

# 熱音響自励振動の数値シミュレーション

名古屋大学工学研究科計算理工学専攻 石垣 将宏  
名古屋大学情報連携基盤センター 石井 克哉

## 1 はじめに

細管の軸方向に急激な温度勾配を与えることで、管内の流体が振動する現象は熱音響自励振動と呼ばれている。近年、熱音響自励振動のエンジンや冷凍機への応用が注目されている [1][2]。図 1 にエンジンと冷凍機の模式図を示す。熱音響エンジン及び冷凍機の利点として、

- エンジン：熱源を選ばない外燃機関，可動部をもたない
- 冷凍機：環境にやさしい（フロンなどの無使用），可動部をもたない

などが挙げられる。しかし、こうした熱音響エンジン、冷凍機には、十分な効率が出ないなどの問題がある。これらの問題を解決するためには、エンジンや冷凍機のスタックの細管内での熱音響自励振動のメカニズムを詳細に解析する必要がある。このため、本研究では1つの細管内の熱音響自励振動であるタコニス振動の解析を行う。

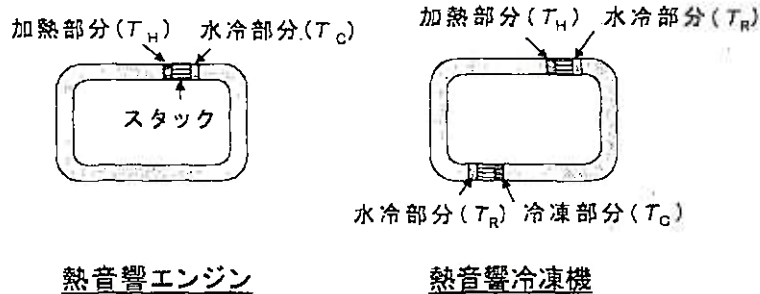


図 1 熱音響エンジン及び冷凍機。スタックと呼ばれる細管の束に温度勾配を与えると振動が発生する。また冷凍機にはスタックが2つあり、一方のスタックで振動が発生し、もう一方のスタックではその振動によって熱の輸送が生じる。

### 1.1 タコニス振動

液体ヘリウムの上に細管を立てると大振幅の振動が自発的に発生する現象が観測される。この振動はタコニス振動と呼ばれる [3]。

これまでにタコニス振動の理論的な研究が、Kramers[4] や Rott[5] によって行われている。次に理論的研

究の代表例である Rott の研究を要約する。

### 1.1.1 Rott による理論的研究

Rott はその理論の中で、円管と 2次元の矩形管の両方の場合を考慮している、しかし形状による差は小さいとしている、Rott はその理論の中で以下のような仮定を置いている、

1. 平均圧力は管内で一様
2. 圧力変動の動径方向の変化は無視する
3. 平均温度及び粘性の動径方向の変化は無視する
4. 軸方向の熱伝導はないものとする
5. 軸方向の速度勾配による摩擦はないものとする

基礎方程式は質量保存の式、運動量保存の式、エネルギー保存の式及び理想気体の状態方程式である、これらの方程式に出てくる物理量は時間平均量と振動量に分解して扱う、振動量は(振幅) × exp(iωt) の形で表されるものとする、ここで ω は一般的に複素数である、このとき振動量の振幅は微小であるとして方程式の線形化を行う、

線形化した方程式と以上のような仮定を用いて、Rott は温度勾配がある場合の圧力振幅の方程式を導いている、管の軸方向に x 軸をとり、圧力振幅を p<sub>amp</sub> とし (添字 'm' は時間平均量、'amp' は振動量を表す)、

$$[1 + (\gamma - 1)f^*]p_{amp} + \frac{d}{dx} \left[ \frac{a^2}{\omega^2} (1 - f) \frac{dp_{amp}}{dx} \right] - \frac{a^2}{\omega^2} \frac{f^* - f}{1 - \sigma} \frac{dp_{amp}}{dx} = 0 \quad (1)$$

