

三次元一般曲線座標系に対する CIP 法粘性流解法*

高下和浩^{*1}, 峯村吉泰^{*2}, 内山知実^{*3}

CIP Solution Method of Navier-Stokes Equation for Three-Dimensional, Generalized Curvilinear Coordinate System

Kazuhiro KOHGE, Kiyoshi MINEMURA^{*4} and Tomomi UCHIYAMA^{*4} Nagoya University, Graduate School of Human Informatics,
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya, 464-8601 Japan

To precisely solve the Navier-Stokes equation for arbitrary and complicated boundary geometries, a CIP (Cubic Interpolated Pseudo-particle) solution method adapted to three-dimensional, generalized curvilinear coordinate systems is presented. The governing equations are implemented in a transformed space only with the contravariant velocity components, and discretized with a staggered variable arrangement. By applying the method for solving the flows in a three-dimensional cavity space, around a circular cylinder started suddenly and in 180° curved pipe, its computational accuracy is confirmed comparing with the numerical results using a pseudo spectral method, measured length of a twin vortex, measured velocity distributions and calculated results using the QUICK scheme, respectively.

Key Words: Numerical Analysis, Finite Difference Method, CIP Method, General Curvilinear Coordinate System, Cavity Flow, Circular Cylinder, Pipe Flow, Secondary Flow, Unsteady Flow

1. まえがき

任意複雑境界形状に対するナビエ・ストークス方程式を安定かつ高精度に解くため、非線形項である対流項には高次精度の差分法が用いられる。とりわけ高精度が要求される直接数値シミュレーション (DNS) では、QUICK スキーム⁽¹⁾に代表される3次精度型風上差分(4次精度中心差分と4階微分形数値粘性の和で表される)を用いた解析が良好な結果をもたらす⁽²⁾。しかし、4階微分形数値粘性が高レイノルズ数では解の精度の劣化をまねくことが本田ら⁽³⁾により指摘されており、また、この数値粘性は格子解像度に依存するので高レイノルズ数流れを精度良く解析するには必然的に格子分割数を増さなければならないが、実用的な三次元解析では格子数増加に限界がある。

スペクトル法⁽⁴⁾は、同一の格子数であれば最も精度良く解析できる方法としてDNSに適用されているが、任意複雑境界形状に対する解析は困難である。

一方、矢部らは移流方程式の解法に上流側1セル内をその節点における関数値と1階微分値を用いてエル

ミート補間し、その形状を保ったまま移流させる差分スキームとしてCIP(Cubic Interpolated Pseudo-particle)法⁽⁵⁾⁽⁶⁾を開発した。村井ら⁽⁷⁾は、CIP法により拡散項のない移流方程式の解が安定かつ高精度に得られることを示している。CIP法は、流体の圧縮・非圧縮を問わない統一解法として、近年、水蒸気爆発⁽⁸⁾や混相流解析⁽⁷⁾などにも広く適用されている。また、差分法のみならず上流化しにくい非構造格子を用いた有限要素法への適用例⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾もある。しかし、差分法や有限体積法に有効な一般曲線座標系に対するCIP法の適用となると、これまでのところ二次元解析⁽¹¹⁾⁽¹²⁾に限られ、三次元問題に適用した例はないようである。

CIP法による曲線座標系の解法では、すべての速度成分を物理空間における速度成分を用いて計算する方法⁽¹¹⁾と、計算空間に変換した支配方程式に一部物理空間速度を用いて計算する方法⁽¹²⁾が用いられているが、本解法では、すべて計算空間における反変速度成分を用いて計算し、計算空間で反変速度を移流させる。また、独立変数の格子配置には高精度を期して直交座標系で最もよく利用されているスタガード格子系を採用する。一般曲線座標系においては、座標変換により生じる係数の記憶配列が少なく離散化しやすいコロケート格子系が主として有限体積法によるSIMPLE系解法に用いられ定常流解析に適用されてきた⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾。最近に

* 原稿受付 1999年7月7日。

^{*1} 名古屋大学大学院 (〒464-8601 名古屋市千種区不老町)。^{*2} 正員, 名古屋大学大学院人間情報学研究所。^{*3} 正員, 名古屋大学情報メディア教育センタ。

