

エレメントフリー Trefftz 法による 非線形 Poisson 方程式の感度解析*

北 英輔^{*1}, 池田洋一^{*2}, 神谷紀生^{*1}

Sensitivity Analysis of Non-linear Poisson Equation by Element-Free Trefftz Method

Eisuke KITA^{*3} and Yoichi IKEDA and Norio KAMIYA^{*3} Graduate School of Information Sciences, Nagoya University,
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya-shi, Aichi, 464-8601 Japan

A sensitivity analysis scheme of the boundary value problem of Poisson equation by using Trefftz method is described in this paper. An inhomogeneous term of Poisson equation is approximated with the polynomial to derive the particular solution related to Poisson equation. The solution of the problem is approximated with the superposition of the T-complete function of Laplace equation and the derived particular solutions with unknown parameters. The parameters are determined so that the approximated solution satisfies boundary conditions. Since the T-complete functions and the particular solutions are regular, direct differentiation of the expression leads to the sensitivities. The present scheme is applied to some numerical examples.

Key Words: Boundary Element Method, Inverse Problem, Sensitivity Analysis, Computational Mechanics, Numerical Analysis

1. はじめに

感度解析法は、逆問題解析など様々なシミュレーションで用いられる重要な技術である。そこで、有限要素法や境界要素法に基づく感度解析手法が提案されている。有限要素法は汎用性の高い数値解析法であるが、逐次形状変更を伴う逆問題解析においては要素メッシュのゆがみを引き起こす可能性がある。一方、境界要素法ではメッシュ生成コストは有限要素法に比べてはるかに小さくなるが、定式化に特異性のある基本解を用いるために積分方程式が特異性を有し、設計感度に関する方程式は高次特異積分方程式となる。そのため数学的取り扱いが少々難しく、高次特異方程式の正則化処理が必要となる。そこで、著者らはこれまでに Trefftz 法を用いた設計感度解析法を提案している^{(1)~(4)}。Trefftz 法^{(5)~(8)}は、非特異な T-complete 関数を用いた境界型数値解析法なので、有限要素法に比べるとメッシュ生成コストは少なく、境界要素法に比べると定式化における関数特異性の問題は生じない。

これまでの研究では、Trefftz 法に基づく設計感度解析法を Laplace 方程式に支配された熱伝導問題^{(1) (2)}や静弾性問題^{(3) (4)}など同次方程式を支配方程式とする境界値問題の感度解析に適用している。これに対して、本研究では Poisson 方程式を支配方程式とする境界値問題の感度解析法について述べる。

提案する方法では、最初に未知関数を含んだ非同次項を直交座標系について完全多項式で近似し、特解を導出する。そして、境界値問題の解を同次方程式（Laplace 方程式）の T-complete 関数と導出した特解で近似し、近似解が境界条件を満足するように未知係数を更新・決定する。定式化の過程で選点法を用いるので、必要な入力情報は境界選点と領域内点の座標値とそこでの規定境界条件値だけとなり、定式化の過程で要素積分も不要ないわゆるエレメントフリーな定式化となる。この定式化によれば、問題の解である未知関数は T-complete 関数と特解の重ね合わせで近似されるので、近似解を変数で直接微分するだけで感度を導出することができる。T-complete 関数と導出された特解はともに特異性のない関数なので、感度についての式には特異性は生じない。

本論文の構成は以下のようになっている。2章では、

* 原稿受付 2003年5月14日。

^{*1} 正員、名古屋大学大学院情報科学研究所(〒464-8601 名古屋市千種区不老町)。

^{*2} 正員、大同工業大学機械工学科(〒457-8530 名古屋市南区滝春町10-3)。

E-mail: kita@is.nagoya-u.ac.jp

Poisson 方程式の境界値問題に対する Trefftz 法の定式化について述べる。3 章と 4 章では、それぞれ境界条件と形状寸法を感度解析の変数にとるととき、感度解析法の定式化について示す。5 章では、提案した感度解析法をいくつかの解析例に適用し、提案した方法により得られた解を理論解や前進差分近似を用いた数值微分による解と比較する。6 章は結論であり、本研究で得られた知見と、手法の特徴について述べる。

2. 2 次元 Poisson 方程式の解法^{(9) (10)}

2.1 Trefftz 法の定式化 Poisson 方程式の境界値問題の支配方程式と境界条件が次式で与えられる場合を考える。

$$\nabla^2 u + b = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} u = \bar{u} \text{ (on } \Gamma_u \text{)} \\ q = \bar{q} \text{ (on } \Gamma_q \text{)} \end{array} \right\} \quad (2)$$

ここで、 $\Omega, \Gamma_u, \Gamma_q$ は、それぞれ解析対象領域、 u, q を指定された境界を示す。また、式(1)の非同次項は座標と未知関数 u の関数である。

提案する方法では、まず座標と未知関数 u の関数である非同次項 b を直交座標系の完全多項式を用いて近似する。つまり、

$$b = \mathbf{c}^T \mathbf{r} \quad (3)$$

ここで、 \mathbf{c} と \mathbf{r} は未知係数ベクトルと完全多項式の各項から成るベクトルである。なお、本研究においては、近似を行うために 5 次の完全多項式を用いる。

