

## アスペクト比が小さいテイラー渦流れの数値解析\* (第1報, レイノルズ数の増加履歴によるモードの選択)

戸谷 順信<sup>\*1</sup>, 左冶木 修<sup>\*2</sup>, 原 里美<sup>\*3</sup>  
渡辺 崇<sup>\*4</sup>, 中村 育雄<sup>\*5</sup>

### Numerical Analysis of the Taylor Vortex Flow with a Small Aspect Ratio (1st Report, Selection of the Final Mode Depended by a History of the Reynolds Number)

Yorinobu TOYA<sup>\*6</sup>, Osamu SAJIKI, Satomi HARA,  
Takashi WATANABE and Ikuo NAKAMURA

<sup>\*6</sup> Department of Mechanical Engineering, Nagano National College of Technology,  
716 Tokuma, Nagano-shi, Nagano, 381-8550 Japan

In this report we present the results of the 3-dimensional numerical analysis for the selection of the final modes on the Taylor vortex flow with a small aspect ratio. Some kinds of modes of the Taylor vortex flow are depended by a history of the increment of the Reynolds number even though the final Reynolds number and the aspect ratio were same value. In this numerical computation, 6 kinds of final Reynolds numbers and 6 kinds of accelerations of the Reynolds number were used at an aspect ratio 4.0 on the symmetric system. The mode formation processes in the numerical analysis were qualitatively consistent with the results in the experiment. And the final modes on the 36 sets of the histories of the increment of the Reynolds number were 75% accuracy consistent with the final modes in the equivalent experiment. The time development of the energy and the enstrophy in radial, axial and azimuthal directions of the Couette-Taylor flow were investigated. The energy and the enstrophy in the radial direction affected to the final mode.

**Key Words**: Fluid Dynamics, Viscous Flow, Chaos, Fluid Transients, Numerical Analysis

#### 1. 緒 言

テイラー渦流れの安定性に関しては, Taylor<sup>(1)</sup>の発表以来, 多くの理論的, 実験的, 数値解析的研究成果が報告されている. 特に Benjamin<sup>(2)</sup>によってテイラー渦流れが非線形力学系における分岐現象として注目されて以来, 流体力学の分野ばかりでなく, 工学, 理学, 医学, 経済学等に共通する分岐のパラダイムとしてさらに研究分野が広がったといえる<sup>(3)</sup>. 特に, ア

スペクトル比が小さいテイラー渦の分岐, カオス現象については, Mullin<sup>(4)</sup>や Cliffe, Mullin<sup>(5)</sup>によって多くの理論的, 実験的, 数値的解析が行われた. 彼らは内円柱の急加速によってそれまで知られなかった主モードと二次モードの存在を明らかにし, さらに正規モードと変異モードの発見と定義を行った. 有限長のテイラー渦流れにおける数値計算では Cliffe<sup>(6)(7)</sup>が2セル流れと4セル流れの分岐関係や主モードと他のモードの分岐関係を明らかにし, テイラー渦流れにおける代表的な特徴である非一意性に関して多くの知見をもたらした.

非線形力学系に見られる非一意性と分岐関係は分岐理論に基づいて明らかにされてきているが, 実際に有限長テイラー渦流れにおいて主モードと二次モードがどのような過程で発生しているか, またどのような条件で発生するのかに関してはあまり検討されていない. 多くの二次モードの存在と流線図による発生過程が Streett-Hussaini<sup>(8)</sup>によって明らかにされている

\* 原稿受付 2004年4月27日.

<sup>\*1</sup> 正員, 長野工業高等専門学校機械工学科(☎381-8550 長野市徳間716).

<sup>\*2</sup> 学生員, 新潟大学工学部(☎950-2181 新潟市五十嵐2の町8050).

<sup>\*3</sup> 准員, (株)日産ディーゼル技術研究所(☎362-0046 上尾市大字老丁目1).

<sup>\*4</sup> 正員, 名古屋大学エコトピア科学研究機構情報・通信科学研究部門(☎464-8603 名古屋市千種区不老町).

<sup>\*5</sup> 正員, 名城大学理工学部(☎468-8502 名古屋市天伯区塩釜口1-501).

