

## アスペクト比が小さい場合のテイラー渦流れ\*

(変異・正規モード間の流動形態変化と非定常モードの遷移過程)

古川 裕之<sup>\*1</sup>, 渡辺 崇<sup>\*2</sup>, 中村 育雄<sup>\*3</sup>

### Taylor Vortex Flow at Very Small Aspect Ratio (Flow Pattern Exchange from Anomalous Mode to Normal Mode and Bifurcation Process of Unsteady Mode)

Hiroyuki FURUKAWA, Takashi WATANABE<sup>\*4</sup> and Ikuo NAKAMURA

<sup>\*4</sup>Center for Information Media Studies, Nagoya University,  
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya-shi, Aichi, 464-8603 Japan

Time dependent numerical investigation is carried out on Taylor vortex flow between two concentric rotating cylinders with very short cylinder lengths. When the mode of the flow exchanges from the anomalous mode to the normal mode, the inner and outer extra cells develop and the saddle point emerges in the contours of the stream function. The inner extra cell grows, and it covers the outer extra cell and the saddle point. Two extra cells merge into a normal cell, and the saddle point vanishes. In the transition process from the twin-cell mode to the unsteady mode, a slight difference of the Reynolds number causes the drastic exchange of the flow patterns. The critical loci from the unsteady mode to the normal two-cell mode are determined in the  $(\Gamma, Re)$  plane. The periods of the unsteady mode are given at a constant aspect ratio, and they become longer as the Reynolds number increases.

**Key Words:** Flow Visualization, Computational Fluid Dynamics, Axisymmetric Flow, Concentric Cylinders, Taylor Vortex Flow, Small Aspect Ratio, Mode Bifurcation

## 1. 緒 論

軸方向に有限の長さを持つ同軸の回転二重円筒に生ずるテイラー渦流れは、様々な流れパターンを引き起こし、その挙動については多くの研究がなされている<sup>(1, 2)</sup>。この流れは、古典的流体力学安定性問題としてのみならず、非線形力学系問題のパラダイムの一つとして研究がなされている(例えば<sup>(3, 4)</sup>参照)。また多くの工学的応用分野にも現れ、その流れパターンの遷移挙動を調べることは意義深い。テイラー渦流れを支配する主なパラメータは、円筒長さの内外円筒半径差に対する比であるアスペクト比  $\Gamma$ 、内円筒の角速度に

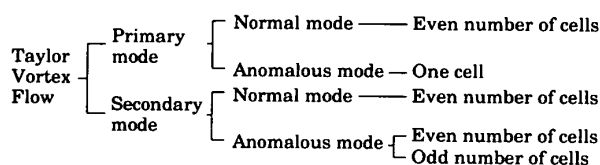


Fig. 1 Classification of Taylor vortex flow. Cylinder length is finite and both end walls are stationary.

基づくレイノルズ数  $Re$ 、および内円筒半径の外円筒半径に対する比である半径比  $\eta$  である。すなわち、三次元のパラメータ空間で調べるべき範囲は非常に広い。無限および中程度のアスペクト比を持つ流れは、これまでに多くの研究がなされてきた<sup>(5)</sup>。

Benjamin<sup>(6)</sup>に始まり、Benjamin と Mullin<sup>(7)</sup>や Mullin<sup>(8)</sup>へと続く先駆的研究は、円筒長さが有限であり円筒が静止端面を持つテイラー渦流れの新しい力学的側面を明らかにし、図 1に示すように、テイラー

\* 原稿受付 2002年1月30日。

<sup>\*1</sup> 正員, (株)富士総合研究所(〒101-8443 東京都千代田区神田錦町2-3)。

<sup>\*2</sup> 正員, 名古屋大学情報メディア教育センター(〒464-8601 名古屋市千種区不老町)。

<sup>\*3</sup> 正員, 名城大学理工学部(〒468-8502 名古屋市天白区塩釜口1-501)。

E-mail: watanabe@info.human.nagoya-u.ac.jp

渦流れを主モードと二次モードに分類した。主モードとは、レイノルズ数を小さな値から滑らかに増加させる時に最初に現れる渦パターンであり、二次モードとは、レイノルズ数がある値以上まで急激に増大させた場合に現れる、主モードとは異なる渦パターンである。主モードと二次モードは、さらに正規モードと変異モードに分けられる。正規モードとは、上下両端面において外円筒から内円筒への流れを持つモードである。変異モードとは、円筒の両端面、もしくは片側の端面において、正規モードとは逆の流れである内円筒側から外円筒側への流れを持つモードである。Nakamuraら<sup>(9)</sup>とToyaら<sup>(10)</sup>は、両端固定端の場合における流れを実験により調べた。彼らは、内円筒が徐々に減速する場合に、二次モードが、時に他の二次モードを経て、主モードに遷移する場合があることを示している。長さが有限の回転二重円筒間の流れが静止状態から発達する場合について、Alziary de RoquefortとGrillaud<sup>(11)</sup>、Sobolikら<sup>(12)</sup>は、円筒端面上の二次流れが渦を発生させることを示し、KuoとBall<sup>(13)</sup>は、これら端面近くの渦が成長するにつれて、端面から離れた領域で他の渦が誘発されることを示した。Hillの数値的研究<sup>(14)</sup>は、レイノルズ数を増加させることにより、BenjaminとMullin<sup>(7)</sup>により見出された正規4セルモードから正規6セルモードへの分岐を数値的に解析し、実験との良い一致が得られたと結論付けている。渡辺ら<sup>(15)</sup>は非定常方程式を解くことにより、中程度のアスペクト比におけるモード分岐過程を詳細に調べ、 $(\Gamma, Re)$  平面中で各モード分岐が起こる範囲を求めている。

