

危険速度通過時に発生する 回転軸の振動に関する研究

| | |
|---------|---------|
| 名古屋大学図書 | |
| 和 | 1250119 |

1995年11月

中村 慎一郎

目 次

| | |
|---|----|
| 記号 | 1 |
| 第 1 章 序論 | 3 |
| 第 2 章 非対称回転体を持つ軸の危険速度通過時のふれまわり振動 (駆動トルクが一定の場合) | 9 |
| 2・1 緒言 | 9 |
| 2・2 運動方程式 | 9 |
| 2・3 運動方程式の漸近近似式 | 11 |
| 2・4 数値計算結果 | 12 |
| 2・4・1 不安定領域 | 13 |
| 2・4・2 運動方程式の数値積分結果 | 13 |
| 2・4・3 駆動トルクの影響 | 13 |
| 2・4・4 減衰の影響 | 14 |
| 2・4・5 偏心と動不つりあいの影響 | 15 |
| 2・5 結言 | 16 |
| 第 3 章 対称回転体を持つ軸の危険速度通過時のねじり振動 | 22 |
| 3・1 緒言 | 22 |
| 3・2 回転軸系 | 22 |
| 3・3 運動方程式 | 23 |
| 3・4 ねじり角 | 24 |
| 3・5 数値計算結果 | 25 |
| 3・5・1 加速の場合 | 26 |
| 3・5・2 減速の場合 | 26 |
| 3・5・3 角加速度の影響 | 27 |
| 3・5・4 ねじりの減衰係数の影響 | 27 |
| 3・5・5 横振動の減衰係数の影響 | 27 |
| 3・6 ねじり振動の発生機構 | 28 |
| 3・7 結言 | 29 |
| 第 4 章 非対称回転体を持つ軸の危険速度通過時のねじり振動 | 36 |

| | | |
|-------|----------------------------|----|
| 4・1 | 緒言 | 36 |
| 4・2 | 回転軸系 | 36 |
| 4・3 | 運動方程式 | 38 |
| 4・4 | 漸近近似式 | 39 |
| 4・4・1 | ふれまわり振動 | 39 |
| 4・4・2 | ねじり振動 | 40 |
| 4・5 | 数値計算結果 | 41 |
| 4・5・1 | ねじり振動とふれまわりの振幅変化 | 41 |
| 4・5・2 | 角加速度の影響 | 42 |
| 4・5・3 | 不つりあい方向の影響 | 42 |
| 4・6 | ねじりの振動特性 | 43 |
| 4・6・1 | ねじり振動の危険速度 | 43 |
| 4・6・2 | ねじり振動の振幅の最大値 | 44 |
| 4・7 | 結言 | 47 |
| 第5章 | 角速度の変化する回転軸系の運動方程式 | 52 |
| 5・1 | 緒言 | 52 |
| 5・2 | 回転体と回転軸 | 52 |
| 5・3 | ラグランジュの運動方程式 | 53 |
| 5・3・1 | 運動エネルギー | 53 |
| 5・3・2 | 位置エネルギー | 53 |
| 5・3・3 | 散逸関数 | 55 |
| 5・3・4 | ラグランジュの運動方程式 | 56 |
| 5・4 | オイラーの運動方程式 | 57 |
| 5・5 | ラグランジュの運動方程式とオイラーの運動方程式の比較 | 58 |
| 5・6 | 結言 | 59 |
| 第6章 | 本論文の結論 | 61 |
| | 参考文献 | 62 |
| | 謝辞 | 67 |

記 号

本論文で使用した記号を以下に示す．同じ記号を有次元，無次元の両方に用いていることがある．

| 記 号 | 意 味 |
|--------------------------|---|
| A | たわみの振幅 |
| A_{2max} | ふれまわり振幅 A_2 の最大値 |
| A_k | 漸近解表示の振幅 |
| c_1, c_2, c_3 | 回転体の並進運動，傾き運動，回転運動に関する減衰係数 |
| e | 回転体の偏心 |
| EI_0 | 軸の曲げこわさ |
| GI_z | 軸のねじりこわさ |
| $I = (I_1 + I_2)/2$ | 回転軸に垂直な慣性主軸まわりの回転体の慣性モーメント (あるいはその平均値) |
| I_1, I_2 | 回転軸に垂直な 2 慣性主軸まわりの回転体の慣性モーメント ($I_1 > I_2$ とする) |
| $\text{Im}[\]$ | [] 内の複素数の虚数部 |
| I_p | 回転体の回転軸まわりの極慣性モーメント |
| $i = \sqrt{-1}$ | 虚数単位 |
| l | 回転軸の長さ |
| l_1 | 駆動端 A から測った回転体の取付位置 |
| $l_2 = l - l_1$ | 軸端 B から測った回転体の取付位置 |
| m | 回転体の質量 |
| p_1, p_2, p_3, p_4 | 回転軸系の固有角振動数 ($p_1 > p_2 > p_3 > p_4$) |
| p_t | ねじりの固有角振動数 |
| T | 運動エネルギー |
| T_r | 軸の駆動トルク |
| T_{r1} | 駆動トルクの θ_{t1} に対応する成分 |
| T_{r2} | 駆動トルクの θ_{t2} に対応する成分 |
| t | 時間 |
| V | 位置エネルギー |
| x, y | 回転軸上の点 S での軸のたわみの x, y 成分 |
| x_1, x_2, x_3 | 回転体の 3 慣性主軸 |
| x_r, y_r | 重心 G での回転体の変位 |
| $z = x + iy$ | たわみの複素数表示 |
| α, γ, δ | たわみに関する軸のばね定数 |
| δ_t | ねじりに関する軸のばね定数 |

| | |
|-----------------------------------|--------------------------------------|
| η | 動不つりあいの角位置 |
| λ | 回転軸の駆動端 A での角加速度 |
| ω | 回転軸上の点 S での角速度 |
| $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ | 回転体の回転角速度の x_1, x_2, x_3 軸方向の成分 |
| ω_a | 回転軸の駆動端 A での角速度 |
| $\omega_{a1a}, \omega_{a2a}$ | ねじりの危険速度（加速時） |
| $\omega_{a1d}, \omega_{a2d}$ | ねじりの危険速度（減速時） |
| ω_c | ふれまわりの危険速度 |
| τ | 回転体の動不つりあい |
| θ, ϕ, ψ | 回転軸の方向を示すオイラー角 |
| θ_{rx}, θ_{ry} | 回転体の傾き角 |
| θ_r, ϕ_r, ψ_r | 回転体の慣性主軸の方向を示すオイラー角 |
| θ_s, ϕ_s, ψ_s | 回転軸上の点 S での慣性主軸の方向を示すオイラー角 |
| θ_t | 回転軸上の点 S でのねじり角 |
| θ_{t1} | 時間にたいしてなめらかに変化するねじり角の成分 |
| θ_{t2} | 時間にたいして振動的に変化するねじり角の成分 |
| θ_{t2max} | θ_{t2} の最大値 |
| θ_x, θ_y | 回転軸上の点 S での軸のたわみ角の xz, yz 平面への投影 |
| $\theta_z = \theta_x + i\theta_y$ | たわみ角の複素数表示 |
| ξ | 偏心の角位置 |
| ζ_k | ふれまわり振動数 p_k に対応する漸近解表示の減衰係数 |
| $\Delta I = I_1 - I_2$ | 回転軸に垂直な 2 慣性主軸まわりの慣性モーメントの差 |
| $\Delta I/I$ | 回転体の非対称性 |
| Φ_k | 漸近解表示の位相遅れ |
| Θ | 回転軸上の点 S での回転角 |
| Θ_a | 回転軸の駆動端 A での回転角 |
| Θ_r | 回転体の回転角 |
| - | 複素共役（上付きの横線） |
| · | 時間に関する微分（上付きの点） |
| a | 駆動端 A での値（添字） |
| r | 回転体の重心での値（添字，ただしトルク T_r を除く） |
| s | 回転体の軸への取付位置での値（添字） |
| t | ねじりに関するもの（添字） |
| x | x 成分（添字） |
| y | y 成分（添字） |
| z | ある量の x 成分と y 成分を一変数で複素表記したもの（添字） |

第1章 序 論

本研究は、非対称回転体－対称軸系の危険速度通過時に発生するふれまわり振動と軸のねじり振動の特徴について述べたものである。ここで、非対称回転体とは、回転軸に垂直な二つの慣性主軸まわりの慣性モーメントが等しくない回転体のことであり、例として2枚羽根のプロペラ、2極の電機子がある。単純な場合をあげれば、回転軸まわりに楕円や長方形の形状を有する回転体である。しかし、真円や、正方形の形状であれば対称回転体である。3枚羽根以上のプロペラ、3極以上の電機子の場合、回転軸に対して軸対称な配置であれば対称回転体であるが、軸対称でなければ非対称回転体となる。このような非対称回転体では、危険速度の付近に振幅が時間の経過とともに発散する不安定領域が存在することが知られている⁽¹⁾。

一般の回転体－軸系の危険速度あるいは固有振動数、および危険速度通過時の振動問題については、従来から多くの研究がなされている。初期においては、固有振動数や危険速度が重要な問題で、例えば、回転軸に関する最初の研究が1869年にRankine⁽²⁾によってなされて以来、Grammel⁽³⁾、Stodola⁽⁴⁾、Den Hartog⁽⁵⁾をはじめ多くの研究者によって扱われてきている。19世紀末から20世紀初期にかけては、回転機械は相対的に大きくなかったし、機械一般の騒音や振動についても現代ほどの配慮をする必要もなかったので、回転機械の振動問題の検討対象としては固有振動数や危険速度の決定が主で、他の要素は従たるものであった。しかし、近年における回転機械の大型化は機械の剛性を相対的に低下させることになり、そのためにこれまで軽視されてきたその外の振動現象も工学的に研究されることになった。危険速度通過時の振動^{(6)~(10)}、曲げ剛性に方向性を持つ偏平軸の振動^{(11)~(13)}、非対称回転体の振動^{(14)~(19)(51)}、ばね特性が非線形である回転軸の振動^{(20)~(22)}、剛性に方向差のある軸受台で支持された回転軸の振動^{(22)~(25)}、回転軸に亀裂が存在する場合の振動⁽²⁶⁾、角速度が変動する場合の回転軸の振動⁽²⁷⁾⁽²⁸⁾、自在継手で駆動される回転軸の振動^{(29)~(33)}、危険速度を通過する場合のねじり振動の振幅を考慮した加速の方法の検討⁽³⁴⁾など様々な研究がなされている。その結果、回転軸系に発生する振動の原因とその性質が明らかにされ、各種回転機械の防振対策を考えることができ、現代において回転機械がより静かに運転できるようにしている。

危険速度の通過問題に関しては、対称回転体系を取り扱った研究⁽⁸⁾⁽³⁵⁾⁽³⁶⁾が数多くなされてきている。偏平軸系を扱った研究^{(37)~(40)}や、非対称回転体⁽¹⁹⁾を扱った研究もいくつかあるが対称回転体系ほどは多くはない。偏平軸系は、危険速度付近に不安定領域があるという点では、非対称回転体系と類似した性質を持っている。軸の偏平性がある大きさ以下の場合には、不つりあいの角位置によっては対称軸系の場合より最大振幅が小さくなることもあり得ることが明らかにされている⁽⁴⁰⁾。太田らは、一定の角加速度で危険速度を通過する非対称回転体の挙動について解析し、危険速度通過時の最大振幅が、対称回転体の場合に比べて大きくなるのか小さくなるのかは、回転体の慣性主軸の方向に対する偏心あるいは動不つりあいの方向によって決まることを明らかにし、その力学的説明を行った⁽¹⁹⁾。すなわち、最大振幅が偏心や動不つりあい、回転体の非対称性による不安定の大きさのみではなく、それらの相対的位相差、つまり偏心や動不つりあいの角位置にも依存しているために非対称回転体の場合のほうが位相の組み合わせによって滑らかに危険速度を通過できるというものである。しかし、角加速度が小さい時の駆動トルクの大きさについては、危険速度付近でふれまわり振幅が著しく大きくなる、つまり軸をさらに加速するには大きなトルクを必要とする可能性があるにもかかわらず、詳細には検討を加えていない。一定のトルクで駆動される回転軸系においては、駆動トルクが十分大きい場合には、回転軸系は危険速度をなめらかに通過し、系の挙動は、角加速度一定の場合と類似したものとなることが予想される。しかし、駆動トルクの大きさが十分でない場合は、危険速度付近で軸のふれまわり振幅が大きくなり、角速度が危険速度付近に停滞してしまうなどの問題が生じることが考えられる。従って、非対称回転体－軸系について、軸のふれまわり振動や角速度変化に及ぼす駆動トルク、回転体の非対称性、偏心および動不つりあいの影響を明らかにすることが必要となる。特に、駆動トルクが一定であるという条件のもとでは、ふれまわりの振幅がどのように変化するかということと、回転軸の角速度がふれまわり振動の様子によってどのような影響を受けるのかが問題となる。加えて、危険速度あるいは不安定領域をなめらかに通過することができるのかどうかということ、そして通過できない時の回転軸系の挙動も重要な問題となる。この問題については、第2章で数値解析により考察を加える。

駆動トルク一定というのは軸のねじり角が全く一定であると言い換えてもよい。し

たがって、駆動トルク一定でない場合にはねじり角に何らかの変化があることになる。この「変化」には振動的変化、つまりねじり振動も含まれる。回転軸系においてねじり振動が問題となるのは、通常、歯車や自在継手のように、ねじり振動をひきおこすものが構成要素として含まれている場合^{(41)~(43)}や、回転軸の駆動トルクに周期的変動がある場合⁽⁴⁴⁾⁽⁴⁵⁾である。このような要素を含まない、両端が固定支持された真円弾性軸の中間に一つの対称回転体に取り付けられた単純な回転軸系を対象として軸のねじりあるいは駆動トルクと曲げの問題を扱った研究もいくつかある。たとえば、Tondl⁽⁴⁶⁾は、一定の速度で回転する軸の曲げとねじりの連成による安定性の問題を扱っている。Gasch と Pfützner⁽⁴⁷⁾は、ロータの共振点通過に必要なトルクを、角加速度が零となる条件下で求めているが、軸のねじり振動は考慮していない。自動車のエンジンに代表されるレシプロ内燃機関では、その原理上、クランク軸に加わる駆動トルクは周期的な変動を示すことはよく知られている⁽⁴⁴⁾⁽⁴⁸⁾。小野⁽⁴⁵⁾は、一定の角速度 ω で回転しているロータ系の駆動トルクを振動数 ν で変動させると、不釣り合いに起因する曲げ振動は、 ω 以外に $\omega \pm \nu$ の振動数の振動成分も持つようになることを明らかにしている。また、軸の疲労の観点から考えれば、危険速度を通過する回転軸など、一般に、角速度が変化する回転軸においては、軸の角速度と異なる角振動数を持ったふれまわり振動が発生するので、軸材料に繰返し応力が生じる。これにねじり振動が加わると、軸の疲労破壊に対する危険性がさらに増すことになる。この意味からも、危険速度通過時に実際にねじり振動が発生するかどうか、発生するとしたらその大きさはどの程度のものであるのかを知ることは機械の管理および安全上から重要である。この問題については対称回転体一軸系の場合を例にとり、第3章で数値解析を行い、考察を加える。

