

日本機械学会論文集(B編)  
66巻 643号(2000-3)

論文 No. 99-0850

## アスペクト比が小さい場合のテイラー渦流れ\*

(時間発展力学系におけるモード形成と分岐)

古川 裕之<sup>\*1</sup>, 渡辺 崇<sup>\*2</sup>  
戸谷 順信<sup>\*3</sup>, 中村 育雄<sup>\*4</sup>

### Taylor Vortex Flow at Very Small Aspect Ratio (Mode Formation and Bifurcation in Time-Developing Dynamic System)

Hiroyuki FURUKAWA<sup>\*5</sup>, Takashi WATANABE,  
Yorinobu TOYA and Ikuo NAKAMURA

\*<sup>5</sup> Nagoya University, Graduate School of Human Informatics,  
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya, 464-8601 Japan

Mode formation and bifurcation in Taylor vortices are interesting physical phenomena which are typical of those in nonlinear dynamics. In this study, we investigate the system with aspect ratios (column height/gap width) of order of unity and present the numerical results of flows in various modes and unsteady transitions between modes. The appearance of the normal two-cell mode, anomalous one-cell mode, twin-cell mode and unsteady mode is predicted. When the flow starts from rest, the flow in an anomalous mode or twin-cell mode is established after the sudden breakdown of symmetric two-cell mode. In the flow of unsteady mode, the values of physical properties vary periodically. When the rotation speed of the inner cylinder decelerates, the mode transition between normal two-cell mode and anomalous one-cell mode and the transition from twin-cell mode to anomalous one-cell mode are found.

**Key Words:** Computational Fluid Dynamics, Stability, Fluid Transients, Taylor Vortex Flow, Nonlinear Dynamics, Small Aspect Ratio, Decelerating Flow, Mode Exchange, Bifurcation

#### 1. 緒論

回転2重円筒間に生じるテイラー渦流れは、層流<sup>(1)</sup>のみならず乱流状態<sup>(2)</sup>においても多様な流れのモードを持つことで非線形力学的に興味のある現象であるとともに、ジャーナル軸受けや各種流体機械、化学反応装置などに現れる流れであり、その解明は工学上有用である。特に、非定常的なモードの形成、変化は、装置に働くトルクや反応速度の変動をもたらし、その予測、制御は重要である。本研究では、内円筒が回転、外円筒が静止しており、円筒間の隙間にに対する流体の軸方向高さの比であるアスペクト比のオーダーが1程度の流れを対象とする。

テイラー渦のモードは、大きく正規モードと変異モードに分けられる。正規モードは、円筒端面近傍の領域において、外円筒側から内円筒側への流れを持つ正規セルが、円筒の両端面に現れるモードである。変異モードは、正規セルとは流れが逆向きの変異セルが、両端面もしくは一方の端面に現れるモードである<sup>(3)</sup>。

多くのテイラー渦流れの研究<sup>(1)(4)</sup>が、無限、あるいは中程度のアスペクト比の場合を対象としている一方、い

くつかの研究がアスペクト比1付近の場合に注目している。Benjaminら<sup>(3)</sup>は、分岐理論と物理実験により変異セルの存在を確認し、内円筒周速度に基づくレイノルズ数とアスペクト比をパラメータとする空間で、正規2セルモードと変異1セルモードが占める領域を求めている。Cliffe<sup>(5)</sup>は、定常支配方程式を有限要素法により解析し、対称2セル流れと非対称1セル流れが現れる境界を決定している。またPfisterら<sup>(6)</sup>は、非定常支配方程式を用いて同様な境界を決定するとともに、レイノルズ数が減少する場合に、非対称1セルが対称2セル流れに移ることを見出している。一方、戸谷ら<sup>(7)</sup>とNakamuraら<sup>(8)</sup>は、詳細な物理実験を行い、変異セルがエクストラ渦を伴うことや、エクストラ渦が発達したツインセルモードが現れることを明らかにしている。しかし、この実験的事実に対して、レイノルズ数が変化する非定常過程としてのモードの生成および遷移については、未だ十分な解明がなされていない。

本研究では、アスペクト比がほぼ1であるテイラー渦流れにおいて、実験により示されているモードの存在を数値的に確認するとともに、実験的には確認が困難である各モードの生成過程を調べる。また、内円筒が徐々に減速する場合に、あるモードの流れが他のモードに遷移