ここで、

$$\theta = \frac{1}{T_m} \frac{dT_m}{dx}, \quad f^* = f(\sqrt{\sigma}\eta), \quad \eta = \left( \frac{i\omega}{\nu} \right)^{1/2} r_0 \quad (2)$$

$$f(\eta) = \frac{2J_1(i\eta)}{i\eta J_0(i\eta)} \quad (\text{円管の場合}), \quad f(\eta) = \frac{\tanh(\eta)}{\eta} \quad (2\text{次元矩形管の場合}) \quad (3)$$

である、γ は比熱比、a は断熱音速、σ は Prandtl 数、J<sub>0</sub>, J<sub>1</sub> は 0 次と 1 次の Bessel 関数、ν は動粘性係数である、|η| は管の内径 r<sub>0</sub> と粘性境界層厚さ δ ≈ (ν/ω)<sup>1/2</sup> の比となる、

式 1 は次の式に置き換えられる、

$$p_{amp} = -\frac{1}{G} \frac{d\psi}{dx}, \quad \psi = \frac{G}{k^2} \frac{dp_{amp}}{dx} \quad (4)$$

ここで、

$$G = [1 + (\gamma - 1)f^*] \exp \left[ -\int \frac{f^* - f}{(1 - \sigma)(1 - f)} \theta dx \right] \quad (5)$$

$$k = \frac{\omega}{a^*}, \quad a^* = a \left( \frac{1 - f}{1 + (\gamma - 1)f^*} \right)^{1/2} \quad (6)$$

である、

Rott は、片側が開端で、もう一方は閉端となった円管に図 2 で示すステップ関数状の時間平均温度の分布を課した、Rott は境界条件を以下のようにした、

$$p_{amp} = 0 \quad \text{at} \quad x = 0 \quad (7)$$

$$\frac{dp_{amp}}{dx} = 0 \quad \text{at} \quad x = L \quad (8)$$

$$p_{amp}(x = l + 0) = p_{amp}(x = l - 0) \quad (9)$$

$$\psi(x = l + 0) = \psi(x = l - 0) \quad (10)$$

ここで  $l$  は低温部の長さ、 $L$  は管の全長である。  $k_C$ 、 $k_H$  は低温部、高温部での波数である。条件 7,8,9 から低温部、高温部の圧力振幅  $p_{ampC}$ 、 $p_{ampH}$  は

$$\begin{aligned} p_{ampC} &= A \frac{\sin k_C x}{\sin k_C l} \\ p_{ampH} &= A \frac{\cos k_H(L-x)}{\cos k_H(L-l)} \end{aligned} \quad (11)$$

となる。更に式 4 及び条件 10, 11 から以下の式が得られる。

$$\frac{G_C}{k_C} \cot k_C l = \frac{G_H}{k_H} \tan k_H(L-l) \quad (12)$$

式 12 は温度勾配を与えた管内に定在波が存在する条件であり、与えられた条件における複素周波数  $\omega$  を与える。ある温度比を与えたときに、複素周波数  $\omega$  の虚部が正であれば、振動は減衰する。反対に負であれば振動が増幅する。更に  $\omega$  が実数であれば、振動が増幅も減衰もしない臨界状態となる。これにより Rott は定在的な振動が生じる温度比の領域を導いた。

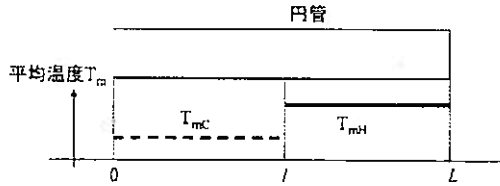


図2 Rott の用いた温度分布。  $T_{mH}$  は高温部分の時間平均温度、 $T_{mC}$  は低温部分の時間平均温度である。Rott は開管を考えた