また、ねじり振動が共振となる軸の角速度について考える。回転軸の角速度がそのふれまわりの危険速度を通過するとき、ふれまわりの振幅は最大値に達した後に大きさが周期的に変化し、その振幅変化の振動数は、危険速度から遠ざかるにしたがって高くなる。このような危険速度通過時に観察されるふれまわり振動のうなりに似た現象はよく知られている^{(7)~(9)}。ところが、第3章で解析したところによれば、このとき回転軸にはねじり振動も発生することがある⁽⁴⁹⁾⁽⁵⁰⁾。一般に、軸のねじりは、ふれまわりの振幅が増加過程にあるか減少過程にあるかによって、その向きが異なって生ずる。そして、ふれまわりの振幅変化の振動数がねじりの固有角振動数と一致したときにね

じり振動の共振が起こるのである⁽⁴⁹⁾⁽⁵⁰⁾。一方、回転体に非対称性があると、危険速度通過時のふれまわりの振幅変化の振動数は、対称回転体の場合の成分に加えて、その2倍の成分も含むようになる⁽¹⁹⁾。これに伴って、ねじり振動は二つの異なる回転速度で共振することが予想される。したがって、特に危険速度より高い回転速度での運転のため、起動・停止を繰り返すような場合、比較的に見落とされがちなねじり振動も発生しているということにも注意する必要がある。危険速度通過中にふれまわり振動とともに発生するねじり振動の共振に対しても有効な防振対策を講ずる上で、このねじり振動の特性を明らかにしておくことは重要である。この問題に対しては、第4章で数値解析を行い、検討を加える。

さて、回転体一軸系の問題を考察するためには、系の運動方程式を求めなければいけないことは言うまでもない。その際には、オイラーの運動方程式をもとにして求める場合と、ラグランジュの運動方程式をもとにして求める場合がある。剛体の回転運動については、この二つの運動方程式は全く等価であるはずである。しかし、回転体の傾き運動を表す式において、これらが異なる結果をもたらす場合^{(28)(51)~(53)}が存在する。そこで、曲げとねじりの弾性理論⁽⁵⁴⁾に従い、二つの方法によって回転角速度が変化する場合の回転体一軸系の運動方程式を導出する⁽⁶⁰⁾。この導出により、二つの方法が等価であることを示す。運動方程式を導出するときに、軸のたわみやたわみ角、ねじり角について2次の微小量の精度が保たれないために導出結果に違いが出ることを示す。この問題に対しては、第5章で考察する。

運動方程式の数値解析に際しては、与えられた運動方程式を数学的に厳密に解くことが可能であれば大変望ましい。しかし、そのような力学系は極めて単純なものではない。本論文で扱うような回転体一軸系では、係数励振項や非線形項が存在するために、厳密解析解を求めることはもはや不可能と言っても良い。この場合においては、有用な近似解を求める必要がある。近似解は、数値解と近似理論解に大別される。

数値解は、運動方程式の各要素に直接的な数値を与えて数値のみで系の挙動を計算するものである。運動方程式を求めればすぐに数値計算ができるので、具体的な、そして少数の例については手軽に計算結果を得ることができるという利点があるが、ある要素の影響を調べようとすれば、数多くの計算をしなければいけないという欠点がある。以前は演算回路によるアナログ電子計算機を用いていたが、現在ではディジタ

ル電子計算機を用いるのが通例である。主な計算法には、Runge-Kutta 法や Euler 法、そして本論文で使用した Adams 法が挙げられる。必要な計算時間の長短、解の急激な変化にたいする追従性、運動方程式の計算特異性（スティフネス）などを考慮して好ましい計算法を選択する必要がある。

一方、近似理論解は与えられた運動方程式系に対して、最良近似と考えられる文字式表現を与えるものである。基本的な運動方程式を求めた後に、さらに定められた手順にしたがって計算を加えることになる。近似式を得るまでの労力を多く要するが、各要素の影響が文字式表現から直接に推定することができる。また、一度近似式を得てしまえば、特定の一つの場合を求めるのに必要な計算時間は直接数値解法と比較すると少なくすむ。主な計算法として、摂動法、平均法、Van del Pol の方法、調和バランス法、そして本論文で使用した漸近法⁽⁵⁵⁾が挙げられる。近似解における永年項の問題や高次近似解などの問題を考慮して好ましい計算法を選択する必要がある。

本論文の構成は、以下の通りである。

第 1 章は序論であり、論文のあらましを述べる。

第 2 章は非対称回転体を持つ回転軸を一定トルクで駆動する軸系のふれまわりについて、危険速度を通過させた場合に発生するふれまわり振動などを述べる。駆動トルクが十分に大きい場合に危険速度を滑らかに通過することはもちろん、駆動トルクが小さすぎて危険速度を通過できない場合に角速度が危険速度の付近で振動的に変化すること、また、その通過できない場合においても、系の減衰を変化させることにより危険速度を通過させうることを示す。

第 3 章は対称回転体を持つ回転軸を一定角加速度で駆動し、その軸系のふれまわりについての危険速度を通過させた後に発生する軸のねじり振動について述べる。軸はふれまわり振幅の増大とともにねじれ、そのふれまわり振幅の変化を起因とする軸のねじり振動は、軸から見たふれまわり角速度がねじりの固有振動数と一致する場合に共振を起こすことを示す。

第 4 章では非対称回転体を持つ回転軸を一定角加速度で駆動し、その軸系のふれまわりについての危険速度を通過させた後に発生する軸のねじり振動について述べる。第 3 章の対称回転体の場合とあわせて、漸近近似式を提示する。第 3 章で述べられる結

果に加えて、回転体の非対称性によってねじり振動が増大する回転角速度が存在することを示す。

第5章では回転角速度が変化する回転体一軸系の運動方程式を提示する。たわみ、たわみ角、ねじり角などの変位について2次の微小量までを考慮したモデルを提示する。回転体の運動方程式を導出する際に、オイラーの運動方程式とラグランジュの運動方程式では一部の項に違いが生じることがある。運動方程式は導き方によらず同一の結果を得なければいけないはずである。2次の微小量を切り捨てて計算したために違いが生じることを示し、さらに2次の微小量をも考慮した場合に二つの方法が等価であることを示す。

第6章では、本論文の結論を述べる。

なお、第2章から第4章における解析は、以下の仮定のもとに行った。

- ・回転体のたわみ、たわみ角は微小である。
- ・回転体は剛体である。
- ・回転軸は弾性体であり、軸系の復元力は線形で表わされる。
- ・回転軸は分布質量をもたない。
- ・回転軸は鉛直であり、重力は無視する。

第2章 非対称回転体を持つ軸の危険速度通過時のふれまわり振動

(駆動トルクが一定の場合) ⁽⁵⁶⁾⁽⁵⁷⁾

2・1 緒言 本章では、非対称回転体を持つ回転軸が一定の駆動トルクの作用のもとで危険速度を通過しようとするときの、回転軸系の挙動を解析する。目的は、一定の駆動トルクによって駆動される非対称回転体－軸系について、軸のふれまわり振動や角速度変化に及ぼす駆動トルク、回転体の非対称性、偏心および動不つりあいの影響を明らかにすることである。特に、駆動トルクが一定であるという条件のもとでは、ふれまわりの振幅がどのように変化するかということと同時に、回転軸の角速度がふれまわり振動の様子によってどのような影響を受けるのか、危険速度あるいは不安定領域をなめらかに通過することができるのかということも重要な問題となる。これらのことを解析的に扱うため、軸の曲げとねじりの弾性理論⁽⁵⁴⁾に基づいて導出した運動方程式を用いる。本章で扱う運動方程式は、軸のたわみ、たわみ角、ねじり角の2次の微小量で成り立つものであり、その解析は、Bogoliubov と Mitropolisky の漸近的方法⁽⁵⁵⁾によった。

2・2 運動方程式 図 2.1 に本章の対象とした非対称回転体－軸系を示す。回転軸 S_h は一様な円形断面の弾性軸で、駆動端 A において固定支持されている。軸端 S には質量 m の非対称回転体 D が取り付けられている。非対称回転体 D の慣性主軸を x_1, x_2, x_3 とし、それぞれの主軸まわりの慣性モーメントを I_1, I_2, I_p とする。O-xyz は静止直交座標系であり、回転軸 S_h がたわんでいないとき、回転軸の中心線は z 軸と一致し、点 S は座標系の原点 O と一致する。軸の曲げおよびねじりは AS 部分においてのみ生じるものとし、点 A に対する点 S の軸のねじり角を θ_t 、点 A および点 S での軸の角速度を ω_a および ω とする。回転軸 S_h の分布質量および回転体 D に働く重力は無視する。

図 2.2 に非対称回転体の慣性主軸 x_1, x_2, x_3 、および偏心 $\overline{GS} = e$ 、動不つりあい $\tau = \angle x_3GT$ の角位置関係を示す。G-XYZ は回転体の重心 G を原点とする運動座標系で、O-xyz に平行である。 x_3 軸は軸 S_h のたわみ曲線の点 S での接線に平行な直線

GT に対し小さな角 τ だけ傾いている．偏心 e の方向および動不つりあい τ の方位方向は， x_1 軸から軸の回転方向に測ってそれぞれ ξ ， η であるとする．軸の回転開始位置を次のように定める．軸にひずみがなく，また不つりあいもない場合を想定すると，軸の回転途中において， x_1 軸が X 軸に一致する状態が存在する．この瞬間を時刻 $t=0$ にとる．この状態を基準として点 A，S のそれぞれの回転角 θ_a ， θ を測る．点 S での軸のたわみ x ， y の無次元量 $x'=x/l$ ， $y'=y/l$ ，たわみ角 θ_x ， θ_y を，虚数単位 $i=\sqrt{-1}$ を用いて次のように表わす．

$$z = x' + iy', \quad \theta_z = \theta_x + i\theta_y \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

駆動端 A でのトルクを T_r ，回転軸のたわみに関するばね定数を α ， γ ， δ ，ねじりに関するばね定数を δ_t ，回転体の並進運動，傾き運動，回転運動に関する粘性摩擦係数をそれぞれ c_1 ， c_2 ， c_3 とする．さらに次の無次元パラメータを導入する．

$$\left. \begin{aligned} e' &= e/l, \quad T_r' = T_r/(\alpha l^2), \quad \gamma' = \gamma/(\alpha l), \quad \delta' = \delta/(\alpha l^2), \quad \delta_t' = \delta_t/(\alpha l^2), \\ c_1' &= c_1/\sqrt{m\alpha}, \quad c_2' = c_2/(l^2\sqrt{m\alpha}), \quad c_3' = c_3/(l^2\sqrt{m\alpha}), \\ p' &= p/\sqrt{\alpha/m}, \quad \omega_a' = \omega_a/\sqrt{\alpha/m}, \quad \omega' = \omega/\sqrt{\alpha/m}, \quad t' = t\sqrt{\alpha/m}, \\ I' &= (I_1 + I_2)/(2ml^2), \quad I_p' = I_p/(ml^2), \quad \Delta I' = (I_1 - I_2)/(2ml^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.2)$$

このあと無次元量を表わすダッシュ記号は省略する．非対称回転体－軸系の運動エネルギー，ポテンシャルエネルギー，および散逸関数を求め，これらをラグランジュの運動方程式に代入すると，回転軸のたわみ，たわみ角，回転角に関する次の運動方程式を得る．ただし， e ， τ ， z ， θ_z ， θ_t の 3 次以上の微小量は無視する．

$$\ddot{z} + z + \gamma\theta_z = -c_1\dot{z} - i\delta_t\theta_t\dot{\theta}_z + e\left\{\dot{\Theta}^2 - i(\ddot{\Theta} + c_1\dot{\Theta})\right\}\exp\{i(\Theta + \xi)\} \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta}_z - iI_p\dot{\Theta}\dot{\theta}_z + \delta\theta_z + \gamma z &= -c_2\dot{\theta}_z + i\delta_t\theta_t z + \frac{i\theta_z}{2}(I_p\ddot{\Theta} + c_3\dot{\Theta}) \\ &+ \tau\left[(I - I_p)\dot{\Theta}^2 - i\{(I - I_p)\ddot{\Theta} + (c_2 - c_3)\dot{\Theta}\}\right]\exp\{i(\Theta + \eta)\} \\ &+ \Delta I\frac{d}{dt}\left[\dot{\theta}_z\exp\{2i\Theta\} - i\tau\dot{\Theta}\exp\{i(\Theta - \eta)\}\right] \quad \dots\dots\dots (2.4) \end{aligned}$$

$$I_p \ddot{\Theta} + c_3 \dot{\Theta} = T_r + \text{Im} \left[\frac{1}{2} I_p \ddot{\theta}_z \bar{\theta}_z - \left\{ \Delta I \dot{\theta}_z^2 \exp(-i\Theta) + \tau \Delta I \ddot{\theta}_z \exp(i\eta) \right. \right. \\ \left. \left. + e \ddot{z} \exp(-i\xi) + \tau(I - I_p) \ddot{\theta}_z \exp(-i\eta) \right\} \exp(-i\Theta) \right] \dots\dots\dots (2.5)$$

ここに、 $\bar{\theta}_z$ は θ_z の共役複素数、 $\text{Im}[\quad]$ は $[\quad]$ 内の虚数部を表し、ドット記号は無次元時間 t に関する微分を意味する。ねじり角 θ_t は次式で与えられる。

$$\theta_t = \text{Im}[z \bar{\theta}_z] - \frac{T_r}{\delta_t} \dots\dots\dots (2.6)$$