E-mail: toya@me.nagano-nct.ac.jp

が、そのモードがどのような方法で発生したのかは不明のままである。中村・戸谷<sup>(9)</sup>は、アスペクト比が4において、レイノルズ数の増加の仕方を増加率とその最終レイノルズ数の値で組合せ、全部で36種類の条件に対してモードの発生が確率的に表せることを実験によって示した。東ら<sup>(10)</sup>は、アスペクト比が3において7種類のレイノルズ数の変化に対して三次元数値解析によって検討した。さらにWatanabeら<sup>(11)</sup>はアスペクト比が小さいテイラー渦流れの不安定性に関して分岐の観点から実験結果との一致を報告している。Furukawaら<sup>(12)</sup>は、アスペクト比が1前後において流れの状態を実験と比較し、さらに時間に対する非定常状態の変化を流線で表している。しかし、各種モードの発生過程と発生条件を明らかにするためにはさらに実験的、数値的解析を積み重ねる必要がある。

本研究は、三次元数値解析によりレイノルズ数の増加率(実験では内円柱の回転数増加率)の影響に着目してレイノルズ数の最終値と増加率をおのおの6種類ずつ変化させて発生する最終モードを求め、同じ条件で行った実験結果と比較したものである。

## 記号

$r_1$ : 内側円柱半径

$r_2$ : 外側円柱半径

$\eta$ : 半径比 = 0.667

$\omega$ : 内側円柱の瞬時回転角速度

$\omega_0$ : 内側円柱の代表回転角速度

$D$ : 円環のすきま

$\nu$ : 動粘度

$Re$ : 瞬時レイノルズ数 =  $\omega r_1 D / \nu$

$Re_0$ : 代表レイノルズ数 =  $\omega_0 r_1 D / \nu$

$L$ : 作動流体の高さ

$\Gamma$ : アスペクト比 =  $L/D$

$Ac$ : レイノルズ数増加度

## 2. 基礎計算式

数値解析における力学的、幾何学的パラメータは実験<sup>(9)</sup>におけるものと同じである。内円柱は回転し、同軸に設置された外円柱と円環の上下端面は固定である。アスペクト比 $\Gamma$ は4.0で一定である。

支配方程式は円筒座標系 $(r, \theta, z)$ におけるNavier-Stokes方程式で下記のように表される。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re_0} \nabla^2 \mathbf{u} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 $\mathbf{u} = (u, v, w)$  である。

流れ場を可視化するために、下記の関数を用いた。

$$u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \quad \dots\dots\dots (3\cdot a)$$

$$w = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} \quad \dots\dots\dots (3\cdot b)$$

この関数 $\Psi_1, \Psi_2$ は、軸対称流れのStokesの流れ関数 $\Psi$ に類似したもので、半径方向速度成分 $u$ と軸方向速度成分 $w$ との間でそれぞれ上記の関係をもっている。 $\Psi$ は $\Psi_1, \Psi_2$ を円柱壁面あるいは端面からの積分距離の逆数を重みとして平均したものである。

テイラー渦流れの時系列発展過程を求めるために運動エネルギー $E$ とエンストロフィー $\Omega$ の空間平均値を求めた。エネルギーとエンストロフィーは下記のように定義される。

$$E = \frac{1}{V} \int_V \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} dV \quad \dots\dots\dots (4\cdot a)$$

$$\Omega = \frac{1}{V} \int_V \frac{|\boldsymbol{\omega}|^2}{2} dV \quad \dots\dots\dots (4\cdot b)$$

ここで、 $V$ は流れ領域の全体積、 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_r, \omega_\theta, \omega_z)$ で、 $\Omega = \Omega_r + \Omega_\theta + \Omega_z$ である。渦度とエンストロフィー成分の積分は以下である。

$$\omega_r = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \Omega_r = \frac{1}{V} \int_V \frac{\omega_r^2}{2} dV \quad \dots\dots (5\cdot a)$$

$$\omega_\theta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \Omega_\theta = \frac{1}{V} \int_V \frac{\omega_\theta^2}{2} dV \quad \dots\dots (5\cdot b)$$

$$\omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad \Omega_z = \frac{1}{V} \int_V \frac{\omega_z^2}{2} dV \quad \dots\dots\dots (5\cdot c)$$

## 3. 計算方法と条件

基本解法はMAC法に基づいて対流項にはQUICK法、空間積分には二次中心差分法、時間積分にはオイラー法を用いる。圧力ポアソン方程式の解法はSOR法とILUCGS法を併用する。ポアソン方程式の収束の判定は平均残差が $10^{-4}$ 未満とする。格子はスタガード格子を採用する。三次元空間における各方向の格子数は流れ場を形成するのに重要な要因になると考えられるため、最適な格子数を検討した。すなわち $(r, \theta, z)$ の組合せで、(21, 20, 84), (41, 38, 168), (21, 20, 120), (21, 20, 160), (21, 20, 200), (21, 20, 240)の六とおりの格子数に関して計算を行い、実験結果と75%の割合で一致の最も高かった(21, 20, 84)を採用した。本計算は、クーラン数による数値的安定条件は満たしており、すべて安定であることを確認している。採用した格子の組合せは、結果を見る限りメッシュが正方形で子午線断面では、空間離散の誤差の偏りが小さいことが数値結果によい影響を与えているものと考えられる。無次元時間のタイムインターバルは