### 1.1.2 Yazaki らによる実験

Rott によって導かれた発振温度比の領域を検証するための実験が Yazaki らによって行われている [6]。Yazaki らは気体ヘリウムを入れた両端を閉じた円管に図 3 に示すような温度勾配を与えた。これは Rott が設定した管を開端部分で 2 つ接合したものに相当する。Yazaki らはこのような管で自動発振が生じる温度比の領域を測定した。彼らは、Rott の理論による発振温度比の領域は彼らのとよく一致していると報告している。

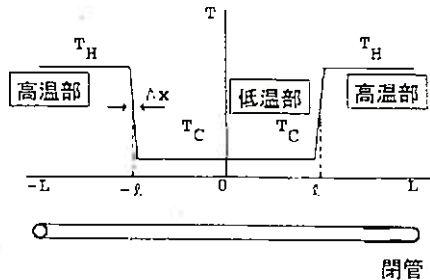


図3 Yazaki らの実験における温度分布。Yazaki らは閉管で実験を行った

## 1.2 本研究の目的

タコニス振動の発振温度比の領域は Rott の理論と Yazaki らの実験でよく一致したと報告されているが、Rott の用いた仮定が閉管でも成り立っているかは明らかではない。また Rott の理論からは、ある温度比を与えたときの自励振動の振幅の大きさが分からない。そこで本研究では Yazaki らと同様な条件で数値シミュレーションを行い、

1. 閉管に対して自励振動が生じている状態での Rott の仮定を検討する
2. タコニス振動の振幅と温度比の関係を明らかにする

ことを目的とする。

## 2 問題設定

本研究では簡単化のため、図 4 に示すような両端が閉端である管を 2 次元の矩形領域として扱う。管内の流体は室温で 1 気圧の気体のヘリウムを想定する。本研究で用いた物性値は、室温・大気圧下で密度  $0.167\text{kg/cm}^3$ 、音速  $1004\text{m/s}$ 、粘性係数  $19.6 \times 10^{-6}\text{Pa} \cdot \text{s}$  である。比熱比  $\gamma$  は  $\gamma = 5/3$  である。

管の断面方向に対称性を仮定する。管の角に原点  $O$ 、長さ方向に  $x$  軸、断面方向に  $y$  軸ととり、管の長さを  $l$ 、管の幅を  $w$  とする。本研究では  $l = 28\text{cm}$ 、 $w = 0.7\text{mm}$ 、 $\Delta l = 7.5\text{mm}$  とし、管の大きさに関しては一定とした。管の両端の壁を室温  $T_H$  にし管の中央部分の壁を低温  $T_C$  にすることで、図 5 のような階段状の温度勾配を長さ  $\Delta l$  の領域に与える。室温  $T_H$  を固定して、低温部の温度  $T_C$  をパラメータとして変化させた。このような管の両端を室温、管の中心部分を低温にしたときの管内の流れ及び温度、圧力を解析する。

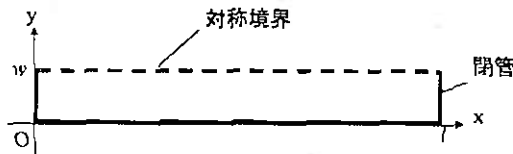


図 4 本研究で対象とする管

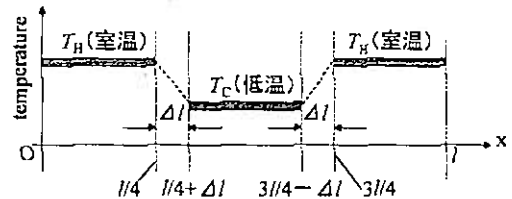


図 5 管壁に与える温度分布

## 3 計算手法

### 3.1 基礎方程式

基礎方程式には、以下に示す理想気体の 2 次元圧縮性の Navier-Stokes 方程式系を用いた、

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y} \right) \quad (13)$$

$$q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e+p)u \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e+p)v \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ R_4 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ S_4 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) & \tau_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \tau_{yy} &= \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ R_4 &= u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + \alpha \frac{\partial a^2}{\partial x} & S_4 &= u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + \alpha \frac{\partial a^2}{\partial y} \end{aligned} \quad (16)$$