2・3 運動方程式の漸近近似式 ここでは駆動トルク T_r が一定の場合を扱っている。式 (2.5) を式 (2.3) に代入し、式 (2.3) と式 (2.4) を積分すれば、 z 、 θ_z 、および Θ が求まる。これらを式 (2.5) に代入すれば、ねじり角 θ_t が定められる。なお、駆動端 A での回転角 Θ_a は

$$\Theta_a = \Theta - \theta_t \dots\dots\dots (2.7)$$

で与えられる。

式 (2.3)、(2.4) の右辺を零とおいた非摂動系の固有角振動数は 4 個存在し、これらを p_k [$k=1, 2, 3, 4$; $p_1 > p_2 > p_3 > p_4$] とおく。角速度 $\dot{\Theta} = \omega$ が変化し、危険速度 $\omega = p_k$ を通過する場合を考える。なお、駆動トルクが有限であるため、角加速度 $\dot{\omega} = \lambda$ は必ずしも一様に変化するとは限らない。危険速度を通過中、回転軸は固有角振動数 p_k の振動様式で単一周期振動を行うものとする。この仮定のもとで、ふれまわり振動に関する運動方程式 (2.3)、(2.4) の漸近近似式を求める。第 1 近似の結果は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} z &= A_k \exp \{i(\Theta + \Phi_k)\} \\ \theta_z &= \kappa_k A_k \exp \{i(\Theta + \Phi_k)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_k &= -\zeta_k A_k + e\mu_k \sin(\Phi_k - \xi) + \tau\nu_k \sin(\Phi_k - \eta) + \Delta I \sigma_k A_k \sin 2\Phi_k \\ \dot{\Phi}_k &= p_k - \omega + \frac{e\mu_k}{A_k} \cos(\Phi_k - \xi) + \frac{\tau\nu_k}{A_k} \cos(\Phi_k - \eta) + \Delta I \sigma_k \cos 2\Phi_k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.9)$$

ここに、

$$\kappa_k = -(1 - p_k^2)/\gamma \quad \dots\dots\dots (2.10)$$

$$\zeta_k = \frac{2(c_1 + c_2 \kappa_k^2)p_k - T_r \kappa_k^2 + \lambda D_k \dot{\omega}}{2\kappa_k^2(2I p_k - I_p \omega) + 4p_k} \quad \dots\dots\dots (2.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_k &= -\frac{\omega^2}{\kappa_k^2 \{I(p_k + \omega) - I_p \omega\} + p_k + \omega} \\ \nu_k &= -\frac{(I - I_p) \kappa_k \omega^2}{\kappa_k^2 \{I(p_k + \omega) - I_p \omega\} + p_k + \omega} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.12)$$

$$\sigma_k = -\frac{\kappa_k^2 p_k (2\omega - p_k)}{\omega \{2 + (2I - I_p) \kappa_k^2\}} \quad \dots\dots\dots (2.13)$$

$$D_k = 2(1 + I \kappa_k^2) \frac{dp_k}{d\omega} + 2(2I p_k - I_p \omega) \kappa_k \frac{d\kappa_k}{d\omega} \quad \dots\dots\dots (2.14)$$

である。

角速度 ω は、式 (2.8) を式 (2.5) に代入して得られる次式

$$\begin{aligned} I_p \dot{\omega} + c_3 \omega &= T_r + \Delta I \kappa_k^2 p_k^2 A_k^2 \sin 2\Phi_k + \tau \Delta I \kappa_k p_k^2 A_k \sin(\Phi_k + \eta) \\ &\quad + e p_k^2 A_k \sin(\Phi_k - \xi) + \tau(I - I_p) \kappa_k p_k^2 A_k \sin(\Phi_k - \eta) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.15)$$

によって定められる。式 (2.15) から、回転軸の角速度 ω は、駆動トルクだけでなく、ふれまわり振動の振幅 A_k および位相 Φ_k にも依存し、複雑に変化することが予想される。

2・4 数値計算結果 以下の無次元パラメータを数値計算に用いた。

$$\left. \begin{aligned} I &= 0.0534, \quad I_p = 0.1034, \\ \delta &= 1/3, \quad \delta_t = 0.0655, \quad \gamma = -0.5, \\ c_1 &= 0.001, \quad c_2 = 0.001, \quad c_3 = 0.0001 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.16)$$

この他のパラメータについては必要に応じて示す。ここでは、慣性モーメントが $I_p > I$ の条件を満足する回転体を考えることにする。このような回転体に対しては、 $\omega \simeq p_2$ なる危険速度の通過問題のみが存在するので、式 (2.8)~(2.15) で $k = 2$ とおいた場合の数値解を求める。

回転軸が危険速度を通過しようとする時の振幅の変化や、角速度の変化の様子を調べ

るには、式 (2.9) と式 (2.15) を数値積分すればよい。本章での数値積分には、名古屋大学 大型計算機センターの数値計算用ライブラリプログラムから Adams 法 (DODAM) と、Runge-Kutta 法の改良版である Runge-Kutta-Fehlberg 4 次法 (RKF4AD) を使用した。どちらの計算法も、内部計算は FORTRAN の倍精度実数で計算したところ、結果は双方とも 10 進法で 7 桁以上の一致をしていた。このため、どちらの方法も精度は十分であると判断し、第 3、4 章の計算では計算時間が短い Adams 法を用いることとした。

2・4・1 不安定領域 定常状態、すなわち $\lambda = \dot{\omega} = 0$ のときの不安定領域は、式 (2.9) を解析すれば得られる。図 2.3 に $\Delta I/I$ を種々かえた場合の不安定領域を示す。なお、 $\Delta I/I = 0$ の場合の危険速度はおおよそ 0.53 である。

2・4・2 運動方程式の数値積分結果 図 2.4 に、運動方程式 (2.3)~(2.5) を直接数値積分することによって得られた回転軸の旋回軌跡を示す。破線は、 xy 平面上に描かれた半径 0.003 の円である。積分の初期値は、 $\omega = 0.25$ での定常解を用いた。なお、このあとに示す数値積分は、加速開始時の角速度での定常解を初期値とする。この図から、回転軸は危険速度を通過中、ほぼ円に近い軌跡を描きながら前向きにふれまわっていることがわかる。パラメータの値を種々変えた場合についても同様の結果が得られた。すなわち、運動方程式 (2.3), (2.4) の近似式 (2.8), (2.9) を導く際に行った“回転軸は危険速度を通過中、単一周期の調和振動を行う”という仮定は妥当なものであると考えられる。

2・4・3 駆動トルクの影響 非対称性の大きさ ΔI を 0.0147 として、危険速度通過時の振幅および角速度が、駆動トルク T_r の大きさによってどのような影響を受けるのかを調べた。この場合、 $\Delta I/I = 0.275$ であるので、不安定領域は図 2.3 からおおよそ $\omega = 0.52 \sim 0.54$ となる。

図 2.5(a), (b) は、振幅 A_2 と角速度 ω の変化を示す。駆動トルクが比較的大きな $T_r = 0.80 \times 10^{-4}$ あるいは 0.65×10^{-4} のときは、角速度 ω は不安定領域および危険速度を滑らかに通過している。振幅 A_2 の変化は角加速度が一定の場合⁽¹⁹⁾と類似しており、駆動トルクが大きいほど、最大振幅は小さくなる。このように、駆動トルクが十分に大きい場合は、角加速度一定の場合と同じような傾向を示している。角速度が直線的に変化していないのは、回転運動に対する粘性摩擦のためである。式 (2.5) の右辺第 2 項 (2

次の微小量)を無視した近似的な議論によれば、 ω は、最終的には、およそ T_r/c_3 に達するはずである。駆動トルク T_r が、 0.80×10^{-4} あるいは 0.65×10^{-4} のときは、角速度 ω は、 $T_r/c_3 = 0.80$ あるいは 0.65 に漸近している。

駆動トルクが 0.65×10^{-4} よりわずかに小さな $T_r = 0.60 \times 10^{-4}$ あるいは 0.55×10^{-4} のときは、回転軸は危険速度を通過することができない。角速度 ω は、危険速度付近までなめらかに増加した後、周期的に変動しながら、不安定領域の低速側の境界 ($\omega = 0.52$) 付近に収束していく。同様に、振幅 A_2 も危険速度付近までなめらかに増加し、 $T_r = 0.80 \times 10^{-4}$ あるいは 0.65×10^{-4} の場合よりもかなり大きな値を中心に周期的に変動している。周期的に変動している状態での振幅 A_2 の変化と角速度 ω の変化の位相関係を詳しく調べると、振幅が大きくなるときは角速度が小さくなり、振幅が小さくなるときは角速度が大きくなっていることがわかる。すなわち、振幅の増減に応じて回転運動のエネルギーが減ったり増えたりしている。しかし、角速度 ω は $T_r/c_3 = 0.60$ あるいは 0.55 よりも小さな 0.52 付近を変動している。

$T_r = 0.55 \times 10^{-4}$ の場合と $T_r = 0.60 \times 10^{-4}$ の場合を比較するとトルクの大きい後者の場合の方が振幅が大きくなっている。このトルクの大きさに対する振幅の大小関係は、危険速度をなめらかに通過できる場合と傾向が異なる。角速度 ω が危険速度を通過できず、不安定領域の低速側の境界 ($\omega = 0.52$) 付近に停滞しているときは、駆動端から与えられたトルクは、角速度をおよそ 0.52 に保つことと大きなふれまわり振幅を維持することの両方に使われる。式 (2.15) を用いてそのトルク配分を概算すると、ふれまわり振動に消費されるトルクは、 $T_r = 0.55 \times 10^{-4}$ のとき $c_3(0.55 - 0.52) = 0.3 \times 10^{-5}$ となり、 $T_r = 0.60 \times 10^{-4}$ のとき $c_3(0.60 - 0.52) = 0.8 \times 10^{-5}$ となる。ふれまわり振動に消費されるこれらのトルクが大きいほど、ふれまわり振動の振幅が大きくなるわけである。危険速度および不安定領域を通過できる $T_r = 0.80 \times 10^{-4}$ 、 0.65×10^{-4} の場合は、角速度 ω は、それぞれ $T_r/c_3 = 0.80$ 、 0.65 に収束している。

2・4・4 減衰の影響 図 2.5 の結果から、駆動トルクが小さく危険速度を通過することができない場合でも、もしふれまわり振動の減衰係数を大きくし、振幅を小さく抑えれば、危険速度を通過できるようになることが予想される。そこで、ふれまわりの減衰係数 c_1 、 c_2 の値を図 2.5 の場合より少し大きくしてみた場合の結果を図 2.6(a), (b) に示す。駆動トルク T_r は 0.60×10^{-4} で、図 2.5 の場合は危険速度を通過できない

が、図 2.6 に示す減衰係数 c_1, c_2 が 1.35×10^{-3} よりわずかに小さい 1.34×10^{-3} の場合には、危険速度を通過することができず、振幅の周期的な変動の大きさは図 2.5 の場合より大きい、変動の中心値は図 2.5 の場合より小さくなっている。

2・4・5 偏心と動不つりあいの影響 回転体は $I < I_p$ の条件を満たしているので、式 (2.9), (2.12) より、

$$\xi = \eta, \quad e = \tau(I_p - I)\kappa_2 \quad \dots\dots\dots (2.17)$$

が成り立つとき、偏心と動不つりあいによる強制振動は発生しなくなり、

$$\eta = \xi \pm 180^\circ \quad \dots\dots\dots (2.18)$$

が成り立つとき、偏心と動不つりあいによる強制振動の振幅が最も大きくなることからわかる⁽¹⁹⁾。

ここでは、危険速度をなめらかに通過する場合について、ふれまわり振動の振幅の最大値が、偏心の方向あるいは動不つりあいの方向によってどのように変わるのかを調べる。

(1) **$\xi = \eta$ が一定の場合** 偏心と動不つりあいの角位置が危険速度通過時の最大振幅に対して与える影響を明らかにするために、まず偏心と動不つりあいの相互の影響が変化しない式 (2.18) の条件を保ちながら偏心の方向 ξ を変えたときの、振幅 A_2 の最大値 $A_{2\max}$ の変化の様子を調べる。図 2.7 にその結果を示す。非対称性が比較的小さく $\Delta I/I = 0.1$ の場合、最大振幅は、偏心の方向 ξ がほぼ $0^\circ \sim 90^\circ$ および $180^\circ \sim 270^\circ$ の範囲では対称回転体の場合より大きくなっているが、 ξ がほぼ $90^\circ \sim 180^\circ$ および $270^\circ \sim 360^\circ$ の範囲では、対称回転体の場合よりも小さくなっている。したがって、一般に回転体が非対称であるために危険速度通過がより困難となるわけではなく、対称回転体と非対称回転体のどちらかがなめらかに危険速度を通過できるかは、偏心並びに動不つりあいの方向によって決まる。

このような偏心の方向および動不つりあいの方向に対する最大振幅の変化特性は、角加速度が一定の場合と類似しており、同様な力学的解釈が成り立つ⁽¹⁹⁾。

(2) **η が一定の場合** 動不つりあいの方向 η を 0° に固定し、偏心の方向 ξ を変化

させた場合の結果を図 2.8 に示す。この場合は、偏心と動不釣りあいによる起振力の位相関係が変わると同時に、非対称性による不安定振動と偏心および動不釣りあいによる強制振動の位相関係も変わる。図 2.8 において、 $e = 2.5 \times 10^{-5}$ の場合は、 $\xi = 0^\circ$ のとき、最大振幅 $A_{2\max}$ がきわめて小さくなっている。これは、このようなパラメータの値が式 (2.17) の関係をほぼ満足しているためである。偏心 e の値が 5.0×10^{-5} 、 10.0×10^{-5} と大きくなるにしたがって、 ξ にたいする $A_{2\max}$ の変化特性は図 2.7 に似てくる。

2・5 結 言 本章では、非対称回転体を持つ対称回転軸系の運動方程式を座標の 2 次の微小量の精度まで求め、その漸近近似式を用いて、一定の駆動トルクで危険速度を通過するときのふれまわり振幅に及ぼす偏心および動不釣りあいの影響を調べた。得られた結果は以下の通りである。

(1) 駆動トルク T_r が十分に大きいときは、回転軸系は危険速度を滑らかに通過でき、到達する角速度の値は、回転運動に対する粘性摩擦係数 c_3 によって決まり、 T_r/c_3 に漸近する。振幅の変化状態は、角加速度が一定の場合と同様であり、最大振幅は駆動トルクが大きいほど小さくなる。

(2) 駆動トルクの大きさが十分でなく、角速度が危険速度付近に停滞する場合には、角速度は、周期的な変動を繰り返しながら不安定領域の境界に漸近する。このとき、振幅も周期的な変動を繰り返しながらある一定値に収束する。振幅の到達する値は、駆動トルクが大きいほど大きくなる。

(3) かろうじて危険速度を通過できる程度の駆動トルクでは、トルクのわずかな違いにより振幅変化の様子が著しく異なる。

(4) 駆動トルクの大きさが危険速度を通過できるほどでない場合でも、ふれまわり振動に関する減衰係数を大きくすれば、危険速度を通過することが可能となることもある。この場合、角速度は危険速度付近で一旦減少した後、 T_r/c_3 に漸近する。