Table 1 Acceleration of the Reynolds number

		Acceleration Dimensionless Time					
		1	2	3	4	5	6
Re <sub>0</sub>	253	5.14	2.57	1.715	1.285	1.03	0.855
	488	19.13	9.565	6.375	4.785	3.77	3.19
	740	43.955	21.98	14.725	10.99	8.79	7.255
	993	79.335	39.61	26.395	19.79	15.835	13.21
	1228	121.085	60.545	40.375	30.27	24.215	20.17
	1487	176.83	88.415	58.96	44.21	35.375	29.455

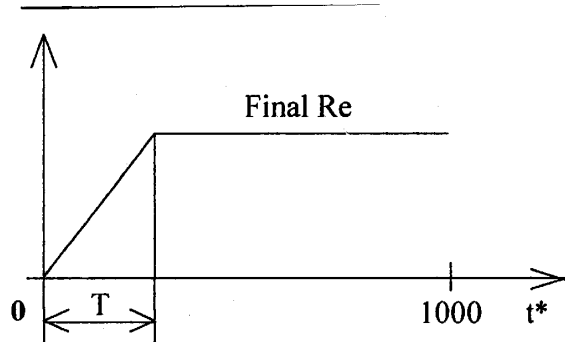


Fig. 1 Acceleration of the Reynolds number

0.005, 計算時間は40万ステップで打ち切った。

境界条件に関して, 内外円柱の表面と上下端面の速度成分は滑りなしであり, 初速度はすべての流れ領域にわたって零である。

本計算で行ったレイノルズ数の増加の仕方を模式的に表したものを図1に示す。Reは零から決められた最終値  $Re_0$  まで決められた増加率  $A_c$  で直線的に増加し, その後一定値を維持する。 $Re_0$ は6種類, それぞれの  $Re_0$  に対し増効率は6種類を採用し, 結果的に三十六とおりの増加方法に対して最終モードを求めた。

Reの増加率を表す無次元加速時間を表1に示す。列表記はReの最終値, 行の表記は無次元加速時間である。表記の便宜上, レイノルズ数増加度  $A_c$  を1から6の数字で示す。これらは物理実験と合せた加速度である。各クラスの増加率は  $Re_0$  が異なっても同じである。

各アスペクト比において安定に存在するテイラー渦流れのモードは実験により明らかになっている。 $\Gamma=4.0$ において存在するモードは以下のとおりである。なお, 主モード, 二次モード, 正規モード, 変異モードはBenjaminが定義したものであり, その詳細は文献(2), (9)を参照されたい。

主モード: N 4

二次モード(正規モード): N 2, N 6

二次モード(変異モード): A 3, A 4, A 5

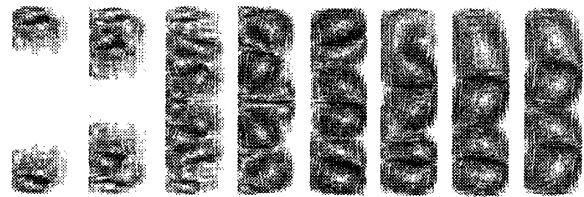
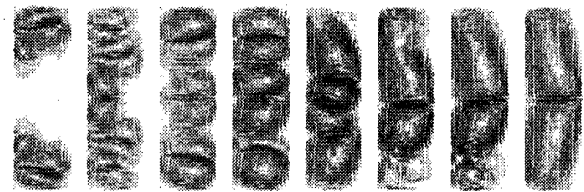
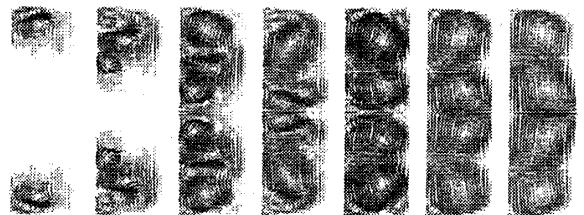
(a) Normal 4 cell mode  $Re_0=1228$   $A_c=2$ (b) Normal 2 cell mode  $Re_0=1228$   $A_c=1$ (c) Anomalous 4 cell mode  $Re_0=1228$   $A_c=4$ 

Fig. 2 Formation Process of modes by ways of increasing Re

#### 4. 結果および考察

4.1 モードの形成過程 Reの増加の履歴に対する各種モードの代表的形成過程を図2(a)~(c)に示す。各ベクトル線図の左側は内円柱, 右側は外円柱である。各図は一定の時間ごとではなく, 特徴的な線図を掲載した。図2(a)は,  $Re_0=1228$ ,  $A_c=2$ である。渦が上下端面上から発生し始め, 途中で数個の小さいセルが発生するが, 最終的には4セルモード(N4)に落ち着く。図2(b)は,  $Re_0=1228$ ,  $A_c=1$ である。N4と同様に途中でいくつかのセルが発生するが, 最終的には2セルモード(N2)に落ち着く。図2(c)は,  $Re_0=1228$ ,  $A_c=4$ である。発生したモー

