指値注文市場における均衡ビッド・アスク・スプレッド

太田　亘

This article investigates the optimal order submission strategies and the expected bid-ask spread in the equilibrium of limit order markets. In submitting orders to limit order markets, traders can choose market orders or limit orders. If a market order is more advantageous than a limit order, a trader submits a market order, and vice versa. As a result, in an equilibrium, the bid-ask spread is formed by marginal traders for whom a limit order and a market order are indifferent. In our analysis, limit orders are assumed to expire one period after their submission to simplify the states of the limit order book. The model predicts that the bid-ask spread is narrower if incoming orders are more plentiful, if a larger number of traders are patient, and if the transaction fee of market orders is larger. The bid-ask spread is more volatile when there are fewer hours before the close of the market. In addition, the small tick size can make the bid-ask spread wide.

I．はじめに

取引所は，多くの投資家の売買注文を集中し，流動性を高めることで，取引を容易にする場である。取引所でどのように取引が行われるかは，取引所が採用する取引システムまたは取引ルールにより異なる。例えば，株式売買における代表的な取引システムとして，ディーラー市場，指値注文市場，それらのハイブリッドであるスペシャリスト・システムがある。[1] この中で指値注文市場は，パリ，東京，トロントなどの証券取引所で採用されているとともに，米国における ECNs（electronic communications networks）でも採用されており，株式売買における重要性が非常に高い。本稿では，その指値注文市場における投資家の注文戦略および価格形成について考察を行う。

指値注文市場で売買するにあたり，投資家は，値段を指定する指値注文と，値段を指定しない成行注文を選択することができる。売り指値注文の値段をアスク（ask，売り気配），買い指値注文の値段をビッド（bid，買い気配）とよぶ。指値注文が取引所に出されると，まず未執行の指値注文の控えである板に記録される。板上の最小のアスクと最大のビッドの差は，ビッド・アスク・スプレッド（bid-ask spread）またはスプレッド（spread）とよばれる。板に指値注文が待っているときに成行注文が出ると，約定が行われる。スプレッドが大きい場合には，売り（買い）成行注文はより低い（高い）価格で約定し，取引費用が高くなる。そのためスプレッドは，取引のしやすさ—流動性—の指標の一つとして用いられている。指値注文市場の均衡において，スプレッドがどのような水準になるかを分析することが，本稿の目的の一つである。

ここでは，指値注文市場について，投資家が離散時点で注文を出すモデルを考える。一般に，指値注文市場の分析では，板の状態が複雑になり分析が困難になるのを防ぐため，何らかの強い仮定をおくことが多い。本稿で

は，投資家は指値注文を1単位のみ出すことができ，しかも指値注文は取引所に出された1期後に自動的にキャンセルされると仮定する。この仮定により，各期に板にある指値注文は多くても1単位となり，板の状態が単純化され，分析が容易になる。

指値注文市場の均衡には，次のような特徴がある。取引を行うにあたり，投資家は，自分にとって最適な注文を選択する。売手は，自分にとって価格上不利となる値段の低い指値注文を出すと，将来の買手が有利な値段で取引できるために成行注文を出すことで約定できる可能性が高くなる。逆に売手は，自分にとって価格上有利な値段の高い指値注文を出すと，約定できる可能性が低くなる。投資家は，このような，価格と売買できる可能性である執行確率のトレードオフを考慮して，注文を選択する。指値注文市場では，すべての投資家が，指値注文と成行注文を出すことができるため，均衡では，指値注文から得られる効用と成行注文から得られる効用が等しくなるような限界的投資家が存在し，限界的投資家の効用水準に応じてアスク，ビッドおよびスプレッドが形成される。

本稿の分析により，具体的に以下のような結果が得られる。(1)注文流入が売り（買い）に偏っているほどアスクとビッドが低く（高く），スプレッドは狭い。また市場への注文流入が活発なほど，スプレッドは狭い。(2)迅速に取引したい投資家の比率が高いとき，スプレッドは広い。(3)手数料がかかる場合，成行注文の手数料が高いほどスプレッドは狭く，指値注文の手数料が高いほどスプレッドは広い。(4)取引に最終時点がある場合，取引終了が近づくほど，アスクおよびビッドの変動は大きい。(5)呼値の刻みの制約があるとき，刻みを小さくすると，スプレッドが広くなる場合があり得る。

指値注文市場の動学分析として，Cohen *et al.*（1981），Parlour（1998），Foucault（1999），Goettler *et al.*（2005），Foucault *et al.*（2005），Rosu（2005），Ohta（2006）などがある。Cohen *et al.*（1981）およびFoucault（1999）は，指値注文が1期間で自動的にキャンセルされるケースを分析している。本稿は，Foucault（1999）を下に，様々なケースにおいて，指値注文市場におけるスプレッドがどのように形成されるかについて議論する。

以下，第2節で基本モデルを提示し，第3節でその均衡について説明する。第4節で割引因子が異なる投資家がいる場合，第5節で取引費用がかかる場合，第6節で取引時点が有限である場合，第7節で呼値に制約がある場合を扱う。最後の第8節はまとめにあてられる。証明はすべて省略する。

II．基本モデル

指値注文市場において，価格優先・差別価格ルールの連続オークションにより，証券を売買するケースを考える。取引期は離散であり，各期を $t \in \{0, +1, \cdots, \infty\}$ で表す。