(5) 偏心および動不釣りあいの角位置は、危険速度通過時の最大振幅に大きく影響する。両者の角位置、あるいは大きさの関係によっては、対称回転体の場合よりも小さな振幅で危険速度を通過できることもある。

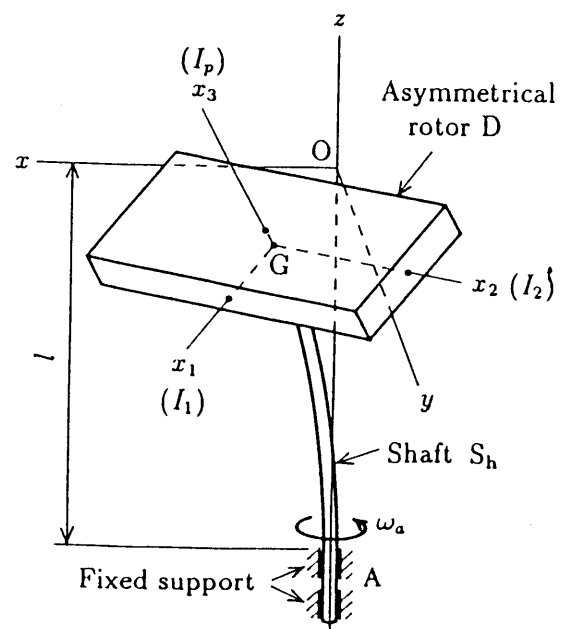


図 2.1 非対称回転体-軸系

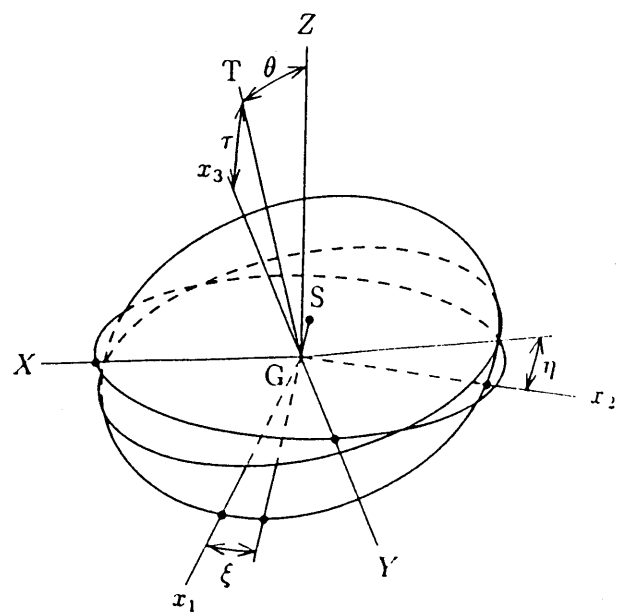


図 2.2 非対称回転体の 3 慣性主軸 x_1, x_2, x_3 , 偏心 $\overline{GS} = e$, 動不つりあい τ の角位置関係

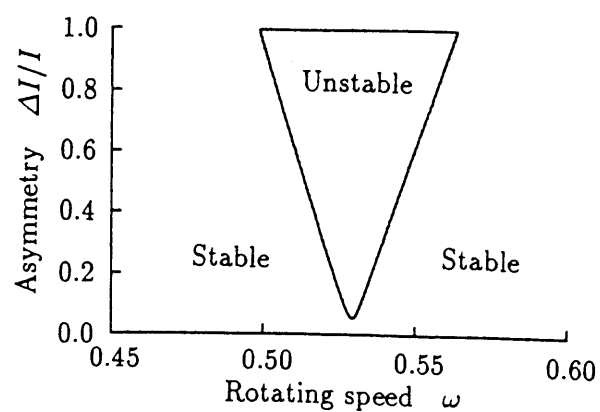


図 2.3 不安定領域図 ($c_1 = c_2 = 1.0 \times 10^{-3}$)

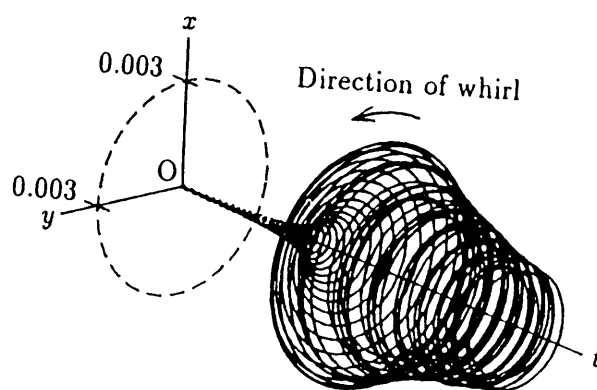
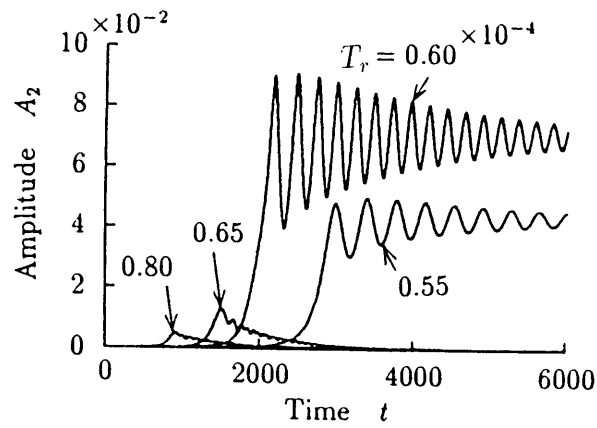
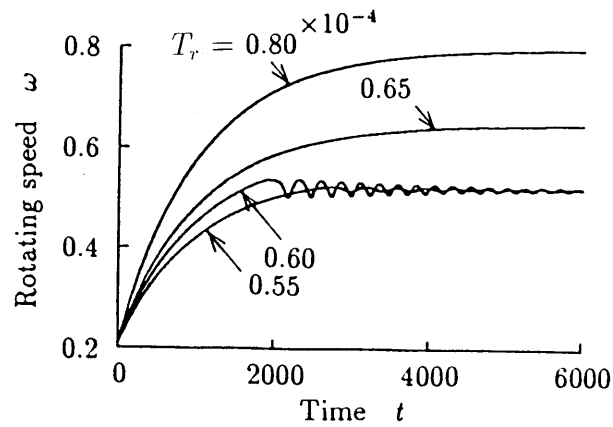


図 2.4 運動方程式を数値積分することによって得られた危険速度通過時の回転軸のふれまわり軌跡 ($T_r = 1.0 \times 10^{-4}$, $\Delta I = 0.0147$, $e = 9.0 \times 10^{-5}$, $\tau = 3.6 \times 10^{-4}$, $\xi = \eta = 0^\circ$, $c_1 = c_2 = 1.0 \times 10^{-3}$, $t = 0 \sim 1000$, $\omega = 0.25 \sim 0.715$)

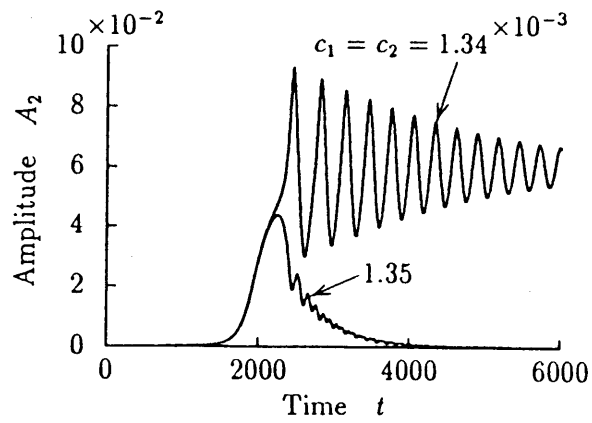


(a) 振幅曲線

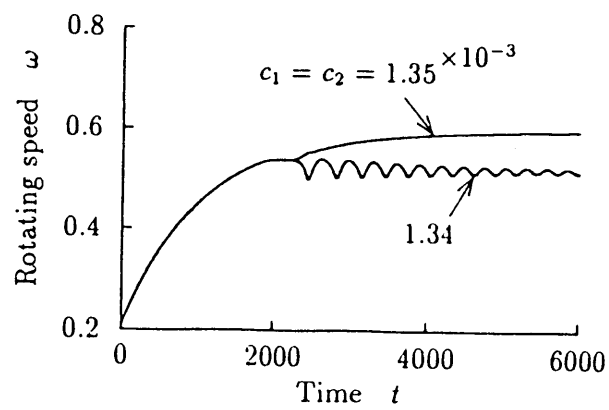


(b) 角速度の変化

図 2.5 駆動トルクの影響 ($\Delta I = 0.0147, e = 9.0 \times 10^{-5}, \tau = 3.6 \times 10^{-4}, \xi = \eta = 0^\circ, c_1 = c_2 = 1.0 \times 10^{-3}$)



(a) 振幅曲線



(b) 角速度の変化

図 2.6 減衰係数の影響 ($T_r = 0.60 \times 10^{-4}$, $\Delta I = 0.0147$, $e = 9.0 \times 10^{-5}$, $\tau = 3.6 \times 10^{-4}$, $\xi = \eta = 0^\circ$)

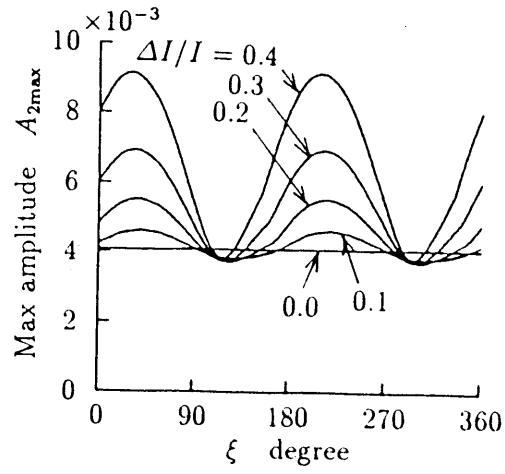


図 2.7 偏心および動不つりあいに対する最大振幅の変化曲線
(偏心と動不つりあいの相対的な角位置は $\eta = \xi + 180^\circ$ に固定; $T_r = 1.0 \times 10^{-4}$, $e = 9.0 \times 10^{-5}$, $\tau = 3.6 \times 10^{-4}$, $c_1 = c_2 = 1.0 \times 10^{-3}$)

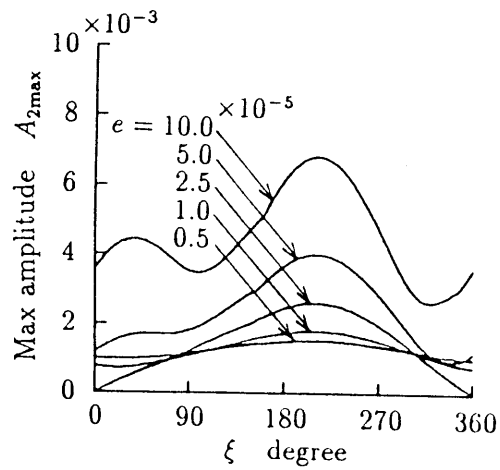


図 2.8 偏心の方向に対する最大振幅の変化曲線 ($T_r = 1.0 \times 10^{-4}$, $\Delta I = 0.0147$, $\tau = 3.6 \times 10^{-4}$, $\eta = 0^\circ$, $c_1 = c_2 = 1.0 \times 10^{-3}$)

第3章 対称回転体を持つ軸の危険速度通過時のねじり振動⁽⁴⁹⁾⁽⁵⁰⁾

3・1 緒言 回転軸系においてねじり振動が問題となるのは、通常、歯車や自在継手のように、ねじり振動をひきおこすものが構成要素として含まれている場合である^{(41)~(43)}。これに比べると、本章で扱う回転軸系は、両端が固定支持された真円弾性軸の中間に一つの対称回転体を取り付けられた単純なものである。

危険速度を通過する回転軸など、一般に、角速度が変化する回転軸においては、軸の角速度と異なる角振動数を持ったふれまわり振動が発生するので、軸材料に繰返し応力が生じる。これにねじり振動が加わると、軸の疲労破壊に対する危険性が増すことになる。この意味からも、危険速度通過時に実際にねじり振動が発生するのかどうか、発生するとしたらその大きさはどの程度のものであるのかを知ることは重要である。

本章では、回転軸が一定の角加速度でふれまわりの危険速度を通過するときに、ねじり振動も発生する場合があることを解析的に示し、このねじり振動が、角加速度の大きさあるいは減衰係数の大きさによりどのような影響を受けるのかを明らかにした。さらに、ねじり振動の発生機構についても考察した。

3・2 回転軸系 図3.1に対称回転体-軸系を示す。回転軸 S_h は長さ l の一様な円形断面の弾性軸で、両端 A, B において固定支持されている。回転軸の中間の点 S には、質量 m の対称回転体 D が取り付けられている。B 端においては、摩擦力によるモーメントや負荷トルクは作用しないものとする。静止直交座標系 $O - xyz$ およびこれに平行な運動座標系 $G - XYZ$ を図3.1のように設定する。G は回転体の重心、 $\overline{GS} = e$ は偏心、角 τ は動不つりあいである。GT は軸 S_h のたわみ曲線の点 S での接線に平行な直線である。軸の駆動端 A での角加速度を一定値 λ 、角速度を ω_a 、回転角を θ_a 、点 S での角速度を ω 、回転角を θ とする。回転軸の駆動端 A に対する点 S のねじり角を θ_t で表し、軸の回転方向のねじりを正にとる。 x_1, x_2 軸（直径）まわりの慣性モーメントを I 、 x_3 軸まわりの慣性モーメント（極慣性モーメント）を I_p とする。 x_1 軸の方向は、動不つりあい τ の方位方向に一致している。偏心 e の方向は、 x_1 軸から軸の回転方向に測って ξ である。

時刻 $t=0$ において $\theta_a=0$ とすれば，回転角および角速度について次の関係が成り立つ．

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}_a &= \lambda \\ \omega_a &= \lambda t + \omega_{a0} \\ \Theta_a &= \frac{1}{2}\lambda t^2 + \omega_{a0}t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega} &= \lambda + \ddot{\theta}_t \\ \omega &= \lambda t + \omega_{a0} + \dot{\theta}_t \\ \Theta &= \frac{1}{2}\lambda t^2 + \omega_{a0}t + \theta_t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.2)$$