ここで  $a$  は音速で、 $a^2 = \gamma(\gamma - 1)[e/\rho - 1/2(u^2 + v^2)]$  の関係にあり、 $\alpha$  は  $\alpha = k/Pr(\gamma - 1)$  で表される。 $t$  は時間、 $Re$  は Reynolds 数、 $u$ 、 $v$  はそれぞれ長さ方向、断面方向の流速、 $\rho$  は密度、 $p$  は圧力、 $e$  は全エネルギー密度である。また  $\gamma$  は比熱比、 $k$  は熱伝導度、 $\mu$  は粘性係数、 $Pr$  は Prandtl 数である。本研究では代表速度及び代表密度を室温・1 気圧下での気体ヘリウムの音速及び密度とし、代表長さを管長  $l$  とする。

### 3.2 計算スキーム

数値計算には、Beam & Warming[7] や Steger[8] らによる近似因子分解法に基づいて Shida らが考案したブロック 5 重対角行列スキーム [9] を用いた。

### 3.3 計算格子

計算格子は長さ方向に 300 点、断面方向に 36 点の不等間隔直交格子を用いた。壁近傍に格子点が集中するように、格子点は双曲線正接関数を用いて生成した。長さ方向の格子間隔の最大値は  $3.7 \times 10^{-3}$ 、最小値は  $2.8 \times 10^{-3}$ 、断面方向の格子間隔の最大値は  $7.9 \times 10^{-5}$ 、最小値は  $5.9 \times 10^{-5}$  である。

### 3.4 境界条件

境界条件は  
管壁上で

$$\begin{cases} u = v = 0 \\ \partial p / \partial n = 0 \end{cases} \quad (17)$$

対称境界上で ( $0 \leq x \leq l, y = w$ )

$$\begin{cases} \partial u / \partial y = 0 \\ v = 0 \\ \partial \rho / \partial y = \partial p / \partial y = 0 \end{cases} \quad (18)$$

である。ここで  $n$  は壁に垂直な方向を表す。温度に関する境界条件は、管の中心部分で温度  $T_C$ 、端部分で  $T_H$  となるようにする。ただし、初期の温度の不連続を避けるために、管の中心部分の温度は室温  $T_H$  から時間経過とともに低下していき、温度  $T_C$  となるようにする。

また、質量保存を保証するために、密度に関する補正を各ステップ毎に行った。

### 3.5 初期条件

計算は、 $T_H = 300K$  (一定) とし温度比  $T_H/T_C$  をパラメータにして行った。 $T_H/T_C$  は 5.0 から 50.0 の範囲の値とした。温度比  $T_H/T_C = 9.1$  以外の温度比では、温度比  $T_H/T_C = 9.1$  で振動が発生した状態を初期状態にして計算を行った。

## 4 結果

### 4.1 圧力の時間発展

図 6 に  $x = l/300$  の位置 (管の端部分) で、異なる温度比を与えたときのそれぞれの圧力の時間発展を示す。なお温度比  $T_H/T_C = 5$  の結果は、温度比を  $T_H/T_C = 9.1$  にして振動が発生している状態から、低温部分の温度を変えたときの結果である。温度比  $T_H/T_C = 5$  の場合には振動が減衰している。一方温度比  $T_H/T_C = 9.1$  の場合には振動が増幅して、ほぼ定常状態になる。これらの温度比が小さい場合には振動は減衰し、大きい場合には振動が増幅するという結果は実験事実と定性的に一致している。

