最大値原理とその意味

塚　田　弘　志

In dynamic economies, we have to study many optimal probolems, and we use the maximum principle to treat them. But the form of the maximum principle we use is not so sophisticated that we can only handle optimal problems with simple side constraints.

Here, I would like to explain the maximum principle of more extended form, with which, maybe, we could formulate many economic problems with complex equality and inequality side constraints.

In that prpcess, the meaning of the maximum principle will become clear. It has elegant economic explanation and gives some insight with respect to the nature of the solution of optimal control problems. But generally it never gives the concrete solution of optimal problems.

It is not a convenient tool of our rational behavior. On the contrary it highlights the limitation of our rationality.

最近 Michael R. Caputo 著 Foundations of Dynamic Economic Analysis を読んだ。良書だと思う。おそらく動学的経済学の標準的教科書の一つになるだろう。

ただし，この類の書物では常にそうだが，理論の説明に用いられている最大値原理が十分一般的な形をしていない。そこで本稿では経済問題を定式化するのに最も一般的な形をした最大値原理を解説する。数学の世界では旧聞に属するが K. Makowski と L. W. Neustadt による論文 Optimal Control Problems with Mixed Control-Phase Variable Equality and Inequality Constraints (SIAM J. Controls 1974) に従う。またその過程で最適化問題が一般には解けないことがはっきりするので，その意味するところについて若干の考察を加える。

なお，前記の論文に従うものではあるが，経済学的な解説を主眼とするため細い技術的な定義や，厳密な条件設定については，説明の便宜のために省略している部分がある。興味ある読者は直接前記論文を参照し，ここでの経済学的解釈が前記論文の中にいかにちりばめられているか確認されたい。

Ⅰ. 記号についての約束

記号についての多くの多くの約束をここで述べると記述のバランスを失するので，必要な記号についての約束は一括して [1]に掲げる。

Ⅱ. 最も簡単な最大値原理

1. 最適化問題

目的函数 $\int_{t_1}^{t_2} g\,(x(t),\ u(t),\ t)\,dt$ を以下の制約条件の下で最大にすることを考える。

$$(1-1)\quad \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t),\ u(t),\ t)$$

$$(1-2)\quad x(t_1) = x_1 \qquad x(t_2) = x_2$$

（1－3）　$u(t) \in \Omega \quad (t_1 \leq t \leq t_2)$

ここで$x(t)$はn次元ベクトル函数$(x_1(t), \cdots x_n(t))'$，$u(t)$はm次元ベクトル函数$(u_1(t), \cdots u_m(t))'$であり，$f(x(t), u(t), t)$はn次元ベクトル函数$(f_1(x(t), u(t), t), \cdots f_n(x(t), u(t), t))'$である。

2．最大値原理

前記の問題の解を$\bar{x}(t)$，$\bar{u}(t)$とすると，n次元ベクトル函数$\Psi(t) = (\Psi_1(t), \cdots \Psi_n(t))$が存在して次の条件を満す。

（1－4）　$$g(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) + \Psi(t) f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) = \max_{u \in \Omega}\{g(\bar{x}(t), u, t) + \Psi(t) f(\bar{x}(t), u, t)\}$$

（1－5）　$$-\frac{d\Psi(t)}{dt} = g_x(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) + \Psi(t) f_x(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)$$

（1－6）　$\Psi(t_2) = 0$

この命題を最大値原理と言う。

3．最大値原理の意味

$x(t)$は資本ストック，$u(t)$は資本ストック生産のためのインプット，$f(x(t), u(t), t)$は生産函数としよう。$\Psi(t) = (\Psi_1(t), \cdots \Psi_n(t))$に現われる$\Psi_i(t)$は，時刻$t$における第$i$番目の資本財の価格としよう。ただし，$\Psi_i(t)$はすべて割引現在価値で表示されているとする。

イ．（1－4）は$\bar{x}(t)$に添って各時刻tの生産物価格$g(\bar{x}(t), u, t) + \Psi(t) f(\bar{x}(t), u, t)$が$u = \bar{u}(t)$で最大となっていることを意味する。

ロ．（1－5）は各資本財の価格がその限界生産物の価値によって定まることを意味する。これを理解するには次のように考えればよい。

時刻tに第i番目の資本財を限界的に一単位追加投入して資本蓄積を行って時刻$t+\Delta t$での結果を見る。

このモデルでは資本減耗が無いから，時刻tに投入された第i番目の資本財一単位は$t+\Delta t$にそのまま一単位で残る。

またこの一単位の資本投資により各資本財のストックは$t+\Delta t$に$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)\Delta t$だけ増加する。それらの価格は割引現在価値でそれぞれ$\Psi_j(t+\Delta t)$である。

投入側と算出側を比べると$\Psi_i(t) \fallingdotseq g_x(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) + \Psi_i(t+\Delta t) + \sum_{j=1}^{n} \Psi_j(t+\Delta t) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)\Delta t$となる。$\Psi_i(t+\Delta t)$を左辺に移項し，両辺を$\Delta t$で割って$\Delta t \to 0$とすると（1－5）を得る。

一般に資産市場で任意の資産の価格がP(1)からP(2)に変化し，かつその間にインカムゲインdを得ると，$\frac{\mathrm{P}(2) - \mathrm{P}(1) + d}{\mathrm{P}(1)} = i$が成立する。（$i$はこの間の利子率である。）これを書直すと$\frac{d}{1+i} + \frac{\mathrm{P}(2)}{1+i} = \mathrm{P}(1)$となるが，これは（1－5）と同じく，当該資産の割引現在価値の変化が，その間のインカムゲインの割引現在価値に等しいことを意味する。従って（1－5）は各資産の収益率が均等化する事実を述べたものでもある。また同様に（1－5）は各資産の価格が，それから得ら