ここに， ω_{a0} は，加速あるいは減速の開始時での駆動端 A の角速度であり，ドット記号は時間 t に関する微分を意味する．点 S での軸のたわみの x 軸方向， y 軸方向の成分 x ， y ，たわみ角 θ の xz ， yz 平面への投影 θ_x ， θ_y ，および虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ を用いて，軸のたわみおよびたわみ角を次の複素数によって表わす．

$$\left. \begin{aligned} z &= x + iy \\ \theta_z &= \theta_x + i\theta_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.3)$$

3・3 運動方程式 図 3.1 に示す回転軸の点 S でのたわみに関するばね定数は，

$$\alpha = 12EI_0 \frac{l_1^3 + l_2^3}{l_1^3 l_2^3}, \quad \gamma = 6EI_0 \frac{l_1^2 - l_2^2}{l_1^2 l_2^2}, \quad \delta = 4EI_0 \frac{l}{l_1 l_2} \dots\dots\dots (3.4)$$

で与えられ，AS 間の軸のねじりに関するばね定数は

$$\delta_t = \frac{GI_z}{l_1} \dots\dots\dots (3.5)$$

で与えられる．ここに， EI_0 は軸の曲げ剛性， GI_z はねじり剛性であり， $l_1 = \overline{AS}$ ， $l_2 = l - l_1 = \overline{BS}$ である．回転体の並進運動，傾き運動，回転運動に関する粘性摩擦係数をそれぞれ c_1 ， c_2 ， c_3 とする． c_1 と c_2 については軸の横振動に関する減衰係数， c_3 については軸のねじり振動に関する減衰係数とも呼ぶ．また，A 端に働く駆動トルクを T_r とする．

ここで，次の無次元パラメータを導入する．

$$\left. \begin{aligned} e' &= e/l, \quad I_p' = I_p/(ml^2), \quad I' = I/(ml^2), \\ \gamma' &= \gamma/(\alpha l), \quad \delta' = \delta/(\alpha l^2), \quad \delta_t' = \delta_t/(\alpha l^2), \\ c_1' &= c_1\sqrt{m\alpha}, \quad c_2' = c_2/(l^2\sqrt{m\alpha}), \quad c_3' = c_3/(l^2\sqrt{m\alpha}), \\ \lambda' &= \lambda/(\alpha/m), \quad p' = p/\sqrt{\alpha/m}, \quad \omega_a' = \omega_a/\sqrt{\alpha/m}, \quad \omega' = \omega/\sqrt{\alpha/m}, \\ T_r' &= T_r/(\alpha l^2), \quad z' = z/l, \quad t' = t\sqrt{\alpha/m} \end{aligned} \right\} \dots (3.6)$$

このあと無次元量を表わすダッシュ記号は省略する．回転軸 S_h の分布質量および回転体 D に働く重力を無視すると，回転体の取り付け位置 S での軸のたわみ，たわみ角，ねじり角に関する運動方程式は次式となる⁽⁴⁹⁾⁽⁵⁰⁾⁽⁶⁰⁾．

$$\ddot{z} + z + \gamma\theta_z = -c_1\dot{z} - i\delta_t\theta_t\theta_z + e\{\omega^2 - i(\dot{\omega} + c_1\omega)\} \exp\{i(\Theta + \xi)\} \dots (3.7)$$

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta}_z - iI_p\omega\dot{\theta}_z + \delta\theta_z + \gamma z &= -c_2\dot{\theta}_z + i\delta_t\theta_t z + \frac{i\theta_z}{2}(I_p\dot{\omega} + c_3\omega) \\ &+ \tau[(I - I_p)\omega^2 - i\{(I - I_p)\dot{\omega} + (c_2 - c_3)\omega\}] \exp\{i(\Theta + \eta)\} \dots (3.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_p\ddot{\theta}_t + \delta_t\theta_t &= -I_p\lambda - c_3\omega - \delta_t(y\theta_x - x\theta_y) - \frac{1}{2}I_p(\ddot{\theta}_x\theta_y - \ddot{\theta}_y\theta_x) \\ &+ \tau(I - I_p)\{\ddot{\theta}_x \sin(\Theta + \eta) - \ddot{\theta}_y \cos(\Theta + \eta)\} \\ &+ e\{\ddot{x} \sin(\Theta + \xi) - \ddot{y} \cos(\Theta + \xi)\} \dots (3.9) \end{aligned}$$

ここに，ドット記号は無次元時間 t に関する微分を意味する．運動方程式 (3.7)，(3.8)，(3.9) は， e ， τ ， z ， θ_z ， θ_t の 2 次の微小量までの精度で成り立つ．駆動トルク T_r は， z 軸まわりの力のモーメントの釣合いの式から定まり，次式で与えられる．

$$T_r = -\delta_t\{\theta_t + (y\theta_x - x\theta_y)\} \dots (3.10)$$

式 (3.7)，(3.8) の右辺を零とおいた非摂動系の固有角振動数は 4 個存在し，これらを p_k ($k=1, 2, 3, 4$; $p_1 > p_2 > p_3 > p_4$) とおく．

3・4 ねじり角 式 (3.9) によると，ねじり角 θ_t は，時間とともに直線的に変化する部分と回転軸のふれまわり振動によって周期的に変動する部分とからなると考えられる．前者を θ_{t1} ，後者を θ_{t2} とおく．

$$\theta_t = \theta_{t1} + \theta_{t2} \dots (3.11)$$

すなわち, θ_{t1} は

$$\delta_t \theta_{t1} = -I_p \lambda - c_3 (\lambda t + \omega_{a0} + \dot{\theta}_{t1}) \dots\dots\dots (3.12)$$

の特解であり,

$$\theta_{t1} = -\frac{1}{\delta_t} \left\{ I_p \lambda + c_3 \left(\omega_{a0} + \lambda t - \frac{c_3 \lambda}{\delta_t} \right) \right\} \dots\dots\dots (3.13)$$

で与えられるものとする.

このとき, 式 (3.9) は

$$\begin{aligned} I_p \ddot{\theta}_{t2} + \delta_t \theta_{t2} = & -c_3 \dot{\theta}_{t2} - \delta_t (y \theta_x - x \theta_y) - \frac{1}{2} I_p (\ddot{\theta}_x \theta_y - \ddot{\theta}_y \theta_x) \\ & + \tau (I - I_p) \{ \ddot{\theta}_x \sin(\Theta + \eta) - \ddot{\theta}_y \cos(\Theta + \eta) \} \\ & + e \{ \ddot{x} \sin(\Theta + \xi) - \ddot{y} \cos(\Theta + \xi) \} \dots\dots\dots (3.14) \end{aligned}$$

となる.

回転軸がふれまわりの危険速度を通過する過程において, 式 (3.14) の右辺がねじりの固有角振動数 $p_t = \sqrt{\delta_t / I_p}$ に近い振動数で変動するようになると, 回転軸はねじりの共振を起こし, 比較的大きなねじり振動を生じるものと考えられる.

なお, ねじり角と同様に, 式 (3.10) で与えられる駆動トルク T_r についても, 時間とともに直線的に変化する部分 T_{r1} と周期的に変動する部分 T_{r2} とに分けて, T_{r1} , T_{r2} をそれぞれ次のようにおく.

$$\left. \begin{aligned} T_{r1} &= -\delta_t \theta_{t1} \\ T_{r2} &= -\delta_t \theta_{t2} - \delta_t (y \theta_x - x \theta_y) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.15)$$

3・5 数値計算結果 運動方程式 (3.7), (3.8), (3.14) を数値積分し, ふれまわりの危険速度通過時における, ふれまわり振動とねじり振動の大きさの関係や, これらの振動の振動数と回転角速度の関係などを明らかにする. ここでは, 以下の無次元パラメータの値を用いた.

$$\left. \begin{aligned} e &= 9.0 \times 10^{-5}, \quad \tau = 3.6 \times 10^{-4}, \\ \xi &= 0^\circ, \quad I_p = 0.1034, \quad I = 0.0534, \\ \gamma &= -0.0923, \quad \delta = 0.0164, \quad \delta_t = 0.00256 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.16)$$

このほかの無次元パラメータ λ , c_1 , c_2 , c_3 の値については、必要に応じて示す。式 (3.16) のパラメータの値に対して、ふれまわり振動の危険速度 ω_c とねじりの固有振動数 p_t を計算すると、 $\omega_c=0.925$, $p_t=0.157$ となる。数値積分に際しては、加速あるいは減速の開始時における定常解を初期値とした。

3・5・1 加速の場合 図 3.2(a), (b) は、それぞれ、駆動端の角速度を $\omega_a = 0.7 \sim 1.4$ まで加速した場合の、たわみの振幅 $A = |z|$ およびねじり角 θ_{t2} の変化の様子を示したものである。角加速度は $\lambda = 0.2 \times 10^{-3}$ である。

たわみおよびたわみ角の振幅は、危険速度を通過した直後で最大値をとり、その後、増加、減少を周期的に繰り返しながら小さくなっている。これらの振幅変化の特徴は、周知のことからである。なお、たわみ角の振幅は、図には示していないが、大きさがたわみのおよそ 1.5 倍で、図 3.2(a) と同様に变化する。

一方、ねじり角 θ_{t2} は、ふれまわりの危険速度 $\omega_a=\omega_c(=0.925)$ の付近から急に減少しはじめ、負のピーク値に達した後に振動的に変化している。すなわち、ここでねじり振動が発生し始めている。そして、 $\omega_a=1.12$ 付近でねじり振動の振幅は最大となり、その後、周期的に変動しながら減衰していく。この振幅変化の様子は、振動系が共振点を通過するときの振幅応答に類似している。

式 (3.15) で与えられる駆動トルク T_{r2} は図 3.2(c) のようになる。 T_{r2} は、図 3.2(b) の θ_{t2} とちょうど逆位相のかたちで変化しており、その大きさが θ_{t2} のおよそ $-\delta_t(=-0.00256)$ 倍であることが確認できる。すなわち、式 (3.15) の右辺第 2 項、 $-\delta_t(y\theta_x - x\theta_y)$ は実質的には θ_{t2} にほとんど影響していない。

3・5・2 減速の場合 図 3.3(a), (b) に、 $\lambda = -0.2 \times 10^{-3}$ で危険速度を通過させた際のたわみの振幅 A とねじり角 θ_{t2} の変化を示す。減速の場合は、振幅 A については、危険速度 ω_c の通過直後の最大値は加速の場合と比べわずかに小さいが、その後に現れる周期的な変動の大きさは加速の場合よりも速く小さくなっている。そして、加速の場合と同様、たわみおよびたわみ角の振幅が増加する $\omega_a=\omega_c$ の付近からねじり振動が始まっている。ねじり振動の振幅は、 $\omega_a=0.7$ 付近で最大となり、その最大値は、加速の場合の図 3.2(b) と比べると、およそ 1/2 程度である。

図 3.2 および図 3.3 には、ふれまわりの振幅とねじり振動の振幅の変化の典型的な形を示したが、ふれまわりの危険速度 $\omega_a=\omega_c(=0.925)$ の付近で生じるねじり角のピーク

値は、後に示すように、加速の場合は $\omega_a=1.12$ 付近での最大値よりも大きくなることがある。ここでは、後者の最大値を θ_{t2max} とおいて、これが全体的に見て前者のピーク値よりも小さくなくても最大値と呼ぶことにする。

3・5・3 角加速度の影響 図 3.4 に、角加速度 λ に対するねじり振動 θ_{t2} の振幅の最大値 θ_{t2max} の変化の様子を示す。

黒三角および白三角の印は、それぞれ加速および減速の場合のふれまわりの危険速度 $\omega_a=\omega_c$ において、ふれまわりの振幅が急に増加する時に生じるねじり角の変動の最初のピークの大きさを示す。これらのピーク値は、加速の場合、減速の場合ともにほぼ同じであり、角加速度の絶対値 $|\lambda|$ の増加とともに減少する。特に、 $|\lambda|$ の小さい範囲でピーク値の減少の割合が大きい。

黒丸および白丸の印は、ふれまわりの危険速度を通過した後に生じるねじり振動の振幅の最大値 θ_{t2max} を示す。加速の場合、減速の場合ともに、角加速度の絶対値 $|\lambda|$ の増加にたいする θ_{t2max} の変化は、 $|\lambda|$ の非常に小さい範囲では比較的急に増加し、 $|\lambda|$ のある値で最大となり、その後ゆるやかに減少する。 θ_{t2max} は、加速の場合は $\lambda \approx 0.23 \times 10^{-3}$ 、減速の場合は $\lambda \approx -0.40 \times 10^{-3}$ において最大となる。図 3.4 に示した範囲では、 θ_{t2max} の大きさは加速の場合のほうが減速の場合よりも大きい。

このように、極端にゆっくりとした加速や減速により危険速度を通過するのは、 $\omega_a=\omega_c$ 付近で大きなふれまわり振動を生じてしまうだけでなく、大きなねじりを引き起こしてしまう。逆に、 $|\lambda|$ をある大きさ以上の値に設定すると、 $\omega_a=\omega_c$ 付近のねじり角のピークは小さく抑えられるが、その後に生じるねじり振動は効果的に抑えることができない。ここで用いたパラメータ値のもとでは、ねじり振動を抑える上での角加速度 λ の適当な値は、加速の場合は $\lambda \approx 0.07 \times 10^{-3}$ 、減速の場合は $\lambda \approx -0.13 \times 10^{-3}$ である。

3・5・4 ねじりの減衰係数の影響 図 3.5 は、ねじりの減衰係数 c_3 を変化させたときの、ねじり振動の振幅の最大値 θ_{t2max} の変化を示したものである。 $\omega_a=\omega_c$ 付近で生じるねじり角のピーク値は、 c_3 を変えてもほとんど変わっていない。 θ_{t2max} の値は、 c_3 の増加にたいして、加速の場合は若干減少した後に増加傾向となり、減速の場合は単調に増加する。このように、ねじり振動の振幅は、 c_3 の増加とともに必ずしも小さくなるわけではない。

3・5・5 横振動の減衰係数の影響 図 3.6 に、軸の横振動の減衰係数 c_1, c_2 に対す

る θ_{t2max} の変化の様子を示す。 $\omega_a = \omega_c$ 付近で現れるピークの大きさは、 c_1 、 c_2 を変化させてもほとんど変化しないが、 θ_{t2max} に関しては c_1 、 c_2 の増加に対するはっきりとした減少傾向が認められる。 加速の場合および減速の場合、それぞれ、 c_1 、 c_2 が 2.5×10^{-3} および 1.5×10^{-3} よりも大きな値に対して、 θ_{t2max} の値は $\omega_a = \omega_c$ 付近のピーク値よりも小さくなる。 なお、 c_1 、 c_2 が零の場合は、ふれまわり振動が発散してしまうため、除外した⁽¹⁹⁾。

