

近臨界混合表面液ジェットの安定性理論*

梅 村 章*¹

Stability Theory on a Circular Jet with Near-Critical Mixing Surface

Akira UMEMURA*²*² Department of Aerospace Engineering, Nagoya University,
Furocho, Chigusa-ku, Nagoya-shi, Aichi, 464-8603 Japan

The stability of a circular liquid jet with near-critical mixing surface is analyzed in the framework of inviscid linear stability theory. The phase equilibrium condition results in vanishing small surface tension and surface density difference at high pressures. Because of very low mass diffusivity, the density changes only in the vicinity of the near-critical mixing surface. The analysis shows that the small surface density difference enhances the instability to a great degree, coupling with the effects of gas-phase velocity boundary layer flow and baroclinic vorticity production.

Key Words: Linear Stability Theory, Liquid Jet, Near-Critical Mixing Surface, High Pressure, Atomization

1. はじめに

燃料の臨界点を越えた圧力と温度をもった雰囲気の中に液体燃料を噴射すると、条件によって、噴射液の表面は臨界混合状態に近い状態になる。このような条件で起きる液体の微粒化は低圧時のもの⁽¹⁾⁽²⁾と異なると予想されるが、その詳細は定かでない。著者は、以前に近臨界表面をもった噴射液の不安定性の極大化を予想し⁽³⁾、その後、微小重力実験によって比較的小さな噴射速度でも低圧時の高速噴射と同様の微粒化が起きることを確認して⁽⁴⁾、理論的考察⁽⁵⁾を加えている。それにより、近臨界表面液ジェットの強い不安定性をもたらす原因として、表面張力の低下とともに表面近傍での密度変化の重要性が浮かび上がってきた。本論文では、前論文⁽⁵⁾で十分記述できなかった安定性理論について詳しく述べ、近臨界表面をもった液体ジェットの不安定性の特徴を明確にする。

本研究で対象にする近臨界表面液ジェットと同様に、勢力学状態が噴射液の微粒化に強く影響する他の

例に突沸現象がある。低圧では飽和曲線とスピノイダル曲線⁽⁶⁾の間隔が大きく、液体は比較的容易に過加熱状態に入ることができる。この熱力学的に不安定な状態を利用して液体を微細化する技術が液滴の微小爆発⁽⁷⁾や減圧沸騰微粒化技術⁽⁸⁾として利用されているが、この技術は、高圧雰囲気中に噴射した液体では、限界の過加熱度が小さくなる(臨界状態で零)ため有効でなくなる。したがって、本研究で対象にする噴射液は熱力学的に安定な状態にあるものとする。

2. 線形安定性解析

2・1 基礎流 表面が臨界混合状態に近い状態にある液体ジェットの不安定性を調べるために、従来の線形安定性解析⁽⁹⁾にならって、下記の時間発展形のモデル流れを考える。

無限に広がった静止不活性気体(密度 ρ_∞)の中に、同じ温度をもち(解析の見通しをよくするための仮定で、この仮定を外しても本質的な違いは生じない)、一様な軸速度 V で流れている、半径 a の円柱状の液体燃料(密度 ρ_{*0})を配置したとする。このときにつくられる層流の流れは、初期を除いて、等温等圧的に発達すると考えてよいであろう。液柱は無限に長いとして、流れの特性量は軸座標 z に独立であり、液

* 原稿受付 2001年6月20日。

*¹ 正員, 名古屋大学大学院工学研究科(〒464-8603 名古屋千種区不老町)。

E-mail: akira@nuae.nagoya-u.ac.jp

相と気相の軸速度 w_0 は、動径座標 r と時間の関数として表現される。また、気液界面 $r=a$ で相平衡条件が成り立つように燃料と不活性ガスの相互拡散が起きる。ここで注意しなければいけないのは、混合系の熱伝導率や粘性係数が臨界点で特異な挙動を示さないのに対して、拡散係数は近臨界混合状態で非常に小さな値を取る⁽¹⁰⁾ ことである。このため、組成、したがって、密度の変化の起きる領域は、表面近くの薄い層内に限定される⁽¹¹⁾⁽¹²⁾。すなわち、考えている流れでは、密度が急激に変化する薄い濃度境界層と、その両側の密度変化のないバルクな領域に分割することができる(図1)。密度の変化に伴って、濃度境界層には、連続の式を満たすように、半径方向の速度が誘起される。

2・2 バルク領域のじょう乱方程式の誘導 上述の基礎流の線形安定性解析を行う。不安定波の特性時間は a/V であり、基礎流の特性時間に比べて十分短いとする。この場合には、各時刻で基礎流を凍結して動径座標 r だけの関数であるとみなし、その時々の流れの安定性を粘性、伝導、拡散の効きを無視して調べることができる。そこで、以下、時間 t はじょう乱波の時間発展を記述するためだけに用いる。