れる将来のインカムゲインの割引現在価値の合計に等しいことを述べたものでもある。

ハ．（1－6）は各資産の価格が $t=t_2$ でゼロとなることを意味する。計画期間は $t=t_2$ で終了するから $t=t_2$ で余分な資本ストックを持っても最大化への貢献はゼロである。従って（1－6）は自明である。

Ⅲ．一般的な形の最大値原理

最適化問題を解く際 $x(t)$, $u(t)$ に各種の制約条件が加わるのが普通であろう。また $u(t)$ が動く範囲も前記のように常に一定の集合Ωに限られるのでなく時間につれて変化することも十分あり得る。

1．最適化問題

以下の制約の下で目的函数 $X(x(\tau_1), x(\tau_2), \cdots x(\tau_\sigma))$ を最大化することを考える。

（3－1）　$\dfrac{dx(t)}{dt}=f(x(t),\ u(t),\ t)$　　$(t_1\leq t\leq t_2)$

（3－2）　$g(u(t),\ t)\geq 0$　　$(t_1\leq t\leq t_2)$

（3－3）　$h(x(t),\ u(t),\ t)=0$　　$t\in \mathrm{I}_1$

（3－4）　$p(x(t),\ t)\geq 0$　　$t\in \mathrm{I}_2$

（3－5）　$q(x(\tau_1),\ x(\tau_2)\cdots(x(\tau_\sigma))\geq 0$

$x(t)$, $u(t)$, $f(x(t),\ u(t),\ t)$ については2－(1)と同じである。$g(u(t),\ t)$ は a 次元の函数ベクトル $(g_1(u(t),\ t), \cdots g_a(u(t),\ t))'$ である。$h(x(t), u(t), t)$ は b 次元の函数ベクトル $(h_1(x(t), u(t), t), \cdots h_b(x(t), u(t), t))'$ である。$p(x(t),\ t)$ は c 次元の函数ベクトル $(p_1(x(t), t), \cdots p_c(x(t),\ t))'$ である。$q(x(\tau_1), x(\tau_2), \cdots (x(\tau_\sigma))$ は d 次元の函数ベクトル $(q_1(x(\tau_1), \cdots x(\tau_\sigma)), \cdots q_d(x(\tau_1), x(\tau_2), \cdots x(\tau_\sigma))'$ である。ただし $\tau_1, \tau_2, \cdots \tau_\sigma$, は $t_1=\tau_1<\tau_2<, \cdots<\tau_{\sigma-1}<\tau_\sigma=t_2$ を満す固定した時刻の列であり，$x(\tau_i)$ は時刻 τ_1 における $x(t)$ の値，即ち $(x_1(\tau_1), \cdots x_n(\tau_i))'$ を表わす。

2．技術的準備

$\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$ を前記の最大化問題の解とし $\Phi(t)$ を $t_1\leq t\leq t_2$ で定義された $n\times n$ 行列函数での次の微分方程式を満すものとする。[2)]

（3－6）　$\dfrac{d\Phi(t)}{dt}=f_x(\bar{x}(t),\ \bar{u}(t),\ t)\Phi(t)$

（3－7）　$\Phi(t_1)=\mathrm{I}_n$

ここで $\dot{\bar{x}}(t)=f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)$ の解 $\bar{x}(t)$ を時刻 t_1 に $\delta x(t_1)$ だけずらした解 $\bar{x}(t)+\delta x(t)$ を考えよう。$(\bar{x}(t)+\delta x(t))'=f(\bar{x}(t)+\delta x(t),\ \bar{u}(t),\ t)$ となるから第一近似として次の方程式を得る。

（3－8）　$\delta x'(t)=f(\bar{x}(t),\ \bar{u}(t),\ t)\delta x(t)$

従ってこの $\delta x(t)$ は $\Phi(t)$ を用いて次のように表示される。

（3－9）　$\delta x(t)=\Phi(t)\delta x(t_1)$

このことから $\Phi(t)$ は，時刻 t_1 に資本を限界的に $\delta x(t_1)$ だけ増加させ，その後インプット $\bar{u}(t)$ によって資本積畜を行った場合各時刻 t に資本ストックが限界的にどれだけ増加するかを示す係数であることが分る。

これより時刻 t_1 と t_2 の間の任意の時刻 t に資本ストックを δ だけ増加させその後インプット $\bar{u}(t)$ によって資本畜積を行った場合，

t 以降の各時刻 s における限界的な資本増加は $\Phi(s)\Phi^{-1}(t)\delta$ であることが分る。何故なら時刻 t における資本ストック増 δ は時刻 t_1 における資本ストック増 $\Phi^{-1}(t)\delta$ に等しく，これは時刻 s に資本ストック増 $\Phi(s)\Phi^{-1}(t)\delta$ をもたらすからである。

3．集合 $\omega(x,\ t)$ 及び $\cup(t)$

前記の $\Phi(t)$ に加えて，2種類の集合 $\omega(x,\ t)$ 及び $\cup(t)$ を定義しておく必要がある。$\omega(x,\ t)$ 及び $\cup(t)$ は後述の方程式（3－12），（3－13）に登場する。

技術的な見かけは，特に $\omega(x,\ t)$ について，やや分り難いが，$\omega(x,\ t)$ は区間 I_1 上でのインプット u に対する制約を表わす集合であり，$\cup(t)$ は区間 I_1 外でのインプット u に対する制約を表わす集合である。

（3－10） n 次元ベクトル $x=(x_1,\ \cdots x_n)$ と区間 I_1 に属する実数 t に対し，$\omega(x,\ t)$ を次の条件を満す m 次元ベクトル $u=(u,\cdots u_m)$ の集合と定義する。

（i） $g(u,\ t)\geq 0$

（ii） $p(x,\ u,\ t)=0$

（iii） 行列 $p_u(x,\ u,\ t)p_u(x,\ u,\ t)^T$ は逆行列を持つ。

（N） 任意の c 次元ベクトル x に対し次の条件を満す m 次元ベクトル y が存在する。

- $x=p_u(x,\ u,\ t)y$
- $g_j(u,\ t)=0$ となるすべての $j(1\leqq j\leqq a)$ について $g_{ju}(u,\ t)y<0$