E-mail: mine@info.human.nagoya-u.ac.jp

って、Zang⁽¹⁵⁾らが一般曲線座標系における差分法でコロケート格子系を採用し、矩形断面をもつ90°曲り管における解析結果がHumphreyら⁽¹⁶⁾の実験データと良く一致することを報告している。しかし、森西は、差分法においてコロケート格子系を用いた場合、運動量保存方程式中の圧力項の差分化で保存特性に問題があると指摘し⁽¹⁷⁾、修正アルゴリズムを提案しているが、依然としてスタガード格子系差分の方が離散的保存特性に優れている⁽¹⁸⁾ことを示している。これが、独立変数の格子配置にスタガード格子系を採用した理由である。

本解法は、三次元キャビティ流れに用いてKuら⁽²⁰⁾のスペクトル法による解析結果と同一精度の解が得られること、また、永田ら⁽²¹⁾が測定した突然出発する二次元円柱周りの流れに用いて曲線座標系への適用性を示す。さらに、180°曲り円管内三次元流れに適用して秋山ら⁽²²⁾の実験データと比較し、より少ない格子数で高い精度が得られることを示す。

2. 基礎方程式

直交座標系における無次元化された三次元非圧縮粘性流の支配方程式は、次の連続の式及びナビエ・ストークス方程式で表される。

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2)$$

ここで、 u_i は x_i 方向の速度成分、 p は圧力、 Re はレイノルズ数である。

一般曲線座標系での速度成分として次のように定義される ξ_i 方向の反変速度成分 U_i を用いる。

$$U_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} u_j \quad (3)$$

このとき、式(1),(2)の物理速度成分 u_i は、 U_i を用いて次のように表せる。

$$u_i = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} U_j \quad (4)$$

物理速度成分で表された式(1),(2)を反変速度成分で表された一般曲線座標系に座標変換すると、

$$\frac{\partial J U_j}{\partial \xi_j} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial \xi_j} = U_j U_m \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \frac{\partial p}{\partial \xi_j} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_m} \frac{\partial U_i}{\partial \xi_l} \right) \quad (6)$$

ここで、 J は変換のヤコビアンである。

$$J = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right) \quad (7)$$

3. 数値解法

一般曲線座標系で表されたナビエ・ストークス式(6)にCIP法を適用するため、式(6)をベクトル表記すると、

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \xi_j} = \mathbf{g} \quad (8)$$

ここで、

$$\mathbf{f} = (U_1 \ U_2 \ U_3)^T, \quad \mathbf{g} = (g_1 \ g_2 \ g_3)^T$$

ただし、 g_i は式(6)の右辺を表す。ここで、式(6)の右辺第一項は対流項の変形による派生項であるが、桜木ら⁽¹²⁾はこれを \mathbf{g} に組み入れて計算する方法を提唱している。本論文でもこの方法を踏襲する。

式(8)を ξ_i で微分すると次式を得る。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \xi_i} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \xi_i} - \frac{\partial U_j}{\partial \xi_i} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \xi_j} \quad (9)$$

CIP法では、式(8),(9)を移流フェーズと非移流フェーズに分けて解く、すなわち、移流フェーズは

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \xi_j} = 0 \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \xi_i} = 0 \quad (11)$$

非移流フェーズは、

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \mathbf{g} \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \xi_i} \right) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \xi_i} - \frac{\partial U_j}{\partial \xi_i} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \xi_j} \quad (13)$$

これら非保存形方程式に対しては、移流フェーズを先に解き非移流フェーズを後に解く方が保存性に優れている⁽²³⁾ので、本解法でも移流フェーズを先に解く。

計算手順は、時刻 $n\Delta t$ における移流フェーズ式(10),(11)に対し、計算空間における格子点の反変速度 U_i^n の正負から上流側を判断し、上流側セルのエルミート補間式⁽⁶⁾を求め、 Δt 後に格子点に移動してくる上流側セルのエルミート補間式から中間速度 U_i^* と中間速度の微分値 $\partial U_i^*/\partial \xi_j$ を得る。次に、非移流フェーズ式(12)を新しい時刻 $(n+1)\Delta t$ での反変速度 U_i^{n+1} が連続の式(5)を満たすようにFS(Fractional Step)法で解き、その結果と中間速度 U_i^* および中間速度の微分値 $\partial U_i^*/\partial \xi_j$ を用いて式(13)から新しい時刻での速度の微分値 $\partial U_i^{n+1}/\partial \xi_j$ を得る。