アスペクト比が1程度であるテイラー渦流れの実験的研究もいくつか行われてきた。BenjaminとMullin<sup>(7)</sup>は変異1セルモードの存在を明らかにし、変異1セルモードが存在する範囲を示した。Lückeら<sup>(16)</sup>は変異1セルモードの流れを具体的に可視化写真で示している。Buzugら<sup>(17)</sup>は、振動する流れを見出し、その振動がカオスの挙動を示していることを示している。一方、数値の実験として、StreettとHussaini<sup>(18)</sup>やMagèreとDeville<sup>(19)</sup>は、正規2セルモードが発達して変異1セルモードが現れることを確認している。

周知のように、Turing<sup>(20)</sup>のパターン形成に関する研究以降、遷移ダイナミクスを対象とした多くの研究がなされてきた(例えば<sup>(21, 22)</sup>)。しかしテイラー渦流れにおいては、複雑な多くの流れに関する実験結果にも関わらず、流れパターンの形成過程についての詳細な数値的研究は、前述のようにパラメータ空間の広さもあって、まだ十分にはなされていない。このよう

な問題では、幅広い細い積み上げが重要である。本研究では、古川ら<sup>(23)</sup>による数値的研究で対象とされた流れをより詳細に調べるために、アスペクト比が1のオーダ( $0.1 \leq \Gamma \leq 1.6$ )であり、内円筒が回転し、外円筒と両端面が静止している同軸の二重円筒に生ずるテイラー渦流れを数値解析し、内円筒が減速する場合の流れパターン遷移について明らかにすることを目的とする。

## 2. 計算条件

同軸二重円筒の長さは有限であり、内円筒が回転し、両端面と外円筒は静止している。円筒の内外円筒半径差を代表長さ、計算対象とする流れで達成される内円筒の最大周速度を代表速度、そして(代表長さ)/(代表速度)を代表時間として、全ての物理変数を無次元化する。内円筒と外円筒の半径は、それぞれ $r_i$ と $r_o$ であり、 $r_o - r_i$ は1.0である。半径比 $\eta$ は $r_i/r_o$ とする。円筒の長さを $l$ とし、アスペクト比 $\Gamma$ は $l/(r_o - r_i)$ で与えられる。時間的に変化しない代表速度に基づくレイノルズ数を $Re_0$ とし、時間的に変化する瞬時の内円筒周速度に基づくレイノルズ数は $Re$ と表す。

支配方程式は、本計算に適した円筒座標系 $(r, \theta, z)$ で表示した非定常軸対称Navier-Stokes方程式と連続の式である。

$$r : \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re_0} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

$$\theta : \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \frac{1}{Re_0} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

$$z : \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re_0} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

ここで、 $t, (u, v, w), p$ は、それぞれ、無次元の、時間、 $(r, \theta, z)$ の方向の速度成分、圧力である。

支配方程式の基本的解法はMAC法に基づく。圧力ポアソン方程式は、次式で表される。

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = -\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} - 2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial r} - 2 \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial z} + 2 \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{u^2}{r^2} - \frac{\partial D}{\partial t} - u \frac{\partial D}{\partial r} - w \frac{\partial D}{\partial z} \quad (5)$$

ここで、 $D$ は速度ベクトルの発散である。ポアソン方程式の解法として、SOR法とILUCGS法を併用する。時間積分はオイラー陽解法であり、対流項にはQUICKスキーム、その他の項には二次中心差分を用いる<sup>(24)</sup>。

速度に対する境界条件は、すべりなし条件である。圧力に対する境界条件は、運動方程式の圧力項から見積もられるノイマン条件である。速度成分の初期値は、全領域にわたり0とした。 $t=0$ において、内円筒の瞬時周速度を変化させることにより、レイノルズ数を0から $Re_0$ まで急激に増加させる。

計算格子はスタガード格子を用い、格子間隔は各方向に一樣である。半径方向の格子点数は80であり、軸方向の格子点数は、アスペクト比1.0に対し80となるように比例的に調整する。格子数の妥当性を調べるために、各方向への格子間隔を半分にして、格子を密にした場合の正規2セルモードが現れる臨界レイノルズ数を求めたところ、密にしなかった場合の臨界レイノルズ数との差異は1%未満であった。これより、本計算で用いた格子点数は十分に大きく、結果に及ぼす影響は小さいと考える。

流れが十分発達したと判断する基準として、ある時間ステップとその直前の時間ステップにおける内円筒上に働くトルクをそれぞれ $N_n$ 、 $N_{n-1}$ とした上で、 $(N_n - N_{n-1})/N_n$ の値が $10^{-4}$ 未満になる状態が時間ステップ数で100以上継続した場合に、流れは定常に達したものと判断する。モード分岐を解析するためにレイノルズ数を減少させる場合は、定常な流れとなっている $t = t_1$ から減少を開始し、 $t = t_1 + t_2$ まで線形に減少させる。減少が終了した後は、レイノルズ数を再び一定に保つ。