（3－11） 区間 I_1 外の実数 t に対し，集合 $\cup(t)$ を，$g(u,\ t)\geq 0$ を満すすべての m 次元ベクトル $u=(u_1,\cdots u_m)$ の集合として定義する。

$\omega(x,\ t)$ の定義は複雑であるが，$\omega(x,\ t)$ は，資本ストック x 及び区間 I_1 に属する時刻 t が与えられた場合の，インプット u に対する制約である $g(u,\ t)\geq 0$，$h(x,\ u,\ t)=0$ を満たすような u の集合と考えてよい。

$\cup(t)$ は定義により，区間 I 外の時刻 t が与えられた場合の，インプット u に対する制約である $g(u,\ t)\geq 0$ を満すような u の集合そのものである。実は，正確には $\cup(t)$ はこの他に若干の技術的な制約を満たさねばならないのだが，本質的にはそう考えてよい。

4．一般的な最大値原理

1の最適化問題に解 $\bar{x}(t)$，$\bar{u}(t)$ が存在すれば，次のイ，ロ，ハが成立つ。

イ．n 次元のベクトル函数 $\Psi(t)=(\Psi_1(t),\cdots\Psi_n(t))$ が存在して次の条件を満す。

（3－12） $$\Psi(t)f(\bar{x}(t),\ \bar{u}(t),\ t)=\max_{u\in\omega(\bar{x}(t),\ t)}\Psi(t)f(\bar{x}(t),\ u,\ t) \qquad (t\in I_1)$$

（3－13） $$\Psi(t)f(\bar{x}(t),\ \bar{u}(t),\ t)=\max_{u\in\cup(t)}\Psi(t)f(\bar{x}(t),\ u,\ t) \qquad (t\notin I_1)$$ [3)]

ロ．$\Psi(t)$ は b 次元の函数ベクトル $v(t)=(v_1(t),\ \cdots v_b(t))$，$c$ 次元の函数ベクトル $\lambda(t)=(\lambda_1(t),\ \cdots\lambda_c(t))$，$d$ 次元のベクトル $\alpha=(\alpha_1,\ \cdots\alpha_d)$，及び前記 $\Phi(t)$ を用いて表わされる。

具体的には $\Psi(t)$ は $v(t),\lambda(t),\alpha,\Phi(t)$ に

より表わされる3つの函数 $\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t)$, $\Psi_3(t)$ の和である。即ち $\Psi(t)=\Psi_1(t)+\Psi_2(t)+\Psi_3(t)$ であり $\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t)$, $\Psi_3(t)$ の定義は次のとおりである。

(3－14)　$\Psi_1(t)$ は $[t_1, t_2]$ 上で次のように定義される。

$$\Psi_1(t)=\int_t^{t_2} v(s)h_x(\bar{x}(s), \bar{u}(s), s)\Phi(s)\Phi^{-1}(t)ds$$

(3－15)　$\Psi_2(t)$ は $[t_1, t_2]$ 上で次のように定義される。

$$\Psi_2(t)=\sum_{j=1}^{c}\int_t^{t_2} p_{jx}(\bar{x}(s), s)\Phi(s)\Phi^{-1}(t)d\lambda_j(s)$$ [4]

(3－16)　区間 $[t_1, t_2]$ は $t_1=\tau_1<\tau_2\cdots<\tau_{\sigma-1}<\tau_\sigma=t_2$ により区間 $[\tau_1, \tau_2]$ $[\tau_2, \tau_3]\cdots[\tau_{\sigma-2}, \tau_{\sigma-1}]$ $[\tau_{\sigma-1}, \tau_\sigma]$ に分割されるが，$\Psi_3(t)$ はそれぞれの区間 $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ 上で次のように定義される。

$$\Psi_3(t)=\sum_{j=i+1}^{\sigma}(X_{x_j}(\bar{x}(\tau_1), \cdots\bar{x}(\tau_\sigma))+\alpha q_{x_j}(\bar{x}(\tau_1), \cdots\bar{x}(\tau_\sigma)))\Phi(\tau_j)\Phi^{-1}(t)$$ [5]

ハ. $v(t)$, $\lambda(t)$, α は次の条件を満す。

(3－17)　区間 I_1 の外では $v(t)=0$ である。従って $v(t)h(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)=0$ である。[6]

(3－18)　$\lambda(t)=(\lambda_1(t), \cdots\lambda_0(t))$ に現われる各 $\lambda_j(t)$ は，$d\lambda_j(t)\geq 0$, $p_j(\bar{x}(t), t)d\lambda_j(t)=0$ を満す。

(3－19)　$\alpha=(\alpha_1, \cdots\alpha_d)$ に現われる各 α_j は $\alpha_j\geq 0$, $\alpha_j g_j(x(\tau_1), \cdots x(\tau_\sigma))=0$ を満す。

Ⅳ. 一般的な最大値原理の経済学的解釈

1. 制約条件及び $\Psi(t)$, $v(t)$, $\lambda(t)$, α の解釈

$\dfrac{dx(t)}{dt}=f(x(t), u(t), t)$ はこれまで同様インプット $u(t)$ を用いた資本蓄積経路を表わすとする。

以下では，$x(t)$, $u(t)$ に添って資本蓄積を行うためにはインプット $u(t)$ に加え各時刻にそれ以外の資源も投入する必要があると考える。具体的には次のとおりである。