投資家には，売手と買手がいる。売手は証券を1単位保有しており，買手は0単位保有している。売手は証券を $v_L > 0$ と評価しており，買手は $v_H > 0$ と評価している。$\Delta = v_H - v_L > 0$ としよう。すなわち，買手の証券の評価額は売手のそれよりも高く，この異質性が取引の利益を生む。投資家は，時間加法的・危険中立的な期待効用関数をもっており，1期間の割引因子 δ は $\delta = 1$ である。

売手は，価格Pで売ることができれば$P-v_L$の効用を得，買手は，価格Pで買うことができればv_H-Pの効用を得るが，売買できなかったときの効用を0とする。

各期において，確率$\alpha\in(0, 1]$で投資家が選ばれ，取引所に注文を出すことができる。さらに，投資家が選ばれた下で，彼が売手である確率を$\beta\in(0, 1)$とする。ある期において，売手が選ばれる確率π_sは$\pi_s=\alpha\beta\in(0, 1)$であり，買手が選ばれる確率$\pi_b$は$\pi_b=\alpha(1-\beta)\in(0, 1)$である。$z=1-\pi_s-\pi_b\in[0, 1)$の確率で投資家は選ばれず，注文は出ない。これらの確率は，時点に依存しないと仮定する。また，各投資家にとって，注文を出すことのできる機会は，多くても1回だけとする。

取引所が受け付ける注文は，売り指値注文(limit sell order, LS)，買い指値注文(limit buy order, LB)，売り成行注文(market sell order, MS)または買い成行注文(market buy order, MB)である。但し，MSはアスクがv_LのLS，MBはビッドがv_HのLBとして扱う。指値注文を出すにあたって値段を指定するが，取引所はどのような値段を選択できるかについて，呼値の刻み(tick size)のルールを定めている。指定可能な値段の集合をNとしよう。ここでは，投資家は実数の中から値段を選択できると仮定する。また，注文の数量は1単位に限定されており，注文発注の費用はゼロとする。板情報は公開されており，投資家は板を見てから注文を出すことができる。

取引所は，執行されず板に残っている指値注文をどのように処理するかについて，ルールを定めている。例えば東京証券取引所では，すべての注文は各取引日の終了時にキャンセルされる。それに対してニューヨーク証券取引所は，複数の取引日にわたって有効な注文を受け付けている。また多くの取引所で，未執行の指値注文の修正を認めている。ここでは，注文を出した後，投資家自身が注文の修正およびキャンセルをできないと仮定する。これにより，各投資家が静学問題を解くことになり，分析が簡単になる。本稿ではさらに，指値注文のキャンセルについて，次の仮定1を一貫して仮定する。

仮定1：指値注文は，取引所に出された1期後末に，自動的にキャンセルされる。

Cohen *et al.* (1981)およびFoucault (1999)も同様の仮定をしている。仮定1の下で，指値注文の執行確率は，板の状態に依存しない。但し，執行確率は，将来の投資家の注文戦略に依存するという点で，内生化されている。仮定1を緩めると，板に複数の指値注文が存在し，指値注文間で直接的な価格競争が行われ，より現実的な状況を扱うことができるが，板の状態が複雑になるため，分析は困難になる。一般的ケースについての分析は，今後の課題として残されている。[2)]

板は，仮定1の下で，次のように表現される。各期初の板には，1単位のLSがあるか，1単位のLBがあるか，または指値注文が全くないか，のいずれかである。1期前に出されたLSのアスクをA，LBのビッドをB，板に指値注文が残っていない状態をnとする。板にAのLSがある場合を(n, A)，BのLBがある場合を(B, n)，板が空の場合を(n, n)とする。各期初の板の状態の集合は，$\Phi=\{(B, n), (n, A), (n, n): A, B\in N\}$である。

売買は，板上のLS（LB）に対して，MB（MS）が入ったときに，板で待っている指値注文の値段で行われる。また東京証券取引所などと同様に，板にLS（LB）があるとき，その値段よりも高い（低い）値段のLB（LS）を，MB（MS）として扱う。

スプレッドは板上のアスクとビッドの差である。仮定1により，板にLSとLBが同時に存在することはない。その意味で，このモデルにスプレッドは存在しない。但し分析のため，指値注文が板にないとき，v_LでLBが暗黙的に供給され，v_HでLSが暗黙的に供給されていると仮定し，スプレッドを計算する。これは，Seppi（1997）と同様の仮定である。

以上，様々な仮定をしたが，本稿の後の部分で緩められるものを特にまとめておこう。

仮定2：すべての投資家の割引因子δは$\delta=1$である。
仮定3：注文発注の費用はゼロである。
仮定4：取引期tは離散無限期あり，$t\in\{0, +1, \cdots, +\infty\}$とする。
仮定5：指値注文の値段を実数で指定できる。

本稿で用いる均衡概念は，次のようなものである。モデルにおいて投資家は，成行注文および実数の値段を指定する指値注文の中から，注文を選択する。また，板の状態が，状態変数となり，その集合はΦである。投資家は，板を見た上で，期待効用を最大化する注文を取引所に出す。板および売手・買手の区別などの情報に応じて，取引所に出す注文を指定するのが，投資家の戦略である。取引所が注文を受け取ると，条件が満たされれば約定が行われ，またルールに従い板が変化する。均衡として，次のような純粋戦略マルコフ完全均衡を考える。