基礎流に重畳した微小じょう乱波(波数 k 、複素数位相速度 $c=c_r+ic_i$)の時間発展を支配する微分方程式をバルク領域に対して導く。そのために密度 ρ 、圧力 p 、半径速度 u 、軸速度 w を基礎流成分(下添字0をつけて表示)とじょう乱(プライムをつけて表示)の和に表して

$$\rho = \rho_0(r) + \rho', \rho' = R(r)e^{ik(z-ct)} + c.c. \dots (1\cdot a)$$

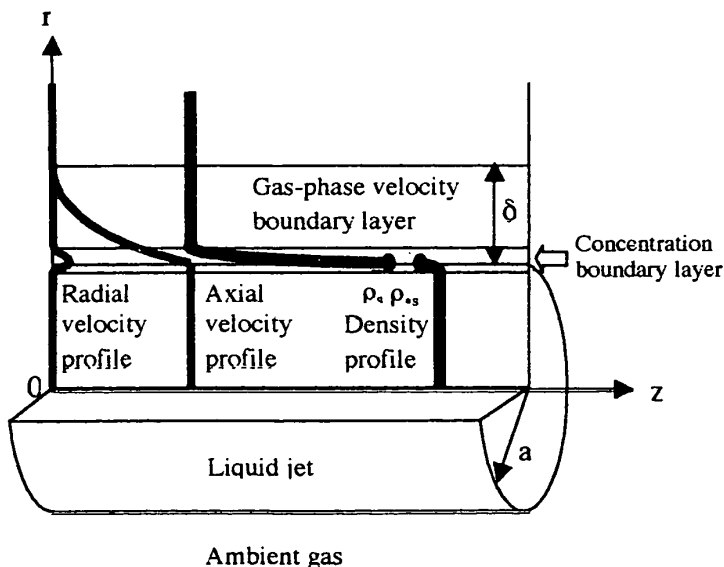


Fig. 1 Basic flow configuration

$$p = p_0(r) + p', p' = P(r)e^{ik(z-ct)} + c.c. \dots (1\cdot b)$$

$$u = u', u' = U(r)e^{ik(z-ct)} + c.c. \dots (1\cdot c)$$

$$w = w_0(r) + w', w' = W(r)e^{ik(z-ct)} + c.c. \dots (1\cdot d)$$

と置く。ここに R, P, U, W はじょう乱密度、圧力、動径速度、軸速度の複素振幅を表し、 $c.c.$ は共役複素数を意味する。連続の式と運動方程式は次のようになる。

$$ik(w_0 - c)R + \rho_0 \frac{dU}{dr} + \left[\frac{\rho_0}{r} + \frac{d\rho_0}{dr} \right] U + ik\rho_0 W = 0 \dots (2)$$

$$ik(w_0 - c)\rho_0 U = -\frac{dP}{dr} \dots (3)$$

$$ik(w_0 - c)\rho_0 W + \rho_0 \frac{dw_0}{dr} U = -ikP \dots (4)$$

式(3)と式(4)より U と W を P を用いて表現できる。

$$U = -\frac{\frac{dP}{dr}}{ik(w_0 - c)\rho_0} \dots (5)$$

$$W = \frac{\frac{dw_0}{dr} \frac{dP}{dr} - ikP}{ik(w_0 - c)\rho_0} \dots (6)$$

これらを式(2)に代入して U と W を消去すると、

$$-k^2(w_0 - c)^2 R - \frac{d^2 P}{dr^2} + \frac{2 \frac{dw_0}{dr} \frac{dP}{dr}}{(w_0 - c)} - \frac{1}{r} \frac{dP}{dr} + k^2 P = 0 \dots (7)$$

が導かれる。ここで、短時間に起きるじょう乱圧力とじょう乱密度の変化が等エントロピー的であるとすると、 S を音速として $R = P/S^2$ である。考えている流れの速度は音速に比べて十分小さいから、式(7)で左辺の第1項は無視してかまわない。したがって、

$$\frac{d^2 P}{dr^2} - \left[\frac{2 \frac{dw_0}{dr}}{(w_0 - c)} - \frac{1}{r} \right] \frac{dP}{dr} - k^2 P = 0 \dots (8)$$

が求める方程式となる。この式は、液相と気相のそれぞれにおいて成り立たなければならない。明らかに

$$\frac{dP}{dr}(r=0) = P(r=\infty) = 0 \dots (9)$$

を満たさなければならない。

式(8)は

$$\Pi = \frac{dP}{dr} \dots (10)$$

と置いて

$$\frac{d\Pi}{dr} + \Pi^2 - \left[\frac{dw_0}{dr} - \frac{1}{r} \right] \Pi - k^2 = 0 \dots (11)$$

と変形しておく計算に便利である。対応して条件

(9)は

$$\Pi(r=0)=0, \Pi(r=\infty)=-k \dots\dots\dots (12)$$

と書き換えられる。最後の条件は、方程式(8)の解が遠方で $P \sim \exp(-kr)$ となることによる。

2.3 濃度境界層の特性化 噴射液の表面近くに行ける濃度境界層は液柱半径に比べて非常に薄いので、濃度境界層内の流れは、その外側の流れを通してしか液柱の曲率の影響を受けない。液相側と気相側の濃度境界層の厚みをそれぞれ ϵ_* および ϵ とする。燃料濃度 Y の変化に伴う密度の変化によって半径方向の速度

$$u_0 = - \int_{a-\epsilon_*}^r \frac{\rho_Y}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \rho D \frac{\partial Y}{\partial r} dr \dots\dots\dots (13)$$

が誘導される。ここに D は拡散係数、 ρ_Y は、温度と圧力を一定に保って燃料濃度 Y を変化させたときの密度の変化率を表す。変数 ρ, ρ_Y, D を定数とみなして積分した式からわかるように、 u_0 は、濃度境界層内だけで正の値を取る山形の分布になり、最大値は濃度境界層の厚みに反比例する。