Trefftz 法では、支配方程式の同次解 u^h を 2 次元 Laplace 方程式に対する T-complete 関数 u_i^* によって線形近似する⁽⁷⁾。さらに、式(3)の r_i に対応する特解を u_i^p とする。このとき、未知関数 u は、同次解と特解の重ね合わせで表される。

$$u = u^h + \mathbf{c}^T \mathbf{u}^p = \mathbf{a}^T \mathbf{u}^* + \mathbf{c}^T \mathbf{u}^p \quad (4)$$

ここで、 \mathbf{a} は未知係数である。また、 u_i^*, u_i^p は次式を満足する。

$$\nabla^2 u_i^* = 0 \quad (5)$$

$$\nabla^2 u_i^p + r_i = 0 \quad (6)$$

式(4)を式(1)と(2)に代入すると、境界条件式に残差が生じる。そこで、境界上に選点をいくつか配置し、境界選点 P_m での残差を 0 とおくことで、未知数についての連立方程式を得る。

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f} - \mathbf{B}\mathbf{c} \quad (7)$$

ここで、

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} u_{11}^* & \cdots & u_{1N}^* \\ \vdots & & \vdots \\ u_{M_1 1}^* & \cdots & u_{M_1 N}^* \\ q_{11}^* & \cdots & q_{1N}^* \\ \vdots & & \vdots \\ q_{M_2 1}^* & \cdots & q_{M_2 N}^* \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{f} = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{M_1}, \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_{M_2}\}^T \quad (9)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} u_{11}^p & \cdots & u_{1N}^p \\ \vdots & & \vdots \\ u_{M_1 1}^p & \cdots & u_{M_1 21}^p \\ q_{11}^p & \cdots & q_{1N}^p \\ \vdots & & \vdots \\ q_{M_2 1}^p & \cdots & q_{M_2 21}^p \end{bmatrix} \quad (10)$$

また、 M_1, M_2 ($M_1 + M_2 \equiv M$) はそれぞれ Γ_1, Γ_2 上にとられた選点の総数であり、記号は以下のように定義されている。

$$\left. \begin{array}{l} u_n^*(P_m) = u_{mn}^* \\ q_n^*(P_m) = q_{mn}^* \\ \bar{u}(P_m) = \bar{u}_m \\ \bar{q}(P_m) = \bar{q}_m \\ u_n^p(P_m) = u_{mn}^p \\ q_n^p(P_m) = q_{nn}^p \\ q_n^p = \frac{\partial u_{mn}^p}{\partial n} \end{array} \right\} \quad (11)$$

係数マトリックス \mathbf{K} において、行数は選点総数に、列数は T-complete 関数の総数に等しいので、選点総数を T-complete 関数の総数以上に取って過剰定義の連立一次方程式とし、LAPACK ソフトウェアの特異値分解⁽¹¹⁾を適用して解くことで \mathbf{a} を求める。

2.2 係数 \mathbf{c} の決定法 式(3)に示すように、提案する方法では非同次項 b を直行座標系の完全多項式で近似したので、未知係数 \mathbf{c} は未知関数 u の関数である。そこで、式(7)の右辺にある未知係数 \mathbf{c} は以下のようにして繰り返し計算で決定する。まず、式(3)を繰り返し計算 (k) 回目と $(k+1)$ 回目について考え、左辺と右辺をそれぞれ引き算すると次式となる。

$$b^{(k+1)} - b^{(k)} = \mathbf{r}^T (\mathbf{c}^{(k+1)} - \mathbf{c}^{(k)}) \equiv \mathbf{r}^T \Delta \mathbf{c} \quad (12)$$

ここで、上添え字は繰り返し計算の回数を示す。そして、境界上と領域内に取られたいつかの評価点（これを、計算点とよぶことにする）において式(12)を選点法的に満足することを考えると、次式を得る。

$$\mathbf{D} \Delta \mathbf{c} = \mathbf{f}' \quad (13)$$

ここで \mathbf{D} と \mathbf{f}' は、それぞれ完全多項式の項から成る行列と非同次項に関する係数ベクトルである。式(13)は過剰定義の連立一次方程式なので、LAPACK ソフトウェアの特異値分解⁽¹¹⁾を用いて $\Delta\mathbf{c}$ を決定する。そして、それを用いて \mathbf{c} を次式で更新する。

$$\mathbf{c}^{(k+1)} = \mathbf{c}^{(k)} + \Delta\mathbf{c} \quad (14)$$

収束判定条件を次式のように定義する。

$$\eta \equiv \frac{1}{M_c} \sum_{i=1}^M |\Delta b(Q_i)| < \eta_c \quad (15)$$

ここで、 Q_i は i 番目の計算点を、 M_c は計算点の総数を示す。また、 η_c はユーザーによって定義された正の定数を示す。ただし、解析例においては全体誤差の収束特性を議論することが目的の一つであるため $\eta_c = 0$ として計算している。