定義：以下の条件を満たす買手および売手の戦略の組合せを，純粋戦略マルコフ完全均衡（pure strategy Markov perfect equilibrium, MPE）とよぶ。(1)投資家の戦略は，投資家が売手か買手か，および期初の板の状態にのみ依存し，時点に依存しない。(2)投資家の戦略は，純粋戦略である。(3)ある板に対する売手および買手の戦略は，売手と買手のすべての板に対する戦略を所与に，自身の期待効用を最大化している。

次節で，仮定1から仮定5の下での均衡について説明する。それ以降の節において，仮定2から仮定5のそれぞれを緩めた場合，どのような均衡が達成されるかについて議論する。

Ⅲ．均衡

指値注文市場の均衡では，投資家にとって指値注文と成行注文は無差別となる。次の定理1にある戦略が，それを示している。

定理1（Foucault（1999））：仮定1から5の下で，次の戦略が唯一のMPEとなる。$\omega_r^s=\pi_b(1-\pi_s)\Delta/(1-\pi_s\pi_b)>0$および$\omega_r^b=\pi_s(1-\pi_b)\Delta/(1-\pi_s\pi_b)>0$とし，また$A_r=v_H-\omega_r^b$および$B_r=v_L+\omega_r^s$とする。売手は，$(B, n)$において$B_r\leq B$の場合にMSを出し，それ以外は$A_r$のLSを出す。買手は，$(n, A)$において$A\leq A_r$の場合にMBを出し，それ以外は$B_r$のLBを出す。均衡における期待スプレッド$s_r$は$s_r=(1-\pi_s)(1-\pi_b)(1+\pi_s+\pi_b-\pi_s\pi_b)\Delta/(1-\pi_s\pi_b)^2$である。

定理1は，証券価値が変動しない点で，Foucault（1999）の特殊ケースである。また，定理1のω_r^sおよびω_r^bは，均衡における売手および買手の期待効用である。

均衡における気配A_rとB_rは，以下の連立方程式の解である。

$$B_r - v_L = \pi_b(A_r - v_L),$$
$$v_H - A_r = \pi_s(v_H - B_r)$$

買手がB_rのLBを出すことを所与とすると，LSのアスクAが$v_H - A \geq \pi_s(v_H - B_r)$であれば，次期の買手がMBを出す。この条件を満たすアスクの中で，売手の期待効用が最も高くなるアスクA_rは，$v_H - A_r = \pi_s(v_H - B_r)$である。売手は，将来の買手に対して，LBから得られる期待効用を補償することで，MBを引き出す。買手の問題は売手の問題と対称であり，買手は将来の売手からMSを引き出すようビッドを設定する。

均衡におけるアスクとビッドの差は，$A_r - B_r > 0$と正であり，板に空白ができる。この現象は，以下で説明するように，Cohen *et al.*（1981）が議論した引力効果による。売手が均衡経路上の板(B_r, n)に直面しているとき，アスクAのLSの執行確率は以下のようになる。$A \leq B_r$であればMSと扱われて執行確率は1，$B_r < A \leq A_r$であれば，まず板に記録され，将来MBが出たときに執行されるので執行確率はπ_b，$A_r < A$であればMBが出ないため執行確率は0である。$A = B_r$における執行確率が1であるのに対し，B_rよりもわずかに高いアスクは，価格は売手にとって有利であるが，執行確率がπ_bと不連続に低下するため，全体として不利となる。売手はLSを出すにあたり，執行確率の低下を補うために，十分に高いアスクを提示する必要があるが，そのようなアスクはA_rである。A_rよりも低いアスクのLSを出すよりもMSを出す方が有利であり，注文がビッドでの約定に引きつけれ，$A \in (B_r, A_r)$のLSは出ない。このような現象は引力効果とよばれる。同様に，買手も$B \in (B_r, A_r)$のLBは出さない。ここでは，執行確率に不連続性があるため，均衡におけるアスクはビッドよりも高くなる。

注文流入の偏りは，アスク，ビッドおよびスプレッドに次のような影響を与える。

補題1：定理1の均衡において，注文流入αが一定の場合を考える。(i)売手の比率βが高いとき，アスクおよびビッドは低い（$\partial A_r/\partial\beta < 0$および$\partial B_r/\partial\beta < 0$）。(ii)売手の比率$\beta$が$\beta = 1/2$のとき，期待スプレッドが最も大きい。

売手の比率が上昇すると，LBの執行確率が上昇することで買手の期待効用が高まる。そのため売手は，買手のMBを引き出すために，より低いアスクを提示しなければならない。低いアスクは売手の期待効用を下げるため，買手はより低いビッドで売手のMSを引きつけることができる。以上より，売手の比率が増加することで，アスクもビッドも低下する。また$0 < \beta < 1/2$において，売手の比率が増加するとき，注文の偏りがなくなるまでアスクの低下よりもビッドの低下の方が大きく，売りと買いが均等化する$\beta = 1/2$のとき，期待スプレッドが最大となる。

注文流入の活発さは，アスク，ビッドおよびスプレッドに次のような影響を与える。

補題2：定理1の均衡において，売手と買手の比率が同じ場合（$\beta = 1/2$）を考える。α

が高く注文流入が活発なほど，アスクは低く（$\partial A_r/\partial\alpha<0$），ビッドは高く（$\partial B_r/\partial\alpha>0$），期待スプレッドは小さい（$\partial s_r/\partial\alpha<0$）。

注文流入が活発であるとき，成行注文が出やすいため，指値注文からの期待効用が高くなる。よって，成行注文を引き出すため，投資家はより積極的な指値注文を出す必要がある。そのため，アスクが下がり，ビッドが上がり，期待スプレッドは狭くなる。また取引価格の分散は，期待スプレッドに比例しており，注文流入が活発なとき，取引価格の分散も小さくなる。

