

ALE 有限要素法による移動境界を含む気液二相流の数値解析*

(非圧縮性二流体モデルを用いた解法)

内山 知実^{*1}, 峯村 吉泰^{*2}

ALE Finite Element Method Based on an Incompressible Two-Fluid Model for Gas-Liquid Two-Phase Flow Including Moving Boundary

Tomomi UCHIYAMA^{*3} and Kiyoshi MINEMURA

^{*3} Nagoya University, Center for Information Media Studies,
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya, Aichi, 464-8603 Japan

This paper proposes an ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) finite element method for gas-liquid two-phase flow, based on an incompressible two-fluid model, so as to analyze the two-phase flow including moving boundaries. The conservation equations for the two-fluid model are derived with the use of the ALE method. The solution algorithm is parallel to a fractional step method, and the Galerkin method is employed for the formulation. Quadrilateral element with four nodes is used for the discretization of the calculating domain. The present method is also applied to the calculation of the flow around a cylinder, which is forced to oscillate in air-water two-phase mixture, to demonstrate the validity of the method. The drag coefficients of the cylinder exhibit periodical change in accordance with the variation of the flow around the cylinder. The time variations of the flow field and drag coefficients are discussed in relation to the oscillation of the cylinder.

Key Words: Multiphase Flow, Numerical Analysis, Moving Boundary Problem, Oscillating Cylinder, Two-Fluid Model, Gas-Liquid Two-Phase Flow, Phase Distribution

1. 緒 言

シェルチューブ形熱交換器や蒸気発生器において、管群が管軸と直交して流れる気液二相流により振動し、損傷事故の発生に至る場合がある。振動現象をより基礎的立場から把握するため、小川・原⁽¹⁾は直交二相流中に置かれた単一の振動円柱まわりの流れを観察し、振動特性との関連を明らかにした。また、水中ロボットの開発において、本体の小形化とアームの高速化を実現するため、アームに作用する流体力の低減が課題となっている。小笠原・原⁽²⁾は、表面から気泡を放出しながら運動するアームの後流を実験的に調べ、流体力低減法の可能性を探った。このような運動物体まわりの二相流の解析には、物体表面に相当する移動境界を考慮できる解法が用いられる。しかし、解法の詳細や解析結果を報告したものは少数例⁽³⁾しか見当たらないようである。

一方、移動境界を含む单相流の解析には種々の方法が提案され、さまざまな問題に対する適用性が調べら

れている。解法は、計算メッシュの配置法により Euler 法, Lagrange 法および ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) 法に分類される。流れ場に固定したメッシュを用いる Euler 法は、境界が大きく変形する場合にも有効に適用できるが、移動境界における物理量の保存性が低く計算精度に問題がある⁽⁴⁾。流体の運動とともに移動するメッシュを採用する Lagrange 法は、移動境界の表現が容易であるが、大規模な運動を伴う流れ解析ではメッシュのひずみにより計算が破たんする場合がある。これに対して、流体運動と独立にメッシュを配置する ALE 法⁽⁵⁾は、境界が大きく移動・変形する場合にも望ましいメッシュの配置が可能であり、計算精度の低下を抑制できる。このため、近年、单相流解析に ALE 法が多用される傾向にあり、また有限要素法を併用することにより、複雑な幾何形状をもつ流れ場の解析にも有効に適用されている⁽⁶⁾⁽⁷⁾。移動境界を含む二相流解析にも ALE 有限要素法は極めて有用であるものと期待できるが、これまで提案されていないのが現状である。

著者ら⁽⁸⁾⁻⁽¹⁰⁾は、複雑形状流路内の二相流解析に対する二流体モデルの適用性を高めるため、非圧縮性二流体モデルに対する種々の有限要素法を提案し、静止した単一の円柱や角柱まわりの流れを解析した。ま

* 原稿受付 1999年8月12日。

^{*1} 正員, 名古屋大学情報メディア教育センター(☎464-8603 名古屋市千種区不老町)。

^{*2} 正員, 名古屋大学大学院人間情報学研究科。

E-mail: uchiyama@info.human.nagoya-u.ac.jp

た、既報⁽¹¹⁾では千鳥配列円管群内の直交二相流を上流形有限要素法⁽¹⁰⁾により解析し、解法の有用性を示した。本論では、非圧縮性二流体モデルをALE法で記述し、得られた基礎式をFractional Step法に基づく有限要素法⁽⁹⁾で数値解析する、移動境界を含む気液二相流に対するALE有限要素法を提案する。なお、移動境界を含む二相流の実験は極めて少なく、解法の検証に利用できる気相体積率分布などの測定結果が見当たらない。本論では、中村ら⁽¹²⁾が解析の対象とした静止単相流体中で振動する円柱まわりの流れを参考にして、本解法を水平面内の静止二相流体中で単振動する円柱まわりの流れ解析に適用した結果についても述べる。

2. 記号

- C : S の境界
 - CD : 円柱の全抗力係数 = $CDF + CDP$
 - CDF : 円柱の摩擦抗力係数 = $F_{DF}/(\rho_l U_{max}^2 D/2)$
 - CDP : 円柱の圧力抗力係数 = $F_{DP}/(\rho_l U_{max}^2 D/2)$
 - C_p : 圧力係数 = $(p - p_0)/(\rho_l U_{max}^2/2)$
 - D : 円柱の直径
 - f : 相間力
 - F_{DF} : 円柱に作用する摩擦抗力
 - F_{DP} : 円柱に作用する圧力抗力
 - g : 重力の加速度
 - K : Keulegan-Carpenter 数 = $U_{max} T/D$
 - n : 外向き単位法線ベクトル
 - p : 圧力
 - Re : Reynolds 数 = $\rho_l U_{max} D/\mu_l$
 - S : 計算領域
 - S_e : 要素の面積
 - t : 時間
 - T : 振動周期
 - u : 速度
 - \hat{u} : メッシュ速度
 - U_{max} : 円柱の最大振動速度
 - x : 空間直交座標
 - α : 体積率
 - μ : 粘性係数
 - ξ : 局所座標
 - ρ : 密度
 - τ : 粘性応力
- 添字
- g : 気相
 - i, j : 空間成分
 - l : 液相