物理空間における格子点の値が決まれば式(6)の右辺に現れる座標変換に伴う係数は定数である。本解法ではスタガード格子系を用い、上記のように計算に用い

る速度成分を全て反変速度を用いて計算空間で行うため、時間進行中の計算で物理速度・反変速度間の変換は必要なく、境界条件も与えやすい利点がある。また、解法に FS 法を用いているので、圧力に関するポアソン方程式を解く際の境界条件としては、固定壁に対する法線方向の圧力勾配が 0 となる⁽¹⁹⁾。

4. 三次元キャビティ流れの解析

閉じた空間内の三次元キャビティ流れでは、質量保存が満たされ、境界条件も確定的であるから、各種解法やスキームの代表的な検証法として利用されている。本論でも、本解法の三次元解析結果の精度検証を行うため、DNS 用として高精度と定評があるスペクトル法を用いて解析した Ku ら⁽²⁰⁾ の計算結果と比較する。

4.1 計算および境界条件 一辺が d の正立方体内の領域に対し、壁面に格子を集中させた Ku らと同一格子数 ($31 \times 31 \times 31$) の不等間隔格子を用いた。断面内の格子を図 1 に示す。壁面からの最小格子間隔は $0.00675d$ である。レイノルズ数は、 $Re(=U_0d/\nu) = 1000$ (U_0 : 壁の移動速度, ν : 動粘性係数) とし、流れがほぼ定常とみなせる無次元時間 $t(=U_0\tau/d) = 40$ (τ : 初期状態からの経過時間) までの解析を行った。また、無次元積分時間間隔を $\Delta t = 0.001$ とした。

移動壁 $y = d$ での FS 法による境界条件は、

$$u = U_0, v = w = 0, \partial p / \partial n = 0 \quad (14)$$

固定壁 $x = 0, x = d, y = 0, z = 0, z = d$ では、

$$u = v = w = 0, \partial p / \partial n = 0 \quad (15)$$

ただし、 u, v, w は x, y, z 方向の速度成分であり、 $y = d$ 平面の四辺における速度は $u = 0$ とした。また、 $\partial / \partial n$ は境界における法線方向微分である。

4.2 解析結果 本解法による無次元時間 $t = 40$ での $z/d = 0.059, 0.75$ の断面における速度ベクトルを図 2 に座標軸とともに示す。壁近傍の $z/d = 0.059$ 面では一方向の旋回のみが見られるが、より中央対称面に近い $z/d = 0.75 (= 0.25)$ の面では、主渦以外の二次渦が左

右の下部に存在する。図示を省略したが、キャビティ中央対称面 ($z/d = 0.5$) では、この二次渦がより発達する。このような状況は、Ku らが示した結果と同様である。

$z/d = 0.5$ 面における $x/d = 0.5$ 上の速度 u の分布、 $y/d = 0.5$ 上の速度 v の分布をそれぞれ図 3(a),(b) に示す。同一格子数で行われた Ku らのスペクトル法による解析結果も並記してあるが、本解法との違いはほとんど見られない。本解法の解析精度が極めて高いことから、スペクトル法の利用分野にも本解法が適用できることが知れる。

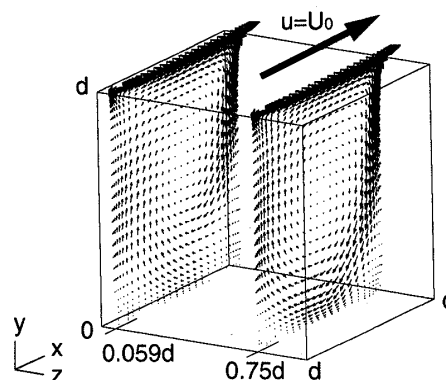
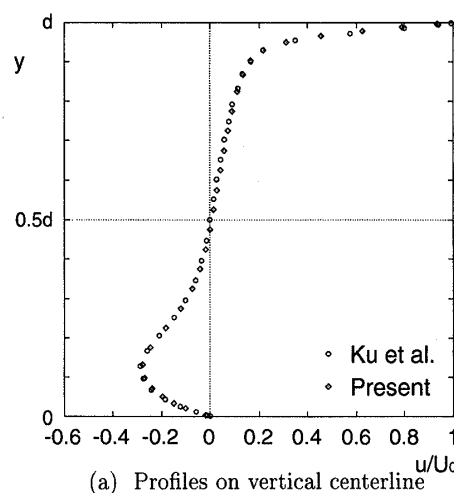
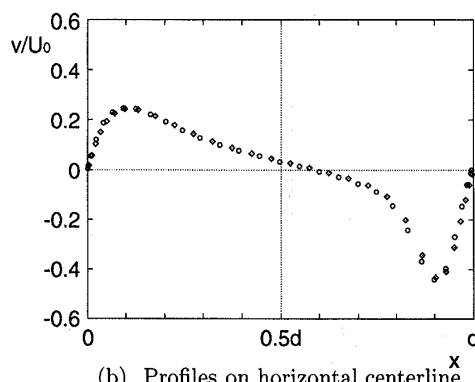