濃度境界層内の流れに対して、式(1. c)の代わりに

$$u = u_0(r) + u', \quad u' = Ue^{ik(z-ct)} + c.c. \dots\dots\dots (14)$$

と置く。 ϵ と ϵ_* が小さいことより、各濃度境界層を横断して、半径方向の質量流速 $\rho_0 u' + \rho' u_0$ と運動量流速 $(2\rho_0 u' + \rho' u_0)u_0 + p'$ が一定であることがわかる。これよりバルク領域のじょう乱方程式の解と表面値を結びつける関係式が以下のように導ける。

濃度境界層の外縁で $u_0=0$ となることに注意しよう。また、以下、下添字 s によって液柱表面 $r=a$ での評価値を表すことにする。

じょう乱量の表式(1. a), (1. b)と式(14)を用いると、気相の濃度境界層の質量流束に対して

$$\begin{aligned} \rho_0 U + u_0 R &= \rho_s U_s + u_{0s} R_s \\ &= \rho_0(r=a+\epsilon)U(r=a+\epsilon) \\ &= - \frac{\frac{dP}{dr}(r=a+\epsilon)}{ik[w_0(r=a+\epsilon)-c]} \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

が成り立つ [最後の表現は式(5)による]。ここで流速 u_0 は、局所的に大きな値を取るとしても、音速に比べれば十分小さいから、じょう乱密度 R の寄与は無視できる。したがって、

$$\rho_s U_s = - \frac{\frac{dP}{dr}(r=a+\epsilon)}{ik[w_0(r=a+\epsilon)-c]} \dots\dots\dots (16)$$

同様に、液相に対しても

$$\rho_{*s} U_{*s} = - \frac{\frac{dP_*}{dr}(r=a-\epsilon_*)}{ik[w_{*0}(r=a-\epsilon_*)-c]} \dots\dots\dots (17)$$

を得る(下添字*で液相の量を表す)。他方、気相側の濃度境界層の運動量流束の保存関係式

$$(2\rho_0 U + R u_0)u_0 + P = P(r=a+\epsilon) \dots\dots\dots (18)$$

において、上と同じ理由によってじょう乱密度の寄与を無視すると

$$2\rho_s u_{0s} U_s + P_s = P(r=a+\epsilon) \dots\dots\dots (19)$$

となるから、式(16)を用いて

$$\begin{aligned} P_s &= P(r=a+\epsilon) \\ &+ \frac{2u_{0s} \frac{dP}{dr}(r=a+\epsilon)}{ik\rho_0(r=a+\epsilon)[w_0(r=a+\epsilon)-c]} \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

を得る。同様に

$$P_{*s} = P_*(r=a-\epsilon_*) + \frac{2u_{*0s} \frac{dP_*}{dr}(r=a-\epsilon_*)}{ik[w_{*0}(r=a-\epsilon_*)-c]} \dots\dots\dots (21)$$

基礎流の軸速度 w_0 は滑らかな連続関数であるから、薄い濃度境界層内での変化は無視できる。したがって、

$$w_s = w_0(r=a+\epsilon) = w_{*0}(r=a-\epsilon_*) \dots\dots\dots (22)$$

である。

2.4 界面条件式 半径方向の表面変位 d を実数 Δ を用いて

$$d = \Delta e^{ik(z-ct)} + c.c. \dots\dots\dots (23)$$

と表す。基礎流の密度変化は、液体燃料の蒸発と周囲気体の液柱への溶解によってもたらされるが、短時間に起きる界面の変位に対してそのような拡散現象が有意に効くことはない。したがって、界面の運動学条件式において、じょう乱成分を取ったときの蒸発量は零となる。すなわち、表面での液体と気体の半径方向速度は表面の移動速度に等しく

$$ik(w_s - c)\Delta = U_s = U_{*s} \dots\dots\dots (24)$$

が成立しなければいけない。また、表面で満たされるべき力学条件は、表面張力を σ で表すと、粘性の寄与を無視して⁽³⁾

$$P_{*s} - P_s = -\sigma \left(\frac{1}{a^2} - k^2 \right) \Delta \dots\dots\dots (25)$$

となる。

式(16)と式(17)を式(24)に代入して、式(22)を考慮すると

$$\begin{aligned} ik(w_s - c)\Delta &= - \frac{\frac{dP}{dr}(r=a+\epsilon)}{ik\rho_s(w_s - c)} \\ &= - \frac{\frac{dP_*}{dr}(r=a-\epsilon_*)}{ik\rho_{*s}(w_s - c)} \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

を得るから、式(25)の両辺を $ik(w_s - c)\Delta$ で割った式に式(10), (20), (21)を適用して次式が導かれる。

$$\frac{\rho_{*s}}{\Pi_{*s}} - \frac{\rho_s}{\Pi_s} + \frac{2(\rho_{*s} - \rho_s)u_s}{ik(w_s - c)} = \frac{\sigma}{(w_s - c)^2} \left(1 - \frac{1}{k^2 a^2}\right) \dots\dots\dots (27)$$

これは、2・2節で導いた方程式(11)に対して、界面で満たすべき条件を与える。特に、表面が存在しない超臨界状態では $\sigma=0$ かつ $\rho_s = \rho_{*s}$ であるから、条件式(27)は関数 Π の連続条件 $\Pi_s = \Pi_{*s}$ になる。

