館.
- (11) 秋庭義明・張洛明・田中啓介, 機論, **64-621**, A (1998), 1229-1235.

(1) Otsuka, A., Mori, K. and Miyata, T., *Eng. Fract. Mech.*,