\* 原稿受付 1999年6月18日。

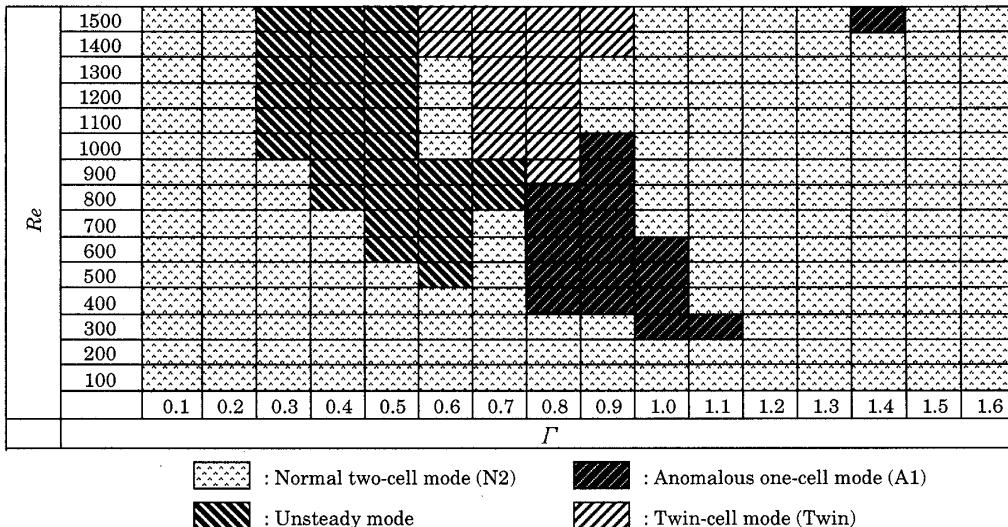
\*<sup>1</sup> 准員、名古屋大学大学院人間情報学研究科（〒464-8601 名古屋市千種区不老町）。

\*<sup>2</sup> 正員、名古屋大学情報メディア教育センター。

\*<sup>3</sup> 正員、長野工業高等専門学校（〒381-8550 長野市大字徳間716）。

\*<sup>4</sup> 正員、名古屋大学大学院人間情報学研究科。

E-mail: hiroyuki@info.human.nagoya-u.ac.jp

Fig. 1 Numerically calculated mode pattern obtained by abrupt increase of  $Re$ 

するメカニズムの解明を進める。

## 2. 計算条件

内円筒半径を  $R_1$ , 外円筒半径を  $R_2$  とし, 半径比  $\eta$  を  $R_1/R_2$ , アスペクト比  $\Gamma$  を, 円筒の半径差  $D (= R_2 - R_1)$  に対する作動流体の軸方向長さ  $L$  の比とする。また瞬時の内円筒回転角速度を  $\omega$  とし, 瞬時のレイノルズ数  $Re$  を  $R_1\omega$  と  $D$  より見積もる。各物理量は, 代表長さ  $D$ , 本論文で示すそれぞれの計算において達成される最大の内円筒回転角速度  $\omega_0$  による代表速度  $R_1\omega_0$ , そして代表長さと代表速度の比の代表時間  $D/R_1\omega_0$  を用いて無次元化する。支配方程式は, 通常の記号を用いた軸対称 Navier-Stokes 方程式と連続の式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re_0} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

である。ここで  $Re_0$  は代表長さと代表速度に基づくレイノルズ数である。数値計算は円筒座標系  $(r, \theta, z)$  を用い, 軸対称流れに限定して,  $(r, z)$  面内の速度成分  $u, w$  は Stokes の流れの関数  $\psi$  を用いて次式となる。

$$u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (3)$$

軸対称流れを対象としているため, 波動テイラー渦等の方位角方向に変化する流れは本研究の予測範囲ではないが, 以下の結果に示すように多様な流れパターンが得られた。

離散化は MAC 法に基づき, 対流項には QUICK 法, 他の空間積分については 2 次中心差分, そして時間積分に

はオイラー法を用いる。圧力ポアソン方程式の解法には, SOR 法と ILUCGS 法を併用する。ポアソン方程式の収束判定は, 平均残差が  $10^{-4}$  未満として見積もる。格子は各方向に等間隔のスタガード格子である。格子点数は, 半径方向に 80, 軸方向にはアスペクト比 1.0 に対して 80 となるように比例調整する。この格子点数は, 計算結果に影響を及ぼさない十分な数であることを確認している。

壁面における境界条件として, 速度にはすべりなし条件を, 圧力には運動方程式に基づくノイマン形条件を与える。初期条件として, 全ての領域にわたり速度成分の値に 0 を規定する。そして, 計算開始とともにレイノルズ数を 0 から  $Re_0$  までステップ的に上げる。

モードによっては時間的な変化が無くなる解が得られるが, 流れが十分に発達して定常状態に達したと判定できる時間は, 内円筒および外円筒に働くトルクの時間ステップあたりの変動が十分小さく, 数値誤差程度になる時点により見積もる。減速流の計算においては, レイノルズ数は時間  $t_1$  から直線的に減少し, 時間  $t_2$  で再び一定になるものとする。

具体的な半径比  $\eta$  は, 戸谷ら<sup>(7)</sup>, Nakamura ら<sup>(8)</sup> の実験にあわせて 0.667 とする。なお以下に示す図においては, 分かりやすさのために,  $z$  座標の表示には, 作動流体の軸方向長さ  $L$  で正規化した値を用いる。