式(27)左辺第3項の存在は、臨界表面に特有な超圧縮性⁽⁶⁾と関連して新しい不安定をもたらす可能性があるが、本研究で対象にしている流れに対してはさほど意味のあるものとはならない。実際、その項の分子は、 u_s が大きな値を取る高压では表面密度差が小さく、また、表面密度差が大きな値を取る低压では u_s が小さな値を取るため、結局、いずれの場合にも小さな値を取ると予想されるからである。さらに、噴射速度に比べて蒸発速度が大きい場合には、噴射液が短距離で消失するから、本論文で考えているような軸方向の変化が小さな流れにならない。このため、以下においては $u_{0s}/V \ll 1$ と仮定し、第3項を省略した

$$\frac{\rho_{*s}}{\Pi_{*s}} - \frac{\rho_s}{\Pi_s} = \frac{\sigma}{(w_s - c)^2} \left(1 - \frac{1}{k^2 a^2}\right) \dots\dots\dots (28)$$

を考えていくことにする。

不安定波の増幅率 α は、方程式系(11)、(12)、(28)の固有値として複素位相速度 $c = c_r + ic_i$ を波数 k の関数として定めることより

$$\alpha = k|c_i| \dots\dots\dots (29)$$

によって算出される。

最終的に導かれたじょう乱波の支配方程式系において、基礎流の密度は界面条件式(28)の中にしか現れていない点に注意しよう。このことより、近臨界表面液ジェットの不安定性は、基礎流の軸速度分布のほかに、表面での気液密度比 ρ_s/ρ_{*s} とウェーバ数 $We = \rho_{*s} V^2 a / \sigma$ によって完全に特性づけられることがわかる。

2・5 モデル解析

基礎流の軸速度分布 w_0 を知るには基礎流を数値的に解かなければならない。ここでは、 w_0 を適当なモデル式で表現して、近臨界表面液ジェットの不安定性の特徴を調べることにする。界面でのせん断応力の釣合いを考えてわかるように、雰囲気に比べて密度と粘性係数の大きな液柱の内部の軸速度 w_0 は一様であると考えてよい。したがって、液相の解は、変形されたベッセル関数(第1種 I 、第2種 K)を用いて $\Pi_* = kI_1(kr)/I_0(kr)$ で与えられる。気相の速度境界層の厚みを δ とする。その外側 ($r > a + \delta$) では $\Pi = -kK_1(kr)/K_0(kr)$ となる。

気相の速度境界層が不安定性に及ぼす影響を見るに

は、 $r - a = \delta \hat{x}$ によって伸張座標 \hat{x} を導入して、

$$\hat{\Pi} = \Pi a \dots\dots\dots (30 \cdot a)$$

$$\hat{k} = ka \dots\dots\dots (30 \cdot b)$$

と置くとよい。このとき支配方程式は

$$\frac{a}{\delta} \frac{d\hat{\Pi}}{d\hat{x}} + \hat{\Pi}^2 - \left(\frac{2}{w_0 - c} \frac{dw_0}{d\hat{x}} \frac{a}{\delta} - \frac{a}{a + \delta \hat{x}} \right) \hat{\Pi} - \hat{k}^2 = 0 \dots\dots\dots (31)$$

$$\hat{\Pi}(\hat{x} = 1) = - \frac{\hat{k} K_1 \left[\hat{k} \left(1 + \frac{\delta}{a} \right) \right]}{K_0 \left[\hat{k} \left(1 + \frac{\delta}{a} \right) \right]} \dots\dots\dots (32)$$

$$\frac{1}{\hat{k}} \frac{I_0(\hat{k})}{I_1(\hat{k})} - \frac{\rho_s}{\Pi_s} = \frac{\rho_{*0}}{\rho_{*s}} \frac{\sigma}{\rho_{*0} V^2 a} \frac{1}{(\hat{w}_{0s} - \hat{c})^2} \times \left[1 - \frac{1}{\hat{k}^2} \right] \dots\dots\dots (33)$$

となる。ただしここに w_{0s} と c を噴射速度 V で無次元化して \hat{w}_{0s} と \hat{c} で表している。 $\delta/a \ll 1$ の場合に式(31)、(32)の解が $\hat{\Pi} = -\hat{k}[K_1(\hat{k})/K_0(\hat{k})](\hat{w}_{0s}/\hat{c}^2 - 1)^2$ となるのは見やすい。これを式(33)に代入すると、 c に対する二次方程式が導かれ、その解は $ka \rightarrow \infty$ の極限でテーラーの解⁽¹³⁾に一致することがわかる。他方、 $a/\delta \ll 1$ の場合にはせん断層の効果が消えてレイリーの解⁽⁹⁾が得られる。

2・6 計算結果

表面が臨界状態に近づくと、表面張力が低下するので、ウェーバ数が増大して、流体力学的な寄与が強まるのは想像に難くない。しかし、微小重力実験結果⁽²⁾によれば、比較的小さなウェーバ数(表面張力の低下に対応してジェット径を微細にして10以下の値を実現している)でも、短い波長で液柱の分断が起きており、別の要因(表面密度比の効果)も強く効いていると予想される。そこで、この点を確認するために、ウェーバ数10の場合を取り上げて、方程式系(31)~(33)を数値的に解いて近臨界表面液ジェットの不安定性を調べた。

2・6・1 表面密度比と気相速度境界層の影響

式(33)より表面状態の影響は、左辺第2項の密度比と右辺の表面張力を通して現れることがわかる。はじめに、ウェーバ数を10に固定して、気相速度境界層の軸速度分布を二次関数 $w_0 = V(1 - \hat{x}^2)$ で近似し、表面密度比の効果を見るための計算を行った。