Table 2 Final modes in the numerical analysis

		Acceleration					
		1	2	3	4	5	6
Reo	253	N4	N4	N4	N4	N4	N4
	488	N2	N4	N4	N4	N4	N4
	740	N2	N4	N4	N4	N4	N4
	993	N4	N4	N4	N4	N4	N4
	1228	N2	N4	N4	N4	A4	A4
	1487	N2	N4	N4	N2	N4	N4

ドは変異4セルモード(A4)であり、上下端面上においてセルの流れは、内円柱から外円柱へ向かっている。これは正規モードにおける端面上のセルの流れ方向と異なっている。これらのモードの形成過程は、同じ割合で  $Re$  が増加したときに実験によって観察された発生過程<sup>(9)</sup>と定性的に一致している。本計算において示されたように、 $Re_0$  が同じ場合においても安定なモードが複数個存在する現象は、非線形力学系がもつ非一意性の特徴であり、発生するモードは  $Re$  の増加の割合に依存することが数値解析についても確認できた。

#### 4.2 レイノルズ数の増加履歴による最終モード

36種類のレイノルズ数の増加履歴に対して最終的に安定して存在するモードを求めた。表2は数値解析の結果を、表3は比較対象のために同じ条件で行った実験結果を示す。各表の左列の数值はレイノルズ数の最終値、上の行の数值はレイノルズ数増加度を表す。表3の実験結果の詳細は文献(9)を参照されたいが、表3中のモードは、実験において各モードの発生頻度を求めた後に、最も頻度の多いものを代表最終モードとしてまとめたものである。

表2の各条件における灰色の欄は数値計算と実験結果における最終モードが異なった部分である。特に、 $Ac=1$ と $Re=1228$ の条件において計算結果と実験結果がより異なる結果となった。これは、計算と実験のどちらにおいても境界条件、初期乱れ、増速率、メッシュ数などにより結果が大きく異なってくると考えられる。特に $Ac=1$ では、 $Re$ の増速がゆっくりであることから、計算と実験の差がやすいこと、また $Re=1228$ は、変位モードの発生領域にあると予想され、微小なじょう乱が発生するモードに影響することが考えられる。また、 $Re_0=1228$ 、 $Ac=5,6$ において、計算結果と実験結果でA4モードが発生していることは、変異モードが妥当に予測できていることを示す。

#### 4.3 数値解析と実験の比較方法 テイラー渦の

Table 3 Final modes in the experiment

		Acceleration					
		1	2	3	4	5	6
Reo	253	N4	N4	N4	N4	N4	N4
	488	N4	N4	N4	N4	N4	N4
	740	N4	N4	N4	N4	N4	N4
	993	N4	N4	N4	N4	N4	A4
	1228	N4	A4	A4	A4	A4	A4
	1487	N4	N4	N4	N4	N4	N4

研究ではセル数のような離散値が問題となる。この変化の表現法はColes<sup>(13)</sup>らBielek-Koschmieder<sup>(14)</sup>のような方法あるいは著者らの表現法<sup>(15)</sup>が試みられているが、まだ確定した方法はないようである。また、表2と表3のような二次元配列の離散値の比較法の一般的なものはないように思われるので、この方法について検討してみる。

まず、この表の意味について考えてみる。ABC流れを研究し、Topological Theory of Hydrodynamicsの著者であり、展望も行っているArnoldはある展望の中で、“自分にとってトポロジーとは連続な対象物の離散不変量の研究である”と述べている<sup>(16)</sup>。数学のトポロジー分野では“近い”、“遠い”の位相的性質とArnoldのこの言葉に見られる離散的な不変量、例えば曲面のEuler-Poincare指数のような量の研究の二つが重要な対象である。ところで、ある流体運動は実験的であれ、理論的であれ、数値的であれNavier-Stokes方程式の解集合の一部であるとみなしてよい。すると本件研究でのN4、A4のようなセルの分類を、今Nに+1、Aに-1を対応させてN4=4、A4=-4のように示すと、セルパターンを示すこの値は連続無限と思われるN-S方程式の解集合のトポロジー的性質を示す量であるとArnold流に考えてよいであろう。これは寺田寅彦の論文<sup>(17)</sup>中の表現をここで明確にしたものといえる。すなわち、テイラー渦の研究の中心課題は流体運動のトポロジーの研究である。

次に、この表をトポロジー表にして $Re$ を行に、 $Ac$ を列に対応させると、数値解トポロジー行列表現は

$$N_t = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & -4 & -4 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