3. 境界条件感度解析

まず、境界条件値を感度解析のための変数にとり、 u の感度を計算する方法について述べる。

3.1 $b = b(u)$ の場合 $\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^p$ が境界条件値の関数でないことに注意して、未知関数 u についての式(4)の両辺を微分すると次式を得る。

$$\dot{u} = \dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{u}^* + \dot{\mathbf{c}}^T \mathbf{u}^p \quad (16)$$

ここで () は変数による微分を意味する。式(16)をすべての計算点について考えて連立すると次式を得る。

$$\mathbf{K}_1 \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{B}_1 \dot{\mathbf{c}} - I \dot{u} = 0 \quad (17)$$

一方、 \mathbf{K}, \mathbf{B} が境界条件値の関数でないことに注意して、式(7)の両辺を微分すると次式を得る。

$$\mathbf{K} \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{B} \dot{\mathbf{c}} = \dot{\mathbf{f}} \quad (18)$$

最後に、 r が境界条件値の関数ではないことに注意して、式(3)を微分することで次式を得る。

$$\dot{\mathbf{c}}^T \mathbf{r} - \frac{\partial b}{\partial u} \dot{u} = 0 \quad (19)$$

式(19)をすべての計算点について考えてまとめると次式を得る。

$$\mathbf{G} \dot{\mathbf{c}} - \mathbf{H}_1 \dot{u} = 0 \quad (20)$$

式(17), (18), (20)を連立すると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_1 & \mathbf{B}_1 & -I \\ \mathbf{0} & \mathbf{G} & -\mathbf{H}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{a}} \\ \dot{\mathbf{c}} \\ \dot{u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{f}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

ここで、

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} u_{11}^* & \cdots & u_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{M_c 1}^* & \cdots & u_{M_c N} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} u_{11}^p & \cdots & u_{1 21}^p \\ \vdots & & \vdots \\ u_{M_c 1}^p & \cdots & u_{M_c 21}^p \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1 21} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{M_c 1} & \cdots & r_{M_c 21} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \partial b_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \partial b_{M_c} \end{bmatrix} \quad (25)$$

また、記号は以下のように定義されている。

$$\left. \begin{array}{l} u_n^p(Q_m) = u_{mn}^p \\ r_n(Q_m) = r_{mn} \\ \frac{\partial b}{\partial u}(Q_m) \equiv \partial b_m \end{array} \right\} \quad (26)$$

ここで、 Q_m は計算点を示す。

式(21)は過剰定義な連立方程式なので LAPACK ソフトウェアの特異値分解法⁽¹¹⁾を用いて $\dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{c}}, \dot{u}$ について解き、 \dot{u} を求める。

3.2 $b = b(u, u_{,k})$ の場合 r が感度解析の変数の関数でないことに注意して、式(3)を感度解析の変数で微分すると次式を得る。

$$\dot{\mathbf{c}}^T \mathbf{r} - \frac{\partial b}{\partial u} \dot{u} - \frac{\partial b}{\partial u_{,k}} \dot{u}_{,k} = 0 \quad (27)$$

ここで、(),_{,k} は変数 k についての微分を示す。ただし、 k については総和規約を適用しない。式(27)をすべての計算点について考えてまとめると次式を得る。

$$\mathbf{G} \dot{\mathbf{c}} - \mathbf{H}_1 \dot{u} - \mathbf{H}_2 \dot{u}_{,k} = 0 \quad (28)$$

式(28)には $u_{,k}$ が含まれているので、この評価方法を考えなければならない。まず、式(4)の両辺を k について偏微分すると次式を得る。

$$u_{,k} = \mathbf{a}^T \mathbf{u}_{,k}^* + \mathbf{c}^T \mathbf{u}_{,k}^p \quad (29)$$

続いて、この両辺を感度解析の変数について微分すると次式を得る。

$$\dot{u}_{,k} = \dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{u}_{,k}^* + \dot{\mathbf{c}}^T \mathbf{u}_{,k}^p \quad (30)$$

これをすべての計算点について考えてまとめることで、次式を得る。

$$\mathbf{K}_2 \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{B}_2 \dot{\mathbf{c}} - I \dot{u}_{,k} = 0 \quad (31)$$

式(17), (18), (28), (31)を連立すると次式を得る.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_1 \mathbf{B}_1 & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_2 \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G} & -\mathbf{H}_1 & -\mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{a}} \\ \dot{\mathbf{c}} \\ \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{u}}_{,k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{f}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (32)$$

ここで,

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} u_{,k}^{*,11} & \cdots & u_{,k}^{*,1N} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{,k}^{*,M_c 1} & \cdots & u_{,k}^{*,M_c N} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} u_{,k}^p 11 & \cdots & u_{,k}^p 121 \\ \vdots & & \vdots \\ u_{,k}^p M_c 1 & \cdots & u_{,k}^p M_c 21 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} \partial_{,k} b_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \partial_{,k} b_{M_c} \end{bmatrix} \quad (35)$$

また、記号は以下のように定義されている.

$$\left. \begin{array}{l} (u_n^*)_{,k}(Q_m) = u_{,k}^{*,mn} \\ (u_n^p)_{,k}(Q_m) = u_{,k}^p mn \\ (r_n)_{,k}(Q_m) = r_{,k} mn \\ \frac{\partial b}{\partial u_{,k}}(Q_m) = \partial_{,k} b_m \end{array} \right\} \quad (36)$$

式(32)を $\dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{c}}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}_{,k}$ について解き、 $\dot{\mathbf{u}}$ を求める⁽¹¹⁾.