3. ALE法と非圧縮性二流体モデル

3.1 ALE法による運動の記述 ALE法⁽¹³⁾により流体の運動を記述する場合、図1に示すように、物質領域 S_x 、空間領域 S_x および参照領域 S_x が用いられる。

時刻 $t=0$ において S_x を占める流体が $t=t$ には S_x を占め、点 X が点 x に移動するものとする。 x を与える写像を ϕ とすれば、点 X の速度 u は次式で定義される。

$$u = \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_X = \frac{\partial \phi(X, t)}{\partial t} \dots\dots\dots (1)$$

S_x と S_x は一般に運動するが、ALE法では固定された領域 S_x が流体運動の記述に利用される。この場合、 x は時刻 $t=t$ における S_x の点 x の写像 $\hat{\phi}$ としても表現でき、点 x の速度 \hat{u} は次式で定義される。

$$\hat{u} = \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_x = \frac{\partial \hat{\phi}(x, t)}{\partial t} \dots\dots\dots (2)$$

一方、流れの変数 f が (X, t) あるいは (x, t) の関数として記述される場合、それぞれ物質表現(ラグランジュ表現)および空間表現(オイラー表現)に相当する。 f を (x, t) の関数として記述する方法はALE法では参照表現と呼ばれる。写像 ϕ および $\hat{\phi}$ のもとでは次式が成り立つ⁽¹³⁾。

$$\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_x = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_X + u \frac{\partial f}{\partial x} \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_x = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_x + (u - \hat{u}) \frac{\partial f}{\partial x} \dots\dots\dots (4)$$

参照表現を与える式(4)において、 $\hat{u} = u$ の場合は $x = X$ となりラグランジュ表現、 $\hat{u} = 0$ の場合は $x = x$ となり式(3)のオイラー表現に対応する。

式(3)と式(4)より次式が得られる。

$$\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_x = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_x - \hat{u} \frac{\partial f}{\partial x} \dots\dots\dots (5)$$

3.2 移動境界問題 図2に示すような、移動境界を含む問題を考える。流れ場 S_x の中に速度 v で運動する物体が存在し、 S_x の境界が物体表面の移動境

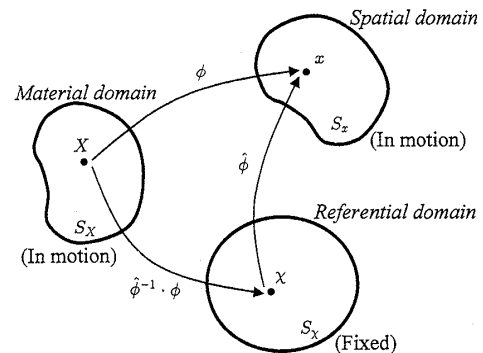


Fig. 1 Domains and mappings for ALE description

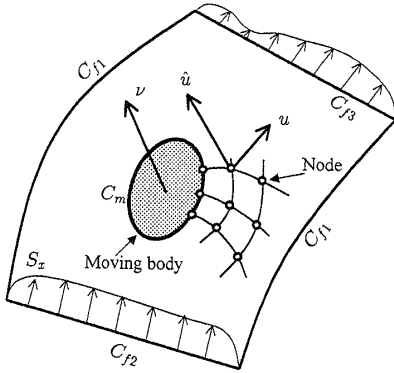


Fig. 2 Moving boundary problem

界 C_m と空間に固定された固定境界 C_{f1} , C_{f2} および C_{f3} からなるものとする。物体の運動とともに変形する S_x は空間領域に相当する。

単相流解析に対する ALE 法を用いた有限要素法⁽¹³⁾では、 S_x において各時間ステップごとに要素が再配置される。再配置を参照領域 S_x から S_x への写像 $\hat{\phi}$ と考えれば、再配置に伴う要素の移動速度は \hat{u} に相当し、メッシュ速度と呼ばれる。図2のように S_x を四角形要素に分割する場合、 \hat{u} は流体の速度 u とともに節点で定義できる。

3・3 非圧縮性二流体モデル 空間領域 S_x における気液二相流に対し、両相が非圧縮性で相変化のない流れを仮定する。各相の質量および運動量保存式はそれぞれ次式⁽¹⁴⁾で表される。

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (a_k u_{kj}) = 0 \quad (k=g, l) \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_{ki}}{\partial t} + u_{kj} \frac{\partial u_{ki}}{\partial x_j} \\ &= -\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\alpha_k \rho_k} \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_k \tau_{kij}) + f_{ki} + g_i \\ & (k=g, l) \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

ただし、

$$\alpha_g + \alpha_l = 1 \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで、添字 k は気相 ($k=g$) と液相 ($k=l$) の区別を示し、本論中の添字 k, g, l は総和規約の対象外とする。また、 f_k は相間力、 τ_k は粘性応力を表す。

相間力 f_k として、前報⁽¹¹⁾と同様、相間抗力 f_{ki}^D 、仮想質量力 f_{ki}^V および揚力 f_{ki}^L を考慮する。すなわち、

$$f_{ki}^D = -\Lambda_k (u_{gi} - u_{li}) \quad (k=g, l) \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\begin{aligned} f_{ki}^V = & -\Gamma_k \left(\frac{\partial u_{gi}}{\partial t} + u_{gj} \frac{\partial u_{gi}}{\partial x_j} - \frac{\partial u_{li}}{\partial t} - u_{lj} \frac{\partial u_{li}}{\partial x_j} \right) \\ & (k=g, l) \quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

$$f_{ki}^L = -\Theta_k \varepsilon_{ijm} (u_{gj} - u_{lj}) \omega_m \quad (k=g, l) \quad \dots\dots\dots (11)$$

ただし、式(11)の ε_{ijm} および ω_m はそれぞれ交代テンソルおよび液相の渦度であり、また式(9)~(11)の係

Table 1 Boundary condition

Fixed boundary	C_{f1}	$u_{ki} = \hat{u}_{ki}, \hat{u}_i = 0$
	C_{f2}	$u_{ki} = \hat{u}_{ki}, \alpha_k = \hat{\alpha}_k, \hat{u}_i = 0$
	C_{f3}	$n_j (\delta_{ij} p - \tau_{kij}) = 0, \hat{u}_i = 0$
Moving boundary	C_m	$u_{ki} = \hat{u}_i = v_i$