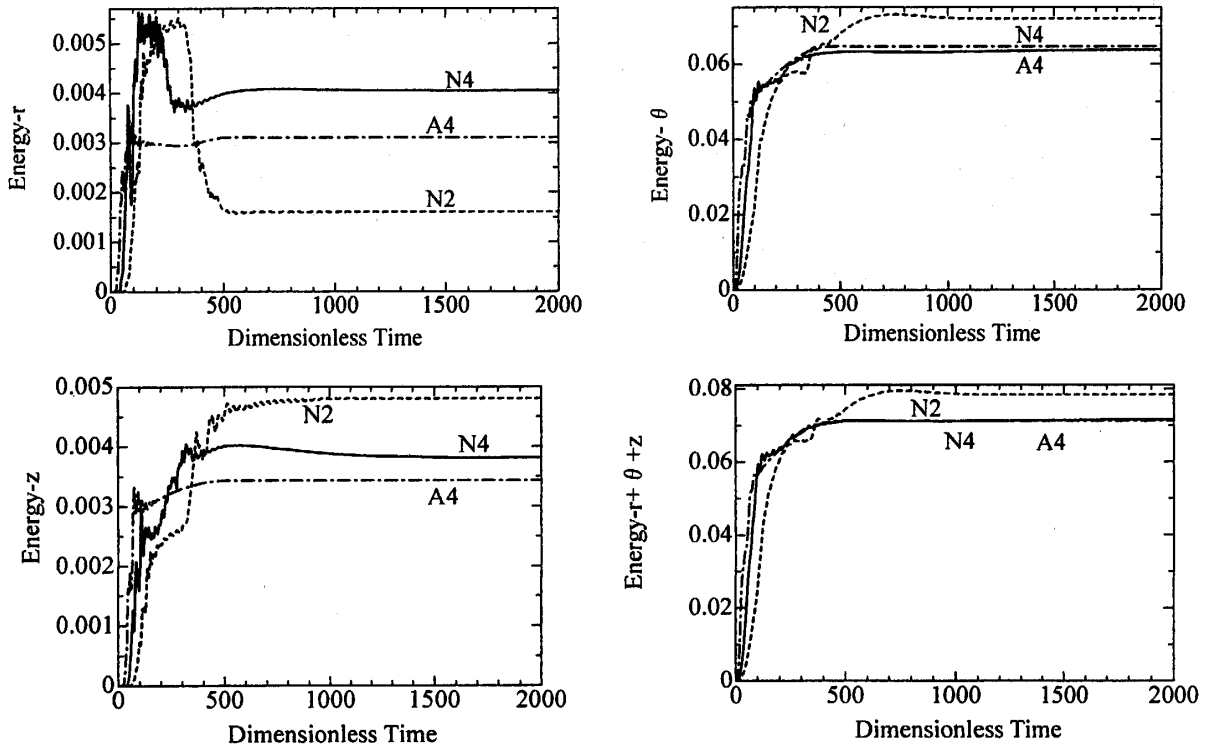


Fig. 3 Spatial averaged Energy  $Re_0=1228$

実験解トポロジー行列表現は

$$E_t = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

となる。これは  $(Re, Ac)$  空間の一部におけるテイラー渦のトポロジー表現といってよい。この二つの比較は行列に対応させて、実験を基準として  $N_t - E_t$  を作ってみるのが単純な比較であろう。これを行えば、次の行列を作る。さらに、最近急激に発達したバイオインフォマティクスの分野での DNA 配列比較の基準形、すなわち一致するか、しないかのみを問題にする表現にならって  $N_t - E_t$  の一致したところを零、不一致のところを1とし、その配列をスコア行列  $S$  と書く。

$$N_t - E_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ -2 & 8 & 8 & 8 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

すると、上式は次の形に帰着する。

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Score} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