## 3. 解析結果および考察

### 3.1 完全発達流のモードと定常モードの流れ

アスペクト比を 0.1 から 1.6 まで 0.1 刻みの 16 種類, レイノルズ数を 100 から 1500 まで 100 刻みの 15 種類にとった, 合計 240 通りの場合について, 十分に発達した流れが持つ

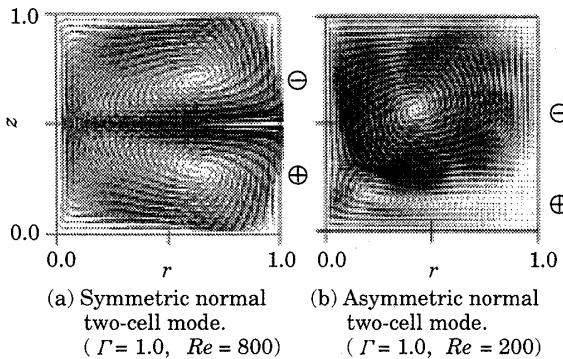


Fig. 2 Velocity vectors in normal two-cell mode. Symbols  $\oplus$  and  $\ominus$  indicate clockwise and counter-clockwise rotating directions, respectively

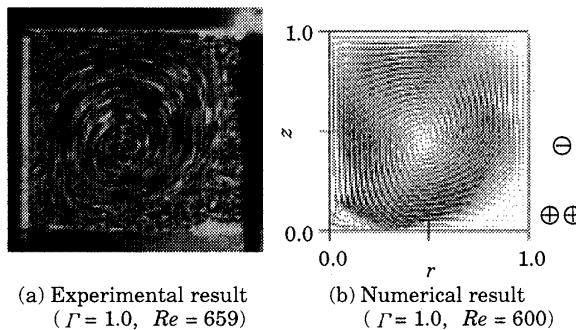


Fig. 3 Velocity vectors in anomalous one-cell mode

モードを図1に示す。ここで、現れるモードは、正規2セルモード(N2), 変異1セルモード(A1), 非定常な挙動を示す非定常モード(Unsteady mode), そしてツインセルモード(Twin)の4モードである。非定常モード以外の各モードについては、実験的に見い出されている<sup>(7)</sup>。

レイノルズ数が低い場合には、アスペクト比にかかわらず、上下端面近傍において外円筒側から内円筒側に向かう流れが存在する、正規2セルモードが現れる。アスペクト比が比較的大きい、あるいは小さい場合には、レイノルズ数が高い範囲でも、正規2セルモードが発生する。このモードの流れの例を、速度ベクトル図として図2に示す。なお、以下の図でも同様であるが、このような方位角方向の断面図においては、左側が内円筒側、右側が外円筒側であり、便宜上、円筒の両端面を、上側端面、下側端面として区別することにする。また速度ベクトル図に付した $\oplus$ ,  $\ominus$ は、それぞれセルの回転方向が時計回り、反時計回りであることを示す。正規2セルモードでは、上側、下側の両端面に隣接した領域で、外円筒側から内円筒側に向かう流れが存在する。図2(a)に示す $\Gamma=1.0$ ,  $Re=800$ の場合には、軸方向中央断面に対してほぼ対称な流れとなっている。一方、同じアスペクト比において、図2(b)に示す $Re=200$ では、2セルのうちの一

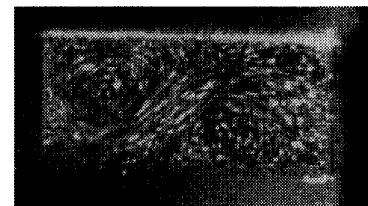


Fig. 4 Velocity vectors in twin-cell mode

方が大きく成長し、他方は下側端面側に小さく押し込められた形となっている。しかし、小さいセルも半径方向全域にわたり広がり、大きなセルは、上側と下側の両端面に接するようなことはない。

変異1セルモードの例を図3に示す。この図では、Nakamuraら<sup>(8)</sup>による可視化実験の結果もあわせて示す。図3の変異1セルモードでは、支配的な一つのセルが上側、下側の両端面に接している。また、このセルとは反対方向に回転するエクストラ渦が、下側端面の内円筒側と外円筒側に、それぞれ一つづつ現れている。ただし、外円筒側のエクストラ渦は弱く、図中には明確には現れていない。この変異1セルの予測結果は、可視化実験による流れの様子と良く一致している。

図4はツインセルモードにおける速度ベクトル図の例である。半径方向に並んだ二つのセルが形成されており、また、下側端面の内円筒側に一つの小さな付加的なセルが現れている。先の正規2セルモードでは、二つのセル間の境界線は、内円筒壁面および外円筒壁面に達しており、変異1セルモードにおいては、境界線の一端は円筒壁面上に、もう一端は円筒端面上にある。一方、ツインセルモードの半径方向に並んだセルの境界線は、上側端面と下側端面を結んでおり、これがこのモードの特徴となっている。