Fig. 2 Secondary flow on two sections



(a) Profiles on vertical centerline



(b) Profiles on horizontal centerline

Fig. 3 Predicted velocity profiles

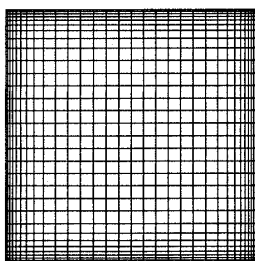


Fig. 1 Computational grid (31×31)

5. 突然出発する二次元円柱周りの流れ解析

一般曲線座標系としての適用性を調べるため、永田ら⁽²¹⁾が測定した静止流体中を突然一定速度で出発する二次元円柱周りの非定常流れと比較してみる。この流れは、初期の段階で円柱背後に対称な双子渦が観察され、これが経過時間とともに発達していく。

5.1 計算および境界条件 解析格子は、図4に示すように、円柱直径 d に対し、円柱の中心から外部境界までの距離を $25d$ とし、円周方向に120等分、半径方向には円柱上から外部境界へ等比1.03とする160分割のO型格子を用いた。円柱面からの最小格子間隔は $0.00655d$ である。レイノルズ数は、 $Re(=U_0d/\nu) = 1200$ (U_0 : 円柱の速度)で、双子渦が対称に変化することが確かめられている無次元時間 $t(=U_0\tau/d) = 4.0$ (τ : 円柱出発時からの経過時間)までの解析を行った。また、無次元積分時間間隔を $\Delta t = 0.001$ とした。

円柱上でのFS法による境界条件は、

$$u = 0, v = 0, \partial p / \partial n = 0 \quad (16)$$

外部上流半円上で、

$$u = U_0, v = 0, \partial p / \partial n = 0 \quad (17)$$

外部下流半円上では、

$$\partial u / \partial n = 0, \partial v / \partial n = 0, \partial p / \partial n = 0 \quad (18)$$

ただし、速度成分は円柱からの相対速度である。

5.2 計算結果と測定値との比較 一例として、 $t = 2.9$ における計算結果から速度ベクトルを図5に、流線を図6に示す。円柱は、図では左方へ突然動き出すが、この円柱の背後に、時間経過とともに対称な大きな双子渦が発達し、円柱面近傍では二対の小さい渦も見られる。これらの渦の大きさと形状、速度場の様子は永田らの観測写真をよく表している。

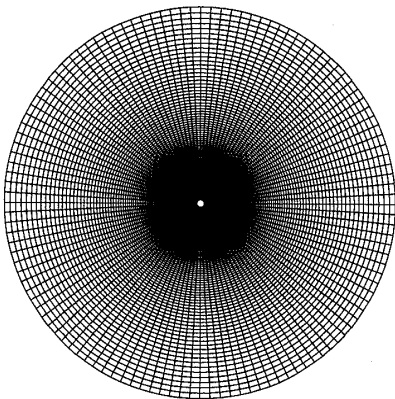


Fig. 4 Computational grid (120×161)

無次元時間間隔 $\Delta t = 0.4$ ごとに求めた大きな双子渦の長さ L を円柱直径で割った無次元長さ L/d は図7の◇印のようになり、 L/d が t にほぼ比例して増す。この図には、永田らの測定値を実線で示してあるが、測定値は本計算結果とよく一致しており、逆流を伴う非定常流にも本解法が正確に適用できることがわかる。