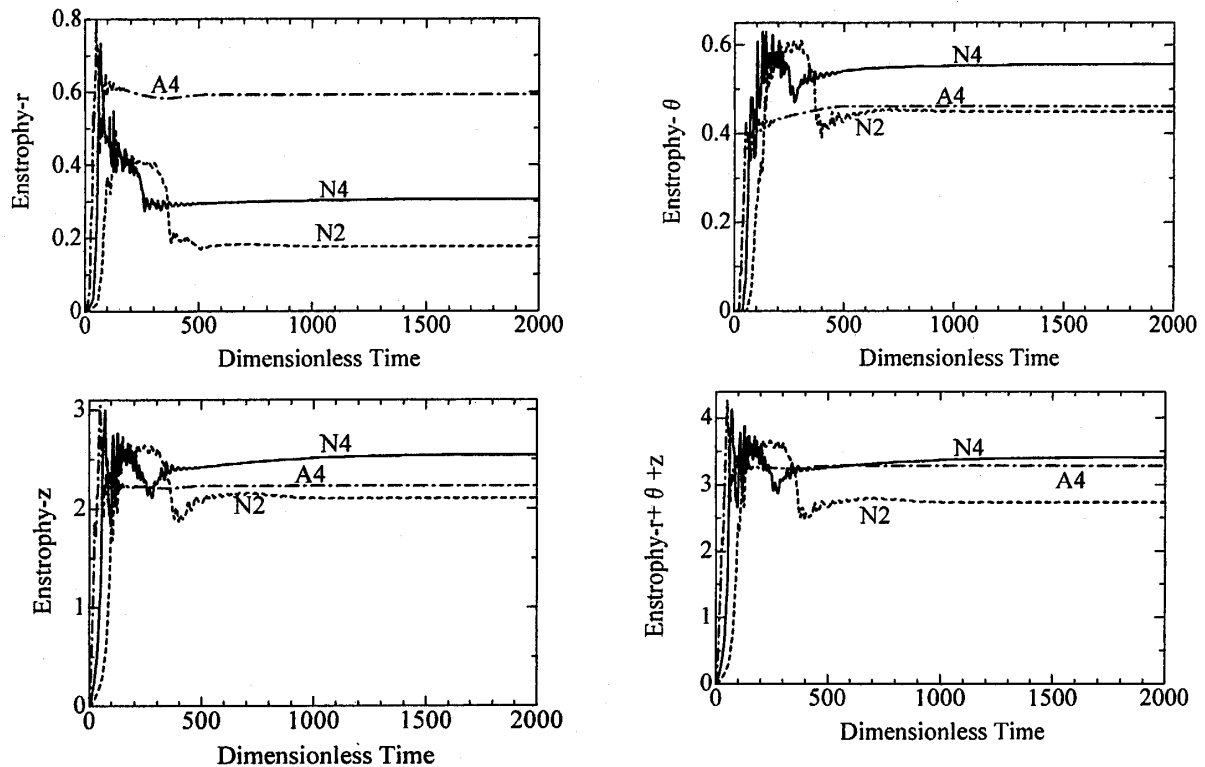
Score (4 1 1 2 0 1)

これは、 $N_t - E_t$  の画像処理でいう二値化表現である。これをある行について加えれば、その和は何箇所かで数値解と実験解がこの範囲で何箇所違っているかの指標となる。バイオインフォマティクスではこのような和をスコアというのでここでもスコアと呼ぶことにする。上の  $S$  の全スコアは9である。 $N_t$  と  $E_t$  の比較場所は  $6 \times 6 = 36$  箇所なので  $S$  の不一致は  $9/36 = 3/12$ 、一致度としては  $(1 - 9/36)$  としてよいであろう。

上の考えをまとめてみる。ある現象からトポロジーを抽出した二次元離散配列  $N = (\lambda_{i,j})$ ,  $E = (\mu_{i,j})$  を比較することを考える。 $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$  は問題のある条件に従って並べたものとする。そしてスコア行列  $A$  を次のように定義する。

$$A = (s_{i,j}), \quad s_{j,j} = \begin{cases} 0; & \lambda_{i,j} = \mu_{i,j} \\ 1; & \lambda_{i,j} \neq \mu_{i,j} \end{cases}$$

$a$  行のスコア  $S_{a,j} = \sum_{j=1}^n s_{a,j}$ , 全スコア  $S = \sum_{i,j} s_{i,j}$  であり、

Fig. 4 Spatial averaged Enstrophy  $Re_0=1228$ 

不一致度  $\xi$ , 一致度  $\eta$  を次のように定義する.

$$\xi = S/mn, \quad \eta = 1 - \xi$$

以上のように定義すれば 2 組の二次元離散的なデータのどの程度一致しているかの一つの測度が得られたことになる.

**4.4 空間平均エネルギーの時系列変化** レイノルズ数の増加の履歴によって最終的に安定して存在するモードが明らかになったが、それらのモードが決定する要因については不明である。特にレイノルズ数が零から一定の増加率で規定された最終値まで増加することによって流れの状態がどのように変化するかを明らかにする必要がある。本研究では、流れを代表する因子として空間平均運動エネルギー(以後エネルギーと記述)と空間平均エンストロフィー(以後エンストロフィーと記述)を定め、テイラー渦流の時系列発展のようすを明らかにした。エネルギー、エンストロフィーとも三次元座標系における半径方向、方位角方向、軸方向、さらに三つの方向成分の総和で求めた。図 3 にそれらの図を示す。

図 3 の半径方向におけるエネルギーの時系列変化を見る。条件は、 $Re_0=1228$ ,  $A_c=1, 2, 5$  であり、それぞれ N2, N4, A4 モードが発生したものである。図 3 の半径方向のエネルギー変化を見ると、明らかにモードによって変化の経緯が異なることがわかる。N2