- まず制約条件 $g(x(t), t)$, $h(x(t), u(t), t)$, $p(x(t), t)$, $q(x(\tau_1), \cdots x(\tau_\sigma))$ のそれぞれに対応する仮想的な資源を考える。
- $x(t)$, $u(t)$ に添って資本蓄積を行うためには，各時刻にインプット $u(t)$ とは別にこれらの資源を投入する必要があると考える。
- これらの資源の各時刻における存在量は所与とする。
- $x(t)$, $u(t)$ に添って資本蓄積を行うため各時刻に必要な資源を投入すると，その結果各資源の残存量が $g(x(t), t)$, $h(x(t), u(t), t)$ $p(x(t), t)$, $q(x(\tau_1), \cdots x(\tau_\sigma))$ となると考える。
- 従って，例えば $g_j(x(t), t)$ が正であれば，時刻 t に $g_j(x(t), t)$ だけの資源が余ると考える。また $g_j(x(t), t)$ が負であれば時刻 t に $-g_j(x(t), t)$ だけの資源が不足すると考える。
- 例えば制約条件 $g_j(x(t), t)\geq 0$ は，各時刻に当該資源が必ず余るように資本蓄積を行わなくてはならないという制約を意味す

るものとする。

$\Psi(t)$, $v(t)$, $\lambda(t)$, α は各種の価格を表わすとする。具体的には次のとおりである。

- 第 j 番目の資本財の価格は $\Psi(t)=(\Psi_1(t), \cdots \Psi_n(t))$ に現われる $\Psi_j(t)$ とする。
- 制約条件 $b_j(x(t), u(t), t)$ に対応する仮想の資源の価格は $v(t)=(v_1(t), \cdots v_b(t))$ に現われる $v_j(t)$ とする。
- 制約条件 $p_j(x(t), t)$ に対応する仮想の資源の価格は $\lambda(t)=(\lambda_1(t), \cdots \lambda_c(t))$ に現われる $\lambda_j(t)$ の瞬間的増分 $d\lambda_j(t)$ とする。
- 制約条件 $q_j(x(\tau_1), \cdots x(\tau_\sigma))$ に対応する仮想の資源の価格は $\alpha=(\alpha_1, \cdots \alpha_d)$ に現われる α_j とする。
- これらの価格はすべて割引現在価値で表示されているものとする。

2．一般的な最大値原理の経済学的解釈

以上の意味づけを行うとⅢ４イ，ロ，ハは次のように解釈できる。

（４－１） インプット $\bar{u}(t)$ は，各時刻にインプット u に関する制約の下で生産物の価値 $\Psi(t) f(\bar{x}(t), u, t)$ を最大にするように選ばれる。

（資源に関する制約は区間 I_1 上では $g(u, t) \geq 0$, $h(\bar{x}(t), u, t)=0$ であり，区間 I_1 以外では $g(u, t) \geq 0$ である。）

この（４－１）は次の理由から明らかである。

- Ⅲ３で定めた $\omega(x, t)$ 及び $\cup(t)$ の意味。
- 区間 I_1 上では制約条件 $h(x, u, t)=0$ が課されていること。
- $\Psi(t)$ が資本財価格であること。
- （３－12）及び（３－13）。

（４－２） 各資本財の価格 $\Psi_j(t)$ $(1 \leqq j \leqq n)$ は時刻 t における資本財 j の限界生産物の価値である。

資本財 j を時刻 t に限界的に増加させると，目的函数の値の限界的増減及び将来の各時刻 s $(t \leq s \leq t_2)$ での資源余剰の限界的増減が起るが，$\Psi_j(t)$ はこれらの限界的増減の割引現在価値の総和に等しいのである。この点について詳しく説明しよう。

- 時刻 t に資本財を限界的に ΔX だけ増加すると，将来の時刻 s には資本財が $\Phi(s)\Phi^{-1}(t)\Delta X$ だけ増加する。（この点についてはⅢ２で説明した。）将来の時刻 s に資本が $\Phi(s)\Phi^{-1}(t)\Delta X$ だけ増加すると時刻 s での資源余剰が，それぞれ，$h_x(\bar{x}(s), \bar{u}(s), s)\Phi(s)\Phi^{-1}(t)\Delta X$, $p_x(\bar{x}(s), s)\Phi(s)\Phi^{-1}(t)\Delta X$ だけ増加する。それぞれの割引現在価値は $v(s)h_x(\bar{x}(s), \bar{u}(s), s)\Phi(s)\Phi^{-1}(t)\Delta X$ と $\sum_{j=1}^{c} p_{jx}(\bar{x}(s), s)\Phi(s)\Phi^{-1}(t)\Delta X d\lambda_j(s)$ である。（１での $v(t)$ 及び $\lambda(t)$ の意味づけを参照。）それぞれの合計値は $\int_t^{t_2} v(s)h_x(\bar{x}(s), \bar{u}(s), s)\Phi(s)\Phi^{-1}(t)ds \cdot \Delta X = \Psi_1(t)\Delta X$ 及び $\sum_{j=1}^{c}\int_t^{t_2} p_{jx}(\bar{x}(s), s)\Phi(s)\Phi^{-1}(t)d\lambda_j(s)\Delta X = \Psi_2(t)\Delta X$ である。（$\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t)$ は（３－14）（３－15）で定義されている。）
- $\tau_i \leq t < \tau_{i+1}$ となる時刻 t で，資本財を限界的に ΔX だけ増加させると時刻 $\tau_{i+1}, \tau_{i+2}, \cdots, \tau_\sigma$ に，資本財がそれぞれ $\Phi(\tau_{i+1})\Phi^{-1}(t)\Delta X$, $\Phi(\tau_{i+2})\Phi^{-1}(t)\Delta X$, $\cdots\Phi(\tau_\sigma)\Phi^{-1}(t)\Delta X$ だけ増加する。

その結果目的函数$X(\bar{x}(\tau_1),\quad \bar{x}(\tau_\sigma))$は $\sum_{j=i+1}^{\sigma}(X_{x_j}(\bar{x}(\tau_1),\cdots\bar{x}(\tau_\sigma))\Phi(\tau_{\tau+1})\Phi^{-1}(t)\varDelta_1$ だけ増加する。