流れを可視化するために導入するストークスの流れ関数 $\psi$ は、

$$u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (6)$$

により与えられる。

本計算の結果は、NakamuraとToya<sup>(25)</sup>によって得られている実験結果と比較する。その実験装置の内円筒半径は20mm、外円筒半径は30mm、半径比 $\eta$ は0.667である。減速流の計算における無次元時間の $t_1$ 、 $t_2$ は、この装置の物理寸法と、実験で用いられたグリセリン水溶液の動粘度( $6 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ )において評価した場合に、50秒となるように設定する。対象としたレイノルズ数の範囲は100から1500である。以下では、分かりやすさのために、 $z$ 座標は、代表長さである内外円筒半径差ではなく、円筒の軸方向長さ $(l)$ により正規化する。

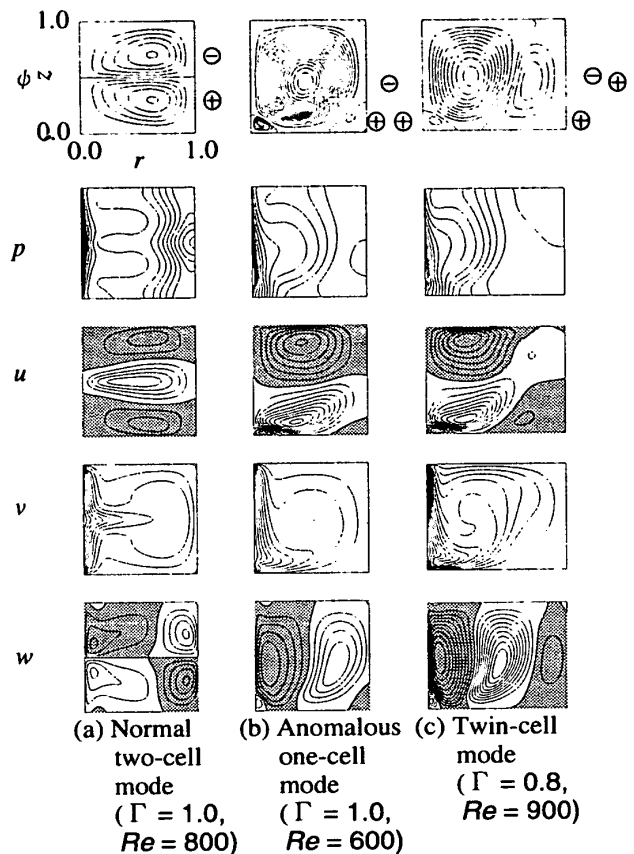


Fig. 2 Steady patterns of Taylor vortex flow between two concentric rotating cylinders with very small aspect ratio.

### 3. 解析結果

**3.1 アスペクト比が小さい場合に現れるモード** 古川<sup>(23)</sup>の数値計算は、アスペクト比が1のオーダの時に現れるテイラー渦流れのモードを示している。定常なモードとして、正規2セルモード、変異1セルモード、ツインセルモードが現れ、さらに渦の位置と大きさが規則的に変化する非定常モードも現れる。これらのモードのうち、本節では3つの定常モードについて、流れ関数のみならず、各方向の速度成分、圧力の分布も加えて詳細に観察する。

正規2セルモード、変異1セルモード、ツインセルモードにおける $\psi$ 、 $p$ 、 $u$ 、 $v$ 、 $w$ の等値線図の例を図2に示す。横軸が半径方向、縦軸が軸方向を示す。図の左側が回転する内円筒側で、右側が静止した外円筒側、上側、下側がそれぞれ上下固定端面を示す。流れ関数の等値線図に付けられている $\oplus$ 、 $\ominus$ の記号は、それぞれセルをなす渦の回転方向が時計回り、および反時計回りであることを示す。また、 $u$ 、 $w$ の等値線図には、速度が負の領域にトーンを加えている。各モー

ドの特徴を流れ関数  $\psi$  の等値線図を用いて説明する。図 2(a) で示した正規 2 セルモードでは、軸方向に 2 つのセルが存在しており、セルの境界は内円筒と外円筒に到達している。円筒端面付近で外側から内側への流れを持ち、2 つのセルの境界ではその逆の内側から外側への流れを持っている。図 2(b) で示した変異 1 セルモードでは、優勢な変異セルが存在している。変異セルは反時計回りに回転しており、外側と内側に 2 つの小さなエクストラセルを伴っている。エクストラ渦は変異セルとは反対の時計回りに回転している。変異セルとエクストラ渦の境界は内外円筒と下側端面に到達している。図 2(c) はツインセルモードを示している。2 つの大きな渦が半径方向に存在し、1 つの小さな渦が内円筒と下側端面の角に存在している。2 つの大きな渦の境界は上下端面に到達している。

正規 2 セルモードにおける  $p$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  の等値線図を見てみると、 $p$  の等値線図からはセル数を数えることはできない。乱流の DNS において、圧力分布から渦を抽出する手法が提案されている<sup>(20)</sup>が、本結果から見るとそれは一般的方法ではないと思われる。 $u$  等値線図では、流れが 2 つのセルを伴っているにも関わらず  $u$  の極値がセルの中心をはさんで軸方向に 3 つ存在しており、極値の数とセルの数が一致していない。 $v$  の等値線図では、回転する内円筒により周方向へ増速された流体が、セル境界で半径方向に運ばれることにより、2 つのセルの境界付近が他の領域に比べて周方向に大きな速度を持っている。 $w$  の等値線図はセルの中心をはさんで 4 つの極値が存在している。