4. 形状感度解析

次に、形状寸法を感度解析のための変数にとり、その変数に関する未知関数 u の導関数を計算する方法について述べる。

4.1 $b = b(u)$ の場合 式(4)の両辺を感度解析のための変数で微分すると次式を得る.

$$\dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{u}^* + \dot{\mathbf{c}}^T \mathbf{u}^p - \dot{\mathbf{u}} = -(\mathbf{a}^T \dot{\mathbf{u}}^* + \mathbf{c}^T \dot{\mathbf{u}}^p) \quad (37)$$

ここで(')は変数による微分を意味する。式(37)をすべての計算点について考えて連立すると次式を得る。

$$\mathbf{K}_1 \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{B}_1 \dot{\mathbf{c}} - \mathbf{I} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{g}_1 \quad (38)$$

一方、式(7)の両辺を感度解析の変数で微分すると次式を得る。

$$\dot{\mathbf{K}} \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{B} \dot{\mathbf{c}} = \dot{\mathbf{f}} - \dot{\mathbf{K}} \dot{\mathbf{a}} - \dot{\mathbf{B}} \dot{\mathbf{c}} \equiv \mathbf{g} \quad (39)$$

最後に、式(3)を感度解析の変数で微分することで次式を得る。

$$\dot{\mathbf{c}}^T \mathbf{r} - \frac{\partial b}{\partial u} \dot{\mathbf{u}} = -\mathbf{c}^T \dot{\mathbf{r}} \quad (40)$$

式(40)をすべての計算点について考えてまとめると次式を得る。

$$\mathbf{G} \dot{\mathbf{c}} - \mathbf{H}_1 \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{g}_2 \quad (41)$$

式(38), (39), (41)を連立すると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_1 \mathbf{B}_1 & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G} & -\mathbf{H}_1 & -\mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{a}} \\ \dot{\mathbf{c}} \\ \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{u}}_{,k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \end{Bmatrix} \quad (42)$$

ここで,

$$\mathbf{g} = \dot{\mathbf{f}} - \dot{\mathbf{K}} \dot{\mathbf{a}} - \dot{\mathbf{B}} \dot{\mathbf{c}} \quad (43)$$

$$\mathbf{g}_1 = -\{\mathbf{a}^T \dot{\mathbf{u}}^* + \mathbf{c}^T \dot{\mathbf{u}}^p\} \quad (44)$$

$$\mathbf{g}_2 = -\{\mathbf{c}^T \dot{\mathbf{r}}\} \quad (45)$$

式(42)を $\dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{c}}, \dot{\mathbf{u}}$ について解き、 $\dot{\mathbf{u}}$ を求める⁽¹¹⁾.

4.2 $b = b(u, u_{,k})$ の場合 式(3)を感度解析の変数で微分することで次式を得る。

$$\dot{\mathbf{c}}^T \mathbf{r} - \frac{\partial b}{\partial u} \dot{\mathbf{u}} - \frac{\partial b}{\partial u_{,k}} \dot{\mathbf{u}}_{,k} = -\mathbf{c}^T \dot{\mathbf{r}} \quad (46)$$

この式をすべての計算点について考えてまとめると次式を得る。

$$\mathbf{G} \dot{\mathbf{c}} - \mathbf{H}_1 \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{H}_2 \dot{\mathbf{u}}_{,k} = \mathbf{g}_2 \quad (47)$$

ところで、上式には $\dot{\mathbf{u}}_{,k}$ が含まれている。 $u_{,k}$ についての式(29)の両辺を感度解析の変数について微分すると次式を得る。

$$\dot{\mathbf{a}}^T \dot{\mathbf{u}}_{,k}^* + \dot{\mathbf{c}}^T \dot{\mathbf{u}}_{,k}^p - \dot{\mathbf{u}}_{,k} = -(\mathbf{a}^T \dot{\mathbf{u}}_{,k}^* + \mathbf{c}^T \dot{\mathbf{u}}_{,k}^p) \quad (48)$$

式(48)をすべての計算点について考えてまとめることで、次式を得る。

$$\mathbf{K}_2 \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{B}_2 \dot{\mathbf{c}} - \mathbf{I} \dot{\mathbf{u}}_{,k} = \mathbf{g}_3 \quad (49)$$

式(38), (39), (47), (49)を連立すると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_1 \mathbf{B}_1 & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_2 \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G} & -\mathbf{H}_1 & -\mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{a}} \\ \dot{\mathbf{c}} \\ \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{u}}_{,k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_3 \\ \mathbf{g}_2 \end{Bmatrix} \quad (50)$$

ここで

$$\mathbf{g}_3 = -\{\mathbf{a}^T \dot{\mathbf{u}}_{,k}^* + \mathbf{c}^T \dot{\mathbf{u}}_{,k}^p\} \quad (51)$$

式(50)を $\dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{c}}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}_{,k}$ について解き、 $\dot{\mathbf{u}}$ を求める⁽¹¹⁾.