### 4.2 Rott の仮定の検証

#### 4.2.1 断面方向の圧力振幅

Rott は断面方向には圧力振幅は一樣であるとした。そこで図 7 に温度比  $T_H/T_C = 9.1$  としたときの断面方向にわたる圧力振幅  $p_{amp}$  の線平均からのずれを示した。 $x < l/4$  は高温領域、 $x > l/4$  は低温領域、 $x = l/4$  は温度勾配を与えた領域である。この図から高温部から低温部にかけて、圧力振幅はほとんど一樣と見なせる。

#### 4.2.2 断面方向の平均温度

また Rott は断面方向の時間平均温度も一樣であると仮定している。図 8 に幅方向にわたる時間平均温度の線平均からのずれを示す。高温部では時間平均温度はほとんど一樣であるが、温度勾配を与えた部分から低温部にかけて、最大で 40 % 程度の線平均値からの差がある。これは、閉管の場合高温部以外の領域では Rott の平均温度に対する仮定からのずれが大きいことを示す。

### 4.3 圧力振幅の温度比依存性

次に温度比と振幅の関係について考える。図 9,10 に、各温度比における  $x = l/300$  (高温部分) での圧力振幅の値を示す。図 10 は温度比 5-8 の部分を拡大した図である。

図 9 から温度比 5.7 以下では振動が減衰した。温度比 5.9 以上で有限な大きさの振幅の振動が生じることが分かった。また温度比 10 以上では温度比を大きくすると、圧力振幅は小さくなった。

図 10 で温度比 5.9 以上の数点の圧力振幅を外挿した。これから、ある温度比以下になると、有限の大きさの振幅が不連続に 0 になる現象が発生することが予想される結果を得た。

#### 4.4 振動の生じているときの温度場、圧力場および流れ場

Rott の時間平均温度に関する仮定が高温領域以外で、ずれが大きい原因を考えるために管内の場を解析する。また管内の場が自励振動が生じている際にどのようにになっているかも検証する。

##### 4.4.1 管内の温度分布及び圧力分布

温度比  $T_H/T_C = 9.1$  での管内温度の1周期間にわたる変化を図 11 に示す。管内で流体は長さ方向に振動しているので、温度も長さ方向に振動しており、断面方向に温度勾配ができています。はじめ高温部にあった流体は振動することにより、低温部へと移動する。このとき高温の流体から低温の管壁へと熱が伝わる。温度の低下した流体は再び、高温部に移動する。先ほどとは逆に、高温の管壁から低温の流体へと熱が伝わる。この繰り返しによって、流体は管壁と熱の授受を行いながら、その熱の一部を振動の力学的エネルギーに変換することで振動を継続すると考えられる。

高温部と低温部での温度境界層の厚さを見積もったところ、高温部で  $2 \times 10^{-3}$ 、低温部で  $5 \times 10^{-4}$  程度であった。この厚さ程度の領域で急激な温度勾配がついている。高温部と低温部で温度境界層の厚さが違うために、この2つの領域における流体の授受する熱に差が生まれ、熱の一部を振動のエネルギーに変換できる。

また管内の圧力分布は断面方向には圧力はほぼ一様である。管の両端で圧力の変動が大きく、一方で管の中心で圧力の変動は小さい。

##### 4.4.2 管内の流速

温度比  $T_H/T_C = 9.1$  での流速ベクトルの1周期間にわたる変化を図 12 に示す。流体は長さ方向に振動していることが分かる。ここで管の中心の低温部に注目すると、断面方向にも振動していることが分かる。この断面方向の振動は管の中心部分でのみ生じていて、管内全体に伝わることはない。この振動が平均温度に影響を与えている可能性があるが、その解析は今後の課題である。

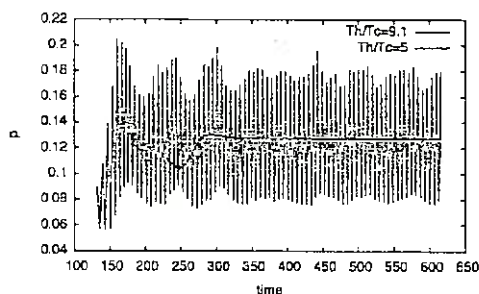


図6  $x = l/300$ (管の端部分)での圧力の時間発展。(温度比  $T_H/T_C = 5.0, 9.1$ )