変異 1 セルモードとツインセルモードの等値線図を比較すると、 $p$ ,  $v$  の等値線図についてほぼ似通った分布をしている。 $u$  の等値線図を見ると、変異 1 セルモードでは上側端面において速度の符号が変化していないのに対し、ツインセルモードでは上側端面において半径方向速度の符号が異なる部分がある。 $w$  の等値線図を比較すると、変異 1 セルモードでは半径方向に 2 つの極値が存在しているのに対し、ツインセルモードでは 3 つの極値を持っている。

各モードの特徴はそれぞれの等値線図によく現れているが、流れの大局的な様子を観察する手段としては、流れ関数の等値線図が最も適していると言える。

**3.2 変異モードから正規モードへの移行におけるサドルポイントの出現と消滅** 変異 1 セルモードから正規 2 セルモードへの移行では、その途中で流れ関数等値線図にサドルポイントが出現する。図 3 に、この移行過程を時間を追って示す。アスペクト比は 0.8 であり、レイノルズ数は  $t = 1500$  まで 500 であり、その

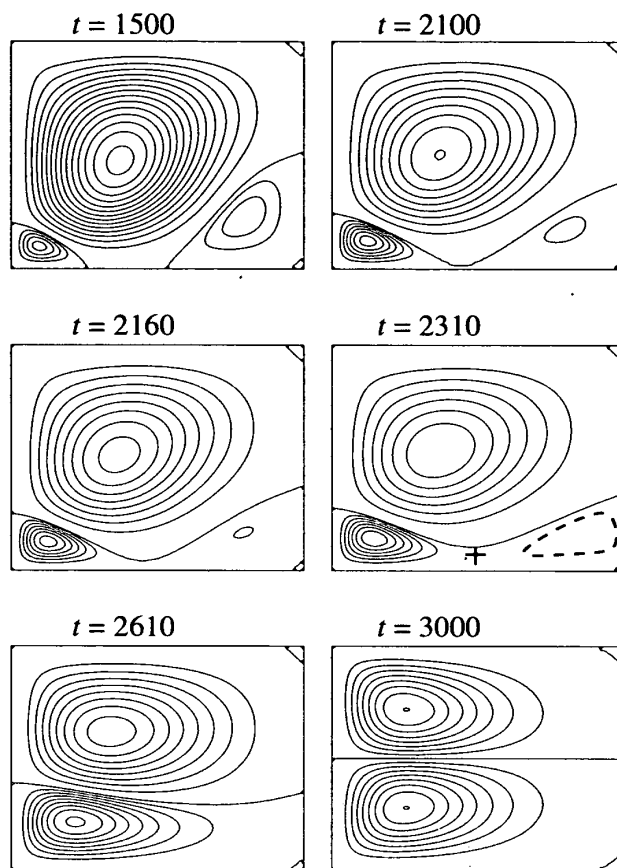


Fig. 3 Variation of contours of stream function around an anomalous cell near the end wall. The aspect ratio is 0.8 and the Reynolds number is reduced from 500 to 100. Deceleration starts at  $t = 1500$  and ends at  $t = 3000$ . + : saddle point.

後  $t = 3000$  までに 100 まで線形に減少させ、 $t = 3000$  以降は 100 で一定とする。 $t = 2310$  において破線で示された渦が一つあるが、これはこの渦が他の渦に比べて非常に弱い流れであるため等値線図に現れないので、模式的に書き加えた渦であることを示す。レイノルズ数が減少するに伴い、下側端面上にある変異セルと内外エクストラ渦の境界が円筒端面からはく離する ( $t = 1500, 2100, 2160$ )。そして、サドルポイントが流体中に現れ ( $t = 2310$ )、内側エクストラ渦が発達して外側エクストラ渦と融合することにより、流れは正規 2 セルモードへと移行する ( $t = 2610, 3000$ )。この時、内外エクストラ渦の融合によりサドルポイントは消滅する。

サドルポイントの存在を検証するため、図 3 の  $t = 2310$  の時点で、 $(r-z)$  断面内のサドルポイント付近において、速度ベクトルが零ベクトルとなる特異点

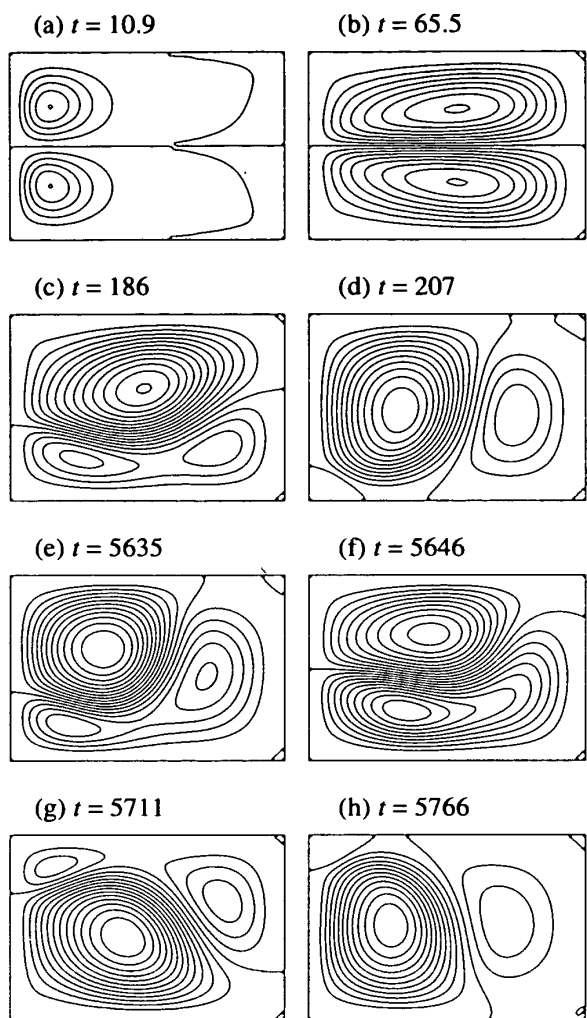


Fig. 4 Development of the flow field from the twin-cell mode to the unsteady mode. The aspect ratio is 0.7 and the Reynolds number is reduced from 910 to 900. Deceleration starts at  $t = 2730$  and ends at  $t = 5460$ .