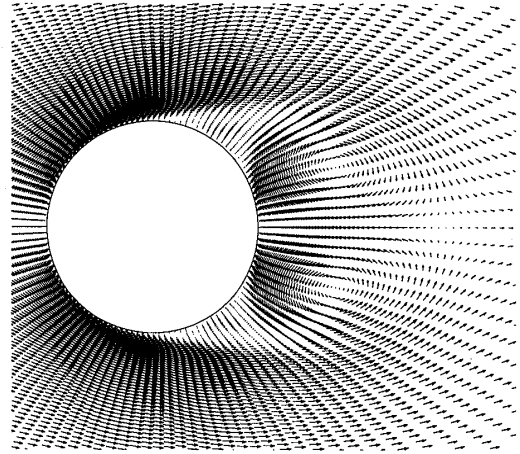


Fig. 5 Predicted flow velocity vectors at $t=2.9$

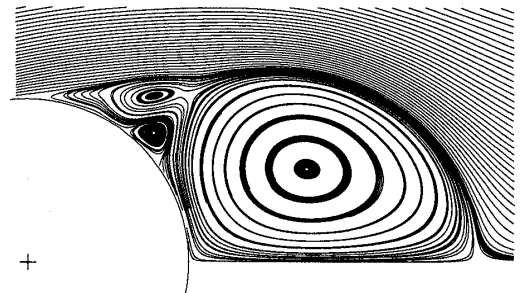


Fig. 6 Predicted streamlines behind circular cylinder at $t=2.9$

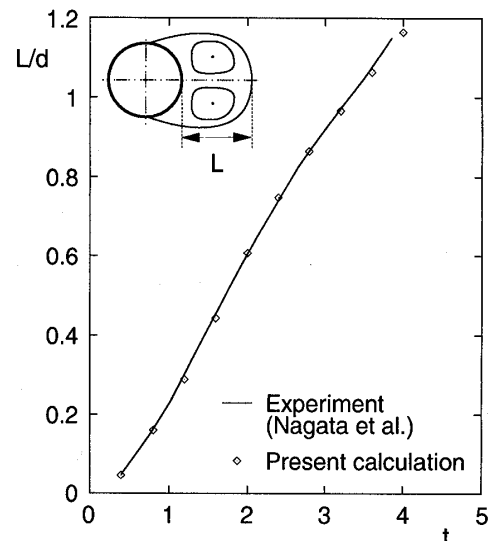


Fig. 7 Length of a twin vortex

6. 180° 曲り円管内流れの解析

三次元一般曲線座標系での本解法の適用性を調べるため、秋山ら⁽²²⁾の曲り円管内層流の測定結果と比較を行う。曲り円管内流れは、流路の曲りによる遠心力により主流速度の最大値が外周壁側に移動して二次流れが生じる、複雑な三次元流れである。

6.1 計算および境界条件 図8に示す半径 a 、管軸中心線の曲率半径 $R_c (= 9a)$ の180°曲り円管の両端に、長さ $20a$ で半径 a の直円管が連結されたU字型の円管内を解析領域とした。断面内の計算格子は、図9に示すように、管壁に格子を集中させるように格子間隔を制御し、表1に示す4種の格子を用いた。レイノルズ数は $Re (= 2aU_m/\nu) = 1000$ (U_m : 平均流入速度)、ディーン数 $De (= Re\sqrt{a/R_c}) = 333$ とした。積算時間は流れがほぼ定常とみなせる無次元時間 $t (= U_m\tau/2a) = 40$ (τ : 初期状態からの経過時間) までとし、無次元積分時間間隔を $\Delta t = 0.001$ とした。

Table 1 Computational grids

case	section	streamwise direction	minimal distance from wall
A	21×21	57	0.01704a
B	27×27	57	0.01214a
C	33×33	57	0.01031a
D	27×27	113	0.01214a

境界条件は、管入口で

$$\text{ポアゼイユ流 (平均流入速度 } U_m) \quad (19)$$

管出口では管軸方向に流れが変化しないと仮定して、

$$\partial u/\partial n = \partial v/\partial n = \partial w/\partial n = 0, \quad \partial p/\partial n = 0 \quad (20)$$

管壁上では、FS法による境界条件を用いる。

$$u = v = w = 0, \quad \partial p/\partial n = 0 \quad (21)$$

円管の各断面に対する初期速度として、入口境界条件と同じ平均流入速度 U_m のポアゼイユ流を与え、初期圧力は全領域で0とした。

6.2 計算結果 表1に示す4種の計算格子を用いた計算結果には実質的な差は見られなかったので、ここでは、Bの結果を用いて示す。

図10は、定常解が得られる無次元時間 $t = 40$ における6断面(曲り角 $\theta = 0^\circ, 22.5^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 180^\circ$, 円管出口)に対し、水平面上 (η 軸上) および鉛直面上 (ζ 軸上) における主流速度分布を秋山らの実験データ (上流の直管部の長さ L は $L/a = 167$) と共に示してある。ただし、 $\theta = 0^\circ$ に表示してある測定値は、 0° のものではなく十分発達した直管部における測定値である。秋山らの鉛