数 Λ_k, Γ_k および Θ_k はそれぞれ次式で表される。

$$\Lambda_g = \frac{1}{8} \frac{a \rho_l C_D}{a_g \rho_g} |u_g - u_l|,$$

$$\Lambda_l = -\frac{1}{8} \frac{a C_D}{a_l} |u_g - u_l| \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\Gamma_g = (\rho_l / \rho_g) C_V, \quad \Gamma_l = -(\alpha_g / \alpha_l) C_V \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\Theta_g = (\rho_l / \rho_g) C_L, \quad \Theta_l = -(\alpha_g / \alpha_l) C_L \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここで、 a は界面積濃度、 C_D, C_V および C_L はそれぞれ抗力係数、仮想質量係数および揚力係数を表す。

粘性応力 τ_{kij} は次式^{(8)~(11)}で定められる。

$$\begin{aligned} \tau_{kij} = & \mu_k \left(\frac{\partial u_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{kj}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_{km}}{\partial x_m} \right) \quad (k=g, l) \\ & \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

式(6)、(7)および式(10)には領域 S_x の座標 x を固定した時間微分項が含まれる。式(5)を用いて領域 S_x の座標 χ を固定した時間微分に変換すれば、ALE 法で記述された非圧縮性二流体モデルが得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_k}{\partial t} \Big|_x + \frac{\partial}{\partial x_j} (a_k u_{kj}) - \hat{u}_j \frac{\partial a_k}{\partial x_j} = & 0 \quad (k=g, l) \\ & \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{ki}}{\partial t} \Big|_x + (u_{kj} - \hat{u}_j) \frac{\partial u_{ki}}{\partial x_j} = & \beta_k \Phi_{gi} + \gamma_k \Phi_{li} \\ & (k=g, l) \quad \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \Phi_{ki} = & -\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\alpha_k \rho_k} \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_k \tau_{kij}) + f_{ki}^D + f_{ki}^L + g_i \\ & (k=g, l) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \beta_g & \gamma_g \\ \beta_l & \gamma_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \Gamma_g & -\Gamma_g \\ \Gamma_l & 1 - \Gamma_l \end{pmatrix}^{-1}$$

境界条件は表1のように与えられるものとする。固定境界ではメッシュ速度 $\hat{u} = 0$ であり、速度が既知の境界 C_{f1} 、速度と体積率が与えられる境界 C_{f2} 、自由流出が仮定される境界 C_{f3} からなる。また、移動境界 C_m では滑りが無い。

4. 数値解法

4・1 時間離散化式 式(16)および式(17)の時間 t に関する離散化式は、ICE 法⁽¹⁵⁾によれば次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{a_k^{n+1} - a_k^n}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (a_k^n u_{kj}^{n+1}) - \hat{u}_j^n \frac{\partial a_k^n}{\partial x_j} = & 0 \quad (k=g, l) \\ & \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

$$\frac{u_{ki}^{n+1} - u_{ki}^n}{\Delta t} + (u_{kj}^n - \bar{u}_j^n) \frac{\partial u_{ki}^n}{\partial x_j} = \beta_k^n \Phi_{gi}^n + \gamma_k^n \Phi_{li}^n \quad (k=g, l) \quad (19)$$

ただし、添字 n は時刻 $t=n\Delta t$ の状態を表し、また、

$$\begin{aligned} \Phi_{ki}^n &= -\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} + \frac{1}{\alpha_k^n \rho_k} \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_k^n \tau_{kij}^n) \\ &\quad - \Lambda_k^n (u_{gi}^{n+1} - u_{li}^{n+1}) \\ &\quad - \Theta_k^n \varepsilon_{ijm} (u_{gj}^n - u_{lj}^n) \omega_m^n + g_i \quad (k=g, l) \end{aligned}$$

式(19)を u_{ki}^{n+1} について整理すれば次式を得る。

$$u_{ki}^{n+1} = -\frac{\Delta t}{\rho_k^*} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} + \phi_{ki}^n \quad (k=g, l) \quad (20)$$

ここで、

$$\frac{1}{\rho_k^*} = b_k \left(\frac{\beta_g^n}{\rho_g} + \frac{\gamma_l^n}{\rho_l} \right) + c_k \left(\frac{\beta_g^n}{\rho_g} + \frac{\gamma_l^n}{\rho_l} \right) \quad (k=g, l)$$

$$\phi_{ki}^n = b_k \Psi_{gi}^n + c_k \Psi_{li}^n \quad (k=g, l)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{ki}^n &= u_{ki}^n - \Delta t \left\{ (u_{kj}^n - \bar{u}_j^n) \frac{\partial u_{ki}^n}{\partial x_j} \right. \\ &\quad - \left[\frac{\beta_k^n}{\alpha_k^n \rho_k} \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_k^n \tau_{kij}^n) + \frac{\gamma_k^n}{\alpha_l^n \rho_l} \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_l^n \tau_{lij}^n) \right] \\ &\quad + (\beta_k^n \Theta_{gi}^n + \gamma_k^n \Theta_{li}^n) \varepsilon_{ijm} (u_{gj}^n - u_{lj}^n) \omega_m^n \\ &\quad \left. - (\beta_k^n + \gamma_k^n) g_i \right\} \quad (k=g, l) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} b_g & c_g \\ b_l & c_l \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \Delta t (\beta_g^n \Lambda_g^n + \gamma_l^n \Lambda_l^n) \\ \Delta t (\beta_l^n \Lambda_g^n + \gamma_l^n \Lambda_l^n) \\ -\Delta t (\beta_g^n \Lambda_g^n + \gamma_l^n \Lambda_l^n) \\ 1 - \Delta t (\beta_l^n \Lambda_g^n + \gamma_l^n \Lambda_l^n) \end{bmatrix}^{-1}$$

また、各相に関する質量保存式(16)を辺々加え合せ、式(8)を代入すれば、二相流全体の質量保存式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_g^n u_{gj}^{n+1} + \alpha_l^n u_{lj}^{n+1}) = 0 \quad (21)$$