5. 解析例

5.1 $b = u$ の場合

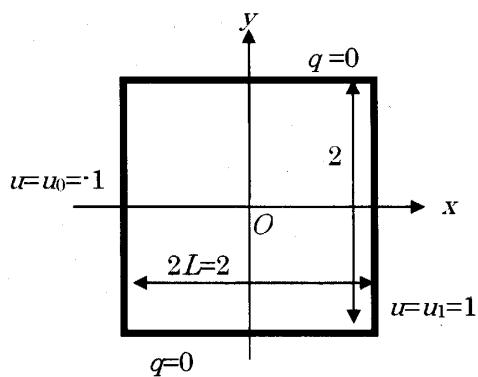


Fig. 1 Numerical Example 1

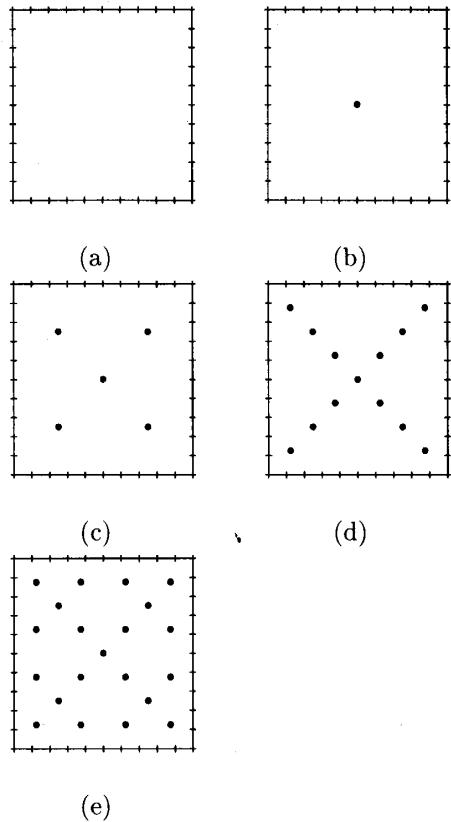


Fig. 2 Location of computing points

5.1.1 解析対象 最初の例題として非同次項が未知関数の線形な関数として与えられる場合を考える。この場合、理論解を得ることができるので、数値解を理論解と比較検討する。

解析領域と境界条件が図 1 に示されたような境界値問題を考える。解析には、境界上に 44 個の選点を均等に配置する。領域の 4 つのかどには選点を 2 個づつ配置し、それぞれが異なる境界条件値と境界法線ベクトルを持つように定義する。44 個の境界選点は計算点として解析に用いられるが、これに加えて 1~21 個の領域内点を計算点として利用する。計算点の配置を

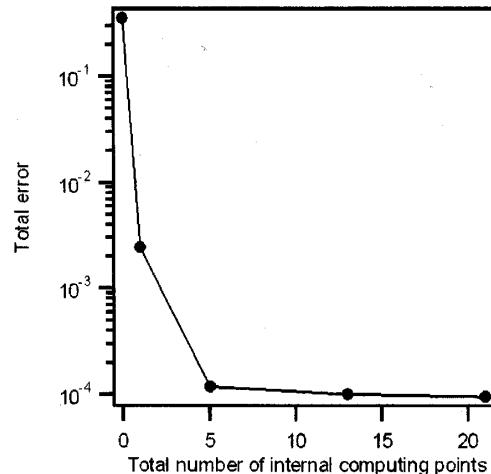


Fig. 3 Convergence history of total error of sensitivity for value specified on boundary (Example 1)

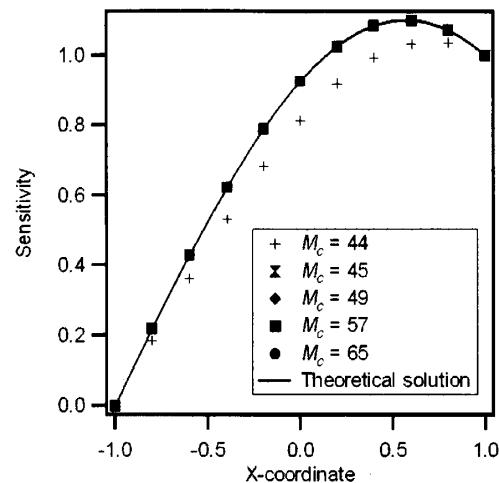


Fig. 4 Distribution of sensitivity for value specified on boundary (Example 1)