図2(b)に示したように、正規2セルモードには必ずしも対称ではない流れも存在する。この流れは、Cliffe<sup>(5)</sup>が非対称1セル流れあるいは非対称1セルモードと呼んでいるものであり、Lückeら<sup>(9)</sup>によても実験的および数

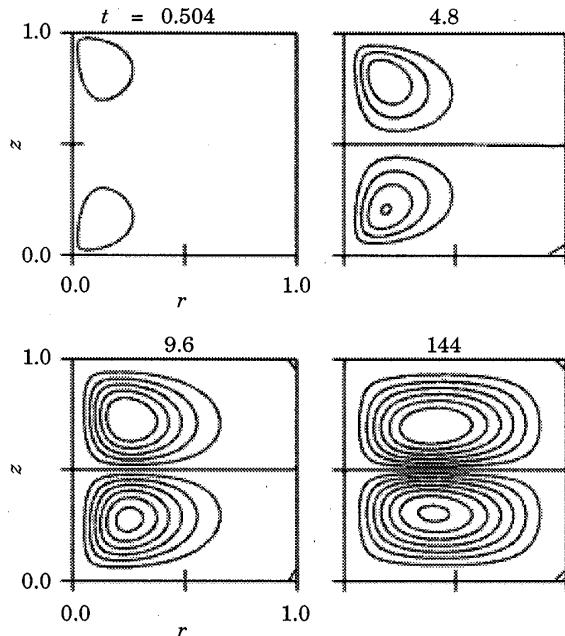


Fig. 5 Flow development from rest to normal two-cell mode ( $\Gamma = 1.0$ ,  $Re = 200$ )

値的に見出されている。一方、彼らは図3および図4に示す変異1セルモードやツインセルモードを見出していない。図1中の非定常モードでは、後にも述べるような非定常的な運動を示す。Pfisterら<sup>(6)</sup>は、半径比 $\eta=0.5$ の場合に、レイノルズ数を上げると安定性が失われ、軸対称振動が現れることを報告している。半径比が異なるため正当な比較はできないが、本研究における非定常モードは、この軸対称振動に相当するものと考えられる。なお、レイノルズ数が高くなると波動テイラー渦へと移行するものと考えられるが、図1に示す非定常モードが現れる範囲で物理実験を行ったところ、方位角方向への変動の発生は認められなかった。

**3・2 定常モードの流れの形成過程** 作動流体の長さが2円筒隙間の数倍であるような有限長のテイラー渦において、静止状態から流れが発達する場合には、2次流れにより両端面近傍にもたらされる渦が次第に発達しはじめる一方で、アスペクト比に応じて、端面から離れた領域にも渦が生成されていく過程が数値的に示されている<sup>(10)(11)</sup>。

対称な正規2セルモードが現れる $\Gamma=1.0$ ,  $Re=200$ の場合に、静止状態から定常状態に至るまでの、流れの関数 $\psi$ の等価線図の時間 $t$ に対する変化を図5に示す。内円筒壁面と、上側端面、下側端面のそれぞれにはさまれた領域に一つづつの渦が生じ、それらが半径方向および軸方向に急速に発達する。その後、軸方向中央断面付近で二つの渦が境界を接するようになると、半径方向に広が

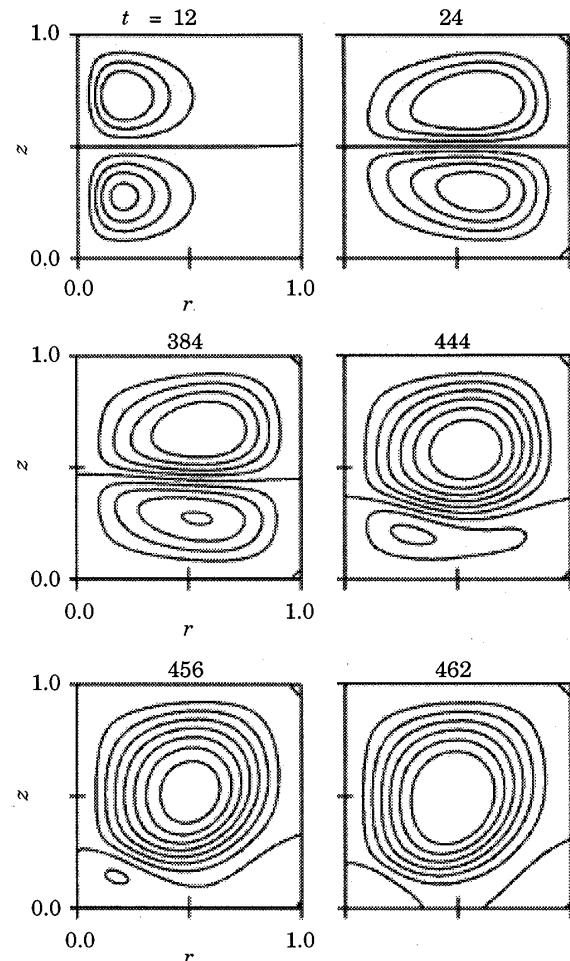


Fig. 6 Flow development from rest to anomalous one-mode ( $\Gamma = 1.0$ ,  $Re = 500$ )