4.2 Fractional Step 法 式(18), (20)および式(21)の解析より、時刻 $t=(n+1)\Delta t$ における u_{ki}^{n+1} , p^{n+1} および α_k^{n+1} が求められる。本論では、2段階の計算手順からなる Fractional Step 法⁹⁾を用いる。第1段階として、まず、式(20)において圧力こう配を無視した次式より中間速度 \tilde{u}_{ki} を求める。

$$\tilde{u}_{ki} = \phi_{ki}^n \quad (k=g, l) \quad (22)$$

いま、式(20)から式(22)を辺々差引いた次式を導く。

$$u_{ki}^{n+1} = \tilde{u}_{ki} - \frac{1}{\rho_k^*} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (k=g, l) \quad (23)$$

ただし、 ϕ は次式を満たすスカラー関数である。

$$p^{n+1} = \phi / \Delta t \quad (24)$$

次に、式(23)を式(21)に代入して次式で表されるポアソン方程式を導き、これを解析して ϕ を求める。

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\alpha_g^n}{\rho_g^*} + \frac{\alpha_l^n}{\rho_l^*} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_g^n \tilde{u}_{gj} + \alpha_l^n \tilde{u}_{lj}) \quad (25)$$

第2段階として、式(25)から得られた ϕ を式(23)お

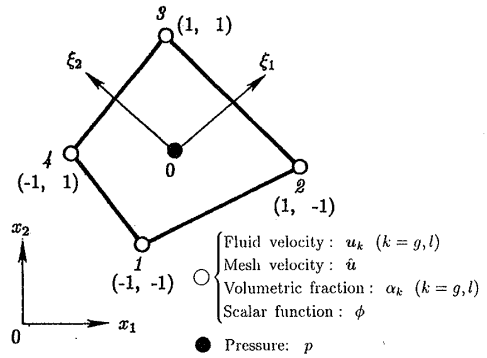


Fig. 3 Quadrilateral element

よび式(24)に代入して u_{ki}^{n+1} および p^{n+1} を求め、得られた u_{ki}^{n+1} を式(18)に用いて α_k^{n+1} を計算する。

5. ALE 有限要素法

5.1 有限要素 二次元流れ場を解析の対象とし、既報⁽⁸⁾⁻⁽¹¹⁾と同様、領域 S_x を図3に示すような四角形要素に分割する。 p を要素中心で定義して要素内で一定とする。 u_{ki} , \hat{u}_i , α_k および ϕ は頂点(節点)で定義し、要素内部の値を節点における値 $u_{ki\beta}$, $\hat{u}_{i\beta}$, $\alpha_{k\beta}$ および ϕ_{β} ($\beta=1, 2, 3, 4$) を用いた次式で内挿近似する。

$$\begin{aligned} u_{ki} &= N_{\beta} u_{ki\beta}, \quad \hat{u}_i = N_{\beta} \hat{u}_{i\beta} \\ \alpha_k &= N_{\beta} \alpha_{k\beta}, \quad \phi = N_{\beta} \phi_{\beta} \quad (k=g, l) \end{aligned} \quad (26)$$

ただし、 N_{β} は形状関数であり、図3に示したような局所座標系 ξ_i ($i=1, 2$) を用いた次式で表される。

$$N_{\beta} = (1 + \xi_1 \xi_{1\beta})(1 + \xi_2 \xi_{2\beta}) / 4 \quad (\beta=1, 2, 3, 4) \quad (27)$$

ここで、 ξ_i は $-1 \leq \xi_i \leq 1$ の範囲で定義されており、 $\xi_{i\beta}$ は節点 β の ξ_i 座標値を示す。

5.2 有限要素方程式 式(18), (22)~(25)に Galerkin 法を適用すれば有限要素方程式が得られる。

$$M \tilde{u}_{ki} = M_b u_{gi}^n + M_c u_{li}^n - F_{ki}^n \Delta t \quad (k=g, l) \quad (28)$$

$$T \phi = -R + P \quad (29)$$

$$M u_{ki}^{n+1} = M \tilde{u}_{ki} - E_{ki} \quad (k=g, l) \quad (30)$$

$$p^{n+1} = S_{\alpha} \phi_{\alpha} / (S_{\alpha} \Delta t) \quad (31)$$

$$M \alpha_k^{n+1} = M \alpha_k^n - (Q_k - C_k) \Delta t \quad (k=g, l) \quad (32)$$

ただし、

$$M = \sum M_{\alpha\beta}, \quad M_b = \sum M_{\alpha\beta} b_{\beta k}, \quad M_c = \sum M_{\alpha\beta} c_{\beta k}$$

$$F_{ki}^n = \sum F_{ki\alpha}^n, \quad T = \sum T_{\alpha\beta} \left(\frac{\alpha_g^n}{\rho_g^*} + \frac{\alpha_l^n}{\rho_l^*} \right)$$

$$R = \sum R_{\alpha\beta j} (\alpha_{g\beta}^n \tilde{u}_{gj\beta} + \alpha_{l\beta}^n \tilde{u}_{lj\beta})$$

$$P = \sum P_{\alpha\beta} \left(\frac{\alpha_g^n}{\rho_g^*} + \frac{\alpha_l^n}{\rho_l^*} \right)$$

$$E_{ki} = \sum (R_{\alpha\beta i} \phi_{\beta} / \rho_k^*), \quad S_{\alpha} = \int N_{\alpha} dS$$