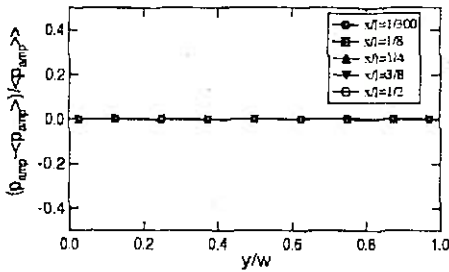


図7 断面方向にわたる圧力振幅、 $\langle p_{amp} \rangle$  は同じ  $x$  上における圧力振幅  $p_{amp}$  の線平均を表す。

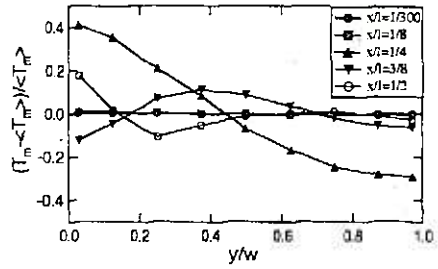


図8 断面方向にわたる時間平均温度、 $T_m$  は時間平均、 $\langle T_m \rangle$  は同じ  $x$  上における時間平均温度の線平均を表す。

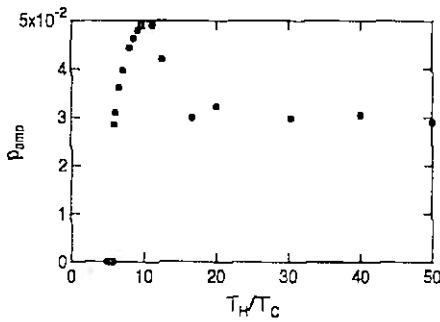


図9 圧力振幅の温度比依存性

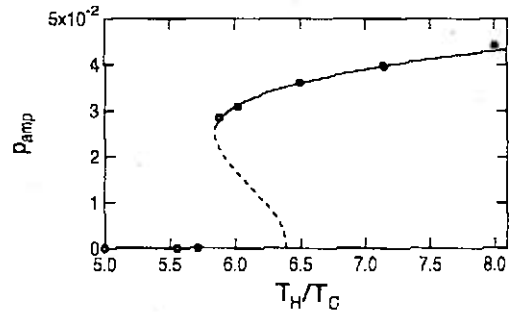


図10 圧力振幅の温度比依存性 (温度比5から8を拡大)

## 5 まとめ

タコニス振動の数値シミュレーションを行い、自励振動の生じている管内の圧力、温度及び流れ場を解析した。

2次元閉管内でも、Rottの仮定が成立するかを調べ、Rottの仮定はおおよそ満たされるが、温度勾配をもつ部分から低温部分では、時間平均温度に関する仮定からのずれが大きいことが分かった。

高温部と低温部の温度比を変えたときに、温度比5.7以下では振動が観測されず、5.9以上では有限な大きさの振幅の振動が生じた。温度比を10以上にすると、圧力振幅はある値を極大値にして、小さくなっていくことが分かった。また温度比5.9以上の数点の圧力振幅を外挿したところ、有限の大きさの振幅が不連続に0となる現象が発生することが予想された。今後、振動が発生する際に分岐の解析を行うことが課題として挙げられる。

また管内の流れ場の解析を行った。その結果、管内の流体は管の長さ方向に振動するが、低温部分では断面方向に対しても振動していることが分かった。この断面方向の振動が時間平均温度になんらかの影響を与えている可能性がある。