このモデルの均衡では，売手と買手が出会ったとき，必ず取引が行われる。その意味で均衡における資源配分は最適である。取引価格は状況により変化するが，資源配分には影響せず，売手と買手の所得分配に影響を与えるのみである。

Ⅳ．忍耐強さ

前節では，売手・買手はそれぞれ同質的であると仮定した。現実には，急いで取引したい投資家と，急がなくてもよい投資家がいると考えられる。Foucault *et al.*（2005）は，指値注文を一旦市場に出すと執行されるまでキャンセルされない場合について，割引因子の異質性の効果を分析している。それに対して本節では，指値注文が1期間でキャンセルされる場合の異質性の影響を分析する。以下ではまず均衡を提示し，次に忍耐強い投資家の比率がスプレッドに与える影響を考察し，最後に注文流入がスプレッドに与える影響を考察する。

次の定理2は，忍耐強さの異質性が投資家間で大きいとき，忍耐強い投資家が成行注文を出さず指値注文のみ出す均衡が存在することを示している。

仮定2'：売手・買手それぞれについて，確率$\theta\in[0, 1]$で投資家pであり，残りの確率$1-\theta$で投資家iである。投資家pの割引因子は1であり，投資家iの割引因子は$\delta\in(0, 1)$である。

定理2：$\beta=1/2$とする。仮定1，2'，3，4，5の下で，次のMPEが存在する。

ケース1：$\alpha(1-\delta)\leq 2\theta/(1-\theta)$の場合。$\omega_r=\alpha\Delta/(2+\alpha)$とする。売手pは，$(B, n)$において$B\geq B_r$であればMSを出し，それ以外は$A_r$のLSを出す。売手iは，$(B, n)$において$B\geq v_L+\delta\omega_r$であればMSを出し，それ以外は$A_r$のLSを出す。買手pは，$(n, A)$において$A\leq A_r$であればMBを出し，それ以外は$B_r$のLBを出す。買手iは，$(n, A)$において$A\leq v_H-\delta\omega_r$であればMBを出し，それ以外は$B_r$のLBを出す。期待スプレッドは$s_r$である。

ケース2：$\alpha(1-\delta)\geq 2\theta/(1-\theta)$の場合。$\omega_p=\alpha(1-\theta)\Delta/(2+\delta\alpha(1-\theta))$に対し，$A_i=v_H-\delta\omega_p$および$B_i=v_L+\delta\omega_p$とする。売手pは，$(B, n)$において$B\geq v_L+\omega_p$であればMSを出し，それ以外は$A_i$のLSを出す。売手iは，$(B, n)$において$B\geq B_i$であればMSを出し，それ以外は$A_i$のLSを出す。買手pは，$(n, A)$において$A\leq v_H-\omega_p$であればMBを出し，それ以外は$B_i$のLBを出す。買手iは，$(n, A)$において$A\leq A_i$であればMBを出し，それ以外は$B_i$のLBを出す。期待スプレッドは，

$$s_p=\frac{4+\alpha(1-\theta)\{2+\delta(2-\alpha(1+\theta))\}}{(2+\alpha(1-\theta))(2+\delta\alpha(1-\theta)}\Delta$$

である。

ケース1において，$A_r=v_H-\omega_r$ および $B_r=v_L+\omega_r$ であり，A_r および B_r は定理1のアスクおよびビッドと同じである。また ω_r は，ケース1の均衡における投資家pの期待効用である。ケース2において，A_i および B_i は以下の連立方程式の解である。

$$B_i-v_L=\delta\pi_b(1-\theta)(A_i-v_L),$$
$$v_H-A_i=\delta\pi_s(1-\theta)(v_H-B_i)。$$

ω_p は，ケース2の均衡における投資家pの期待効用である。すべてのパラメータについて，$A_i>A_r>B_r>B_i$ となる。

ケース1の均衡は，δ が大きいかまたは θ が大きく，投資家間の異質性が小さい場合に存在する。均衡経路上における投資家行動は，投資家が同質的な定理1の均衡と同じであり，売手は A_r の LS を出し，すべての買手はそれに対して MB を出す。一方，買手は B_r の LB を出し，すべての売手はそれに対して MS を出す。

これに対してケース2の均衡は，δ が小さいかまたは θ が小さく，投資家間の異質性が大きい場合に存在する。ケース2の均衡経路上において，売手はpもiも空の板に対して A_i の LS を出すが，その LS に対して買手iは MB を出し，買手pは B_i の LB を出す。同様に，買手はpもiも空の板に対して B_i の LB を出すが，その LB に対して売手iは MS を出し，売手pは A_i の LS を出す。すなわち，成行注文を出すのは，割引因子が小さい投資家iのみである。取引をできるだけ早く行いたい投資家iは，板にある指値注文の値段が自分に不利であっても，成行注文を出しやすい。そのため，そのような投資家iが十分に多く市場に流入し，成行注文が多く出るのであれば，忍耐強い投資家pは，将来の投資家pとの取引を諦め，1期待って執行確率を落としてでも投資家iと有利な価格で取引することを望む。そのため，ケース2の均衡において，投資家pは成行注文を出さない。

投資家pの比率 θ が高いとき，すべての投資家が成行注文を出すケース1の均衡が実現し，θ が低いとき，投資家pが成行注文を出さないケース2の均衡が実現する。θ が高い状態から低い状態に移り，忍耐強い投資家が減少した場合，期待スプレッドは次のように変化する。