$Q_k = \sum R_{\alpha\beta i} \alpha_{k\beta}^n u_{ki}^{n+1}$, $C_k = \sum C_{\alpha\beta j} \tilde{u}_{j\beta}^n \alpha_{ki}^n$
 ここで、 \sum は全要素についての重ね合せを表し、マトリックス $M_{\alpha\beta}$ などは次式で定義される。

$$M_{\alpha\beta} = \int N_\alpha N_\beta dS, \quad T_{\alpha\beta\gamma} = \int \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial N_\beta}{\partial x_j} N_\gamma dS$$

$$R_{\alpha\beta i} = \int N_\alpha \frac{\partial N_\beta}{\partial x_i} dS, \quad P_{\alpha\beta} = \int N_\alpha N_\beta \frac{\partial \phi}{\partial x_i} n_i dC$$

$$C_{\alpha\beta\gamma j} = \int N_\alpha N_\beta \frac{\partial N_\gamma}{\partial x_j} dS, \quad K_{\alpha\beta} = \int \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial N_\beta}{\partial x_j} dS$$

$$K_{\alpha\beta j}^i = \int \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial N_\beta}{\partial x_i} dS, \quad B_{\alpha\beta} = \int N_\alpha N_\beta dC$$

$$F_{k\alpha}^n = C_{\alpha\beta j} [b_k (u_{j\beta}^n - \tilde{u}_{j\beta}^n) u_{ki}^n + c_k (u_{j\beta}^n - \tilde{u}_{j\beta}^n) u_{ki}^n] \\ - (b_k \frac{\beta_g^n}{\rho_g} + c_k \frac{\beta_l^n}{\rho_l}) \{ B_{\alpha\beta} \tau_{gij}^n n_j - \mu_g [K_{\alpha\beta} u_{gij}^n \\ + (K_{\alpha\beta j}^i - \frac{2}{3} K_{\beta\alpha j}^i) u_{gij}^n] \} - (b_k \frac{\gamma_g^n}{\rho_l} + c_k \frac{\gamma_l^n}{\rho_l}) \\ \times \{ B_{\alpha\beta} \tau_{lij}^n n_j - \mu_l [K_{\alpha\beta} u_{lij}^n + (K_{\alpha\beta j}^i - \frac{2}{3} K_{\beta\alpha j}^i) \\ \times u_{lij}^n] \} + M_{\alpha\beta} [b_k (\beta_g^n \Theta_g^n + \gamma_g^n \Theta_l^n) \\ + c_k (\beta_l^n \Theta_g^n + \gamma_l^n \Theta_l^n)] \varepsilon_{ijm} (u_{gj}^n - u_{lj}^n) \omega_m^n \\ - S_\alpha [b_k (\beta_g^n + \gamma_g^n) + c_k (\beta_l^n + \gamma_l^n)] g_i$$

ただし、定式化にあたり、 b_k, c_k, β_k および γ_k が各要素内で一定と仮定し、また粘性項に対しては各要素内で各相体積率が一定値をとるものと仮定した。

解析手順を図4に示す。メッシュ速度 \tilde{u}^n は、時刻 $t = n\Delta t$ と $(n-1)\Delta t$ における要素配置をもとにオイ

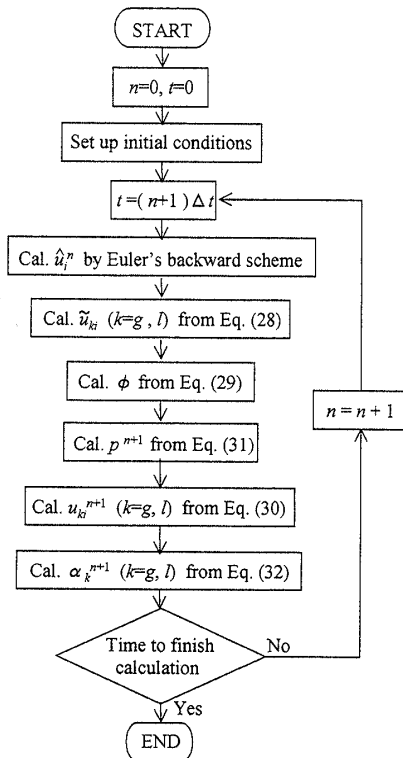


Fig. 4 Flow chart

ラー後退法で定める。また、既報⁽⁹⁾と同様、マトリックスの値はガウスの数値積分法(積分数点 2×2)により求め、質量マトリックス (M, M_b, M_c) は集中係数マトリックスで置き替え、式(29)にはLU分解法を用いる。

6. 振動円柱まわりの二相流解析への適用

6.1 解析条件 本解法を水平面内の静止二相流体中(空気-水系)で振動する円柱まわりの流れ解析に適用した。図5に示すように、直径 $D (= 30 \text{ mm})$ の円柱が正方形領域において x_1 方向に単振動している。三次精度 GQ 法を用いた有限体積法による類似の单相流解析⁽¹²⁾を参考にして、Reynolds 数 Re と Keulegan-Carpenter 数 K を計算パラメータに用いる。

$$Re = \rho_l U_{\max} D / \mu_l, \quad K = U_{\max} T / D \dots \dots \dots (33)$$

ここで、 U_{\max} は円柱の最大振動速度、 T は振動周期である。

本解析では、無次元時間 $t^* (= t/T)$ に対する円柱の変位 x_c を次式で定めた。

$$x_c / D = -(K/2\pi) \cos(2\pi t^*) \dots \dots \dots (34)$$

本問題では、円柱表面が移動境界 C_m に相当するが、

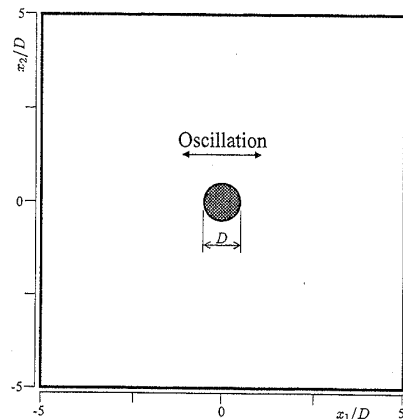


Fig. 5 Configuration of oscillating cylinder problem

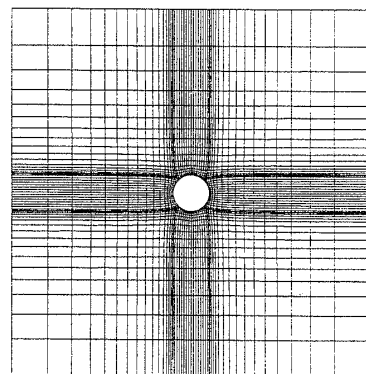


Fig. 6 Discretization of flow field

領域外周に自由流出の固定境界 C_{f3} を適用した。初期条件として、気相体積率 α_{g0} が一様に分布した静止二相流を仮定し、直径 $d (=1 \text{ mm})$ の気泡が一様に分散しているものとした。また、 $C_v = 0.5, C_L = 0.25$ とし、 C_D は次式⁽¹⁶⁾ で定めた。

$$C_D = \left[\frac{24}{Re_b} (1 + 0.15 Re_b^{0.687}) + \frac{0.42}{1 + 42500 Re_b^{-1.16}} \right] \alpha_i^{-3.5} \dots\dots\dots (35)$$