また資源が $\sum_{j=1}^{i+1} q_{x_j}(\bar{x}(\tau_1),\ \cdots\bar{x}(\tau_\sigma))$ $\Phi(\tau_{\tau+1})\Phi^{-1}(t)\varDelta X$ だけ増加し，その割引現在価値は $\sum_{j=1}^{i+1}\alpha q_{x_j}(\bar{x}(\tau_1),\ \cdots\bar{x}(\tau_\sigma))$ $\Phi(\tau_{\tau+1})\Phi^{-1}(t)\varDelta X$ である。両者の合計は $\sum_{j=i+1}^{\sigma}(X_{x_j}(x(\tau_1),\ \cdots x(\tau_\sigma))+\alpha q_{x_j}(\bar{x}(\tau_1),$ $x(\tau_\sigma)))\Phi(\tau_{i+1})\Phi^{-1}(t)\varDelta X=\varPsi_3(t)\varDelta X$ である。($\varPsi_3(t)$ は（3 −16）で定義されている。)

- 以上より時刻 t に資本を限界的に $\varDelta X$ だけ増加すると目的函数の値及び将来の資源余剰の割引現在価値が合計で $(\varPsi_1(t)+\varPsi_2(t)+\varPsi_3(t))\varDelta X=\varPsi(t)\varDelta X$ だけ増加する。($\varPsi_1(t)+\varPsi_2(t)+\varPsi_3(t)=\varPsi(t)$ となることはⅢ 4 ロで述べた。)
- 従って $\varPsi(t)$ は資本の限界生産物の割引現在価値である。

（4 − 3） 各資源について自由財のルールが成立する。即ち正の余剰が存在する資源の価格はゼロとなる。

これは，（3 −17)，（3 −18)，（3 −19）から明らかである。

以上の（4 − 1)，（4 − 2)，（4 − 3）が一般化された最大値原理の経済学的解釈である。

V．資産価格が満たす微分方程式

前節では，一般化された最大値原理も，第Ⅱ節の簡単な最大値原理と同様に経済学的に解釈できることを示した。ただし，前節では第Ⅱ節とは異り資産価格 $\varPsi(t)$ がどのような微分方程式を満すかについては触れていない。この節では $\varPsi(t)$ に対し（1 − 5）に対応する微分方程式を導く。

そのためには，（3 −14)（3 −15)（3 −16）による $\varPsi(t)$ の定義と，$\Phi(t)$ が満たす方程式（3 − 6)（3 − 7）を用いればよい。

例えば（3 −14）と（3 − 6）より $\varPsi_1(t)$ は次の微分方程式を満すことが分る。

（5 − 1） $\varPsi_1(t)=-v(t)h_x(\bar{x}(t),\ \bar{u}(t),\ t)$ $-\varPsi_1(t)f_x(\bar{x}(t),\ \bar{u}(t),\ t)$

$\Psi_2(t)$, $\Psi_3(t)$ についても同様の方程式が導ければ $\varPsi(t)=\varPsi_1(t)+\varPsi_2(t)+\varPsi_3(t)$ が満す微分方程式が分る。しかしながらここから話が複雑になる。それは次の 2 つの理由による。

（5 − 2） 一般的は $\varPsi_2(t)$ は無限に多くのジャンプを持ち，これらの点では微分できない。

（5 − 3） $\varPsi_3(t)$ は各区間 $[\tau_1,\ \tau_2]$ $[\tau_2,\ \tau_3]$ $[\tau_3,\ \tau_4]\cdots[\tau_{\sigma-1},\ \tau_\sigma]$ それぞれの上では微分できるが $t=\tau_2,\ \tau_3\cdots\tau_{\sigma-1}$ の各時刻にジャンプし，これらの点では微分できない。

まず（5 − 2）について説明する。

$\Psi_2(t)=\sum_{j=1}^{0}\int_t^{t_2} p_{jx}(\bar{x}(s),\ s)\Phi(s)\Phi^{-1}(t)$ $d\lambda_j(s)$であることを思い出そう。この式に現われる $\lambda_j(t)$ は，単調増加，右連続で $\lambda_j(t_2)=0$ となる函数であるから，一般には区間 $(t_1,\ t_2)$ 上で無限に多くのジャンプを有する。即ち区間 $[t_1,\ t_2]$ 内に，$\lim_{s\uparrow t}\lambda_j(s)$

$\neq \lim_{s \downarrow t} \lambda_j(s)$ となる点 t が無限に多く存在する。[7)]

このため $\Psi_2(t)$ もこれらの諸点でジャンプして微分不可能になる。

次に（5－3）について説明する。

$\Psi_3(t)$ の定義により $\Psi_3(t)$ は $\tau_2, \tau_3, \cdots \tau_{\sigma-1}$ に含まれる任意の点 τ_j で，それぞれ $X_{x_j}(x(\tau_1), \cdots x(\tau_\sigma)) + \alpha q_{x_j}(x(\tau_1), \cdots x(\tau_\sigma))$ だけジャンプする。従って $\Psi_3(t)$ は $\tau_2, \tau_3, \cdots \tau_{\sigma-1}$ では微分不可能になる。

これらの難点を処理するため $\phi(t)$ を次のように定め $\Psi_2(t)$ に基づいて生じるジャンプを $\Psi(t)$ から取り除く。

（5－4）　$\phi(t) = \Psi(t) + \lambda(t) p_x(\bar{x}(t), t)$

この $\phi(t)$ の定義と（3－6）（3－7）を用いると，（5－1）と同様にして $\phi(t)$ について次のことが分る。

（5－5）　$\phi(t)$ は各区間 $[\tau_1, \tau_2][\tau_2, \tau_3] \cdots [\tau_{\sigma-1}, \tau_\sigma]$ 上で微分可能であり時刻 $\tau_2, \tau_3, \cdots \tau_{\sigma-1}$ にジャンプする。