補題3：定理2の均衡において，他のパラメータが一定の下で，投資家pの比率 θ が1から低下する場合，期待スプレッドは次のように変化する。当初，期待スプレッドは一定であるが，$\theta=\alpha(1-\delta)/(2+\alpha(1-\delta))$ において不連続に拡大し，それ以降は θ の減少により低下するが，$\theta=1$ の場合の期待スプレッド以下に低下することはない。

投資家iの比率が一定水準に達すると，投資家pは成行注文を出さなくなり，指値注文の値段はより消極的になり，期待スプレッドは急拡大する。その水準を超えてさらに投資家iの比率が高まると，成行注文が出る可能性が高まることで指値注文からの期待効用が高くなり，成行注文を引き出すためにより積極的な価格付けが行われ，期待スプレッドは狭くなる。但し，投資家pが成行注文を出すケース1の場合ほど期待スプレッドは狭くならない。大局的にみると，急いで取引をしたい投

資家iの比率が高まることで，期待スプレッドは広くなるといえる。

市場への注文流入αが少ないと，すべての投資家が成行注文を出すケース1の均衡が実現するが，注文流入が多いと，投資家pが成行注文を出さないケース2の均衡が実現する。注文流入が活発になる過程で，期待スプレッドは次のように変化する。

補題4：定理2の均衡において，他のパラメータが一定の下で，注文流入αが0から上昇した場合，期待スプレッドは次のように変化する。当初，期待スプレッドは低下するが，$\alpha = 2\theta/(1-\theta)/(1-\delta)$において不連続に上昇し，それ以降$\alpha$の増加により低下する。但し，$2\theta/(1-\theta)/(1-\delta) > 1$のとき，期待スプレッドの不連続な上昇は観察されない。

注文流入が増加すると，成行注文が出る可能性が高まり，指値注文からの期待効用が上昇するため，成行注文を引き出すためにより積極的な価格付けが行われ，期待スプレッドは低下する。しかし，注文流入がある一定レベルを超えると，忍耐強い投資家pは成行注文を出さなくなるとともに，期待スプレッドが不連続に拡大する。投資家により忍耐強さの程度が大きく異なるとき，補題4のように，取引が活発になったとき，平均スプレッドが不連続に拡大すると予想される。実際にこのような不連続性が観察されるかについての分析は，実証的課題である。

V．取引費用

取引所で売買するにあたり，投資家は，取引所に注文を取り次ぐ取引参加者（証券会社）に手数料を支払うとともに，取引参加者は取引所に手数料（負担金）を支払う。例えば日本の株式市場では，1999年の株式売買委託手数料の自由化後，証券会社間で手数料引き下げ競争が行われている。手数料は，投資家の発注行動を変化させることを通じて，取引に影響する。本節では，まず，手数料がある場合の均衡を提示し，次に取引所が成行注文から手数料をとり徴収分を指値注文にリベートとして支払うという手数料体系の効果を考察し，最後に空売り規制について議論する。

約定した注文に対して手数料がかかる場合，均衡は次のようになる。

仮定3'：約定時に，LSにc_L^s，LBにc_L^b，MSにc_M^s，MBにc_M^bの手数料が課せられる。

定理3：仮定1，2，3'，4，5が成り立っているとする。$\omega_c^s = \omega_r^s - \pi_b\{c_L^s + c_M^b - \pi_s(c_L^b + c_M^s)\}/(1-\pi_s\pi_b)$および$\omega_c^b = \omega_r^b - \pi_s\{c_L^b + c_M^s - \pi_b(c_L^s + c_M^b)\}/(1-\pi_s\pi_b)$とし，さらに$A_c = v_H - c_M^b - \omega_c^b$および$B_c = v_L + c_M^s + \omega_c^s$とする。$\omega_c^s \geq 0$かつ$\omega_c^b \geq 0$のとき，LSおよびLBが出るMPEが存在する。そのMPEにおいて，売手は(B, n)において$B \geq B_c$のときMSを出し，それ以外はA_cのLSを出す。買手は(n, A)において$A \leq A_c$のときMBを出し，それ以外はB_cのLBを出す。

A_cおよびB_cは以下の連立方程式の解である。

$$B_c - v_L - c_M^s = \pi_b(A_c - v_L - c_L^s),$$
$$v_H - A_c - c_M^b = \pi_s(v_H - B_c - c_L^b)$$

これらの式は，均衡において，手数料控除後の期待効用が，指値注文と成行注文とで等しいことを表している。またω_c^sおよびω_c^bは，均衡における売手および買手の期待効用である。

手数料は，均衡のアスク，ビッドおよび期待スプレッドに次のような影響を与える。

補題5：成行注文と指値注文のそれぞれについて，売り・買いの手数料が同じであるとする（$c_M^s = c_M^b$ かつ $c_L^s = c_L^b$）。成行注文の手数料が上がると，アスクは下がり，ビッドは上がり，期待スプレッドは狭くなる。指値注文の手数料が上がると，アスクは上がり，ビッドは下がり，期待スプレッドは広くなる。

成行注文の手数料が高いとき，成行注文が出にくくなる。そのため，指値注文を出すにあたり，成行注文を引きつけるため，より積極的な値段を提示する必要がある。よって成行注文の手数料が高いほど，均衡におけるアスクは低く，ビッドは高く，期待スプレッドは狭くなる。逆に，指値注文の手数料が高いと，投資家は積極的な価格付けができず，期待スプレッドは広くなる。成行注文と指値注文の手数料が同じときの手数料上昇の効果は，上記2つの効果のため，注文流入に依存する。例えば $\pi_s = \pi_b = 1/2$ のとき，手数料の上昇により期待スプレッドは狭くなる。