モードは増加率が小さいので他の二つと比較して  $Re$  はゆっくり増加する。N4 モードと同様に、エネルギーはいったん大きな値まで増加するが、その後大きな変動がなく、急激に減少し、0.0016 の一定値になる。N4 モードのエネルギーはいったん大きな値まで増加し、しばらく変動した後、減少して 0.0040 の一定値となる。それに対して A4 モードのエネルギーは  $Re$  の増加率が大きいので、最も急速に増加するが、0.003 付近で変動した後、0.0031 の一定値を取る。これは他のモードが 0.005 を超える値まで増加しているのに比較して小さい増加である。このように半径方向のエネルギーの変化は、他の方向のエネルギー変化と比較して三つのモードの違いが顕著であり、最終エネルギー値も明らかに異なることがわかる。全体的に 4 セルのエネルギーが 2 セルのエネルギーより大きいのは、セルとセルの境界における半径方向の速度が大きいためと、セル間の半径方向速度をもつバンド領域の幅には大差がない一方で、セル間のバンド領域の数が増えることは、エネルギー全体が大きくなる理由と考えられる。また、N4 モードが A4 モードに比較してエネルギー値が大きいのは、A4 モードにおいては上下端面上に変異セルが発生しており、端面上における流れ方向が内円柱から外円柱へ流れることにより、内円柱の一定角速度から供給されるエネルギーに対して摩擦抵

抗によるエネルギー散逸が大きいと考えられる。

方位角方向および軸方向のエネルギー変化についても確認を行った。三つのモードとも方位角方向のエネルギーが他の方向のエネルギー値に比較して10倍の大きな値をもっていることがわかった。軸方向のエネルギーについては、N2がN4およびA4と比較して最終値が大きい値を示した。これは、セル数が少ない分、流れ領域における一つのセルの占める割合が大きいため、結果として軸方向速度をもつバンド領域が大きいためと考えられる。

半径方向、方位角方向、軸方向の総和の変化を見る。4セルのモードは両方とも最終値はほぼ同じ値になった。2セルモードのエネルギーは4セルモードのそれより大きな値になった。これは、方位角方向のエネルギーが大きく寄与していることによる。

Reの増加率によるモードの発生は、半径方向の変動が大きく寄与していると考えられる。その理由は、この値の大きさそのものは方位角方向のエネルギーに比較して1/10と小さいが、明らかに三つのモードの違いを示しているからである。特にA4モードにおける半径方向のエネルギーの立上りが他の正規モードと比較して小さいことが、上下端面上における変異セルの発生に影響を及ぼしていると考えられる。

以上の結果から、各モードのエネルギー変化における初期の非定常状態は、Reの増加の仕方に依存していることが明らかであり、これが最終的に安定して存在する最終モード決定の評価基準となりえる。

#### 4.5 空間平均エンストロフィーの時系列変化

図4はエンストロフィーの時系列変化を示す。エネルギーと同様に、条件は、 $Re_0=1228$ ,  $Ac=1, 2, 5$ であり、N2, N4, A4モードがそれぞれ発生した。図4では半径方向、方位角方向、軸方向とそれらの方向の総和を示した。

半径方向のエンストロフィーの変化を見る。N2モードのエンストロフィーはゆっくり増加し、他のモードのそれと比較して1/2程度の値まで増加した後、減少して、0.176の一定値になる。N4モードのエンストロフィーは、A4モードのそれと同じように急激に増加し、その後変動を伴って減少して、最終的に0.306の一定値を取る。A4モードは急激に増加し、三つの中では最大の0.8付近まで増加した後最終的に0.593の最終値になる。A4モードのエンストロフィーはN4モードのそれより約2倍の値であることがわかる。

方位角方向と軸方向のエンストロフィーの変化については、最終値はN4モードがN2やA4モードよ

り大きいことがわかった。これはA4モードの半径方向のエンストロフィーが最も大きい値であった結果とは逆の結果になる。

半径方向、方位角方向、軸方向の3方向成分の総和について、二つの4セルモードのエンストロフィーは2セルモードのそれより大きな値である。これはエネルギーにおけるそれと逆の関係になっており、セル数が多いことが渦度の大きさに影響している。

**4.6 モード選択の条件** 幾何学的条件であるアスペクト比が同じであっても、Reの増加の履歴によって最終的に安定して存在するモードが異なる。これを決定付ける要因はエネルギーの変化から見ると、3方向の総計の値ではN4とA4の二つのモードの違いは見られない。方位角方向の値の絶対値は大きい、内円柱が回転しているので、方位角方向の速度が大きいのは自明である。また、エネルギーの定性的な変化は大きな違いは見られない。半径方向のエネルギーの変化の値は小さいが、各モードによって大きな違いが見られる。特に、非定常状態における各エネルギーの変化は定性的にも定量的にも特徴が見られ、モードの決定の評価基準とみなすことができる。