（5－6）　$\dot{\phi}(t) = -\phi(t) f_x(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) + \lambda(t) \hat{p}_x(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) - v(t) h_x(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)$ ただし $\hat{p}(x, u, t) = p_x(x, t) f(x, u, t) + p_t(x, t)$ である。[8)]

（5－7）　$\tau_1, \cdots \tau_\sigma$ における $\phi(t)$ は次の条件を満す。

$\phi(t_1) = -X_{x_1}(\bar{x}(\tau_1), \cdots \bar{x}(\tau_\sigma)) - \alpha q_{x_1}(\bar{x}(\tau_1), \cdots \bar{x}(\tau_\sigma)) + \lambda(t_1) p_x(x(t_1), t_1)$

$\phi(t_2) = -X_{x_\sigma}(\bar{x}(\tau_1), \cdots \bar{x}(\tau_\sigma)) - \alpha q_{x_\sigma}(\bar{x}(\tau_1), \cdots \bar{x}(\tau_\sigma))$

$\phi(\tau_j) - \phi(\tau_{j-}) = -X_{x_j}(\bar{x}(\tau_1), \cdots \bar{x}(\tau_\sigma)) - \alpha q_{xj}(\bar{x}(\tau_1), \cdots x(\tau_\sigma))(2 \leq j \leq \sigma - 1)$ [9)]

このように $\Psi(t)$ でなく，$\phi(t)$ についての微分方程式が得られるが $\phi(t)$ は資産価格ではないから（5－6）は（1－5）のように経済学的な意味は持たない。

Ⅵ．一般化された最大値原理の通常の形式

Ⅲ～Ⅴの議論をまとめると次のとおりである。

Ⅲ１に述べられた最適化問題に解 $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$ が存在すれば次の事実が成立する。

（6－1）　函数 $\Psi(t)$, $v(t)$, $\lambda(t)$ 及びベクトル α が存在して（3－12）（3－13）（3－17）（3－18）（3－19）を満す。

（6－2）　函数 $\phi(t)$ を $\phi(t) = \Psi(t) + \lambda(t) p_x(\bar{x}(t), t)$ によって定めると，$\phi(t)$ について（5－5）（5－6）（5－7）が成立する。

通常一般化された最大値原理は（6－1）及び（6－2）の組合せとして提示されている。前記のように（5－6）は経済学的意味は持たないから，この形で述べられた最大値原理を直接経済学的に解釈することはできない。しかしながら実は（6－1）（6－2）は，Ⅲ４イ，ロ，ハから導かれるのであり，こちらの形ならば，Ⅳで詳しく述べたように経済学的な意味を持つのである。

（６－１）（６－２）に現われる方程式は，数だけ見れば，$\bar{x}(t)$，$\bar{u}(t)$，$\Psi(t)$，$v(t)$，$\lambda(t)$，α，$\phi(t)$ を求めるのに必要な数がある。

しかしながら実はこれらの方程式だけでは $\bar{x}(t)$ 等を具体的に求めることはできない。何故ならこれらの方程式は $\lambda(t)$ について，（原理上は無限に存在する）ジャンプの位置及び大きさについては何の情報も与えないからである。また（５－７）に現われる $\phi(t)$ のジャンプは，問題を複雑にし $\bar{x}(t)$ 等を具体的に求めることを著しく困難にする。

従って最大値原理を用いて $\bar{x}(t)$，$\bar{u}(t)$ を具体的に求めることは，一般的にはできない。確かに最大値原理により，$\bar{x}(t)$，$\bar{u}(t)$ に対し，ある種の経済学的意味を持つ $\Psi(t)$ 等が存在することは分る。それを利用して，２次元の位相図でも描けば，解 $\bar{x}(t)$，$\bar{u}(t)$ の性質を調べることはできるかもしれない。しかしながら $\bar{x}(t)$，$\bar{u}(t)$ を具体的に解くことは，一般的にはできないのである。

Ⅶ．合理性の限界

最大値原理を用いても最適解 $\bar{x}(t)$，$\bar{u}(t)$ が具体的に求まらないと言っても，それは（３－４），（３－５）のような複雑な制約を課すためであり，そうでない場合には最大値原理は十分強力で $\bar{x}(t)$，$\bar{u}(t)$ を与えるのではないだろうという疑問は残る。しかしながらこの疑問は誤っているのであって，Ⅱ１のような簡単な場合でも一般に $\bar{x}(t)$，$\bar{u}(t)$ を具体的に求めることはできない。この点は注意する必要がある。経済学者は見落すことが多いようだがポントリャーギンとその弟子達による最大値原理の初期の解説書ではコントロール $u(t)$ は区分的に連続と仮定されている。また $\Psi(t)$ は区分的に滑らかと仮定されている。

即ち $u(t)$ は図１のようにジャンプする函数と考えられている。（ジャンプの回数は有限である。）また，これに対応して $\Psi(t)$ の微分係数は滑らかではなく，$\Psi(t)$ は図２のように有限個の点で折れ曲るとされている。

図１

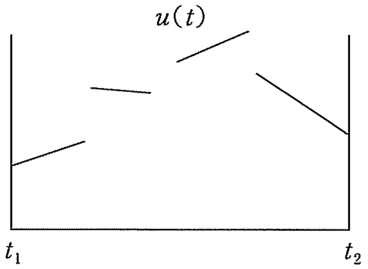
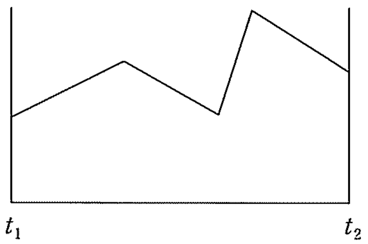


図２



この仮定を無視すれば（１－４）（１－５）（１－６）は $\bar{x}(t)$，$\bar{u}(t)$，$\Psi(t)$ を求めるのに十分な数の方程式を与えるように見える。しかしながらこれらの方程式は $\bar{u}(t)$ がどこで何回ジャンプするのかについての情報は与えない。従ってこれらの方程式だけで $\bar{x}(t)$ 等を具体的に求めることはできないのであり，この点はポントリャーギン達の解説書を読めば明らかである。