表面密度比 ρ_s/ρ_{*s} をパラメータに取って、気相境界層厚みが最大増幅率 α_{max} と波数 k_{max} および位相速度 $c_{r,max}$ に及ぼす影響を計算した結果を図2に示す。表面密度比の値にかかわらず、境界層が薄くなるに従って、レイリーの解(増幅率と波数が小さい)からテーラーの解(増幅率と波数が大きい)に推移しているのがわ

かる。その変化の程度は、表面密度比が大きいほど大きくて、表面密度比が大きな値を取る近臨界表面液ジェットの不安定性は気相速度境界層の影響を強く受けることが知れる。これに対して、表面密度比が0.1より小さくなると、噴流の不安定性は気相の流れに独立になる。また、気液密度比0.2と0.3の波数と位相速度のグラフに不連続な飛びが現れていることからわかるように、増幅率の波数分布は、レイリー形の不安定波とテラー形の不安定波に対応する二つの波数でピ

ークをもった分布になっている。図2は、比較的小さなウェーバ数でも、表面が近臨界状態になって密度比が大きくなると、レイリー形に代わってテラー形の不安定波が支配的になって、増幅率と波数が增大することを示している。

種々の物質の飽和表⁽¹⁴⁾を見てわかるように、表面での液体密度の値は低圧から高圧まで圧力を変化させてもたかだか3倍程度までしか変わらないから、表面気液密度比の変化は主として表面近くの気体の密度変化による。そして、気相の変動圧 [$O(\rho V^2)$ の値を取る] が表面張力圧 [$O(\sigma/a)$ の値を取る] と同じ程度になれば、気相のせん断層の不安定性が液柱の変形と有効に連動するようになる。近臨界表面状態では表面近くの気体の密度が大きくなっているため、この連動が起きやすくなって強い不安定性が現れるのである。

2・6・2 表面速度の影響 実際の流れでは液相の速度は一樣でない。このことは、表面速度とコア速度との不一致として認識されるので、表面速度の影響⁽⁵⁾としてとらえることができる。本研究では、ウェーバ数と表面密度比を固定して、液柱内部の軸速度分布を $w_{*0} = w_s(r/a)^2$ 、また、気相速度境界層の流れを $w_0 = w_s(1-\bar{x})^2$ で代表させて、表面速度 w_s の影響を調べた。その結果によれば、表面速度をパラメータに取って、最大増幅波の気相速度境界層厚みに対する依存性を表したグラフは、表面速度とコア流速の差が開くと、増幅率と波数が小さくなり、図2に似たものになることがわかった。

2・6・3 表面張力の影響 図2では、式(33)右辺のウェーバ数を固定して、左辺第2項の表面密度比の影響、したがって、気相の流れの効果を見ている。実際には、表面密度比が1に近づくと、表面張力が零に近づくので、噴流の半径と速度が固定されているときには、ウェーバ数の値が大きくなる。したがって、図2では、表面密度比が大きくなるに従って噴射速度あるいは液柱半径を小さくしていることになる。そこで次に、一定の噴射速度と液柱半径に対して、表面状態に対応した表面張力の変化を考慮して、表面密度比の影響を調べよう。

それには表面張力と表面密度比の関係を知っている必要がある。高圧の2成分系に対して確立された表面張力の推算式はない。気相側と液相側で働く分子間力の違いが表面張力となって現れていることより、表面張力は界面での液体と気体の密度の差に比例すると仮定しよう [$\sigma = \Gamma(\rho_{*s} - \rho_s)$]。すると、ウェーバ数は

$$\rho_{*s} V^2 a / \sigma = (V^2 a / \Gamma) / [1 - (\rho_s / \rho_{*s})] \dots\dots (34)$$