(平衡点)を見出し、その特異点付近の速度場の挙動を調べる。特異点の位置と速度ベクトルをそれぞれ  $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ ,  $\mathbf{v}^0 = (v_1^0, v_2^0)$  とすると、特異点近傍の位置  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  における速度ベクトル  $\mathbf{v}_i = (v_1, v_2)$  は、特異点まわりの一次の Taylor 展開により

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^0 + x_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - x_j^0 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (7)$$

と表される。特異点では  $(v_1^0, v_2^0) = (0, 0)$  であるので、式(7)は特異点付近での速度場の挙動を線形近似したものとなる。力学系の特異点理論によれば、

$$(\nabla \mathbf{u})_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (8)$$

で定義される速度勾配テンソルの固有値を調べることにより、特異点付近での速度場の挙動を調べるこ

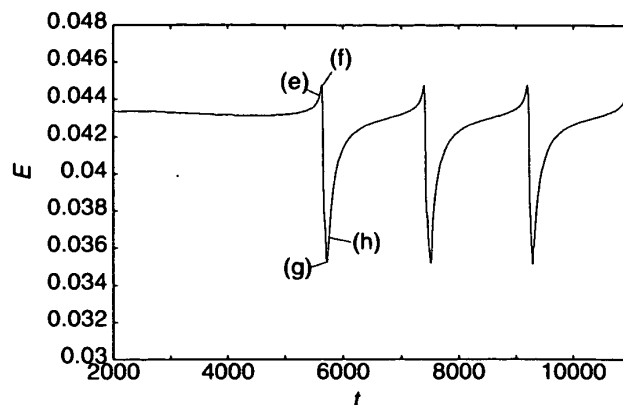


Fig. 5 Time variation of mean energy  $E$  from the twin-cell to the unsteady mode. The aspect ratio is 0.7 and the Reynolds number is reduced from 910 to 900. Deceleration starts at  $t = 2730$  and ends at  $t = 5460$ .

ができ、サドルポイント付近では固有値が実数となる(27)。そこでまず、図3の  $t = 2310$  におけるサドルポイント付近での特異点を見つけるために、半径方向速度成分と軸方向速度成分の符号が共に変化する格子を求めた。その結果、 $(r, z) = (0.525, 0.08)$  付近で2つの速度成分の符号が変化していた。次に、この位置における速度勾配テンソルの固有値を計算すると、その値は実数のみであった。このことから、図3の  $t = 2310$  において+印で示した特異点がサドルポイントであることが確認できる。これを  $\psi$  の等値線図で見えるようにするためには、等値線の刻み幅を巧妙に選ぶ必要があった。

**3.3 ツインセルモードから非定常モードへの遷移**  
図4はアスペクト比0.7で、 $t = 2730$  から  $5460$  の間にレイノルズ数を910から900まで減少させた時に現れる、ツインセルモードから非定常モードへの分岐を示す。まず内円筒と上下端面の角から2つの渦が発達する( $t = 10.9$ )。これらの渦は軸方向中央断面付近で境界を接すると半径方向へ発達し、流れはいったん正規2セルモードとなる( $t = 65.5$ )。やがて上側の渦が優勢になり( $t = 186$ )、下側の渦を二分して流れはツインセルモードとなり安定する( $t = 207$ )。  $t = 2730$  からレイノルズ数の減少が始まり、しばらくすると内側と外側の渦が接近しはじめ( $t = 5635$ )、それらは融合して正規セルとなり、上側の渦と同等の勢力を持つようになる( $t = 5646$ )。融合した正規セルは上側の渦を二分し( $t = 5711$ )、流れは  $t = 207$  における流れとほぼ軸方向鏡像なツインセルモードなる( $t = 5766$ )。  $t = 5766$  以降は、再び内側と外側の渦が融合し、時

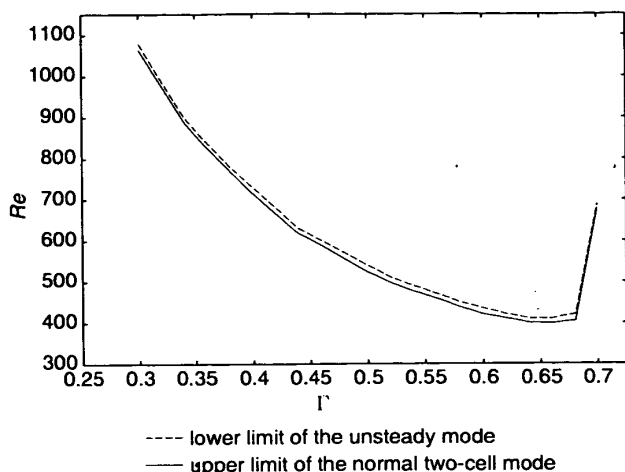


Fig. 6 Transition from the unsteady mode to the normal two-cell mode.