取引所が，流動性を高めることで売買を活発にすることを狙い，流動性を供給する注文である指値注文を集めるために，指値注文にリベートを支払い，成行注文から手数料を徴収する場合を考えよう。例えばHasbrouck and Saar（2002）が報告しているように，Island ECN はこのような手数料体系をとっている。[3] 具体的に，$c > 0$ に対し，$c_L^s = c_L^b = -c$, $c_M^s = c_M^b = c$ を仮定しよう。この場合の均衡のアスクは $A_c = A_r - c$，ビッドは $B_c = B_r + c$ であり，期待スプレッドは $s_c = s_r - c(\pi_s + \pi_b - 2\pi_s\pi_b)/(1-\pi_s\pi_b)$ である。成行注文は，手数料が課せられる点で不利になるが，それに見合うだけ指値注文の値段が成行注文にとって有利になり，均衡では成行注文による期待効用と指値注文による期待効用は等しく，手数料はすべての投資家により負担される。特に，成行注文からの手数料がすべて指値注文へのリベートとして支払われるこの例の場合には，$\omega_c^s = \omega_r^s$ かつ $\omega_c^b = \omega_r^b$ であり，均衡における投資家の期待効用は，手数料がゼロ（$c = 0$）の場合と同じである。すなわち，このような手数料体系は，単にアスクとビッドを手数料の大きさだけ内側に動かす，という影響を市場に与えるだけであり，取引量や所得分配に影響を与えない。

空売り規制として，日本や米国の規制当局は，直前の価格と同じかそれ以上で売買を執行しなければならない，というルール（uptick rule）を取引所に要求している。以下では，このような規制によりMSを出す費用が高くなる，と考えた場合の規制の効果について検討しよう。MSにのみ費用がかかり $c_M^s = c > 0$ であるが，その他の注文には費用がかからず，$c_M^b = c_L^s = c_L^b = 0$ と仮定する。このとき，均衡におけるアスクは $A_c = A_r + c\pi_s/(1-\pi_s\pi_b)$，ビッドは $B_c = B_r + c/(1-\pi_s\pi_b)$ である。規制により，アスク・ビッドともに上昇するが，これは次の効果による。MSに費用がかかりMSが出にくいので，LBを出す買手は，より積極的な値付けをしなければならない。それによりLBを出した場合の期待効用が低下し，買手はより高いアスクに対してもMBを出す。よって売手はアスクを高くすることができ，全体としてアスクもビッドも上昇する。期待スプレッドは，$s_c = s_r + c\{\pi_s^2(1-\pi_b) - \pi_b(1-\pi_s)\}/(1-\pi_s\pi_b)^2$ である。$\beta = 1/2$ で売りと買いの注文流入が均等

であるとき，$s_c=s_r-2\alpha c/(2+\alpha^2)$ であり，c の上昇という規制の強化により，期待スプレッドは狭くなる。これは，直接効果であるビッドの上昇よりも，間接効果であるアスクの上昇の方が小さいためである。しかし注文流入が売りに十分偏っているときには，規制の強化で期待スプレッドは広くなる。

空売り規制により，MS を出す費用 c が上昇すると，売手の期待効用は上昇し，買手の期待効用は低下する。規制により，MS を出しにくくなることで，売手が規制の直接的影響を受ける。しかし，価格の上昇により，買手から売手に所得が移転する。そのため実際に規制の費用を負担するのは買手となる。

Ⅵ. 有限期

本節では，1日24時間取引できるのではなく，取引に終了時点がある場合を考える。このとき投資家は，取引終了までの時間を考慮しながら注文を出すことになる。

仮定 4'：取引時点に最終期 T があり，取引期は $t\in\{-\infty, \cdots, 0, 1, \cdots, T-1, T\}$ である。

定理 4：仮定 1，2，3，4'，5 の下で，以下の戦略が部分ゲーム完全均衡となる。

$$\bar{A}_{T-t}=A_r+(\pi_s\pi_b)^{t/2}\{(1+(-1)^t)(v_H-A_r)+(1-(-1)^t)(v_L-B_r)\sqrt{\pi_s/\pi_b}\}/2$$

$$\bar{B}_{T-t}=B_r+(\pi_s\pi_b)^{t/2}\{(1-(-1)^t)(v_H-A_r)\sqrt{\pi_b/\pi_s}+(1+(-1)^t)(v_L-B_r)\}/2$$

とする。T 期の売手は，期初の板が (B, n) でかつ $B\geq\bar{B}_T$ のとき MS を出す。T 期の買手は，期初の板が (n, A) でかつ $A\leq\bar{A}_T$ のとき MB を出す。$t=1, 2, \cdots$ について，$T-t$ 期の売手は，期初の板が (B, n) でかつ $B\geq\bar{B}_{T-t}$ のとき MS を出し，それ以外は $\bar{A}_{T-t+1}$ の LS を出す。$T-t$ 期の買手は，期初の板が (n, A) でかつ $A\leq\bar{A}_{T-t}$ のとき MB を出し，それ以外は $\bar{B}_{T-t+1}$ の LB を出す。