3・6 ねじり振動の発生機構 図 3.2(a) あるいは図 3.3(a) を見ても分るように、ふれまわりの危険速度を通過した後の、たわみの振幅 A は周期的に変化し、うなりに似た現象を呈している。 このうなり現象は、危険速度を通過した後のふれまわり振動が、不つりあいによる強制振動と自由振動からなっているために生じるものである。 もちろん、不つりあいによる強制振動は、角速度 $\omega \approx \omega_a$ と同じ振動数の振動である。 自由振動は、危険速度 ω_c を通過した直後では、固有角振動数 p_2 の振動が優勢となる。 これは、危険速度 ω_c においては、偏心あるいは動不つりあいによる強制振動の振動数 ω_a が固有角振動数 p_2 と共振するので、この共振により振幅 A が最大値をとったとき、固有角振動数 p_2 の振動モードの振動が大きくなり、このときの軸のたわみの形状がその後の回転軸の自由振動に対する初期外乱となるためである。 したがって、ふれまわりの危険速度通過直後の振幅変化の振動数は、およそ、加速の時は $\omega_a - p_2$ 、減速の時は $p_2 - \omega_a$ によって与えられる。

回転軸のふれまわり振動の減衰係数 (c_1 、 c_2 ではなく、漸近解表示したもの) に関しては、加藤らは次の結論⁽¹⁹⁾を得ている。 すなわち、ふれまわりの減衰係数が c_1 、 c_2 に比例して増加するのはもちろんであるが、角速度 ω_a によって変化し、また、前向きのふれまわりに対する減衰係数は、 λ にも c_3 にも比例して小さくなる。 このことから、図 3.2(a) および図 3.3(a) に見られるように、加速時よりも減速時のほうが、危険速度通過後のふれまわり振幅の周期的な変動が速く減衰しているということが理解される。

ここで、たわみの振幅 A の変化と駆動トルク T_{r2} の変化の関係を見てみる。 ω_a が $\omega_c (=0.925)$ となる付近でふれまわりの振幅 A が増加しつづけているが、 A の立ちあがりの勾配が最も急なところで、駆動トルク T_{r2} のピークが現れており、 A がピーク値に達するまで駆動トルク T_{r2} は正の値をとっている。 そして、 A が減少過程に入ると、

T_{r2} は負となっている。このような振幅 A と駆動トルク T_{r2} の変化の位相関係は、回転軸系のふれまわり振動に関する力学的エネルギーを増加・減少させるために、駆動端でのトルクが最も効率よく仕事を行っている状態を表しているものと考えられる。しかし、このような状態は、ねじり振動の振幅が急に増大する角速度の付近からくずれはじめる。

加速の場合を例にとって考察しよう。図 3.7 は図 3.2 の $\omega_a = 1.06 \sim 1.16$ の範囲を拡大して示したものである。ふれまわりの振幅 A の変動の振動数が増加してねじりの固有角振動数と一致するようになると、軸はねじりの固有角振動数でねじり振動を行うようになるため、振幅 A とトルク T_{r2} との間のそれまでの位相関係が保たれなくなり、ふれまわり振動の振幅変化を生じさせるのに必要な駆動トルクの仕事の効率が悪くなる。このため、より大きなトルク変動が必要となる。そして、この変動トルクに比例した大きなねじり振動が発生するのである。

見方を変えれば、ふれまわりの振幅変化がトルク変動を引き起こし、トルク変動が AS 間の回転軸のねじり振動を励起しているのであって、ふれまわりの振幅変化の振動数がねじりの固有角振動数に一致すれば、ねじり振動の共振が起こるものと解釈できる。このような条件が成り立つのは、加速の場合は $\omega_a = p_2 + p_t$ のときであり、この回転角速度は、ジャイロモーメントの影響により、 $\omega_c + p_t = 1.082$ よりわずかに大きい。図 3.2(b) を見ても、実際にこの付近の角速度でねじり振動の振幅の増加が最も急峻となっている。

また、減速の場合も全く同じ理由により、駆動端の角速度が $\omega_a = p_2 - p_t$ となったときに、ねじり振動の共振が起きる。この角速度は、 $\omega_c - p_t = 0.768$ よりもわずかに小さい。そして、加速の場合に比べてねじり振動の最大振幅が小さいのは、このねじりの共振点付近で、振幅 A の周期的な変化が加速の場合よりも小さくなっているためである。

上述のように、ねじり振動の共振が起きるときに、ふれまわり振動の振幅変化が大きいほど、ねじり振動の振幅の最大値 θ_{t2max} は大きくなることがわかり、図 3.4～図 3.6 に示した結果が定性的に理解できる。

3・7 結 言 本章では、一つの対称回転体をもつ軸系がふれまわりの危険速度を通過するときに、回転軸にねじりの共振が起こり、比較的大きなねじり振動が発生する

ことを解析的に明らかにした.

ふれまわりの危険速度を ω_c , ねじりの固有角振動数を p_t , 駆動端での軸の回転角速度を ω_a とすれば, 回転軸にねじりの共振が起こるのは, 加速の場合には, $\omega_a \approx \omega_c + p_t$ となるときであり, 減速の場合には $\omega_a \approx \omega_c - p_t$ となるときである. ねじり振動の原因となるふれまわり振動の振幅変化は, 角加速度 λ の絶対値の増加とともに大きくなるので, ねじり振動の防振のために, ふれまわりの危険速度をできるだけ速く通過させようとすることは逆効果となることもある. 図 3.4 に示した例では, 加速時は $\lambda = 0.07 \times 10^{-3}$, 減速時は $\lambda = -0.13 \times 10^{-3}$ の角加速度に設定するとよい.

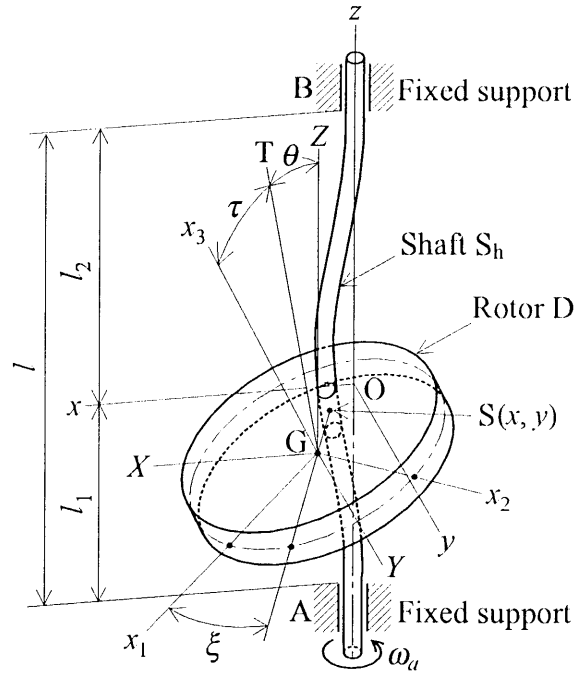
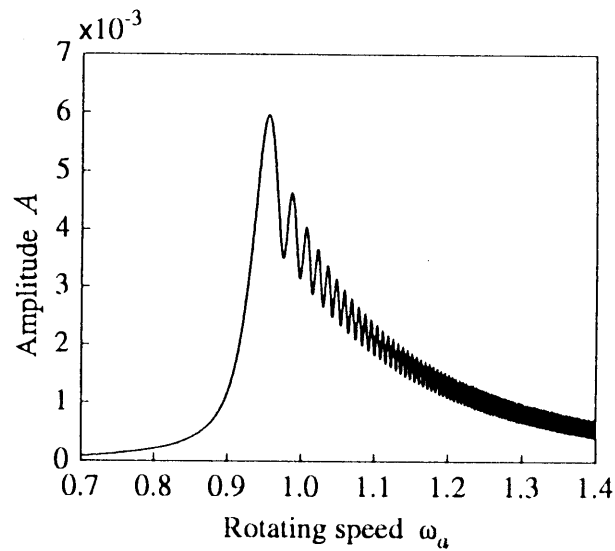
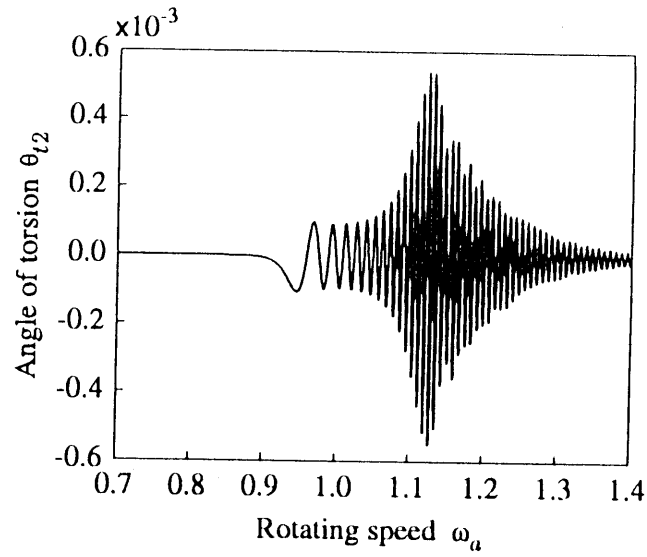


図 3.1 回転軸系と座標系 (x_1, x_2, x_3 軸は回転体の三つの慣性主軸, $\overline{GS} = e$ は偏心, τ は動不釣りあい, 直線 GT は軸のたわみ曲線の点 S での接線に平行な直線であり, G - x_1x_3 平面内にある)

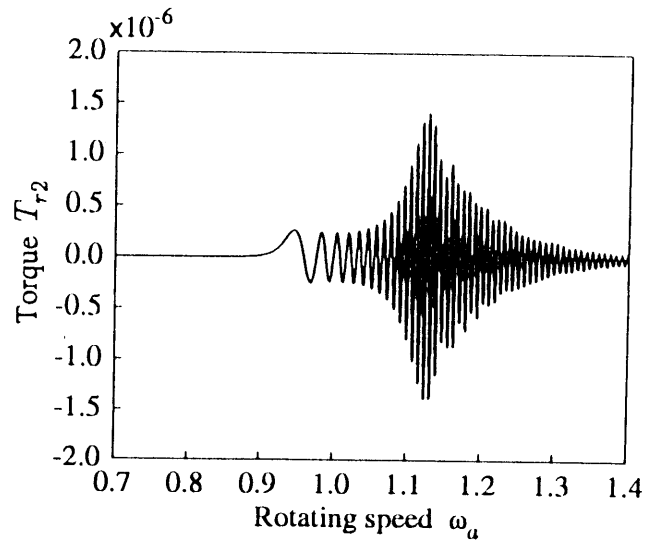


(a) ふれまわり振幅

図 3.2 加速時のふれまわりの振幅変化とねじり振動 ($\lambda = 2 \times 10^{-4}$, $c_1 = c_2 = 1 \times 10^{-3}$, $c_3 = 5 \times 10^{-4}$)

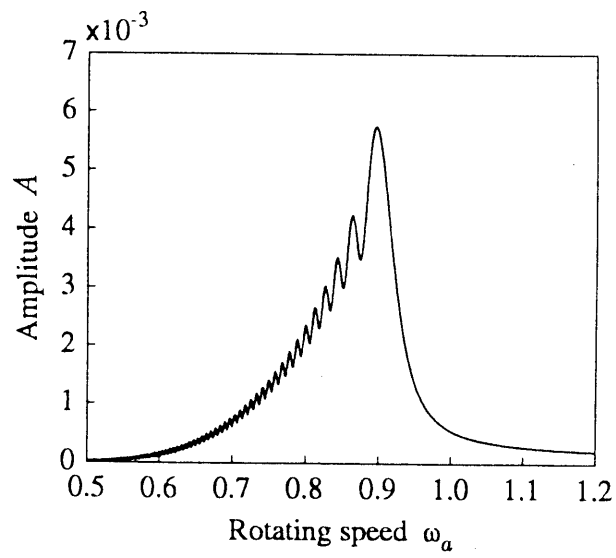


(b) ねじり振動

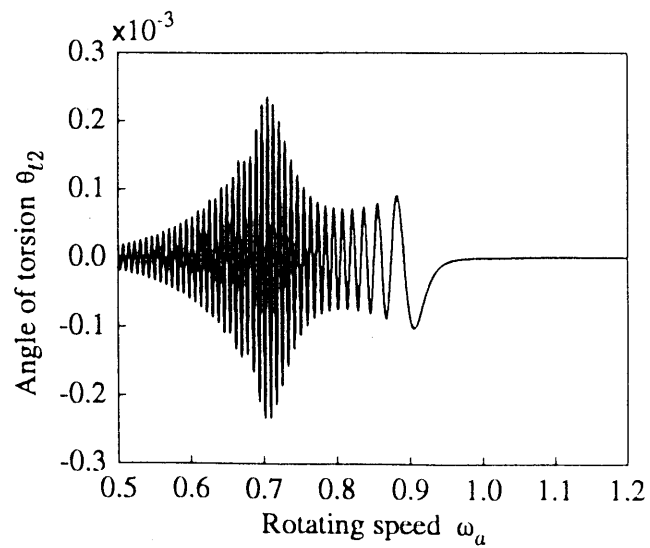


(c) 駆動トルク

図 3.2 加速時のふれまわりの振幅変化とねじり振動 ($\lambda = 2 \times 10^{-4}$, $c_1 = c_2 = 1 \times 10^{-3}$, $c_3 = 5 \times 10^{-4}$)



(a) ふれまわり振幅



(b) ねじり振動

図 3.3 減速時のふれまわりの振幅変化とねじり振動 ($\lambda = -2 \times 10^{-4}$, $c_1 = c_2 = 1 \times 10^{-3}$, $c_3 = 5 \times 10^{-4}$)

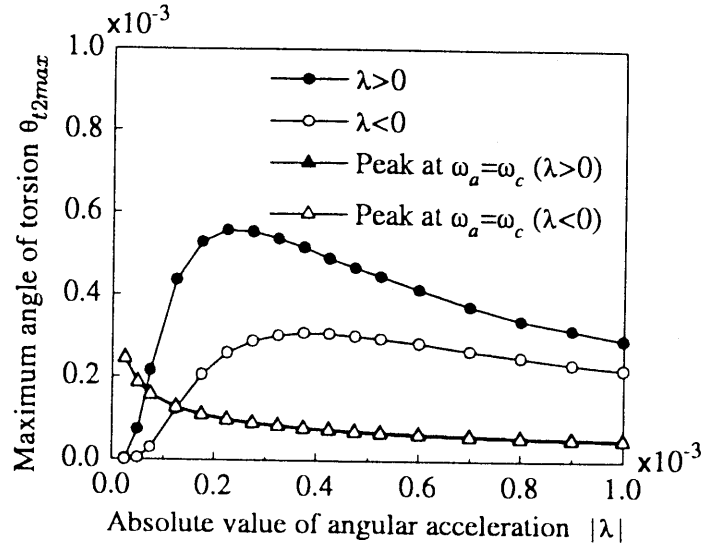


図 3.4 角加速度の影響 ($c_1 = c_2 = 1 \times 10^{-3}$, $c_3 = 5 \times 10^{-4}$)