図 2 に示す。

なお、この問題においては

$$\frac{\partial b}{\partial u} = 1 \quad (52)$$

となるので、式 (21) と (42) において

$$H_1 = I \quad (53)$$

5.1.2 境界条件感度解析 感度解析の変数として u_1 をとる。まず、領域内にとられた計算点の個数と全体精度の関係について検討する。全体精度の評価には、境界選点での設計感度の数値解 \dot{u}_{num} と理論解 \dot{u}_{theo} から定義された次式を用いる。

$$E = \sum_{i=1}^{44} |\dot{u}_{num} - \dot{u}_{theo}| \quad (54)$$

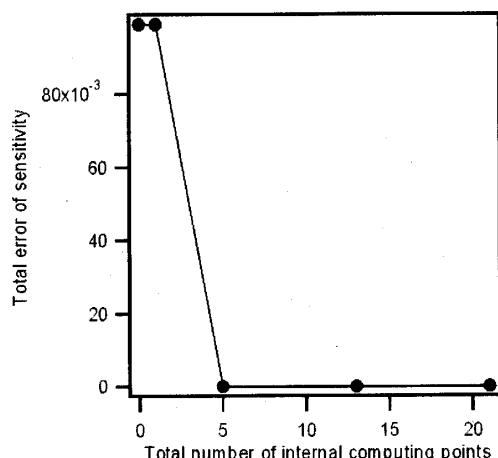


Fig. 5 Convergence history of total error of sensitivity for shape parameter (Example 1)

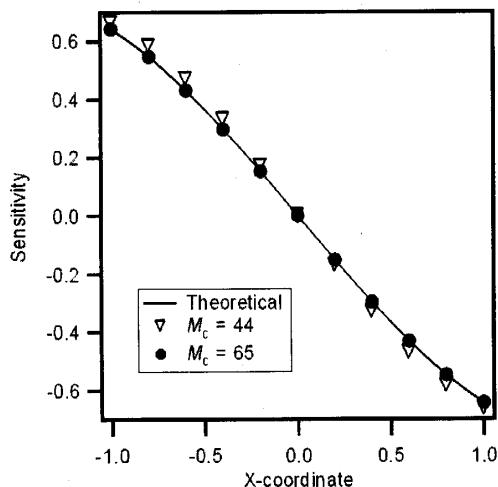


Fig. 6 Distribution of sensitivity for shape parameter (Example 1)

解析結果を図 3 に示す。横軸には、領域内計算点の総数を、縦軸には全体誤差を示す。これにより、領域内にとられた計算点の増加に伴い全体誤差が小さくなっていることがわかる。感度の数値解と理論解の関数分布を比較した結果を図 4 に示す。横軸には計算点の x 座標を、縦軸には感度値を示す。これにより、計算点を $M_c = 44$ 個用いる(つまり、領域内に計算点をとらない)場合は数値解と理論解にずれがあるが、計算点が増えるに従ってすぐに精度が改善されていることがわかる。

5・1・3 形状感度解析 感度解析の変数として L をとる。まず、領域内にとられた計算点の個数と全体精度の関係について検討する。解析結果を図 5 に示す。これにより、領域内計算点が 0 または 1 個の場合全体誤差は比較的大きいが、5 個以上となると全体誤差が

十分減少することがわかる。そこで、計算点 $M_c = 44$ 個(領域内計算点が 0 個)の場合と $M_c = 65$ 個(領域内計算点 21 個)の場合について、その関数分布を比較した結果を図 6 に示す。これにより、領域内計算点が 0 個の場合、21 個の場合に比べてずれがかなり大きいことがわかる。

5・2 $b = u^2$ の場合

5・2・1 解析対象 最初の例題では、非同次項が未知関数の線形関数で与えられる場合を扱い、得られた結果を理論解と比較検討した。これに対して、2 番目の例として非同次項が未知関数の非線形な関数として与えられる場合を考える。最初の例題のように非同次項が未知関数の線形関数で与えられる場合、式 (21) と (42) に含まれる係数行列 H_1 は定数となるのに対して、この例題では H_1 は未知関数 u の関数となるので、アルゴリズム確認のひとつとして取り上げる。

解析領域および境界条件は、最初の例題と同じとする(図 1)。解析には 44 個の境界選点と 0 個または 21 個の領域内計算点を用いる(図 2(a),(e))。

この問題では

$$\frac{\partial b}{\partial u} = 2u \quad (55)$$

となるので、式 (21) と (42) において

$$H = \begin{bmatrix} 2u(Q_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 2u(Q_{M_c}) \end{bmatrix} \quad (56)$$

5・2・2 境界条件感度解析 感度解析の変数として u_1 をとり、解析結果を数値微分による結果と比較する。数値微分においては導関数を前進差分近似して評価している。このとき、差分ステップ幅は機械精度を考慮した上で十分小さな値をとっている。関数分布を比較した結果を図 7 に示す。ここで実線は前進差分を用いた数値微分による結果を、記号は提案した方法による結果を示す。これにより、計算点 $M_c = 44$ 個(領域内計算点数 0 個)の場合は、境界から離れたところでかなり大きな誤差があるのに対して、計算点 $M_c = 65$ 個(領域内計算点数 21 個)の場合は提案した方法と数値微分による結果がよく一致していることがわかる。数値微分による解析はアルゴリズムが簡単であるが、良好な計算精度を得るためににはステップ幅を適切にとる必要がある。これに対して、提案する方法では解析にステップ幅を用いないので、数値微分にみられる問題を改善できると思われる。