このモデルでは，取引期間が有限・無限にかかわらず，投資家は，将来の成行注文を引き出せる指値注文の中で，自分に最も有利な指値注文を選択する。最終期である T 期に注文を出す売手は，LS を出しても執行されないので，期初の板上のビッドが非常に不利であっても MS を出す。それを読み込んで，$T-1$ 期の買手は，非常に有利なビッド v_L で LB を出す。$T-1$ 期の買手は，指値注文からの期待効用が高いため，期初の板にある LS が買手側に非常に有利でなければ，MB を出さない。そのため，$T-2$ 期の売手は，非常に不利なアスクの LS を出す必要がある。従って $T-3$ 期の買手は，有利なビッドで LB を出すことができる。但し，$T-3$ 期の買手は，$T-1$ 期の買手ほど有利なビッドを設定できない。

取引終了時まで無限期残っているとき，$\lim_{t\to\infty}A_{T-t}=A_r$ および $\lim_{t\to\infty}B_{T-t}=B_r$ であり，アスクとビッドは，定理1の無限期の場合に等しい。各期のアスクとビッドの差である板の空白は，

$$\bar{A}_{T-t-2}-\bar{B}_{T-t-2}=(1-\pi_s\pi_b)(A_r-B_r)+\pi_s\pi_b(\bar{A}_{T-t}-\bar{B}_{T-t})$$

である。最終期まで奇数回残っている場合の板の空白は，期間が無限期の場合の板の空白である A_r-B_r よりも狭く，偶数回残っている場合には A_r-B_r よりも広くなる。また最終期まで遠いほど空白は狭く，A_r-B_r に近

い。以上より，終了までの期間が長いほど，アスクとビッドおよびスプレッドの変動は少ないが，終了時点が近づくほど変動が大きくなることがわかる。

スプレッドについて，Mcinish and Wood (1992) をはじめ多くの実証研究が，1日の取引終了が近づくにつれスプレッドが拡大する，と報告している。この要因について，Hong and Wang (2000) は取引終了にかけて情報の非対称性の程度が高まるため，Foucault *et al.* (2005) は取引終了にかけて急いで取引したい投資家の比率が高まるため，と説明している。これに対して定理4の均衡では，取引終了にかけて指値注文を出す投資家の独占力が高まるためスプレッドが広くなる。これら要因の中でどれが重要かは，実証的な問題である。

但し，取引終了にかけてスプレッドが拡大する要因は，取引システムにより異なるかもしれない。例えば，取引終了間際におけるスプレッド拡大の原因として，Madhavan *et al.* (1997) は，スペシャリスト・システムを採用しているニューヨーク証券取引所ではディーラーの取引費用によると報告しているが，Ahn *et al.* (2002) は，指値注文市場である東京証券取引所では情報の非対称性によると報告している。これらの実証結果の解釈のため，ディーラー市場・指値注文市場など取引システムの違いにより，スプレッドがどのように異なりうるかについて，理論的分析が必要である。

Ⅶ. 呼値の刻み

前節までは，指値注文の値段を実数で選択できるケースを考えた。現実の取引所は，投資家が選択できる値段について，「呼値の刻み」のルールを設定している。例えば東京証券取引所に対して，100円や101円を指定する指値注文を出すことはできるが，301/3円を指定する指値注文を出すことはできない。呼値の刻みが $k>0$ であり，値段の設定に制約がある場合の均衡は，以下のようになる。

仮定5'：呼値の刻みが $k>0$ であり，投資家は指値注文の値段を $N=\{0, k, 2k, \cdots\}$ から選択しなければならない。

定理5：仮定1，2，3，4，5'の下で，

$$B_k-v_L \geq \pi_b(A_k-v_L)>(B_k-k)-v_L \quad (1)$$

$$v_H-A_k \geq \pi_s(v_H-B_k)>v_H-(A_k+k) \quad (2)$$

を満たす A_k, $B_k \in N$ が存在するとき，以下の戦略が均衡となる。売手は (B, n) において $B \geq B_k$ の場合に MS を出し，それ以外は A_k の LS を出す，買手は (n, A) において $A \leq A_k$ の場合に MB を出し，それ以外は B_k の LB を出す。

定理5は，買手（売手）が成行注文を出してくれる最大（最小）のアスク（ビッド）を設定する均衡が存在することを示している。但し，値段を実数から選択できる定理1では均衡は唯一であったが，呼値の刻みの制約がある下では，定理5が提示している均衡以外の均衡もあり得る。複数の均衡が存在するのは，呼値の制約がない場合の均衡におけるアスク・ビッドを必ずしも出すことができないためと，ある板に対して最適注文が複数ありうるためである。このため Goettler *et al.* (2005) のように，呼値の刻みが正の下で数値計算により指値注文市場の均衡を求める場合，見つかった均衡と別の均衡が存在する可

能性があり，注意が必要である。

呼値の刻みの制約がある場合，アスクとビッドは，以下の性質をもつ。

補題6：式(1)および式(2)をみたす A_k と B_k について，$A_r-B_r \geq A_k-B_k \geq 0$ である。

呼値の刻みがあるとき，成行注文を引き出すために，呼値の刻みの制約がない場合よりも積極的な指値注文を出す必要がある。そのため，A_k-B_k は，A_r-B_r と同じかそれよりも狭くなる。例えばHarris（1998）は，簡単化のために呼値の制約の問題を回避して投資家の最適注文戦略を分析しているが，呼値の制約がある場合には，指値注文はより積極的な値段になる，と議論している。補題6は，Harris の議論と整合的である。