ただし、 $Re_b = \rho_l d |u_g - u_l| / \mu_l$ である。なお、各相の粘性係数 μ_k には単相流時の値をそのまま用いた。

要素分割を図6に示す。要素数は 50×50 である。計算の各時間ステップごとに要素を再配置するが、本問題ではメッシュのトポロジーが経時変化しないため、ラプラス方程式による方法⁽¹⁷⁾ を用いた。

6.2 解析結果 初期状態(円柱静止時)の気相体積率 α_{g0} が 0.1 の場合における、円柱の摩擦抗力係数 CDF 、圧力抗力係数 CDP および全抗力係数 $CD (=$

$CDF + CDP)$ の時間変化を図7に示す。ただし、 $Re = 100, K = 6$ の結果を無次元時間 $t^* (= t/T)$ に対して示してあり、円柱変位の無次元値 x_c/D も点線で併記してある。 CDP の振幅は CDF の約3倍である。また、 CDP と CDF は円柱変位とほぼ同様な正弦的变化を示し、円柱周囲に周期的流れが発生していることが推察できる。ただし、各抗力係数の位相は円柱変位よりも遅れ、 CDF の遅れは約 $T/4$ である。この位相遅れについては後述する。

図7と同様な結果は $\alpha_{g0} = 0, 0.05, 0.15$ でも求められた。そこで、 $Re = 100, K = 6$ の場合における CDF, CDP および CD の振幅 A_{CDF}, A_{CDP} および A_{CD} と α_{g0} の関係を図8に示す。 α_{g0} が増すと振幅が単調低下する。ただし、位相に及ぼす α_{g0} の影響はほとんど認められなかった。

なお、中村ら⁽¹²⁾ の単相流解析 ($\alpha_{g0} = 0$) でも、各抗力係数の位相遅れを伴う正弦的变化が報告されている。また、中村らの抗力係数の振幅を図8に併記してあるが、本結果とよく一致している。これらは、単相流に対する本 ALE スキームの妥当性を示すものであり、さらに同スキームを採用した本二相流計算が妥当な結果を与え得ることを示唆するものと考えられよう。

CD の振幅 A_{CD} に及ぼす Re, K および α_{g0} の影響を図9に示す。 A_{CD} は Re が小さいほど大きい。また、式(34)から知れるように K は円柱変位の振幅に対応するが、 K が小さいほど A_{CD} が大になる。ただし、 α_{g0} が増すと A_{CD} は低下し、その低下率は Re や K にほとんど依存しない。

次に、流れの周期変化を調べるため、図7に示した $Re = 100, K = 6, \alpha_{g0} = 0.1$ の場合を例にとり、円柱まわりの流れの時間変化を図10~13に示す。ただし、 $1/2$ 振動周期 ($7.25 \leq t^* \leq 7.75$) における五つの時刻での瞬時流れ場であり、各図の下の矢印は円柱の瞬間振動速度の方向と大きさを表す。

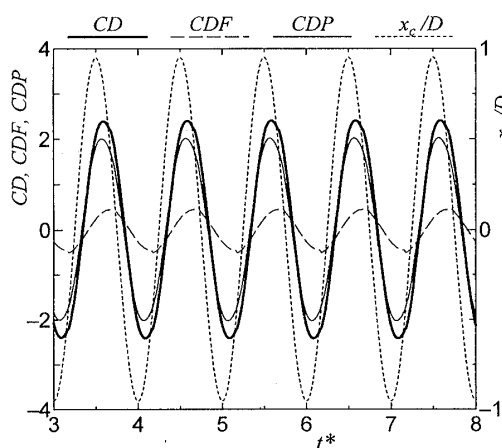


Fig. 7 Time variation of drag coefficients of cylinder ($Re = 100, K = 6, \alpha_{g0} = 0.1$)

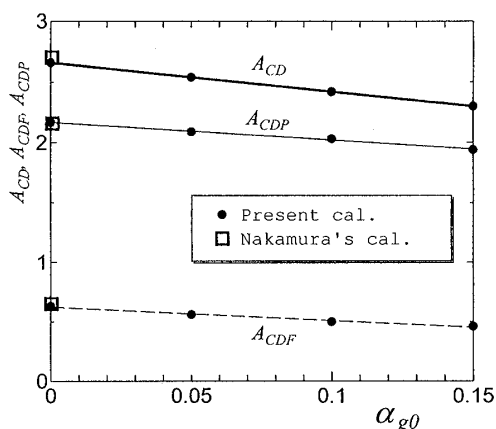


Fig. 8 Relation between amplitude of drag coefficients and α_{g0} ($Re = 100, K = 6$)