と表せる。係数 Γ は、着目する混合系臨界点での傾

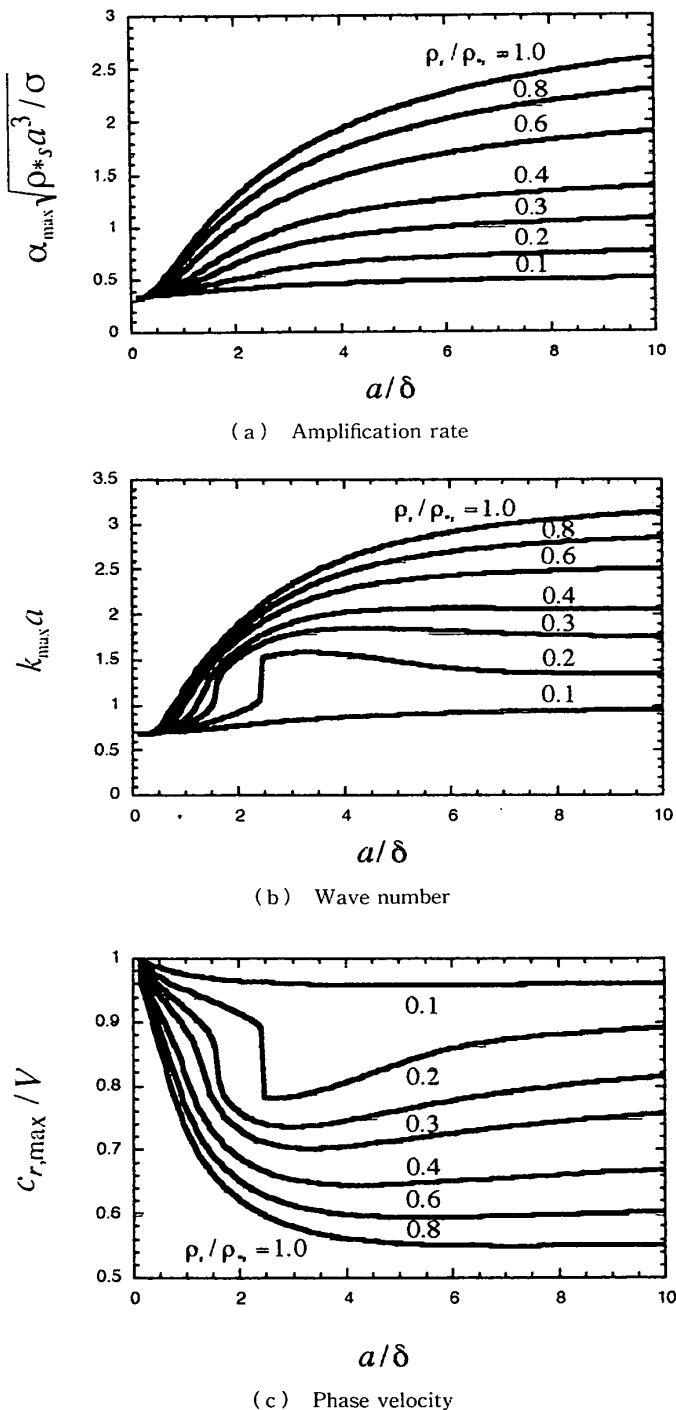


Fig. 2 Characteristics of most unstable wave

き $do/d(\rho_{*s}-\rho_s)$ として定義され、1成分系に対してはボルツマン定数と臨界特性を用いて表現できる⁽¹⁵⁾。しかし、2成分系に対して同様の表式を導くことは困難であり、便宜的な方法によって Γ の値を定めるほかない。基準に取った低圧条件での表面張力と表面液相密度の値をそれぞれ σ_r と ρ_{*r} としよう。このときの表面密度比は零に近いので、 $\sigma/\sigma_r = (\rho_{*s}/\rho_{*r})[1-(\rho_s/\rho_{*s})]$ および $\Gamma = \sigma_r/\rho_{*r}$ の関係を得

る。

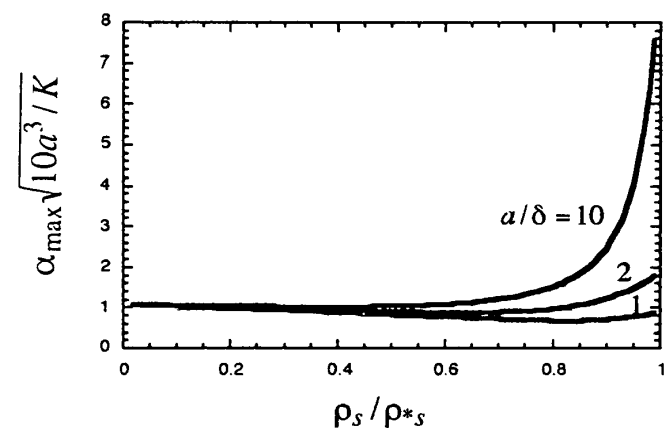
$a/\delta = 1$ と 10 の場合に対して最大増幅率、波数および位相速度に対する表面密度比の影響を計算した結果を図3に示す。近臨界表面状態にある噴流に興味があるので、計算では表面密度比が0.9のときのウェーバ数が10になるように設定した。この条件より $V^2 a/\Gamma = 1$ と定まり、これを用いて任意の表面密度比におけるウェーバ数を評価できる。図3より、波数は密度比とともに増大することがわかる。密度比が零の極限ではレイリーの解が得られる。図2と図3で、レイリー解の増幅率の値に違いがあるのは、次の理由による。図2では任意の密度比に対して表面張力が一定(図3の密度比が0.9の場合の値に等しい)としているが、図3で密度比が零の極限の表面張力が密度比0.9の場合の10倍の値になっている。そのため、図3のレイリー解の増幅率が図2の値の $\sqrt{10}$ 倍になっているのである。このように、密度比の増大に伴って表面張力が低下するために、レイリーの不安定性が支配的な条件では密度比の増大に伴って増幅率が低下することになる。しかし、速度境界層が薄いときには、流体力学的な寄与が支配的になり、表面が臨界状態に近づくと増幅率が急激に大きくなり、波長もせん断層の厚みで決まるようになる。

2・6・4 バロクリニック渦度 近臨界表面液ジェットでの強い不安定性の発現とバロクリニック渦度⁽¹⁶⁾生成は不可分の関係にある。濃度境界層内では、密度が半径方向に急激に変化するのに対して、じょう乱圧力が軸方向に変化するので、強いバロクリニック渦度が生成される。論文(5)で述べられているように、せん断層の渦度の集中化によって作られる渦列は、渦が作られる位置によって、液柱の分断を助けたり、阻害する作用をもつ。このため、近臨界表面液ジェットの微粒化を考えるとときには、基礎流の渦度に加えて、じょう乱波によって作られるバロクリニック渦度の特性をつかんでおく必要がある。