り、最終的に正規2セルモードで安定する。

図6に、変異1セルモードの流れが形成される過程を示す。内円筒側の上側および下側端面付近に生じた渦は、しばらくは上下ではなく対称に発達し、正規2セルモードを保つ。しかしこのモードは安定せず、この例では、上側のセルが急激に増大しはじめる。その結果、下側のセルは押しやられ、さらに、二分されるようになり、上側のセルは下側端面に達する。二分されたセルは減衰し、内円筒側と外円筒側でエクストラ渦となり、流れは安定した変異1セルモードとなる。

ツインセルモードの形成過程を図7に示す。変異1セルモードの場合と同様に、ほぼ対称な正規2セルモードの流れが形成された後に、対称性が急激に崩れ、一つのセルは二分される。分割されたセルのうち、外円筒側のセルは、その後も減衰することなく、やがて上側と下側の両端面に達する境界をもつまでに発達し、半径方向に二つのセルが並んだツインセルが形成されるようになる。分割後に内円筒側に押しやられたセルは、エクストラ渦

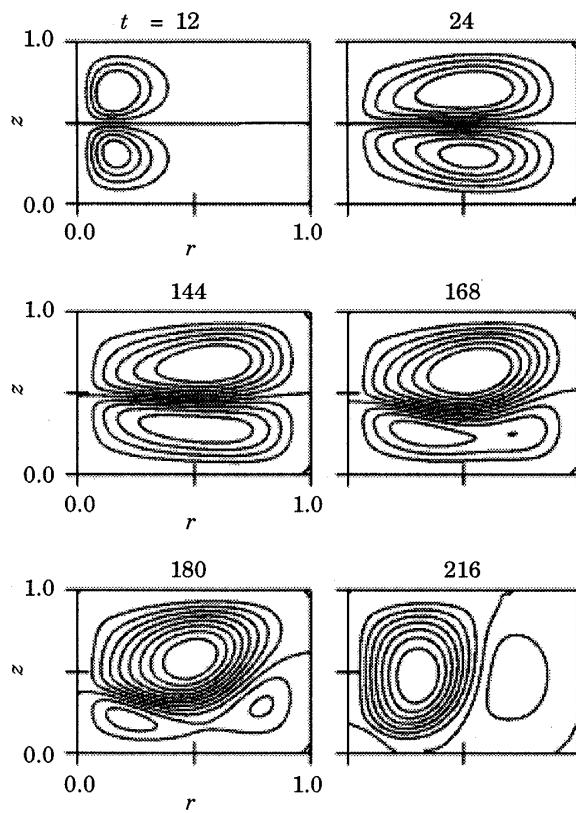


Fig. 7 Flow development from rest to twin-cell mode ( $\Gamma = 0.7$ ,  $Re = 1000$ )

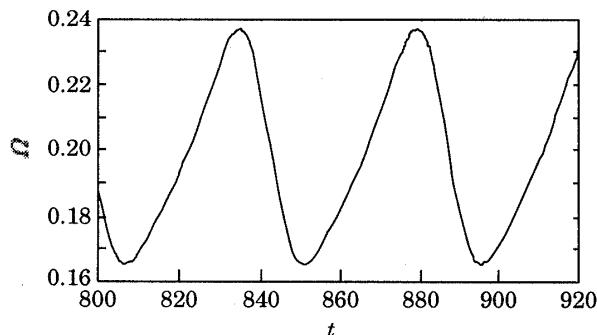


Fig. 8 Time variation of mean enstrophy ( $\Gamma = 0.5$ ,  $Re = 600$ )

となり残存する。

このような上下非対称の流れは、物理実験的には装置の微小な形状や温度の非対称性、初期流れが完全には静止していないことなどの要因により、ありうる非対称性のいずれかが選ばれるかが決まる<sup>(3)</sup>。本研究のような数値実験では、数値誤差によって、ありうる非対称性のいずれかが選ばれる。どの非対称性が選ばれても、その後の時間発達は固有の力学によって決まると考えられる。本計算においては、非対称性をもたらす大きな要因として、圧力ポアソン方程式の反復解法における変数の走査順序による数値誤差が考えられる。このため、たとえば図6