5・2・3 形状感度解析 感度解析の変数として L をとり、解析結果を数値微分による結果と比較する。関数分布を比較した結果を図 8 に示す。ここで実線

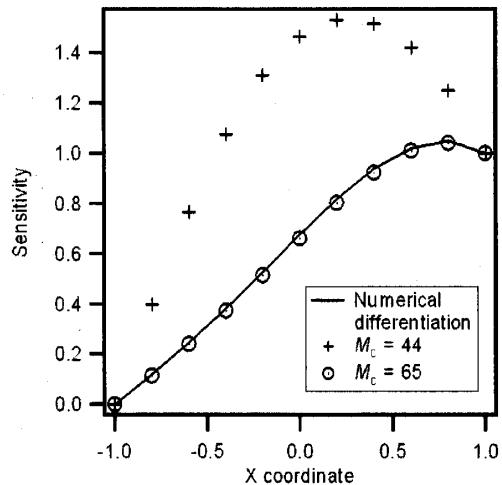


Fig. 7 Distribution of sensitivity for value specified on boundary (Example 2)

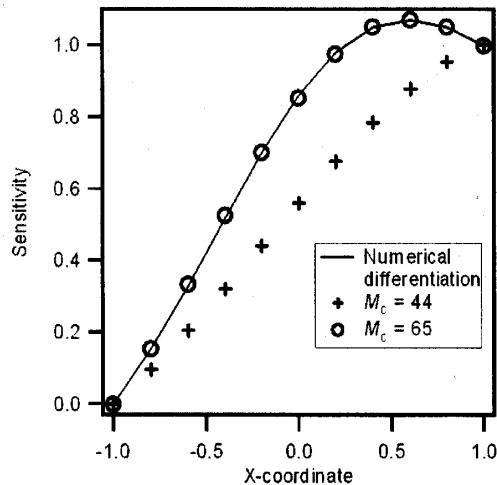


Fig. 9 Distribution of sensitivity for value specified on boundary (Example 3)

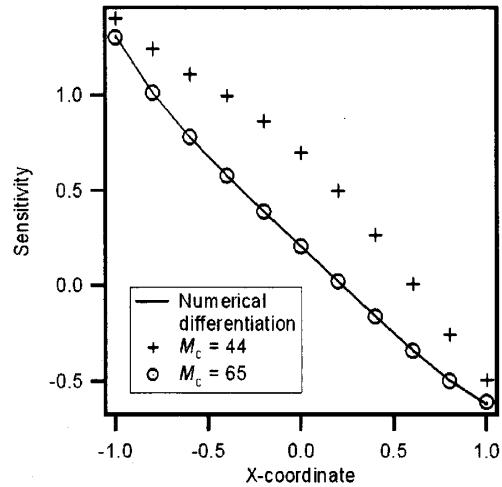


Fig. 8 Distribution of sensitivity for shape parameter (Example 2)

は前進差分を用いた数値微分による結果を、記号は提案した方法による結果を示す。これにより、計算点 \$M_c = 44\$ 個(領域内計算点数 0 個)の場合は境界から離れたところで大きな誤差があるのに対して、計算点 \$M_c = 65\$ 個(領域内計算点数 21 個)の場合は提案した方法と数値微分による結果がよく一致していることがわかる。

5.3 \$b = u \cdot (\partial u / \partial x)\$ の場合

5.3.1 解析対象 解析領域および境界条件は、最初の例題と同じとする(図1)。解析には 44 個の境界選点と 0 個または 21 個の領域内計算点を用いる(図2(a),(e))。

この問題では

$$\frac{\partial b}{\partial u} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (57)$$

$$\frac{\partial b}{\partial(\partial u / \partial x)} = u \quad (58)$$

となるので、感度についての式(32), (50)において

$$H_1 = \begin{bmatrix} (\partial u / \partial x)(Q_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & (\partial u / \partial x)(Q_{M_c}) \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} u(Q_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & u(Q_{M_c}) \end{bmatrix} \quad (60)$$

となる。

5.3.2 境界条件感度解析 感度解析の変数として \$u_1\$ をとり、解析結果を数値微分による結果と比較する。関数分布を比較した結果を図9に示す。ここで実線は前進差分を用いた数値微分による結果を、記号は提案した方法による結果を示す。これにより、計算点 \$M_c = 44\$ 個(領域内計算点数 0 個)の場合は境界から離れたところで大きな誤差があるのに対して、計算点 \$M_c = 65\$ 個(領域内計算点数 21 個)の場合は提案した方法と数値微分による結果がよく一致していることがわかる。

5.3.3 形状感度解析 感度解析の変数として \$L\$ をとり、解析結果を数値微分による結果と比較する。関数分布を比較した結果を図10に示す。ここで実線は前進差分を用いた数値微分による結果を、記号は提案した方法による結果を示す。これにより、計算点 \$M_c = 44\$ 個(領域内計算点数 0 個)の場合は、境界か