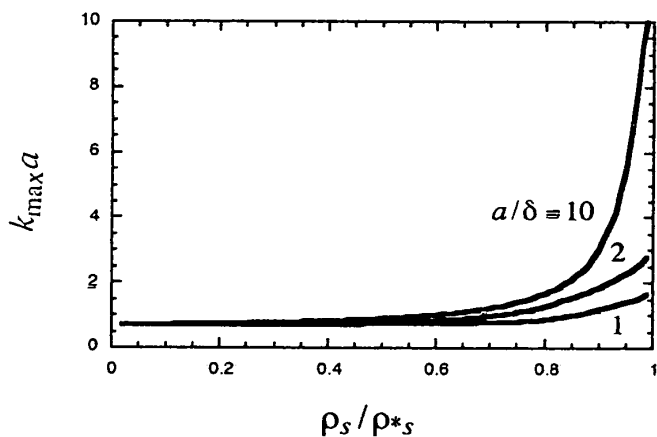
渦度を $\omega = \partial w/\partial r - \partial u/\partial z$ で定義する。基礎流がもつ渦度は負である。渦度に対しても、式(1)と同様に基礎流成分とじょう乱渦度の和に表現すると、濃度境界層内に作られるじょう乱渦度の複素振幅 Ω は次の式に従う。

$$ik(V-c)\Omega + u_{01} \frac{d\Omega}{dr} + U \frac{dw_0}{dr} + \frac{du_0}{dr} \Omega + \omega_0 \left(\rho_s U_s \frac{d}{dr} \frac{1}{\rho_0} + ikW \right) = \frac{ik}{\rho_0^2} \frac{d\rho_0}{dr} P \dots (35)$$

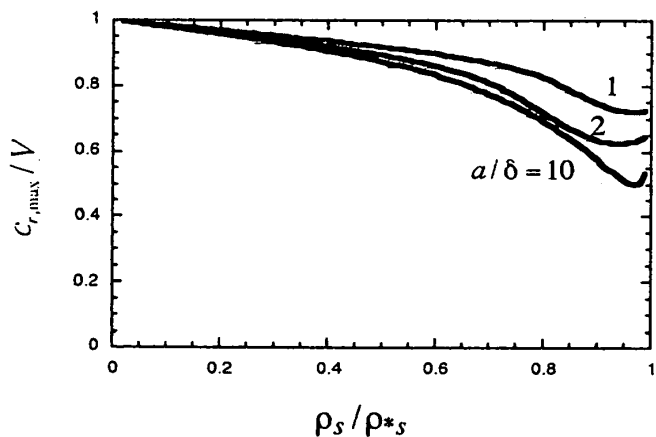
濃度境界層内で圧力は半径方向に変化しないので、上式の圧力は表面値で置き換えることができる。簡単な



(a) Amplification rate



(b) Wave number



(c) Phase velocity

Fig. 3 Surface density ratio effect

ため、半径方向の移流とダイラレーションによる寄与を無視しよう。すると、バロクリニック効果によって気相側に作られる渦度は次式で与えられる。

$$\Omega(x) = \frac{1}{\rho_0^2(V-c)} \frac{d\rho_0}{dr} P_s \dots\dots\dots (36)$$

液相側に対しても同様の式が導ける。

ケルビン・ヘルムホルツの不安定性⁽¹⁹⁾によってせん断層の渦度に軸方向の分布が作られると、最低点(基礎流の渦度は負の値を取ることに注意)を中心にして周囲の渦度が巻き込まれて渦が発達する。正弦波状に変形した液柱表面に対して、どの位置に渦ができるかによって、液柱の分断のしやすさが異なってくる。そこで、基礎流の渦度と同じ符号をもったバロクリニック渦度の生成位置を、変形した液柱表面に相対的な位置関係で調べよう。Δを実数とすると、表面変位dは、時間とともに振幅が増大する、位相速度c_rでz方向に進行する波数kの余弦波を表す。液相の軸速度が一様であるときには、液相のじょう乱圧力の関数形が任意乗数を除いてわかっているのので、式(25)、(26)、(32)より

$$P_{*s} = \frac{\rho_{*s}(w_{0s}-c)^2 k I_0(ka)}{I_1(ka)} \Delta \dots\dots\dots (37)$$

$$P_s = (w_{0s}-c) \frac{\rho_s}{\Pi_s} \Delta \dots\dots\dots (38)$$

なる関係式を得る。したがって、これらを式(36)に代入して

$$\Omega_* = \frac{\rho_{*s}(w_{0s}-c) k I_0(ka)}{\rho_0^2 I_1(ka)} \frac{d\rho_0}{dr} \Delta \dots\dots\dots (39)$$

$$\Omega = \frac{1}{\rho_0^2} \frac{d\rho_0}{dr} (w_{0s}-c) \frac{\rho_s}{\Pi_s} \Delta \dots\dots\dots (40)$$

を得る。これは、不安定波(c_i>0)の渦度と表面変位の間位相差があることを示している。表面変位に対する液相側と気相側の渦度の位相の進みφはそれぞれ

$$\phi_* = \tan^{-1} \frac{-c_i}{1-c_r} \dots\dots\dots (41)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{-(1-c_r)\Pi_i - c_i\Pi_r}{(1-c_r)\Pi_r - c_i\Pi_i} \dots\dots\dots (42)$$