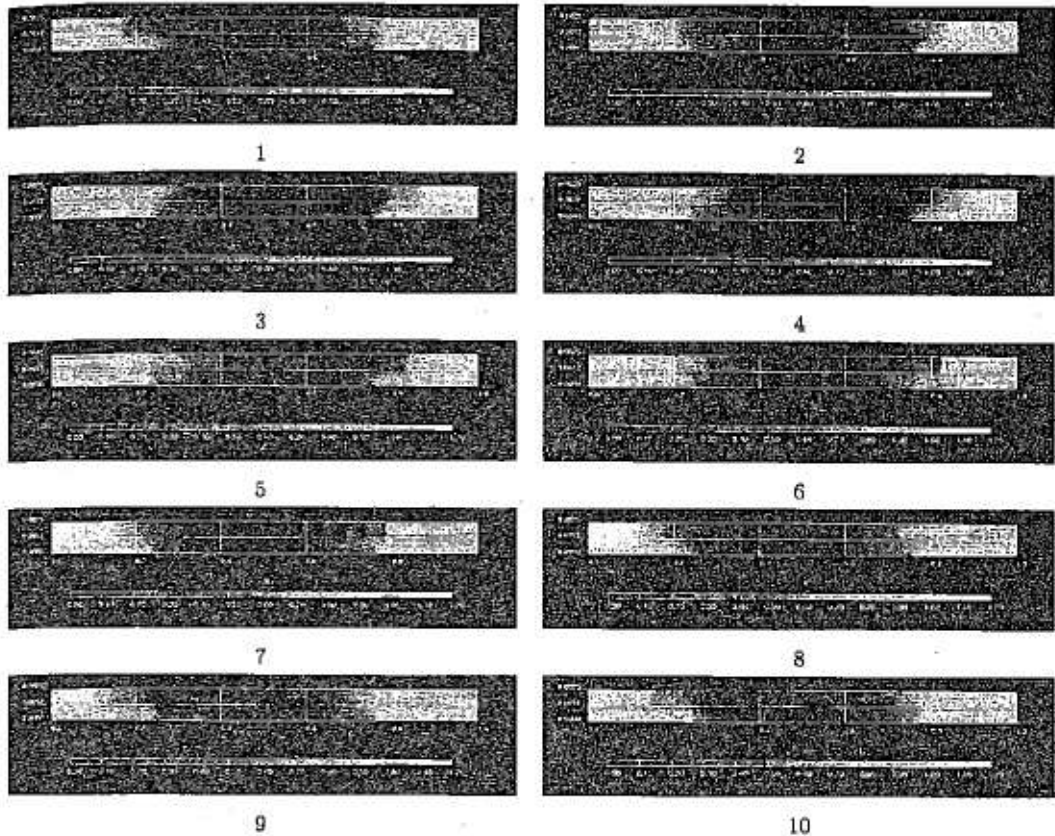


図 11 温度分布の時間変化. 1/10 周期毎の時間発展を示す. 図の下部の番号は時間発展の順序を表す.

## 参考文献

- [1] S.Backhaus and G.W.Swift, "A thermoacoustic Stirling heat engine", *Nature*, 399, (1999)
- [2] T.Yazaki et al, "A pistonless Stirling cooler", *Appl.Phys.Lett.*, 80, (2002)
- [3] K.W.Taconis et al, "Measurements concerning the vapour-liquid equilibrium of solutions of He3 in He4 below 2.19° K", *Physica*, 15, (1949)
- [4] H.A.Kramers, "Vibrations of a Gas Column", *Physica*, 15, (1949)
- [5] N.Rott, "Damped and Thermally Driven Acoustic Oscillations in Wide and Narrow Tubes", *Z.Angew.Math.Phys.*, 20, (1969) & "Thermally Driven Acoustic Oscillations. Part 2 stability Limit for Helium", 24, (1973)
- [6] T.Yazaki et al, "Experiments on Thermally Driven Acoustic Oscillation of Gaseous Helium", *J.Low.Temp.Phys.*, 41, (1980)
- [7] R.Beam and R.F.Warming, "An Implicit Finite Difference Algorithm for Hyperbolic Systems in Conservation Law Form", *J.Comput.Phys.*, 22, (1976)