間経過とともに (g), (f), (e) と同様なパターンの流れを経て,  $t = 5766$  の流れとほぼ軸方向鏡像な流れが現れる. そして,  $t = 5766$  と同様な流れと, これとほぼ鏡像となる流れが交互に現れる非定常運動を繰り返すようになる. 図4で示したモード分岐はレイノルズ数を約1%変化させただけで引き起こされるものであり, パラメータのわずかな変化がドラスティックな流れの変化をもたらしている.

図4で示したツイセルモードから非定常モードへの分岐における体積平均運動エネルギー

$$E = \frac{1}{V} \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_o} \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} r dr d\theta dz \quad (9)$$

の時間変化を図5に示す. ここで  $V$  は二重円筒の作る円環内の流体体積である. 図中の (e), (f), (g), (h) の時間  $t$  は, 図4における図記号 (e), (f), (g), (h) の時間  $t$  に対応する. レイノルズ数の減少が始まる  $t = 2730$  までは流れはツイセルモードで安定であり, 運動エネルギーも一定の値をとる. レイノルズ数の減少が始まり, 流れがツイセルモードから非定常モードへ分岐する  $t = 5000$  あたりから運動エネルギーは振動を始める.  $t = 5460$  でレイノルズ数の減少が終わると, 流れは渦の位置と大きさが変化する運動を続け, 運動エネルギーも振動し続ける. 時間が十分経ってもこの振動は継続される.

**3.4 非定常モードからのモード分岐線図** アスペクト比が小さい場合に現れる正規2セルモードと変異1セルモード間の分岐が起こる範囲, およびツイセルモードからその他のモードへの分岐が起こる範囲については, 文献<sup>(28)</sup>に報告されているが, 未だ報告されていない非定常モードから正規2セルモードへの分岐が起こる範囲を図6に示す. アスペクト比が

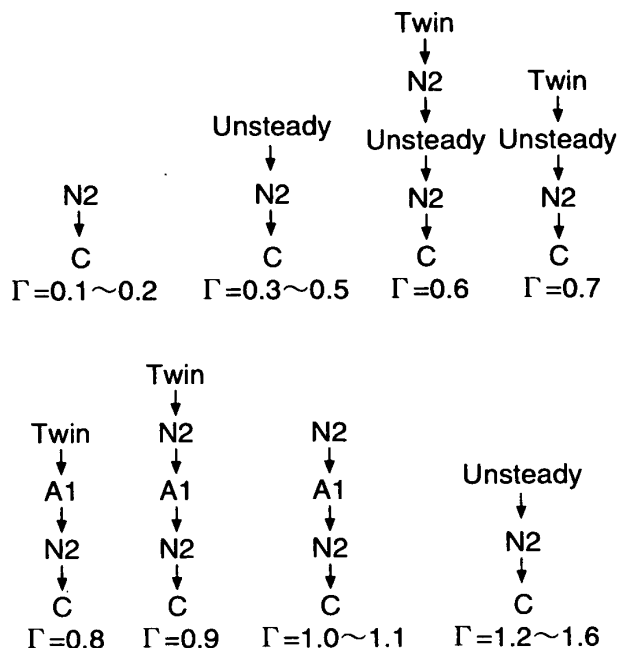


Fig. 7 Partial order structure representing transition processes. C : Couette flow. N2 : Normal two-cell mode. A1 : Anomalous one-cell mode. Twin : Twin-cell mode. Unsteady : Unsteady mode.

0.3から0.68付近の範囲においては, アスペクト比の増加に伴って非定常モードと正規2セルモードの分岐が起こるレイノルズ数が減少しているが, アスペクト比0.7では臨界レイノルズ数が増加している. 非定常モードは渦の位置と大きさが変化する流れであるので, レイノルズ数を減少させるタイミングの違いにより臨界レイノルズ数に違いが存在する可能性がある. そこで, アスペクト比0.7において, 変動する運動エネルギーの任意の位相からレイノルズ数を減少させ, 正規2セルモードに移る臨界レイノルズ数を比較したが, 全ての結果が同じであった. このため, レイノルズ数を減少させる位相が臨界レイノルズ数に及ぼす影響は無いと言える.

#### 4. 考察

Nakamuraら<sup>(9)</sup>は, 中程度のアスペクト比における流れモードの遷移過程を, ブール代数学で用いられる半順序構造としてまとめた. 図7は本研究で得られた半順序構造を示す. 矢印の方向はレイノルズ数が減少する方向を示している. 図中, Cはクエット流れ, N2は正規2セルモード, A1は変異1セルモード, Twinはツイセルモード, Unsteadyは非定常モードを表す. 確認した全てのアスペクト比において, レイノル

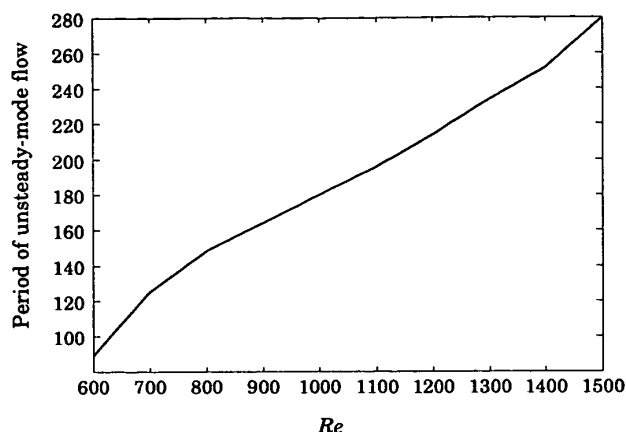


Fig. 8 Period of the unsteady-mode flow. The aspect ratio is 0.5.