で与えられる。ここにΠ_rとΠ_iはΠの実部と虚部を表す。液柱内の軸速度が一様で、表面密度比0.9、ウェーバ数10の場合の計算結果を図4に示す。式(39)と式(40)の渦度が負の値を取る位置で回転が強まることになるので、負の位相差は液柱の膨らみ部の上流に渦が生成されることを意味し、このようにして作られた渦は液柱の絞られた部分に密度の高いガスが衝突する流れを作って、液柱の分断を助けるように作用することがわかる。特に、速度境界層厚みが小さいときには、位相差が90°に近づき、しかも増幅率が大きくなるので、この効果は顕著になると予想されるが、不安定波による液柱の変形が液柱の分断に有効につながるためには波数に上限(k_{max} a < π√2/3 = 2.56)があることにも注意すべきである。液柱の分断が完結するには、分断された液片が表面張力によって球形に変形したとき、隣の液滴との間にすきまができなければならないからである。

3. おわりに

超臨界雰囲気中に噴射された液体燃料ジェットの線形安定性を調べて以下の知見を得た。噴射液の表面が相平衡条件に従って混合系の臨界状態に近い状態になると、表面張力と表面気液密度差が零に近づく。近臨界混合状態では拡散係数が小さな値を取ることで、密度が変化する領域は噴射液表面のごく近傍に限られる。気相側で急激に変化する密度分布の形成と表面張力の低下によって、気相の流れの乱れが表面の変形と有効に連動するようになる。結果として、近臨界表面液ジェットは強い不安定性を示し、見掛け上、低速噴射でも低圧時の高速噴射と似た現象が発現するようになる。この効果は表面気液密度比が0.8を超えるような条件で顕著に現れてくる。また、表面近傍の密度変化によってバロクリニック効果が現れ、これによって

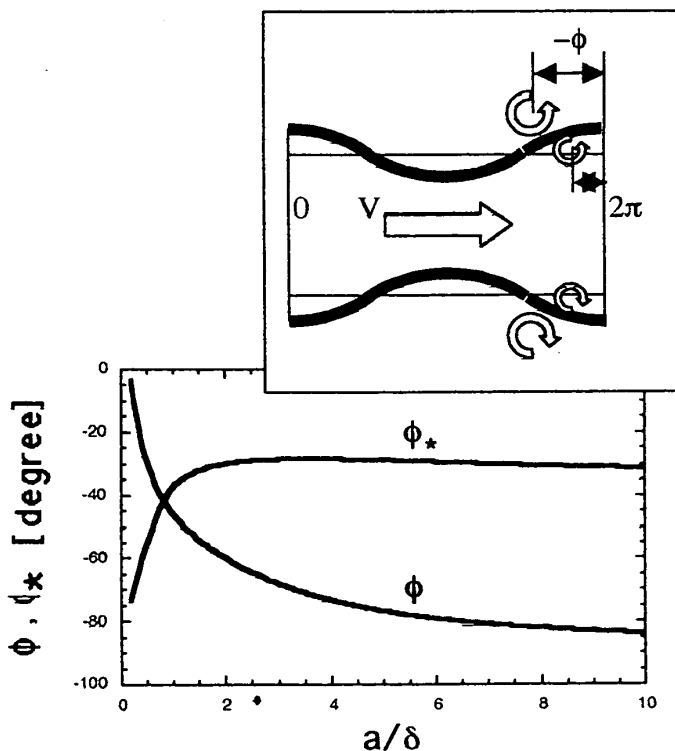


Fig. 4 Phase difference between baroclinic vorticity and surface displacement (We=10, ε=0.9)

作られる渦度は噴射液の膨らみ部の上流に渦を形成して液体の分断に役立つ流れを生む。

本研究は日本宇宙フォーラム地上公募研究と文部省科学研究費(平成11~13年度, 基盤研究C, 課題番号11650219)の補助を受けて行われた。ここに記して謝意を表す。

文 献

- (1) Chigier, N. A., *Proc. 5th ICLASS*, (1991), 1-15.
- (2) Lefebvre, A. W., *Atomization and Sprays*, (1989), Hemisphere Pub. Co.
- (3) Umemura, A., ほか3名, *Proc. 2nd ASPACC*, (1997), 432-435.
- (4) 若嶋勇一郎・ほか2名, *機論*, 68-667, B (2002), 885-891.
- (5) 梅村章・若嶋勇一郎, *機論*, 68-667, B (2002), 892-898.
- (6) ランダウ・リフシッツ, *統計物理学(第2版下)*, (1974), 327-34, 岩波.
- (7) Law, C. K., *Prog. Energy Combust. Sci.*, 8 (1982), 171-201.
- (8) 田中大輔・ほか3名, *微粒化*, 8 (1999), 491-498.
- (9) 神部勉・P. G. ドレイジン, *流体力学, 安定性と乱流*, (1998), 92-140, 東大出版.
- (10) 梅村章, *機論*, 52-478, B(1986), 2437-2443.
- (11) Umemura, A. and Shimada, Y., *Proc. Combust. Inst.*, 26 (1996), 1621-1628.
- (12) 若嶋勇一郎・梅村章, *機論*, 64-625, B(1998), 2797-2803.
- (13) Bachelor, G. K., *Collected Works of G. I. Taylor*, (1958), Cambridge U. P., Cambridge.
- (14) 日本機械学会, 技術資料, *流体の熱物性値集*, (1994), 日本機械学会.
- (15) 小野周, *表面張力*, (1980), 66, 共立出版.
- (16) 増田善信, *数値予報—その理論と実際—*, (1989), 41-112, 東京堂.