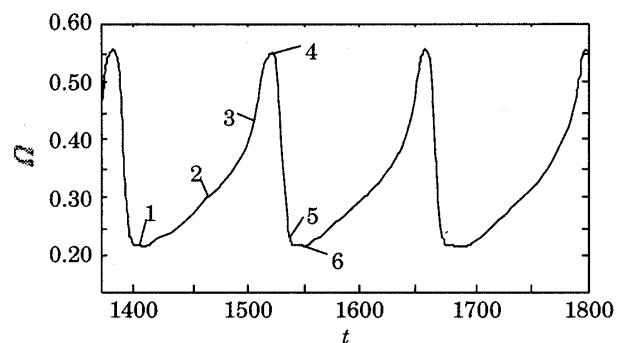


Fig. 9 Time variation of mean enstrophy ( $\Gamma = 0.5$ ,  $Re = 1500$ )

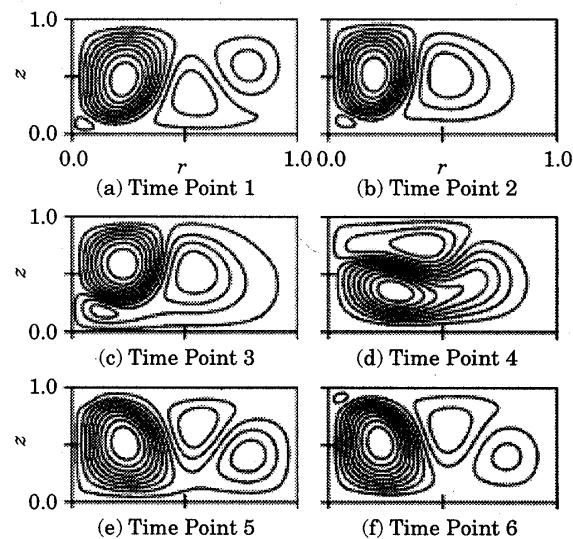


Fig. 10 Variations of streamlines at time points shown in Fig. 9

が得られる計算条件において  $z$  方向への走査順序を逆にした計算を行ったところ、図6とは  $z$  軸中央断面に対し対称であり、下側のセルが増大する変異1セルモードが得られた。

**3.3 非定常モードの流れ** 図1の非定常モード(Unsteady mode)の流れは、一定の周期でそのパターン変化を繰り返す、非定常な運動を示す。この非定常な運動を大局的にとらえるために、 $\Gamma = 0.5$ であり、 $Re$ が600および1500における、断面平均のエンストロフィ

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{A} \int_S \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 dr dz \quad (4)$$

の時間変化を、それぞれ図8および図9に示す。ここで、 $S$ は方位角方向断面領域であり、 $A$ はその面積である。また、図9中の数字は、特定の時点を参照するために便宜上付けたものである。図8では分布は比較的滑らかである一方で、レイノルズ数がより大きい場合の図9では、ある極大値から引き続く極小値への変化が急激になってい

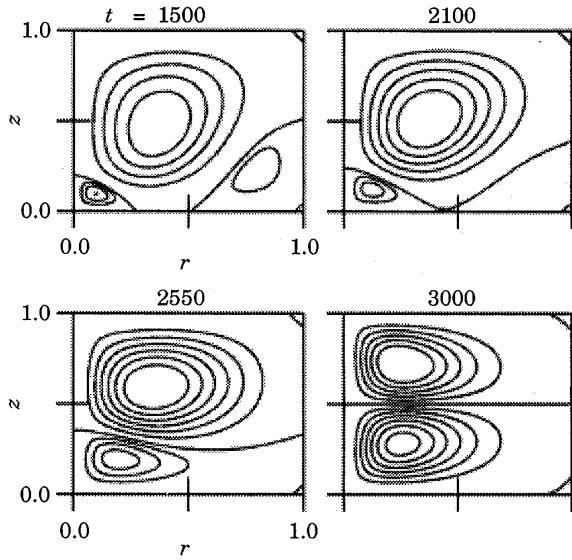


Fig. 11 Development of flow field from anomalous one-cell mode to normal two-cell mode ( $\Gamma=0.8$ ,  $Re=500 \rightarrow 100$ ,  $t_1=1500$ ,  $t_2=3000$ )

る。ここでは示さないが、レイノルズ数によるこのような分布の差異は、断面平均の運動エネルギーについても見られた。

図9中の時点1から時点6における、流れの関数 $\psi$ の等値線図を図10に示す。エンストロフィが極小をとる時点1においては、内円筒と下側端面にはさまれた領域の小さなセルを含めて、半径方向に四つセルが存在する(図10(a))。その後、外円筒側のセルが減衰する一方で、外側から2番目のセルが強まり(図10(b), 時点2)，それが内円筒側のセルと融合することで、流れは2セルの状態になる(図10(c), 時点3)。融合したセルは、もう一方のセルを上側へと押し込み、支配的なセルに成長し、エンストロフィも極大に達する(図10(d), 時点4)。その後、押しこまれたセルが軸方向に急激に広がり、時点4で支配的であったセルを分断するようになり(図10(e), 時点5)，さらには半径方向に四つのセルが並んだ状態に至り、エンストロフィは極小になる(図10(f), 時点6)。時点1と時点6の分布は、軸方向におよそ対称な分布となっている。時点6以降の変化は、ほぼ時点6までの変化とは逆の、時点5の分布、時点4の分布を経て時点1の分布に戻るが、時点6の分布から時点4の分布への変化は時間的に緩やかである一方で、時点4の分布から時点1の分布への変化は急激である。これより、図9のエンストロフィ分布の2周期分が、図10の変動の1周期分に相当することになる。なお、図9, 10に示されるエンストロフィ $\Omega$ は、非常に長い時間が経過しても同じ周期で変動し続けることは確かめてある。また、Nakamuraら<sup>(8)</sup>の拡張として物理実験を行ったところ、この流れに相