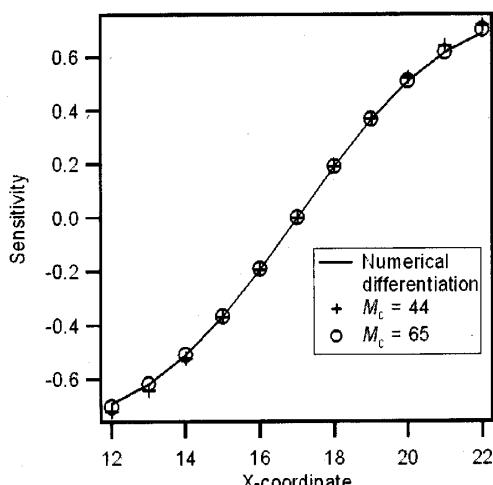


Fig. 10 Distribution of sensitivity for shape parameter (Example 3)

ら離れたところで大きな誤差があるのに対して、計算点 $M_c = 65$ 個 (領域内計算点数 21 個) の場合は提案した方法と数値微分による結果がよく一致していることがわかる。

6. おわりに

本研究では、Poisson 方程式境界値問題における感度解析に Trefftz 法を適用した。最初に支配方程式の非同次項を完全多項式で近似して、関連する特解を導出する。そして、境界値問題の解を Laplace 方程式の T-complete 関数と導出した特解で近似する。T-complete 関数と特解はともに特異性のない関数なので、解の近似式を変数で直接微分することで感度を導出することができる。本論文では、Poisson 方程式を支配方程式とする境界値問題を考え、境界条件値と形状寸法を変数とする場合について感度解析法の定式化を示した。最後に、提案した方法を複数の解析例について適用した。提案した方法による解析結果は厳密解や数値微分による解と良い一致をみたので、提案した定式化の理論的妥当性は確認できたと思われる。

しかし、今後解決すべき点もいくつかある。本研究では、非同次項の近似に 5 次の完全多項式を用いている。近似多項式の次数は計算精度に影響するので、高次関数を用いることが望ましいが、高次すぎると未知数についての連立方程式の特異性が高くなり、精度良く解析できない。そこで、本研究では、解くべき問題の解析領域や境界条件、連立方程式のソルバーの精度などを考慮して 5 次式を用いている。

また、未知数についての連立方程式は過剰定義の連

立方程式なので、特異値分解法を用いて解析を行っている。未知数が多くなると、連立方程式の解法のための計算精度の低下が予想されるので注意が必要である。

今後、さらに実際的な問題への適用によって、これらの点について一層の検討を進めていこうと考えている。

文 献

- (1) 北栄輔、神谷紀生、池田洋一。Trefftz 法による 2 次元ポテンシャル問題の感度解析。日本シミュレーション学会論文集, Vol. 13, No. 3, pp. 247–254, 1994.
- (2) E. Kita, N. Kamiya, and Y. Ikeda. An application of Trefftz method to the sensitivity analysis of two-dimensional potential problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, No. 13, pp. 2209–2224, 1995.
- (3) 北栄輔、片岡陽二、神谷紀生。エレメントフリー Trefftz 法による 2 次元弾性問題解析と形状感度解析への応用。日本機械学会論文集, Vol. 63, No. 606, pp. 419–424, 1997.
- (4) 北栄輔、片岡陽二、神谷紀生。エレメントフリー Trefftz 法を用いた 2 次元弾性問題解析における 2 次感度解析法。日本機械学会論文集, Vol. 63, No. 607, pp. 518–524, 1997.
- (5) E. Trefftz. Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. *Proc. 2nd Int. Congr. Appl. Mech., Zurich*, pp. 131–137, 1926.
- (6) Y. K. Cheung, W. G. Jin, and O. C. Zienkiewicz. Direct solution procedure for solution of harmonic problems using complete, non-singular, Trefftz functions. *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol. 5, pp. 159–169, 1989.
- (7) I. Herrera. Theory of connectivity: A systematic formulation of boundary element methods. In C. A. Brebbia, editor, *New Developments in Boundary Element Methods (Proc. 2nd Int. Seminar on Recent Advances in BEM, Southampton, England, 1980)*, pp. 45–58. Pentech Press, 1980.
- (8) N. Kamiya and S. T. Wu. Generalized eigenvalue formulation of the Helmholtz equation by the Trefftz method. *Engineering Computations*, Vol. 11, pp. 177–186, 1994.
- (9) 北英輔、池田洋一、神谷紀生。Trefftz 法による非線形 Poisson 方程式の解法。情報処理学会論文誌, No. 7, 2002.
- (10) E. Kita, Y. Ikeda, and N. Kamiya. Indirect trefftz method for boundary value problem of Poisson equation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 27, pp. 825–833, 2003.
- (11) 小国力。行列計算パッケージ LAPACK 利用の手続き。丸善, 第 2.nd 版, 1995. (E. Aderson et al. eds., LAPACK User's Manual).