ズ数を 0 からゆっくりと増加したときに現れる主モードは正規 2 セルモードである。  $0.1 \leq \Gamma \leq 0.2$  の範囲では、正規 2 セルモードのみ現れる。  $\Gamma = 0.6$ ,  $0.9 \leq \Gamma \leq 1.1$  の範囲では、一度正規 2 セルモードが現れ、他のモードを経た後、ふたたび正規 2 セルモードへと変化している。

レイノルズ数がある値を超えると、波動テイラー渦流れと呼ばれる時間依存の周方向振動が現れる<sup>(5)</sup>。2セルや4セルが現れるような比較的小さなアスペクト比において、Mullin と Benjamin<sup>(29)</sup>は実験的に波動テイラー渦流れの臨界レイノルズ数を与えた。一方、Pfister ら<sup>(30)</sup>、Eagles<sup>(31)</sup>の数値計算と、Gerdtts ら<sup>(32)</sup>の実験では、2セル流れの非定常軸対称振動流が見出されている。本研究において、アスペクト比を 0.5 とし、内円筒を静止状態から急激に増速して得た非定常運動の周期を、レイノルズ数に対する変化として図 8 に示す。横軸はレイノルズ数、縦軸は無次元時間表示の非定常運動周期を示す。非定常運動周期はレイノルズ数が増加するに伴って長くなる。本数値計算によって得られた非定常モードが実験でも観測されるかどうかを確認するために、Toya ら<sup>(10)</sup>の研究で報告されている実験装置を用いることにより、アスペクト比 0.5 の流れを新たに実験した。装置の制約上、レイノルズ数は 600 付近に限定され、また周期の観測は目視であることにより、十分な実験的測定との比較は今後の課題であるが、約 2 秒の周期で渦の大きさと位置をほぼ軸対称に保ちながら変化する非定常な運動を確認した。図 8 に示す数値をこの実験に対する有次元量に変換すると、レイノルズ数 600 において周期 2.5 秒となり、実測値と同じオーダーの周期である。Pfister ら<sup>(30)</sup>は、内円筒回転周波数で無次元化した非定常モー

ドの周波数をアスペクト比に対してプロットしている。彼らの実験と本研究では半径比、対象とするレイノルズ数が異なるために単純な比較は難しいが、図 8 に示す非定常モードのレイノルズ数 600 における内円筒回転周波数で無次元化した無次元周波数は 0.047 であり、同じアスペクト比でレイノルズ数 430 において Pfister らによって得られた非定常運動の無次元周波数 0.043 であることを考えると、本研究で得られた非定常モードは、Pfister らにより明らかにされた軸対称振動に相当すると考えられる。Pfister らは、流れの振動を、「新しい 2 セル流れ」と呼んだが、本計算では、図 4(h) のように、2 セルのみならず、3 個の渦が非定常運動中に現れる。

変異 1 セルモード、ツインセルモードと非定常モードは、軸方向の中央面に対して非対称な流れパターンを持つ。Pfister ら<sup>(30)</sup>は、装置の微小な非対称性が超臨界分岐を分離し、変異 1 セルモードは大きな主渦と小さい弱い渦が、それぞれ上側端面か下側端面に現れる 2 つの場合があると主張している。どちらの状態も彼らの実験により観測されているが、一方の流れは内円筒の急激な回転などのような技巧的な方法によってのみ得られている。テイラー渦流れの分岐図における解を選択する要素の候補として、装置の非対称性のほかにも、温度や初期条件の非均一性がある。数値計算においては、計算スキームの数値誤差が挙げられる。本計算において、ポアソン方程式の圧力変数を走査する順を逆にすると、軸方向に鏡像な流れが得られた。

## 5. 結 論

円筒長さが非常に短い同軸回転二重円筒に生ずるテイラー渦流れを時間依存の数値解法で調べた結果、次の結論を得た。

- (1) 変異モードから正規モードへ移行する場合には、内外エクストラ渦の発達に伴い流れ関数等値線図中にサドルポイントが現れる。内側のエクストラ渦が発達し、サドルポイントと外側エクストラ渦を吸収することにより、2 つのエクストラ渦は 1 つの正規セルへと融合する。
- (2) ツインセルモードから非定常モードへの分岐においては、レイノルズ数のわずかな変化が従来知られていなかったドラスティックな流れの変化をもたらす。非定常モードは、運動エネルギーなど物理パラメタの大きな変動を引き起こす。
- (3) 非定常モードから正規 2 セルモードへのモード分岐が起こる範囲を  $(\Gamma, Re)$  平面内に与えた。
- (4) 非定常軸対称流の変動周期を求め、それがレイノ

ルズ数の増加とともに大きくなることを示した。

本研究の遂行にあたり長野工業高等専門学校の前谷順信助教授にご協力賜った。また本研究の一部は日本学術振興会科学研究費補助金(基盤研究(C)(2), No. 14550146)による。ここに記して謝意を表する。