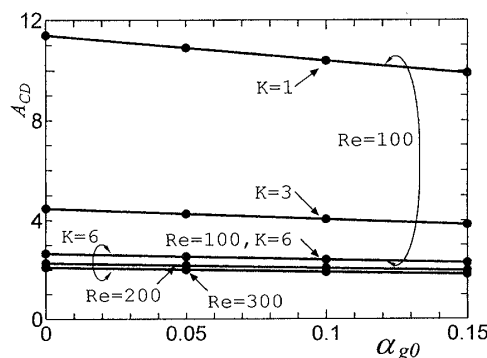


Fig. 9 Effect of Re and K on relation between A_{CD} and α_{g0}

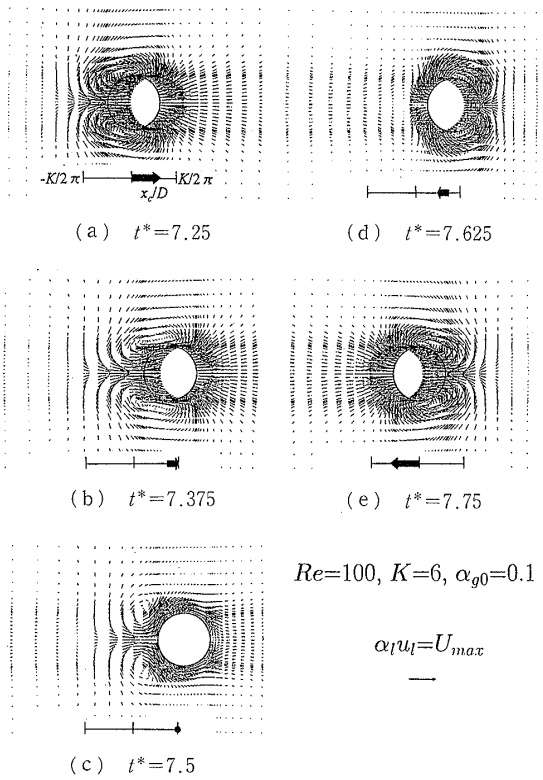


Fig. 10 Time variation of volumetric velocity of liquid-phase $\alpha_l u_l$

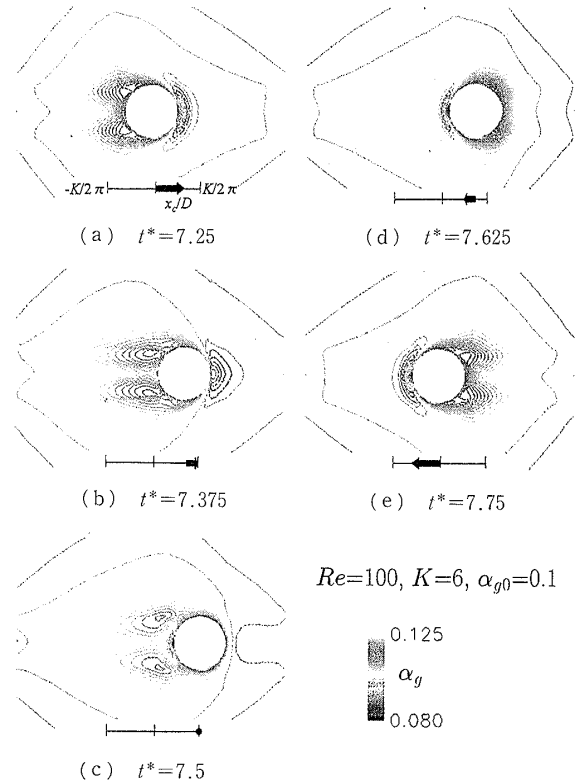


Fig. 12 Time variation of volumetric fraction of gas-phase α_g

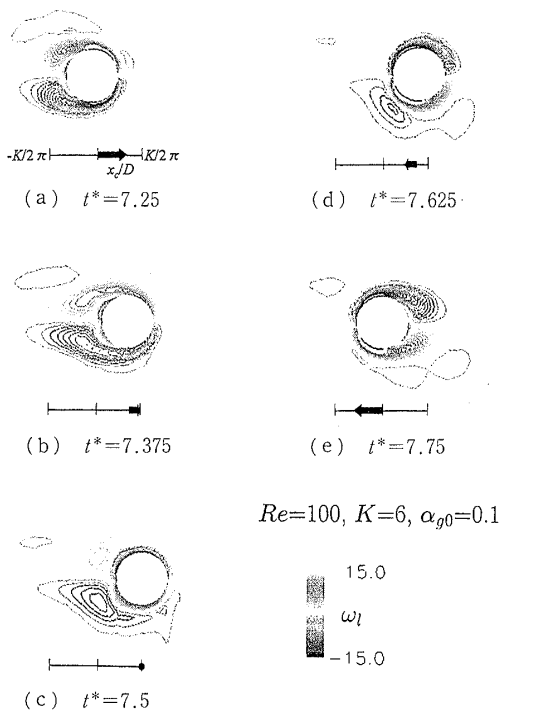


Fig. 11 Time variation of vorticity of liquid-phase ω_l

液相体積速度 $\alpha_l u_l$ の変化を図 10 に示す。円柱が振動中心を最大速度で右へ進むとき [図 10(a)], 円柱背後に双子渦を伴う後流が見られる。円柱の減速時 [図 10(b)] および瞬間静止時 [図 10(c)] には、円柱の最大振動速度 U_{max} とほぼ同じ大きさの速度をも

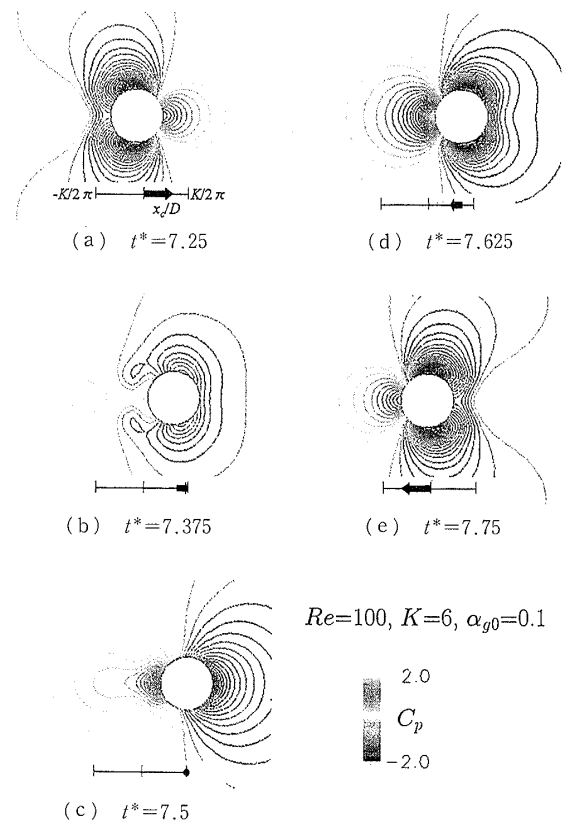


Fig. 13 Time variation of pressure coefficient C_p

つ後流が円柱に追いつき衝突する。静止時には衝突した後流が円柱に沿って前方へ進む。円柱が運動方向を左に変えて加速すると [図 10(d)], 背後に新たな双子渦が現れる。図 10(e) は, 図 10(a) の位相が反転した周期流れ場を示す。上述のような速度分布の時間履歴が図 7 に示した円柱変位に対する摩擦抗力係数 CDF の位相のずれをもたらす。また, 円柱の振動により生ずる流れは円柱近傍に限られ, 円柱進行方向に対し左右対称であることが知れる。なお, 中村ら⁽¹²⁾ の单相流解析においても類似した後流および双子渦の挙動が求められている。