補題6のように，呼値の制約がないときに板上の空白 A_k-B_k が最大となるため，呼値の刻み k を細かくすると，板上の空白またはスプレッドが拡大する場合がある。しかし，このモデルでは複数の均衡があり得るため，呼値の刻みが細かいほど空白が広い，とはいえない。例えば，売手と買手の評価の差 Δ に対して呼値の刻みが十分に大きいとき，刻みを細かくすると，アスクとビッドの差が狭くなる場合がある。例えばBacidore（1997）は，指値注文市場であるトロント証券取引所において，呼値の刻みを細かくするルール変更により，スプレッドが狭くなったと報告している。補題6は，このような実証結果に反するものではない。

Ⅷ. おわりに

本稿では，指値注文市場において，投資家がどのような注文戦略をとり，その結果，スプレッドがどのように形成されるかについて分析した。限界的投資家にとって，指値注文と成行注文が無差別になるよう指値注文の値段が調整されたとき，均衡が達成される。スプレッドが狭くなるのは，注文流入が活発で，急いで取引したい投資家が少なく，成行注文に費用がかかる場合である。取引に終了時点がある場合，残り時間が少なくなるほどスプレッドの変動は大きくなる。また，呼値の刻みが粗い場合にスプレッドが狭い可能性がある。

ここでは，簡単化のために，様々なものを捨象した。特に，投資家ごとに保有する情報が異なる場合に何が起こるかは，分析は困難であるが，重要な問題である。情報の非対称性があるとき，投資家は，板の情報から自分の知らない情報を推測しつつ注文戦略を立てるだろう。各投資家の発注戦略の結果，板にどのような情報が反映し，各投資家のもつ情報がどのように価格に織り込まれていくかについての分析は，今後の課題として残されている。

注

1）証券取引所における様々な取引ルールについて，Domowitz（1993）を参照のこと。

2）仮定1の緩め方には様々な方向がある。例えばFoucault *et al.*（2005）は，指値注文は執行されるまでキャンセルされないと仮定し，Goettler *et al.*（2005）は，指値注文は確率的にキャンセルされると仮定し，Ohta（2006）は，指値注文は発注後2期経過すると自動的にキャンセルされると

仮定し，Rosu (2005) は，投資家はいつでも指値注文のキャンセルおよび修正ができると仮定している。

3)これとは逆に，日本の株式売買委託手数料自由化後，一部の証券会社は，成行注文の手数料を指値注文の手数料よりも下げている。このような相違は，取引所と証券会社の業務の違いを反映していると考えられる。取引所・証券会社がそれぞれ最適な手数料体系を提示しているときの取引についての分析は，今後の課題である。

参考文献

Ahn, H. J., J. Cai, Y. Hamao, and R. Y. K. Ho (2002), "The Components of the Bid-Ask Spread in a Limit-Order Market: Evidence from the Tokyo Stock Exchange," *Journal of Empirical Finance* 9, pp.399-430

Bacidore, J. M. (1997), "The Impact of Decimalization on Market Quality: An Empirical Investigation of the Toronto Stock Exchange," *Journal of Financial Intermediation* 6, pp.92-120

Cohen, K. J., S. F. Maier, R. A. Schwartz, and D. K. Whitcomb (1981), "Transaction Costs, Order Placement Strategy, and Existence of the Bid-Ask Spread," *Journal of Political Economy* 89, pp.287-305

Domowitz, I. (1993), "A Taxonomy of Automated Trade Execution Systems," *Journal of International Money and Finance* 12, pp.607-631

Foucault, T. (1999), "Order Flow Composition and Trading Costs in a Dynamic Limit Order Market," *Journal of Financial Markets* 2, pp.99-134

Foucault, T., O. Kadan, and E. Kandel (2005), "Limit Order Book as a Market for Liquidity," *Review of Financial Studies* 18, No. 4, pp.1171-1217

Goettler, R. L., C. A. Parlour, and U. Rajan (2005), "Equilibrium in a Dynamic Limit Order Market," *Journal of Finance* 60, No. 5, pp.2149-2192

Harris, L. (1998), "Optimal Dynamic Order Submission Strategies in Some Stylized Trading Problems," *Financial Markets, Institutions and Instruments* 7, No. 2, New York University, Salomon Center

Hasbrouck, J. and G. Saar (2002), "Limit Orders and Volatility in a Hybrid Market: The Island ECN," Mimeo

Hong, H., and J. Wang (2000), "Trading and Returns under Periodic Market Closures," *Journal of Finance* 55, No. 1, pp.297-354

Madhavan, A., M. Richardson, and M. Roomans (1997), "Why Do Security Prices Change? A Transaction-Level Analysis of NYSE Stocks," *Review of Financial Studies* 10, No. 4, pp.1035-1064

Mcinish, T. H., and R. A. Wood (1992), "An Analysis for Intraday Patterns in Bid/Ask Spreads for NYSE Stocks," *Journal of Finance* 47, No. 2, pp.753-764

Ohta, W. (2006), "Quote Competition in Limit Order Markets," Mimeo

Parlour, C. A. (1998), "Price Dynamics in Limit Order Markets," *Review of Financial Studies* 11, pp.789-816

Rosu, I. (2005), "A Dynamic Model of the Limit Order Book," Mimeo

Seppi, D. J. (1997), "Liquidity Provision with Limit Orders and a Strategic Specialist," *Review of Financial Studies* 10, pp.103-150

（名古屋大学大学院経済学研究科）