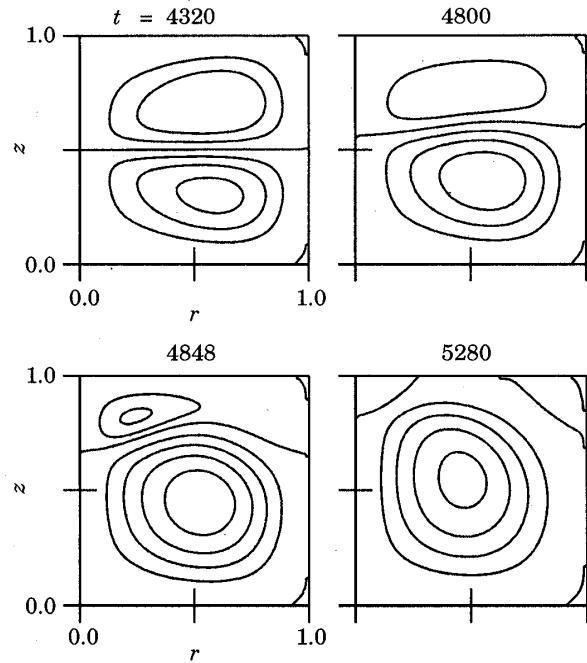


Fig. 12 Development of flow field from normal two-cell mode to anomalous one-cell mode ( $\Gamma=1.0$ ,  $Re=800 \rightarrow 500$ ,  $t_1=2400$ ,  $t_2=4800$ )

当すると思われる非定常な運動を認めることができた。

**3.4 モード間の非定常な推移** ある一定のレイノルズ数で十分に発達した流れにおいても、レイノルズ数が変化すると、異なるモードの流れに移ることがある。著者ら<sup>(12)</sup>は、作動流体の軸方向長さ $L$ が円筒の半径差 $D$ の数倍の場合に対して、この非定常なモード変化過程を調べ、物理実験との良い一致を示している。本節では、対象としたアスペクト比の範囲において、レイノルズ数を次第に減少させた場合に予測される、正規2セルモード、変異1セルモードおよびツインセルモードの間でのモード変化について述べる。

アスペクト比を0.8とし、レイノルズ数を500から100に減少させた場合の、変異1セルモードから正規2セルモードへの変化を、流れの関数 $\psi$ の等値線図により図11に示す。同様なモードの移り変わりは、例えばレイノルズ数を350から340まで減少させた場合にも現れたが、等値線図における変化が顕著な例として図11を用いる。内円筒周速度に基づくレイノルズ数の減少は $t=1500$ から始まり、 $t=3000$ で終わり、以後のレイノルズ数は100に保たれている。 $t=1500$ の時点では、内円筒側、外円筒側それぞれにエクストラ渦を伴った変異1セルモードであり、 $Re=500$ におけるモードが維持されている。しかしこのモードは不安定であり、次第にエクストラ渦が成長、融合し、正規セルとなる。融合したセルは成長を続け、最終的には軸方向にはほぼ対称な正規2セルモードに移る。

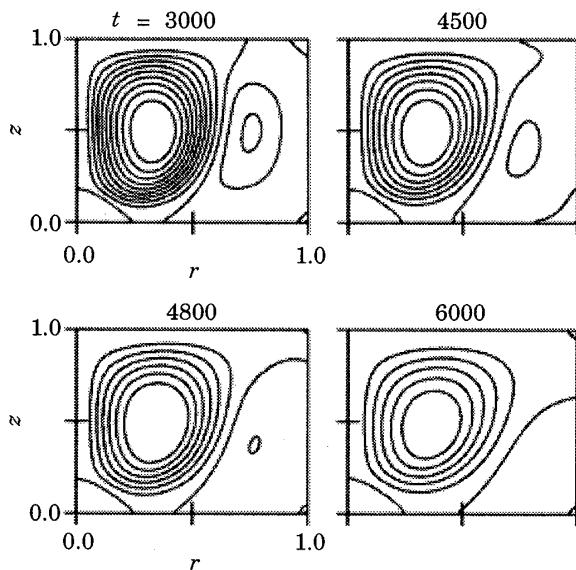


Fig. 13 Development of flow field from twin-cell mode to anomalous one-cell mode ( $\Gamma=0.8$ ,  $Re=1000 \rightarrow 600$ ,  $t_1=3000$ ,  $t_2=6000$ )