最大値原理が合理的行動を可能にする道具だと思うのは誤解である。それは経済学的解

釈にかなうが，むしろ合理的に行動することがいかに難しいかを示す。

経済学では経済主体の行動は最適化問題の解として記述できることを仮定する。これは経済学を成立させる前提だからそれを認めることはやむを得ないことかも知れない。この前提から導かれる結論が事実と整合的ならそれで十分だとも言えるかも知れない。

しかしながら，経済主体に過度の合理性を求めてはならないことは，はっきりしている。同様に市場メカニズムというものは，合理性に限定のある経済主体の行動を何とか結びつける手段，しかもそうした手段の一つに過ぎないということもはっきりしている。

経済学ではこうした限定を無視することが多い。例えば合理的期待形成仮説である。自分の最適化問題すら解けない経済主体が，他の主体の動学的最適化行動を予測できるなどあり得ないことだろう。

また合理的期待が成立する世界では市場メカニズムは存在意義を失う。確かに合理的期待が成立すれば動学的資源配分は最適化する。しかしその理由は，各経済主体が超人的能力を持っていて，数学者も解けない動学的最適化問題を何故か解くからである。市場メカニズムは，こうして得られた最適解を事後的に執行する装置に過ぎない。効率的資源配分を達成するのは各人の優秀な頭脳であって市場メカニズムではない。

加えて市場メカニズムによる執行も不要となる。各人がすべて最適解を理解しているのだからその実現のためにわざわざ市場ごっこをする必要はない。金など支払わず最初から最適な物財配置を行えばよい。即ち社会主義で十分であろう。

合理的期待形成を主張する経済学者は，頭の良くなる薬の開発に励むべきであって市場メカニズムを讃えるなど見当違いも甚しい。また熱烈に社会主義を主張すべきであって社会主義をけなすなど論理矛盾の極致である。

すべてこのようなことは合理性の限界を見誤ることに発する。

経済主体の合理性には限界がある。加えて，動学的資源配分については，このような経済主体は何とか結びつけるための先物市場の範囲が限られているという事情もある。従って，現実の世界で，動学的資源配分が最適化するなど思いもよらぬことである。そうしたことを説く経済学者が居るとすれば，最大値原理の買い被りというものだろう。

注

1）通常用いる記号の意味については，ここで一括して解説する。なお，（注 5）（注 9）ではこの論文でのみ用いる記号の意味について解説する。

- $(x_1, \cdots x_n)$ は n 個の実数 $x_1, \cdots x_n$ を横に並べた n 次元横ベクトルを表わす。
- $(x_1, \cdots x_n)'$ は n 個の実数 $x_1, \cdots x_n$ を縦に並べた n 次元縦ベクトルを表わす。$x_1, \cdots x_n$ を縦に並べると表示に多くのスペースを要するため，特にダッシュをつけることで縦ベクトルを表示するのである。
- $(f_1(x), \cdots f_n(x))$ は n 個の函数 $f_1(x), \cdots f_n(x)$ を横に並べた n 次元横ベクトル函数を表わす。$(f_1(x),\quad f_n(x))'$ の意義は明らかであろう。
- $f(x_1, \cdots x_n)$ が $(x_1, \cdots x_n)'$ に実数 $f(x_1, \cdots x_n)$ を対応させる函数である時 $f_x(x_1, \cdots x_n)$ は $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \cdots x_n), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \cdots x_n), \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \cdots x_n)\right)$ を表わす。
- $g(x_1, \cdots x_n)$ が $(x_1, \cdots x_n)'$ に縦ベクトル $(g_1(x_1, \cdots x_n), \cdots g_n(x_1, \cdots x_n))'$ を対応させる函

数である時 $g_x(x_1, \cdots x_n)$ は行列 $\left\{\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(x_1, \cdots x_n)\right\}_{1 \leq i, j \leq n}$ を表わす。

また $g_{x_j}(x_1, \cdots x_n)$ は縦ベクトル $\left(\dfrac{\partial g_1}{\partial x_j}(x_1, \cdots x_n), \dfrac{\partial g_2}{\partial x_j}(x_1, \cdots x_n), \cdots \dfrac{\partial g}{\partial x_j}(x_1, \cdots x_n)\right)'$ を表わす。

更に $g_{ix}(x_1, \cdots x_n)$ は横ベクトル $\left(\dfrac{\partial g_i}{\partial x_1}(x_1, \cdots x_n), \dfrac{\partial g_i}{\partial x_2}(x_1, \cdots x_n), \cdots \dfrac{\partial g_i}{\partial x_n}(x_1, \cdots x_n)\right)$ を表わす。