## 文 献

- (1) Chossat, P. and Iooss, G., The Couette-Taylor problem, *Springer-Verlag*, (1994).
- (2) Andereck, C. D. and Hayot, F., Ordered and turbulent patterns in Taylor-Couette flow, *Plenum Press*, (1992).
- (3) Swinney, H. L. and Gollub, J. P., Hydrodynamic instabilities and the transition to turbulence, *Springer-Verlag*, (1981).
- (4) Lewis, G. S. and Swinney, H. L., Velocity structure functions, scaling, and transitions in high-Reynolds-number Couette-Taylor flow, *Phys. Rev. E*, **59**(1999), 5457-5467.
- (5) Koschmieder, E. L., Benard cells and Taylor vortices, *Cambridge Univ. Press*, (1993).
- (6) Benjamin, T. B., Bifurcation phenomena in steady flows in a viscous flow —II Experiment—, *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, **359**(1979), 27-43.
- (7) Benjamin, T. B. and Mullin, T., Anomalous mode in the Taylor experiment, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **377**(1981), 221-249.
- (8) Mullin, T., Mutations of steady cellular flows in the Taylor experiment, *J. Fluid Mech.* **121**(1982), 207-218.
- (9) Nakamura, I., Toya, Y., Yamashita, S. and Ueki, Y., An experiment on a Taylor vortex flow in a gap with a small aspect ratio (Bifurcation of flows in a symmetric system), *JSME Int. J. Ser. II*, **33**(1990), 685-691.
- (10) Toya, Y., Nakamura, I., Yamashita, S. and Ueki, Y., An experiment on a Taylor vortex flow in a gap with a small aspect ratio: Bifurcation of flows in an asymmetric system, *Acta Mech.* **102**(1994), 137-148.
- (11) Alziary de Roquefort, T. and Grillaud, G., Computation of Taylor vortex flow by a transient implicit method, *Comput. Fluids*, **6**(1978), 259-269.
- (12) Sobolik, V., Izrar, B., Lusseyran, F. and Skali, S., Interaction between the Ekman layer and the Couette-Taylor instability, *Int. J. Heat and mass transfer*, **43**(2000), 4381-4393.
- (13) Kuo, D. C. and Ball, K. S., Taylor-Couette flow with buoyancy: Onset of spiral flow, *Phys. Fluids*, **9**(1997), 2872-2884.
- (14) Hill, N. A., Numerical studies of side-by-side and other modes for the Taylor problem in a finite annulus, *Comput. Fluids*, **16**(1988), 445-458.
- (15) 渡辺崇・前田俊介・古川裕之・中村育雄, 減速するテイラー渦流れにおけるモード変化, *機論*, **65**-630, B (1999), 521-527.
- (16) Lücke, M., Mihelcic, M., Wingerath, K. and Pfister, G., Flow in a small annulus between concentric cylinders, *J. Fluid Mech.*, **140**(1984), 343-353.
- (17) Buzug, Th., von Stamm, J. and Pfister, G., Fractal dimensions of strange attractors obtained from the Taylor-Couette experiment, *Physica A*, **191**(1992), 559-563.
- (18) Streett, C. L. and Hussaini, M. Y., Finite length Taylor Couette flow, *Stability of time dependent and spatially varying flows*, *Springer-Verlag*(1988), 663-675.
- (19) Magère, E. and Deville, M. O., Simulation of the Taylor-Couette flow in a finite geometry by spectral element method, *Appl. Num. Math.*, **33**(2000), 241-249.
- (20) Turing, A. M., The chemical basis of morphogenesis, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **237**-B-641(1952), 37-72.
- (21) Kuramoto, Y., Chemical oscillations, waves, and turbulence, *Springer-Verlag*, (1984).
- (22) Neufeld, Z., López, C., Hernández-García, E. and Tél, T., Multifractal structure of chaotically advected chemical field, *Phy. Rev. E*, **61**-4(2000), 3857-3886.
- (23) 古川裕之・渡辺崇・戸谷順信・中村育雄, アスペクト比が小さい場合のテイラー渦流れ(時間発展力学系におけるモード形成と分岐), *機論*, **66**-643, B (2000), 655-662.
- (24) Anderson, D. A., Tannehill, J. C. and Pletcher, R. H., Computational fluid mechanics and heat transfer, *Hemisphere Publ.*, (1984).
- (25) Nakamura, I. and Toya, Y., Existence of extra vortex and twin vortex of anomalous mode in Taylor vortex flow with a small aspect ratio, *Acta Mech.*, **117**(1996), 33-46.
- (26) Kida, S. and Miura, H., Swirl condition on 1-pressure vortices. *J. Phys. Soc. Japan*, **67**(1998), 2166-2169.
- (27) Helman, J. L., Hesselink, L., Visualizing vector field topology in fluid flows, *IEEE Comput. Graph. Appl.*, **11**-3(1991), 36-46.
- (28) Furukawa, H., Watanabe, T., Toya, Y. and Nakamura, I., Flow pattern exchange in the Taylor-Couette system with a very small aspect ratio, *Phys. Rev. E*, 036306.1-036306.7.
- (29) Mullin, T. and Benjamin, T. B., Transition to oscillatory motion in the Taylor experiment, *Nature*, **288**(1980), 567-569.
- (30) Pfister, G., Schmidt, H., Cliffe, K. A. and Mullin, T., Bifurcation phenomena in Taylor-Couette flow in a very short annulus, *J. Fluid Mech.*, **191**(1988), 1-18.
- (31) Eagles, P. M., An equilibrium modes and their stability in the small-gap Taylor problem by a new method, *Phys. Fluids*, **10**-12(1998), 3080-3087.
- (32) Gerds, U., von Stamm, J., Buzug, Th. and Pfister, G., Axisymmetric time-dependent flow in the Taylor Couette system, *Phys. Rev. E*, **49**-5(1994), 4019-4026.