図12に、 $\Gamma=1.0$ ,  $Re=800$ の正規2セルモードの流れに対して、 $t=2400$ から始め $t=4800$ で $Re=500$ にいたるまで減速した場合に現れる、変異1セルモードへの変化を示す。対称性は、減速が終了する前から崩れ始め、一方のセルが他方のセルを端面側に押しやり、やがて分断するようになる。分断されたセルは減衰し、最終的に変異1セルモードのエクストラ渦となる。このような一方のセルが卓越して他方のセルを分断する過程は、図6に示した変異1セルモードが生成される過程にもみられる。また、先の変異1セルモードから正規2セルモードへの変化も考慮すると、これらのモード間での流れの変化は、新たなセルの発生や消滅により引き起こされるのではなく、内円筒側、外円筒側のエクストラ渦と正規セルとの交換によって引き起こされているといえる。

アスペクト比0.8、レイノルズ数を1000から600にした場合の、ツインセルモードから変異1セルモードへの変化を図13に示す。レイノルズ数が減少し始めると、内円筒側で付加的な小さな渦が現れる端面とは反対の端面上で、ツインセルの境界が次第に外円筒側に移動し、やがて、端面から外円筒壁面に移ることで変異1セルモードへと変化して落ち着く。

#### 4. 結論

両端が固定壁面で、内円筒が回転し、外円筒が静止している同軸2重円筒間に発達するテイラー渦流れにおいて、動作流体の軸方向長さの円筒間隙に対する比が1のオーダの場合に、発生する流れのモードと、レイノルズ

数の減少に伴うモードの変化を数値的に解析した。以下に、本研究の結果を要約する。

- (1) 正規2セルモードに加え、これまで実験的には存在が示されてきた変異1セルモードとツインセルモード、および非定常モードの存在を予測し、各モードが存在するレイノルズ数とアスペクト比の範囲を示した。
- (2) 初期の静止状態から変異1セルモードおよびツインセルモードが形成される場合、流れはほぼ軸方向に対称な2セルモードを経て、急激なパターンの変化により、非対称なモードにいたる。
- (3) 非定常モードにおいては、流れパターン変化の1周期が、断面平均エンストロフィ変化の2周期に相当する。
- (4) レイノルズ数の減少による正規2セルモードと変異1セルモード間の流れの変化は、エクストラ渦の融合による正規セルの生成、および、正規セルの分割によるエクストラ渦の発生により起こる。

#### 文 献

- (1) Koschmieder, E.L., Benard Cells and Taylor Vortices, Cambridge Univ. Press, (1993).
- (2) Lewis, G. S. and Swinney, H. L., Velocity Structure Functions, Scaling, and Transitions in High-Reynolds-Number Couette-Taylor Flow, *Phys. Rev. E*, **59-5**(1999), 5457-5467.
- (3) Benjamin, T. B. and Mullin, T., Anomalous Mode in the Taylor Experiment, *Proc. Royal Soc. Lond. A*, **377**(1981), 221-249.
- (4) Wereley, S. T. and Lueptow, R. M., Spatio-Temporal Character of Non-Wavy and Wavy Taylor-Couette Flow, *J. Fluid Mech.*, **364**(1998), 59-80.
- (5) Cliffe, K.A., Numerical Calculation of Two-Cell and Single Cell Taylor Flow, *J. Fluid Mech.*, **135**(1983), 219-233.
- (6) Pfister, G., Schmidt, H., Cliffe, K. A. and Mullin, T., Bifurcation Phenomena in Taylor-Couette Flow in a Very Short Annulus, *J. Fluid Mech.*, **191**(1988), 1-18.
- (7) 戸谷順信・中村育雄・山下新太郎・植木良昇, アスペクト比が小さいテイラー渦変異モードにおけるエクストラ渦とツイン渦の存在, 機論, **58-546, B** (1992), 305-312.
- (8) Nakamura, I. and Toya, Y., Existence of Extra Vortex and Twin Vortex of Anomalous Mode in Taylor

- Vortex Flow with a Small Aspect Ratio, *Acta Mech.*, **117**(1996), 33-46.
- (9) Lücke, M., Mihelcic, M., Wingerath, K. and Pfister, G., Flow in a Small Annulus between Concentric Cylinders, *J. Fluid Mech.*, **140**(1984), 343-353.
- (10) de Roquefort, T. A. and Grillaud, G., Computation of Taylor Vortex Flow by a Transient Implicit Method, *Computers and Fluids*, **6**(1978), 259-269.
- (11) 東尚史・小河原加久治・飯田誠一, 回転二重円筒間内流れの非定常三次元計算, 機論, **57**-535, B (1991), 905-913.
- (12) 渡辺崇・前田俊介・古川裕之・中村育雄, 減速するテイラー渦流れにおけるモード変化, 機論, **65**-630, B (1999), 521-527.