エンストロフィーについてはエネルギーと同様な見方をすると、半径方向の変化がモードの決定の評価基準とみなすことができる。

## 5. 結 論

本研究は、非線形力学系における非一意性を示す代表的なモデルの一つであるアスペクト比が小さいテイラー渦流れにおいて、レイノルズ数の増加の履歴に依存する最終的に安定して存在するモードを三次元計算により求めた。計算条件の組合せとして6種類の最終レイノルズ数と6種類の増加割合を採用し、同じ条件で行った実験結果と比較した。おもな結論は以下のとおりである。

(1) テイラー渦流れが静止状態から最終モードにいたる形成過程は実験結果と定性的にはほぼ一致することがわかった。

(2) 36種類のレイノルズ数の変化に対して、最終的に安定して存在するモードが明らかになった。また、計算結果は同じ条件で行った実験結果と75%で一致した。特に、変異モードの発生場所で一致を見た。この一致の程度の表現法としてスコア値を考察した。

(3) テイラー渦流れが形成される過程における空間平均エネルギーの変化を半径方向、方位角方向、軸方向、それら三つの方向の総計についてそれぞれ求め、半径方向のエネルギーの変化が最終モードの決定に強

く依存していることがわかった。

(4) テイラー渦流れの形成過程における空間平均エンストロフィーの変化を半径方向, 方位角方向, 軸方向, それら三つの方向の総計についてそれぞれ求め, 半径方向のエンストロフィーの変化が最終モードの決定に強く依存していることがわかった。

今後の課題としては, 実験に見られる不完全分岐の原因の数値的推論が重要と考えられる。

## 文 献

- (1) Taylor, G. I., Stability of a Viscous Liquid Contained between Two Rotating Cylinders, *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, **223** (1923), 289-343.
- (2) Bejamin, T. B., Bifurcation Phenomena in Steady Flows of a Viscous Fluid I Theory, *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, **359** (1978), 1-26.
- (3) Special Issue of Taylor-Couette flows, *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, **16-1** (2002), Springer.
- (4) Mullin, T., Mutation of Steady Cellular Flows in the Taylor Experiment, *J. Fluid Mech.*, **121** (1982), 207-218.
- (5) Cliffe, K. A. and Mullin T., A Numerical and Experimental Study of Anomalous Modes in the Taylor Experiment, *J. Fluid Mech.*, **153** (1985), 243-258.
- (6) Cliffe, K. A., Numerical Calculations of Two-Cell and Single-Cell Taylor Flows, *J. Fluid Mech.*, **135** (1983), 219-233.
- (7) Cliffe, K. A., Numerical Calculations of the Primary-Flow Exchange Process in the Taylor Problem, *J. Fluid Mech.*, **197** (1988), 57-79.
- (8) Streett, C. L. and Hussaini, M. Y., A Numerical Simulation of Finite-Length Taylor-Couette Flow, *Comput. Fluid Dyn.*, (1988), 663-675, Elsevier Science Publishers B. V., North-Holland.
- (9) 中村育雄・戸谷順信, 多重解テイラー渦流れにおけるモードの形成条件 (両端が固定の場合), *機論*, **60**-571, B (1994), 723-729.
- (10) 東尚史・小河原加久治・飯田誠一, 回転二重円筒管内流れの非定常三次元計算, *機論*, **57**-35, B (1991), 905-913.
- (11) Watanabe, T., Furukawa, H. and Makamura, I., Non-linear Development of Flow Patterns in an Annulus with Decelerating Inner Cylinder, *Phys. Fluids*, **14**-1 (2002), 333-341.
- (12) Furukawa, H., Watanabe, T., Toya, Y. and Nakamura, I., Flow Pattern Exchange in the Taylor-Couette System with a Very Small Aspect Ratio, *Phys. Rev. E*, **65** (2002), 036306, 1-7.
- (13) Coles, D., Transition in Circular Couette Flow, *J. Fluid Mech.*, **21** (1965), 385-425.
- (14) Bielek, C., A. and Koschmieder, E., L., Taylor Vortices in Short Fluid Columns with Large Radius Ratio, *Phys. Fluids A2*, (1990), 1557-1563.
- (15) Toya, Y., Nakamura, I., Yamashita, S. and Ueki, Y., An Experiment on a Taylor Vortex Flow in a Gap with a Small Aspect Ratio; Bifurcation of Flows in an Asymmetric System, *Acta Mech.*, **102** (1994), 137-148.
- (16) Arnold, V. I. (Arnold, V. I., ほか3名編), *Polymathematics: Is Mathematics a Single Science or Set of Arts?*, *Mathematics: Frontiers and Perspectives*, (2000), 403, American Mathematical Society.
- (17) Terada, T. and Hattori, K., Some experiments on Motions of Fluids, *Rep. Aero. Res. Inst. Tokyo Imp. Univ.*, No. 26 (1927), 287.