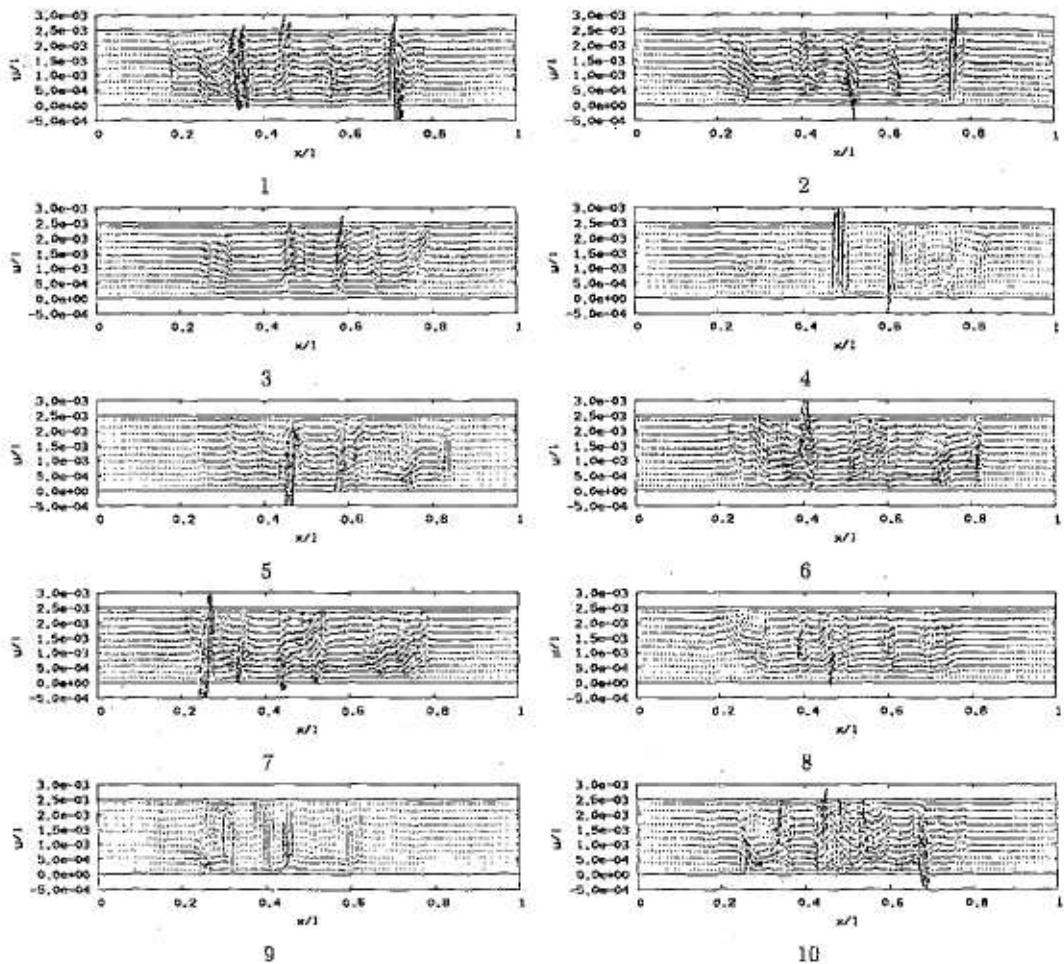


図 12 渦流分布の時間変化. 1/10 周期毎の時間発展を示す. 図の下部の番号は時間発展の順序を表す.

- [8] J.L.Steger, Implicit Finite-Difference Simulation of Flow about Arbitrary Two-Dimensional Geometries, AIAA J., 16, (1978)
- [9] Y.Shida et al, "Computation of Dynamic Stall of NACA-0012 Airfoil", AIAA J., 25, (1987)