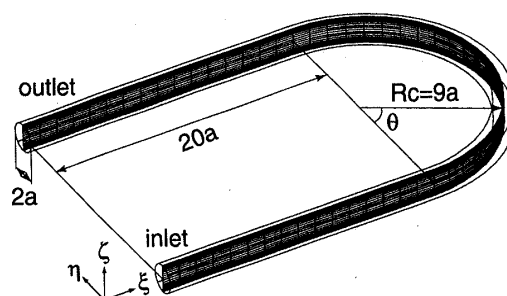


Fig. 8 Geometry of 180° curved pipe

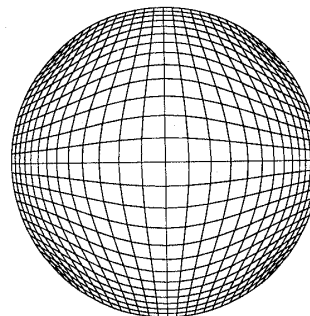


Fig. 9 Computational grid on cross section (27×27)

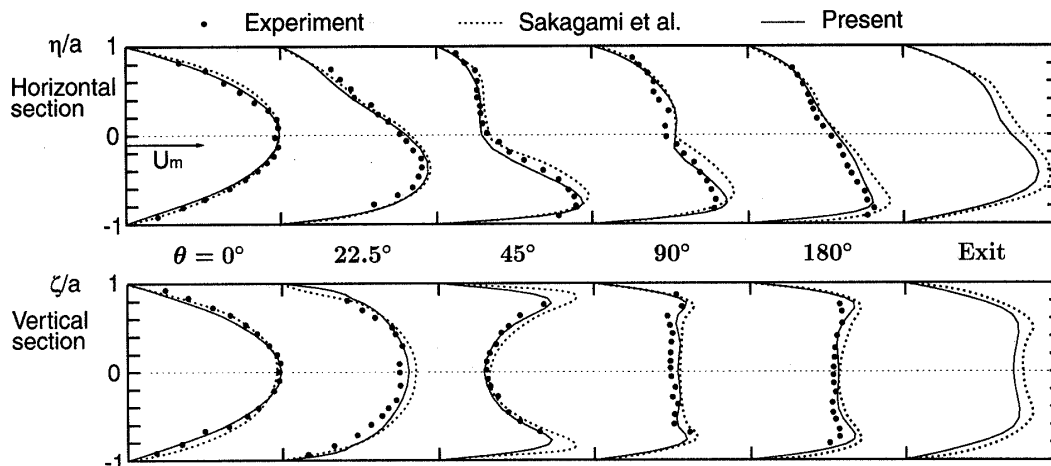


Fig. 10 Comparison of predicted and measured streamwise velocity profiles

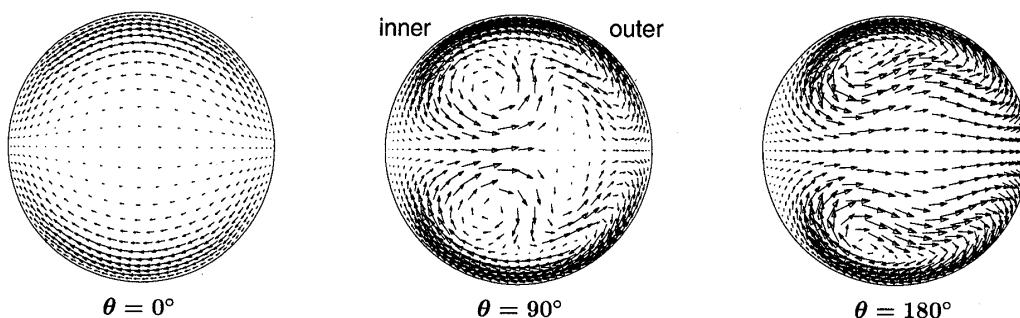


Fig. 11 Secondary flow in cross sections

直面上の測定値に見られる非対称性を考慮すると、本解析値は測定値をよく表しているといえる。図10には、図8と同一の解析領域に対して対流項の離散化に3次精度のQUICKスキームを用い、離散化には修正スタガード格子(物理速度成分を座標格子点上で、圧力と反変速度成分をスタガード格子で離散化)を用いるSMAC法による坂上ら⁽²⁾の計算結果(格子数は表1のCと同一)も並記してあるが、曲り管路部では主流速度分布が全体的に測定値より過大になっている。本解析法では、格子数がさらに少ない場合(表1のA)でも同一の結果が得られることから、本解析により高精度の解が得られ、この程度の Re 数流れに対しては格子数をかなり減じても満足いく解が得られることが知れる。