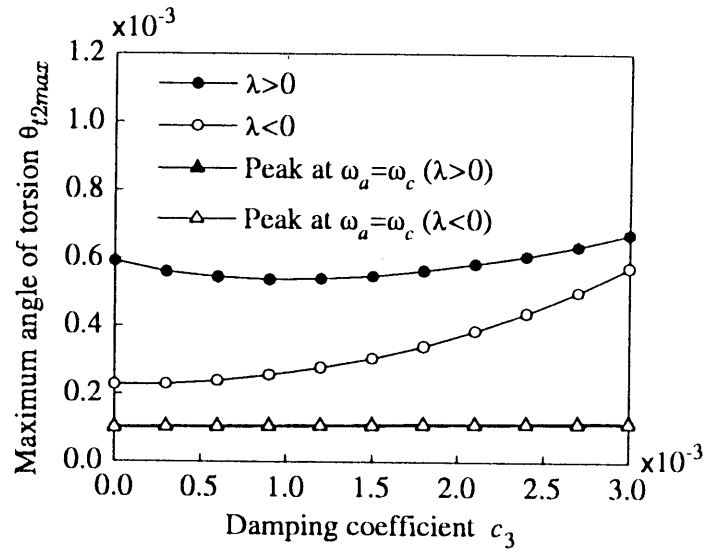


図 3.5 ねじりの減衰係数の影響 ($|\lambda| = 2 \times 10^{-4}$, $c_1 = c_2 = 1 \times 10^{-3}$)

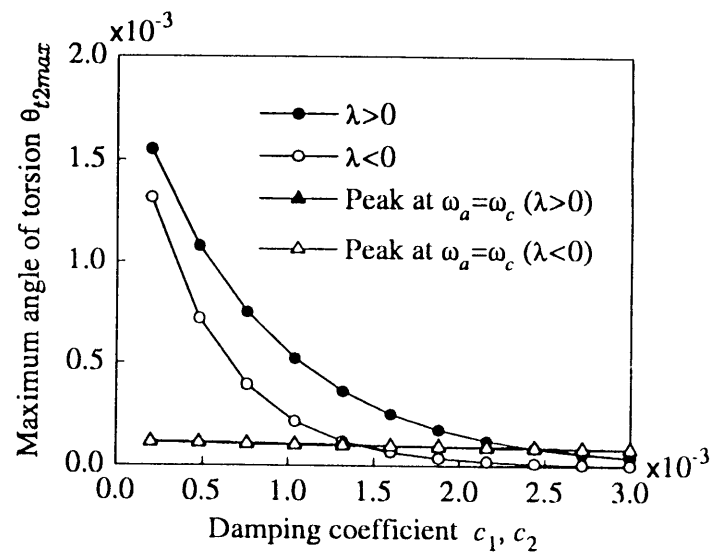


図 3.6 横振動の減衰係数の影響 ($|\lambda| = 2 \times 10^{-4}$, $c_3 = 5 \times 10^{-4}$)

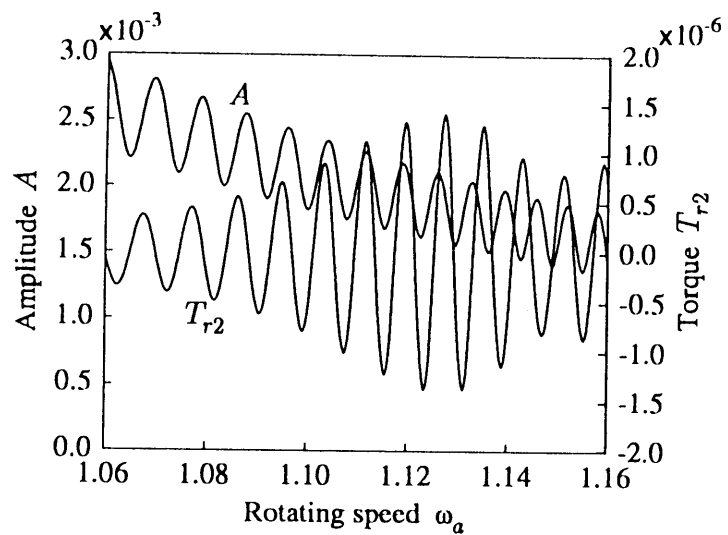


図 3.7 加速時のふれまわり振幅と駆動トルクの変化 (図 3.2 の拡大図)

第4章 非対称回転体を持つ軸の危険速度通過時のねじり振動⁽⁵⁸⁾⁽⁵⁹⁾

4・1 緒言 回転軸の角速度がそのふれまわりの危険速度を通過するとき、ふれまわりの振幅は最大値に達した後に大きさが周期的に変化し、その振幅変化の振動数は、危険速度から遠ざかるにしたがって高くなる。このような危険速度通過時に観察されるふれまわり振動のうなりに似た現象はよく知られている⁽⁸⁾⁽⁹⁾。ところが、このとき回転軸にはねじり振動も発生することがある。一般に、軸のねじりは、ふれまわりの振幅が増加過程にあるか減少過程にあるかによって、その向きが異なって生ずる。そして第3章で述べたように、ふれまわりの振幅変化の振動数がねじりの固有角振動数と一致したときにねじり振動の共振が起こるのである⁽⁴⁹⁾⁽⁵⁰⁾。一方、回転体に非対称性があると、危険速度通過時のふれまわりの振幅変化の振動数は、対称回転体の場合の振動数の2倍の成分も含むようになる⁽¹⁹⁾。これに伴って、ねじり振動は二つの異なる回転速度で共振することが予想される。したがって、特に危険速度より高い回転速度での運転のため、起動・停止を繰り返すような場合、比較的に見落とされがちなねじり振動も発生しているということにも注意する必要がある。危険速度通過中にふれまわり振動とともに発生するねじり振動の共振に対しても有効な防振対策を講ずる上で、このねじり振動の特性を明らかにしておくことは重要である。

本章で扱う回転軸系は、両端が固定支持された真円弾性軸の中間に一つの非対称回転体を取り付けられたものである。まず、ねじり振動におよぼす回転体の非対称性の影響を調べるため、軸のたわみ、たわみ角、ねじり角に関する微小変位の2次の精度で成り立つ運動方程式⁽⁶⁰⁾をもとに、Bogoliubov と Mitropolisky の漸近的方法⁽⁵⁵⁾による近似式を導いた。近似式を用いた解析から、ふれまわりの危険速度を通過する際のねじり振動は、対称回転体の軸系にはない特徴を持つことが明らかとなった。

4・2 回転軸系 図4.1に本章で扱った非対称回転体-軸系と座標系を示す。回転軸 S_h は長さ l の一様な円形断面の弾性軸で、両端 A, B において固定支持されている。点 A は回転軸の駆動端である。回転軸の中間の点 S には、質量 m の非対称回転体 D が取り付けられている。点 S は、駆動端 A から l_1 、他端 B から l_2 の距離にある。回転

体 D の慣性主軸を x_1, x_2, x_3 とし、それぞれの主軸まわりの慣性モーメントを I_1, I_2, I_p とする. $O-xyz$ は静止直交座標系であり, z 軸は回転軸の軸受中心線と一致する.

$G-XYZ$ は回転体の重心 G を原点とする運動座標系で, $O-xyz$ に平行である. 偏心 e の方向および動不つりあい τ の方位方向は, x_1 軸から軸の回転方向に測ってそれぞれ ξ, η である. 軸の回転開始位置を定めるため, 軸にひずみがなく, 不つりあいもない場合を想定する. このとき, 軸の回転途中において, x_1 軸が X 軸と一致する状態が存在する. この瞬間を時刻 $t = 0$ にとり, またこの状態を基準として点 A, S のそれぞれの回転角 θ_a, θ を測る. B 端において, 摩擦力によるモーメントや負荷トルクは作用しないと仮定する. この場合, 軸のねじりは AS 部分においてのみ生ずることになる. 点 A に対する点 S の軸のねじり角を θ_t とし, 軸の回転方向のねじり角を正にとる. 駆動端 A の角加速度を一定値 λ , 角速度を ω_a , 点 S での角速度を ω とすれば, 次の関係が成り立つ.

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}_a &= \lambda \\ \omega_a &= \lambda t + \omega_{a0} \\ \theta_a &= \frac{1}{2} \lambda t^2 + \omega_{a0} t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega} &= \lambda + \ddot{\theta}_t \\ \omega &= \lambda t + \omega_{a0} + \dot{\theta}_t \\ \theta &= \frac{1}{2} \lambda t^2 + \omega_{a0} t + \theta_t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.2)$$

ここに, ω_{a0} は, 加速あるいは減速の開始時における駆動端 A の角速度であり, ドット記号は時間 t に関する微分を意味する.

点 S での軸のたわみの x 軸方向, y 軸方向の成分 x, y , たわみ角 θ の xz, yz 平面への投影 θ_x, θ_y , および虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ を用いて, 軸のたわみ, たわみ角を次の複素数によって表す.

$$\left. \begin{aligned} z &= x + iy \\ \theta_z &= \theta_x + i\theta_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.3)$$

ここで, 軸のねじり角 θ_t を次のようにおく⁽⁴⁹⁾⁽⁵⁰⁾.

$$\theta_t = \theta_{t2} - \frac{1}{\delta_t} \left\{ I_p \lambda + c_3 \left(\omega_{a0} + \lambda t - \frac{c_3 \lambda}{\delta_t} \right) \right\} \dots\dots\dots (4.4)$$

式(4.4)の右辺第1項の θ_{t2} は、軸のふれまわりの振幅変化に伴って変動するものと考えられる部分である。本章では、主にこの θ_{t2} を考察の対象とする。

4・3 運動方程式 図4.1に示す回転軸の点Sでのたわみに関するばね定数は

$$\alpha = 12EI_0 \frac{l_1^3 + l_2^3}{l_1^3 l_2^3}, \quad \gamma = 6EI_0 \frac{l_1^2 - l_2^2}{l_1^2 l_2^2}, \quad \delta = 4EI_0 \frac{l}{l_1 l_2} \quad \dots\dots\dots (4.5)$$

で与えられ、AS間の軸のねじりに関するばね定数は

$$\delta_t = \frac{GI_z}{l_1} \quad \dots\dots\dots (4.6)$$

で与えられる。ここに、 EI_0 は軸の曲げ剛性、 GI_z はねじり剛性である。回転体の並進運動、傾き運動、回転運動に関する粘性摩擦係数をそれぞれ c_1, c_2, c_3 とする。

ここで、次の無次元パラメータを導入する。

$$\left. \begin{aligned} I' &= (I_1 + I_2)/(2ml^2), \quad I_p' = I_p/(ml^2), \quad \Delta I' = (I_1 - I_2)/(2ml^2), \\ e' &= e/l, \quad \gamma' = \gamma/(\alpha l), \quad \delta' = \delta/(\alpha l^2), \quad \delta_t' = \delta_t/(\alpha l^2), \\ c_1' &= c_1\sqrt{m\alpha}, \quad c_2' = c_2/(l^2\sqrt{m\alpha}), \quad c_3' = c_3/(l^2\sqrt{m\alpha}), \\ \lambda' &= \lambda/(\alpha/m), \quad p' = p/\sqrt{\alpha/m}, \quad \omega_a' = \omega_a/\sqrt{\alpha/m}, \quad \omega' = \omega/\sqrt{\alpha/m}, \\ z' &= z/l, \quad t' = t\sqrt{\alpha/m} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4.7)$$

このあと無次元量を表すダッシュ記号は省略する。

回転軸 S_h の分布質量および回転体Dに働く重力を無視すると、回転体の取り付け位置Sでの軸のたわみ、たわみ角、ねじり角に関する運動方程式は次式となる⁽¹⁹⁾。

$$\ddot{z} + z + \gamma\theta_z = -c_1\dot{z} - i\delta_t\theta_t\theta_z + e\{\omega^2 - i(\dot{\omega} + c_1\omega)\} \exp\{i(\Theta + \xi)\} \quad \dots\dots\dots (4.8)$$

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta}_z - iI_p\omega\dot{\theta}_z + \delta\theta_z + \gamma z &= -c_2\dot{\theta}_z + i\delta_t\theta_t\left(z - \frac{1}{2}\theta_z\right) \\ &+ \tau\left[(I - I_p)\omega^2 - i\{(I - I_p)\dot{\omega} + (c_2 - c_3)\omega\}\right] \exp\{i\Theta\} \\ &+ \Delta I(\ddot{\theta}_z + 2i\omega\dot{\theta}_z) \exp(i2\Theta) + \tau\Delta I(\omega^2 - i\dot{\omega}) \exp\{i(\Theta - \eta)\} \quad \dots\dots\dots (4.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& I_p \ddot{\theta}_{t2} + c_3 \dot{\theta}_{t2} + \delta_t \theta_{t2} \\
& = \text{Im} \left[\frac{1}{2} I_p \ddot{\theta}_z \bar{\theta}_z - \Delta I \dot{\theta}_z^2 \exp \{-i2\Theta\} - \delta_t z \bar{\theta}_z - e \ddot{z} \exp \{-i(\Theta + \xi)\} \right. \\
& \quad \left. - \tau(I - I_p) \ddot{\theta}_z \exp \{-i(\Theta + \eta)\} - \tau \Delta I \ddot{\theta}_z \exp \{-i(\Theta - \eta)\} \right] \dots\dots\dots (4.10)
\end{aligned}$$

ここで、 $\bar{\theta}_z$ は θ_z の共役複素数、 $\text{Im}[\quad]$ は $[\quad]$ 内の複素数の虚数部を表し、式 (4.8) 以降のドット記号は無次元時間 t に関する微分を意味する。

運動方程式 (4.8), (4.9), (4.10) は、 e , τ , z , θ_z , θ_t の 2 次の微小量までの精度で成り立つものであり、ねじり振動の解析のためには、最低限この精度が必要である。

4・4 漸近近似式

4・4・1 ふれまわり振動 運動方程式 (4.8), (4.9) の右辺を零とおいた系の固有角振動数は、振動数方程式

$$(1 - p^2)(\delta + I_p \omega p - I p^2) - \gamma^2 = 0 \dots\dots\dots (4.11)$$