- $g(x_1, \cdots x_n)$ が $(x_1, \cdots x_n)'$ に縦ベクトル $g_1(x_1, \cdots x_n), \cdots g_u(x_1, \cdots x_n)'$ を対応させる函数である時 $g(x_1, \cdots x_n) \geq 0$ は $g_1(x_1, \cdots x_n) \geq 0$ $\cdots g_n(x_1, \cdots x_n) \geq 0$ が同時に成立つことを示す。$g(x_1, \cdots x_u) = 0$ の意義も明らかであろう。
- $g(x)$ が x に縦ベクトル $(g_1(x), \cdots g_n(x))'$ を対応させる函数である時 $\int_a^b g(x)dx$ はベクトル $(\int_a^b g_1(x)dx, \cdots \int_a^b g_n(x)dx)'$ を表わす。横ベクトルについても同様である。
- A，Bがそれぞれ (m, ℓ) 行列，(ℓ, n) 行列ならばABはAとBの行列積を表わす。
  例えば $\Psi(t) = (\Psi_1(t), \cdots \Psi_n(t))$ が n 次元横ベクトル函数であり，$x(t) = (x_1(t), \cdots x_n(t))'$ が n 次元縦ベクトル函数であれば $\Psi(t)x(t)$ は $\sum_{i=1}^{n} \Psi_i(t)x_i(t)$ を表わす。
  同様にして，$v(t) = (v_1(t), \cdots v_n(t))$ が n 次元横ベクトル函数であり，$h(x_1, \cdots x_n) = (h_1(x_1, \cdots x_n), \cdots h_n(x_1, \cdots x_n))'$ が n 次元縦ベクトル函数であれば $v(t)h_x(x_1, \cdots x_n)$ は $(1, n)$ 行列 $v(t) = (v_1(t), \cdots v_n(t))$ と (n, n) 行列 $\left\{\dfrac{\partial h_i}{\partial x_j}(x_1, \cdots x_n)\right\}_{1 \leq i, j \leq n}$ の積である横ベクトル $\left(\sum_{i=1}^{n} v_i(t)\dfrac{\partial h_i}{\partial x_1}, \sum_{i=1}^{n} v_i(t)\dfrac{\partial h_i}{\partial x_2}, \cdots \sum_{i=1}^{n} v_i(t)\dfrac{\partial h_i}{\partial x_n}\right)$ を表わす。

2）（3－6）（3－7）を満たす $\Phi(t)$ が存在することは，行列の指数函数を考察することにより容易に分る。

3）（3－12）は，区間 I_1，に属する時刻 t には，インプット u が集合 $\omega(\bar{x}(t), t)$ の中を動く時，$u = \bar{u}(t)$ で函数 $\Psi(t)f(\bar{x}(t), u, t)$ が最大値 $\Psi(t)f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)$ に達することを表わす。
（3－13）は，区間 I_1，外の時刻 t には，インプット u が集合 $U(t)$ 上を動く時，$u = \bar{u}(t)$ で函数 $\Psi(t)f(\bar{x}(t), u, t)$ が最大値 $\Psi(t)f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)$ に達することを表わす。

4）函数 $f(x)$ が x について連続，函数 $g(x)$ が x について単調増加，右連続かつ各点 x で $\lim_{t \uparrow x} g(t)$ が存在するとすれば $\int_{t_1}^{t_2} f(x)dg(x)$ が $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(t_1 + k\dfrac{t_2 - t_1}{n}\right) \times \left\{g\left(t_1 + k\dfrac{t_2 - t_1}{n}\right) - g\left(t_1 + (k-1)\dfrac{t_2 - t_1}{n}\right)\right\}$ で定義される。
$\int_{t_1}^{t_2} p_{jx}(\bar{x}(s), s)\Phi(s)\Phi^{-1}(t)d\lambda_j(s)$ も同様に定義されている。

5）$X_{x_j}(x(\tau_1), \cdots x(\tau_\sigma))$ はベクトル $\left(\dfrac{\partial x}{\partial x_1(\tau_j)}, \cdots \dfrac{\partial x}{\partial x_n(\tau_j)}\right)$ を表わす。ただし $x(\tau_j) = (x_1(\tau_j), \cdots x_n(\tau_j))'$ とする。即ち $X_{x_j}(x(\tau_1), \cdots x(\tau_\sigma))$ は $x(\tau_j)$ の第 i 成分 $x_i(\tau_j)$ の限界的変化に対応する $X(x(\tau_1), \cdots x(\tau_\sigma))$ の限界的変化の係数を横に並べた n 次元横ベクトルである。
また $g_{x_j}(x(\tau_1), \cdots x(\tau_\sigma))$ は (ℓ, k) 成分が $\dfrac{\partial q_\ell}{\partial x_k(\tau_j)}$ に等しい (d, n) 行列，即ち $\left\{\dfrac{\partial q_\ell}{\partial x_k(\tau_j)}\right\}_{\substack{1 \leq \ell \leq d \\ 1 \leq k \leq n}}$ を表わす。

6）区間 I_1 上では（3－3）より $h(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) = 0$ であり区間 I_1 外では $v(t) = 0$ である。従って常に $v(t)h(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) = 0$。

7）$C[a, b]$ を区間 $[a, b]$ で定義された連続函数にノルム $\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$ を与えたノルム空間とする。$C[a, b]$ はバナッハ空間となり，$C[a, b]$ 上の汎画数はすべて $\int_a^b x(t)d\lambda(t)$ の形に表わされる。ここに $\lambda(t) = \lambda_1(t) - \lambda_2(t)$，$\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$ はいずれも単調増加，右連続であり，各点 t で $\lim_{s \uparrow t} \lambda_1(s)$，$\lim_{s \uparrow t} \lambda_2(s)$ が存在する。ここに述べられた $\lambda_1(t)$ の性質はこの事実に基く。

8）$\phi(t)$ の定義（5－4）より，$\Psi(t)$ に含まれる

$\lambda(t)$ のジャンプと $\lambda(t)p_x(\bar{x}(t), t)$ に含まれる $\lambda(t)$ のジャンプが打消し合って（5－6）が成立することが分る。

9）$\phi(\tau_{j-})$ は $\lim_{t \uparrow \tau_j} \phi(t)$ を意味する。即ち $\phi(\tau_{j-})$ は時刻 $t=\tau_j$ における函数 $\phi(t)$ の左極限値である。

参考文献

Michael R. Caputo (2005), *Foundations of Dynamic Economic Analysis*, Canbridge University Press.

K.Makowski, L.W.Neustadt (1974), "Optimal Control Problems with Mixed Control-Phase Variable Equality and Inequality Constraints", *SIAM Journal of Controls* Vol.12, No.2, May.

L.W.Neustadt (1976), *Optimization*, Princeton University Press.

R.V.Gamkrelidge (1978), *Principles of Optimal Control theory*, Plenum Press, New York.

（名古屋大学大学院経済学研究科）