図11は、無次元時間 $t = 40$ における曲り角 $\theta = 0^\circ$, 90° , 180° の各断面における二次流れ速度ベクトルを示す。坂上らと同じ結果が得られ、流路曲りの遠心力により、上下対称な渦が発達する状況が確認できる。

7. 結論

一般曲線座標系に対するナビエ・ストークス式のCIP解法として、計算空間で反変速度を移流させ、スタガード格子系を用いる数値解法を示し、3種の流れの解析に適用した。一つは、三次元キャビティ内流れであり、スペクトル法による同一格子数の計算結果と良く一致した。また、突然出発する二次元円柱周りの流れを計算し、円柱背後に発生し時間発展する双子渦の大きさが測定値とよく一致することから、本解法は逆流を伴う非定常問題の解析にも有効であることを確かめた。さらに、 180° 曲り円管内流れに適用して、定常状態における管軸方向の水平・鉛直断面における主流速度と円管断面の二次流れが測定値とかなり良く一致し、QUICKスキームを用いた計算結果よりも格子数の少ない本解法の結果が測定値に近く、三次元の複雑境界形状を有する流れの解析に数値的に安定した高精度の解が得られることを確かめた。

文 献

- (1) Leonard, B. P., *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **19** (1979), 59-98.
- (2) 坂上正治・梅垣菊男・三木一克, 機論, **57-540** (1991), 2776-2783.
- (3) 本田逸郎・丹野雅之・大庭英樹, 機論, **60-578** (1994), 3287-3291.
- (4) Canuto, C., ほか3名, *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, New York (1988).
- (5) Yabe, T. and Aoki, T., *Comput. Phys. Comm.*, **66** (1991), 219-232.
- (6) Yabe, T., ほか5名, *Comput. Phys. Comm.*, **66** (1991), 233-242.
- (7) 村井祐一・松本洋一郎, 第8回数値流体力学シンポジウム講演論文集, (1994), 587-590.
- (8) Yabe, T. and Xiao, F., *Nucl. Eng. & Design*, **155** (1995), 45-53.
- (9) 井出康之・登坂宣好, 機論, **62-597** (1996), 1679-1684.
- (10) 榎原孝文・棚橋隆彦・松本昌昭, 機論, **63-609** (1997), 1612-1619.
- (11) Wang, P. Y., Yabe, T. and Aoki, T., *J. Phys. Soc. Jpn.*, **62-6** (1993), 1865-1871.
- (12) 桜木卓也・石井克哉・安達静子, 機論, **61-583** (1995), 918-925.
- (13) Rhie, C. M. and Chow, W. L., *AIAA J*, **21-11** (1983), 1525-1532.
- (14) Peric, M., Kessler, R. and Scheuerer, G., *Comput. Fluids*, **16** (1988), 389-403.
- (15) Zang, Y., Street, R. L. and Koseff, J. R., *J. Comput. Phys.*, **114** (1994), 18-33.
- (16) Humphrey, J. A. C., Taylor, A. M. K. and Whitelaw, J. H., *J. Fluid Mech.*, **83(3)** (1977), 509-527.
- (17) 森西洋平, 機論, **62-604** (1996), 4098-4105.
- (18) 森西洋平, 機論, **65-630** (1999), 505-512.
- (19) Peyret, R. and Taylor, T. D., *Computational Methods for Fluid Flow*, Springer-Verlag, New York (1983), 160-162.
- (20) Ku, H. C., Hirsh, R. S. and Taylor, T. D., *J. Comput. Phys.*, **70** (1987), 439-462.
- (21) 永田拓・船田英明・松井辰彌, 機論, **51-463** (1985), 748-755.
- (22) 秋山光庸・ほか4名, 機論, **50-449** (1984), 286-292.
- (23) 矢部孝, ながれ, **15** (1996), 367-375.