

教材研究の楽しみ： 中学生がわかる「三角錐の公式の証明」

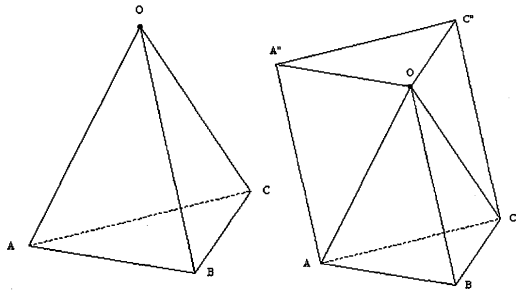
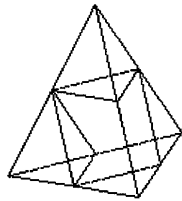
福 谷 敏

【抄録】 筆者は三角錐の公式の証明には極限的な概念が必要であると考えていた。小学生・中学生にとっては、既知の知識では、証明が不可能と考えていた。しかし、相似比と体積比の関係（ドラえもんのスモールライトの秘密と生徒向けには話した）と（ユークリッドの取り尽くし法による証明に使う）三角錐の4分割の利用すれば可能なことを報告する。

【キーワード】 三角錐の公式、極限を用いない、証明（中学生がわかる）、分割、相似比と体積比

はじめに

三角錐の公式の導出は、教科書を見ると、高校上級生理系で、積分を利用してなされる。中学（1年）生でも理解可能なきちんとした証明はないか考えてみた。アイデアの第1は、ユークリッドの錐公式の証明に使う分割（右図）であった。これは、無限を持ち出せば、無限等比級数と考えて、中学3年でも理解可能な説明がつく。しかし、無限を持ち出さずに証明ができることに気づいた。簡単な割には知られていないようなので報告する。第2の決定的なアイデアは「相似比と体積比の関係」である。

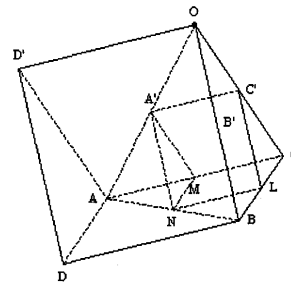
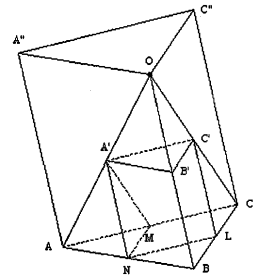


本論

三角錐 $OABC$ を考える。この錐の体積を V とする。さらに、その三角錐を含むゆがんだ三角柱を下の図のように考える。 OA'' と BA 、 OC'' と BC は平行で長さが等しいようにしている。このゆがんだ三角柱の体積を V_0 とおく。

最初の三角錐の各辺の中点を6つとる。右段上図のように A' 、 B' 、 C' 、 L 、 M 、 N のようにとる。辺を図のようにとると、三角錐は4つの立体に分割することができる。内2つは、三角錐となり、その体積はそれぞれ、元の三角錐との相似比が、 $2:1$ なので、体積比は、

$8:1$ となり、それぞれ、 $(1/8)V$ 、また、たとえば、ゆがんだ三角柱 $A'B'C'-NBL$ は、大きなゆがんだ三角柱の 8 分の 1 なので、 $(1/8)V_0$ となる。残る小さな立体は、ゆがんだ三角柱 $CC'L-MA'N$ は、下図の大きなゆ



がんだ三角柱 $OAB-D'DA$ と相似になる。また、この大きなゆがんだ三角柱は、左下の三角柱の体積は同じである。したがって、 $CC'L-MA'N$ の体積は、やはり、 $(1/8)V_0$ となる。ここで、元の三角錐の体積を

2通りの方法で計算すると、

$$2(1/8)V_0 + 2(1/8)V = V \text{ となる。}$$

よって、 $3V = V_0$ となるので、錐の公式が証明できた。

おわりに

「流体を使った実験」（理科実験的、帰納的知識）、「特殊な例での確かめ」（特殊化）、「特殊な例とカバリエリの原理による証明」（特殊例から変換）が今までの中学生までに説明可能な方法と考えていた。また、高校生や教員の理解は、「積分（の利用）」や「等分区分求積」をもとにする。歴史的知識は「無限等比級数的方法」や「取り尽くし法」を教員経験の中で知識を得てくる。しかし、振り返って、「中学生にわかる証明がないか？」を自問すると、その答は経験をつなげるだけで得られた。昨年の本校研究協議会では公開授業の題材としても利用して頂き、数学科の先生方に感謝したい。