図 11 は液相の渦度の変化を示す。図 11(a) では, 円柱進行方向の左右側面において, それぞれ正および負の渦度が分布する。ただし, 後方岐点近傍には逆の符号をもつ渦度が見られる。図示は省略するが, 円柱とともに振動する相対座標系のベクトル図によれば, この領域に小規模な二次渦が確認された。図 11(b) では, 円柱側面の渦度の絶対値が低下し, 後方岐点近傍の二次渦の規模が拡大する。図 11(c) では円柱表面の渦度の符号が図 11(a) に対して反転し, 表面上で渦度がほぼ均一に分布する。これは, 円柱に衝突した後流が円柱に沿って前方へ進み(図 10), 表面での速度こう配の符号が反転するためである。また, 図 11(d) および図 11(e) では渦度の絶対値が大になる。

気相体積率 α_g の変化を図 12 に示す。最大速度時 [図 12(a), (e)] および加速時 [図 12(d)] には, α_g が円柱の側面から背後にかけて高く, 前面で低い。後流が円柱に衝突する減速時 [図 12(b)] には, 円柱側面および背後の α_g が低下し, 後方岐点での局所的な低下が顕著である。衝突した後流が円柱に沿って前方に進む静止時 [図 12(c)] には, α_g は後方岐点近傍で著しく低下するが, 円柱表面のほぼ全域で高くなり, ほとんど均一に分布する。

図 12 に示した α_g の変化の原因を調べるため, 圧力分布の変化を図 13 に示す。ただし, 円柱の影響がほとんど現れない位置 ($x_1 = x_2 = -5D$) における圧力 p_0 を基準にした圧力係数 $C_p = [(p - p_0) / (\rho_l U_{\max}^2 / 2)]$ の分布である。最大速度時 [図 13(a), (e)] および加速時 [図 13(d)] には, C_p は円柱の側面から背後にかけて低く前面で高い。また, 減速時 [図 13(b)] および静止時 [図 13(c)] には, 後流が円柱に衝突したり円柱に沿って前方へ進む影響により, 後方岐点近傍で高く円柱表面のほぼ全域で低い。 α_g はこれら低圧領域で高く高圧領域で低いが(図 12), これは気相の運動が圧力こう配の影響を強く受けるため⁽⁸⁾⁻⁽¹¹⁾ である。なお, 周期変化における C_p の最大値および最小

値は円柱加速時 [図 13(d)] に現れ, この瞬間に CDP の絶対値が最大となる。このため, 円柱変位に対する CDP の位相のずれが発生する。

ただし, 上述の数値解析結果は分散相をなす気相にも円柱表面上で滑りなしの条件を課した場合の限定的なものである。なお, 滑り条件を与えた場合の解析は, 有限要素方程式の定式化法を修正することにより可能であることを付記しておく。

7. 結 言

移動境界を含む気液二相流に対する ALE 有限要素法を詳細に提案した。基礎式の導出には, 非圧縮性一圧力二流体モデルに ALE 法を適用した。解析アルゴリズムには Fractional Step 法を採用し, 定式化には重み関数に形状関数を用いる Galerkin 法を用いた。有限要素には四角形双一次要素を用い, 両相の速度と体積率およびメッシュ速度を節点で, 圧力を要素中心で定義した。ただし, 移動境界上で両相に滑りなしの条件を課した。

本解法は, 要素分割や移動境界の表現が容易という優れた形状適用性を有するため, 複雑な幾何形状からなる移動境界を含む気液二相流の解析に有効に適用できる。

また, 本解法を水平面内の静止二相流体中で単振動する円柱まわりの流れ解析に適用した。その結果, 单相流時と同様, 円柱変位に対して位相遅れを伴って周期変化する円柱抗力係数が得られた。そこで, まず单相流時の抗力係数が三次精度 GQ 法を用いた有限体積法による結果とよく一致することを確認し, 本解法の单相流解析に対する妥当性を示した。ついで, 円柱の振動と円柱まわりの二相流および抗力係数の周期的変化との関係を明らかにした。

文 献

- (1) 小川直也・原文雄, 機論, 50-459, C(1984), 2086-2093.
- (2) 小笠原昌和・原文雄, 機論, 56-526, C(1990), 1455-1461.
- (3) 村井祐一・ほか 2 名, 機講論, No.98-2(1998-11), 375-376.
- (4) Belytschko, T., ほか 2 名, *Comput. Methods. Appl. Mech. Eng.*, 33(1982), 669-688.
- (5) Hirt, C. W., ほか 2 名, *J. Comput. Phys.*, 14(1974), 227-253.
- (6) Donea, J., ほか 2 名, *Comput. Methods. Appl. Mech. Eng.*, 33(1982), 689-723.
- (7) Nomura, T., *Comput. Methods. Appl. Mech. Eng.*, 112(1994), 291-308.
- (8) 内山知実・峯村吉泰, 機論, 62-595, B(1996), 977-984.
- (9) 内山知実, 混相流, 11-2(1997), 141-150.
- (10) 内山知実・峯村吉泰, 機論, 64-618, B(1998), 420-427.

- (11) 内山知実・峯村吉泰, 機論, **65**-636, B(1999), 2611-2618.
 - (12) 中村佳朗・ほか2名, 航宇誌, **41**-469(1993), 40-47.
 - (13) Hughes, T. J. R., ほか2名, *Comput. Methods. Appl. Mech. Eng.*, **29**(1981), 329-349.
 - (14) Ishii, M., *Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two-Phase Flow*, (1975), 90-91, Eyrolles.
 - (15) Harlow, F. H. and Amsden, A. A., *J. Comput. Phys.*, **8**(1971), 197-213.
 - (16) 富山明男・松岡俊之, 機論, **61**-588, B(1995), 2833-2840.
 - (17) Thompson, J. F., ほか2名, *J. Comput. Phys.*, **15**(1974), 299-319.
-