を p について解くことにより得られ、これらを $p = p_k$ ($k = 1, 2, 3, 4$; $p_1 > p_2 > p_3 > p_4$) とおく。

ここでは、式 (4.1) にしたがって角速度 ω_a が変化し、ふれまわり振動の危険速度 $\omega_a = p_k$ を通過する場合を考える。危険速度を通過中、回転軸は固有角振動数 p_k の振動様式で単一周期振動を行うものとする。この仮定のもとで、ふれまわり振動に関する運動方程式 (4.8), (4.9) の漸近近似式を求める。第 1 近似の結果は次のようになる⁽⁵⁵⁾⁽⁶¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} z &= A_k \exp \{i(\Theta + \Phi_k)\} \\ \theta_z &= \kappa_k A_k \exp \{i(\Theta + \Phi_k)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.12)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_k &= -\zeta_k A_k + e \mu_k \sin(\Phi_k - \xi) + \tau \nu_k \sin(\Phi_k - \eta) + \Delta I \sigma_k A_k \sin 2\Phi_k \\ \dot{\Phi}_k &= p_k - \omega + \frac{e \mu_k}{A_k} \cos(\Phi_k - \xi) + \frac{\tau \nu_k}{A_k} \cos(\Phi_k - \eta) + \Delta I \sigma_k \cos 2\Phi_k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.13)$$

ここに、

$$\kappa_k = -(1 - p_k^2)/\gamma \dots\dots\dots (4.14)$$

$$\zeta_k = \frac{2(c_1 + c_2\kappa_k^2)p_k + \delta_t\theta_t\kappa_k^2 + \beta_k}{4p_k + 2\kappa_k^2(2Ip_k - I_p\omega)} \dots\dots\dots (4.15)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_k &= -\frac{\omega^2}{p_k + \omega + \kappa_k^2\{I(p_k + \omega) - I_p\omega\}} \\ \nu_k &= -\frac{(I - I_p)\kappa_k\omega^2}{p_k + \omega + \kappa_k^2\{I(p_k + \omega) - I_p\omega\}} \\ \sigma_k &= -\frac{\kappa_k^2 p_k(2\omega - p_k)}{\omega\{2 + (2I - I_p)\kappa_k^2\}} \\ \beta_k &= -\frac{2(\delta_t\theta_t + c_3\omega)}{I_p} \frac{dp_k}{d\omega} \left\{ 1 + I\kappa_k^2 + \frac{2\kappa_k p_k}{\gamma}(2Ip_k - I_p\omega) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.16)$$

である。なお、式(4.16)の中の $dp_k/d\omega$ は、振動数方程式(4.11)を利用して計算することができ、次式で与えられる。

$$\frac{dp_k}{d\omega} = \frac{I_p p_k^2(1 - p_k^2)^2}{(1 - p_k^2)^2(\delta + Ip_k^2) + \gamma^2(3p_k^2 - 1)} \dots\dots\dots (4.17)$$

式(4.13)は、次の変数変換

$$\left. \begin{aligned} u_k &= A_k \cos \Phi_k \\ v_k &= A_k \sin \Phi_k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.18)$$

を行うと、

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_k &= -\zeta_k u_k + \{\Delta I \sigma_k - (p_k - \omega)\} v_k - e\mu_k \sin \xi - \tau\nu_k \sin \eta \\ \dot{v}_k &= \{\Delta I \sigma_k + (p_k - \omega)\} u_k - \zeta_k v_k + e\mu_k \cos \xi + \tau\nu_k \cos \eta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.19)$$

となる。

4・4・2 ねじり振動 軸のたわみ、たわみ角が式(4.12)、(4.13)、あるいは(4.19)で与えられるとき、これらの式を式(4.10)に代入し、 e 、 τ 、 ΔI 、 ζ_k 、 c_3 、 θ_t の2次以上の微小量を無視すれば、 θ_{t2} に関する以下の近似式を得る。

$$\begin{aligned} I_p \ddot{\theta}_{t2} + c_3 \dot{\theta}_{t2} + \delta_t \theta_{t2} &= \frac{1}{2} I_p \kappa_k (u_k^2 + v_k^2) \left(\dot{\omega} \frac{5p_k^2 - 1}{\gamma} \frac{dp_k}{d\omega} - 2\zeta_k \kappa_k p_k \right) \\ &\quad - (e\rho_k \sin \xi + \tau\vartheta_k \sin \eta) u_k + (e\rho_k \cos \xi + \tau\vartheta_k \cos \eta) v_k \\ &\quad + 2\Delta I (I_p \omega \sigma_k + p_k^2) \kappa_k^2 u_k v_k \dots\dots\dots (4.20) \end{aligned}$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \rho_k &= \frac{1}{2} I_p \kappa_k^2 \mu_k (p_k + \omega) + p_k^2 \\ \vartheta_k &= \kappa_k \left\{ \frac{1}{2} I_p \kappa_k \nu_k (p_k + \omega) + (I - I_p) p_k^2 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.21)$$

であり, $\dot{\omega}$ には, 1 次の微小量の精度で得られる

$$\dot{\omega} = -\frac{1}{I_p} (\delta_t \theta_t + c_3 \omega) \dots\dots\dots (4.22)$$

を用いることができる.

4・5 数値計算結果 ここでは, 近似式 (4.19) と (4.20) を数値積分し, 回転体の非対称性 ΔI や角加速度 λ の大きさの違いにより, ねじり振動 θ_{t2} がどのような影響を受けるのかについて調べる. 用いた無次元パラメータの代表的な値は次の通りである.

$$\left. \begin{aligned} I &= 0.0534, \quad I_p = 0.1034, \\ \gamma &= -0.0923, \quad \delta = 0.0164, \quad \delta_t = 0.00256, \\ e &= 6.0 \times 10^{-5}, \quad \tau = 6.0 \times 10^{-5}, \\ c_1 &= c_2 = 3.0 \times 10^{-4}, \quad c_3 = 1.0 \times 10^{-4} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.23)$$

このほかのパラメータについては必要に応じて示す. $I_p > I$ であるので, ふれまわり振動に関しては $\omega_a = p_2$ となる危険速度のみが存在する. この場合, ふれまわり振動の危険速度は式 (4.11) から $\omega_{ac} = 0.9253$, ねじりの固有角振動数は $p_t = 0.1573$ となる. 数値積分の初期値は, u_k, v_k に関しては, 式 (4.19) で, $\dot{u}_k = 0, \dot{v}_k = 0$ とおいて得られる定常解を, また θ_{t2} および $\dot{\theta}_{t2}$ に関しては, ともに 0 を用いた.

4・5・1 ねじり振動とふれまわりの振幅変化 図 4.2 に, 駆動端の角速度 ω_a を $\lambda = 1.0 \times 10^{-4}$ で加速し, ふれまわりの危険速度 ω_{ac} を通過させたときのねじり振動の波形の典型的な例を示す. また, ふれまわり振動の振幅 A_2 も示した. 破線は A_2 の定常解である.

比較のため, 回転体の非対称性 $\Delta I/I$ のみを零とし, その他の条件は図 4.2 と同じにしたときの結果を図 4.3 に示す. 図 4.2 においては, ω_a が ω_{ac} を通過してから $\omega_a \approx 1.0$ までの範囲で, また図 4.3 においては, ω_a が ω_{ac} を通過してから $\omega_a \approx 1.1$ までの範囲で, θ_{t2} は A_2 とほぼ同期して変動していることが認められる.

回転体が非対称である図 4.2 の場合は、 $\omega_a = 1.03$ 付近でねじり振動 θ_{t2} の振幅のピークが現れている。この振幅のピークを“ピーク①”と呼ぶ。

図 4.2 と図 4.3 において、 $\omega_a = 1.12$ 付近のねじり振動 θ_{t2} の振幅のピークが現れている。このねじり振動は、回転体に非対称性があるなしにかかわらず発生するものである。ここで現れるねじりの振幅のピークを“ピーク②”と呼ぶ。ピーク①とピーク②のどちらが大きくなるかは、角加速度 λ や偏心の方向 ξ などの値によって決まる。

4・5・2 角加速度の影響 ここでは、回転軸がふれまわりの危険速度を通過する際に、角加速度 λ の大きさによってねじり振動 θ_{t2} の最大値 θ_{t2max} の大きさがどのように変化するのかを調べる。図 4.4 は、偏心の方向 ξ が回転体の慣性主軸 x_1 と同じ場合 ($\xi = 0$) の結果を示す。 θ_{t2max} はおよそ加速の場合の方が減速の場合よりも大きくなっている。しかし、偏心の方向が慣性主軸と $\pi/2$ だけずれている図 4.5 においては、角加速度 λ の絶対値の比較的小さな範囲で減速の場合の方が加速の場合よりも大きくなっている。図 4.4 と図 4.5 に共通して言えることは、回転体の非対称性がある場合は、 $|\lambda|$ の増加とともに θ_{t2max} は増加・減少を繰り返し、周期的に変化しながら非対称性のない場合の値に近づいていくということである。ここで、“周期的”というのは $|\lambda|$ の変化に対する θ_{t2max} の変化の周期性のことをいう。特に、 $|\lambda|$ の大きさによっては、 θ_{t2max} は非対称性がある場合の方がない場合よりも小さくなることがある。たとえば図 4.4 からは、 $\Delta I/I = 0.05$ の場合の θ_{t2max} は、 $\lambda = 1.000 \times 10^{-4}$ のときには $\lambda = 1.048 \times 10^{-4}$ のときよりも大きくなっていることが読みとれる。これらの θ_{t2max} の値を $\Delta I = 0$ の場合と比べると、前者は大きく、後者は小さい。図 4.4、図 4.5 にみられる θ_{t2max} の周期的な変動は、ねじりの振幅のピーク②の変化によるものである。なお、 $|\lambda|$ の小さな範囲で、 θ_{t2max} の周期的な変動がめだって現れていない部分があるが、このような範囲ではねじりの振幅のピーク①の方がピーク②よりも大きくなっている。

4・5・3 不つりあい方向の影響 非対称回転体－軸系では、非対称回転体の慣性主軸の方向に対する不つりあい方向の違いによりふれまわり振動の振幅変化の様子が異なる。このことと関連して、ねじり振動の様子も変わってくることが予想される。図 4.6 は、動不つりあいの方位方向に対して $\eta = \xi + \pi$ の関係を保ちつつ偏心の方向 ξ を 0 から π まで変化させたときの、ねじりの振幅の最大値 θ_{t2max} の変化を示す。 ξ の π から 2π までの範囲は、0 から π までと幾何学的には同じであるので、図 4.6 と

同じ結果となる。

図 4.6 によると、 θ_{t2max} は、不つりあい方向を π 変化させると、加速の場合、減速の場合ともに増加・減少を 1 回繰り返す。そしてその変動の大きさは、加速の場合の方が減速の場合よりもやや大きい。また、両者ともに、不つりあい方向によっては非対称性のある場合の方がない場合よりもねじり振幅の最大値が小さくなることもある。

4・6 ねじりの振動特性

4・6・1 ねじり振動の危険速度 第 3 章で述べたように、対称回転体を持つ回転軸系の角速度 ω_a がふれまわりの危険速度 ω_{ac} を通過した後のふれまわりの振幅 A_2 の周期的な変化の振動数は、加速のときは $\omega_a - p_2$ 、減速のときは $p_2 - \omega_a$ で与えられる。回転体が非対称である場合は、図 4.2 にみられるように、 A_2 の変化の振動数は $\omega_a - p_2$ あるいは $p_2 - \omega_a$ に加え、 $2(\omega_a - p_2)(\lambda > 0)$ あるいは $2(p_2 - \omega_a)(\lambda < 0)$ の成分も含む。そしてこれらの振動数がねじりの固有角振動数 p_t と一致すれば、ねじり振動の共振が起こるのである。したがって、ねじり振動の共振は、加速のときには

$$2(\omega_a - p_2) = p_t \quad \cdots \cdots \cdots (4.24)$$

あるいは

$$\omega_a - p_2 = p_t \quad \cdots \cdots \cdots (4.25)$$

減速のときには

$$2(p_2 - \omega_a) = p_t \quad \cdots \cdots \cdots (4.26)$$

あるいは

$$p_2 - \omega_a = p_t \quad \cdots \cdots \cdots (4.27)$$

が成り立つときに起こる。式 (4.24)~(4.27) を満足する ω_a の値をそれぞれ ω_{a1a} 、 ω_{a2a} 、 ω_{a1d} 、 ω_{a2d} とおく。 ω_{a1a} 、 ω_{a2a} が加速のときのねじり振動の第 1、第 2 の危険速度であり、それぞれ図 4.2 のピーク①、②を生ずる。また、 ω_{a1d} 、 ω_{a2d} が減速のときのねじり

振動の第1, 第2の危険速度である. 式(4.23)で与えたパラメータの値に対して, ねじりの第1の危険速度は $\omega_{a1a} = 1.0137$, $\omega_{a1d} = 0.9905$, 第2の危険速度は $\omega_{a2a} = 1.0997$, $\omega_{a2d} = 1.0493$ となる.

4・6・2 ねじり振動の振幅の最大値 ここでは, 4・5・2節で述べた, 角加速度 $|\lambda|$ の変化に対する θ_{t2max} の周期的な変動の原因について考察する.

$\lambda = 1.000 \times 10^{-4}$ の場合の図4.2に示した積分結果は, 図4.4の θ_{t2max} の変動の山に近いところに対応するものである. 考察の手掛かりを得るため, 角加速度をこれよりわずかに大きい $\lambda = 1.048 \times 10^{-4}$ の場合の積分結果を図4.7に示す. 図4.7の結果は, 図4.4の θ_{t2max} の変動の谷に近いところに対応するものである. 図4.7におけるパラメータの値は, λ を除き, 図4.2と同じである. 図4.7を図4.2と比較すると, $\omega_a = 1.0$ 付近から増大しているねじり振動のピーク①は大きさがほぼ同じであるが, $\omega_a = 1.1$ 付近で増大しているねじり振動のピーク②は図4.7の場合の方がかなり小さい.

図4.2と図4.7の相違あるいは図4.4, 図4.5に示される特徴を詳しく調べるため, 図4.2と図4.7の $\omega_a = 1.00 \sim 1.12$ の区間を拡大したものをそれぞれ図4.8に重ねて示す. 図4.2, 図4.7, および図4.8において注目すべき点として次の三つが挙げられる.

(1) 角速度 ω_a の ω_{ac} から ω_{a1a} の範囲では, ふれまわりの振幅 A_2 が増加, 減少するときには, ねじり角 θ_{t2} はそれぞれ減少, 増加している. すなわち, θ_{t2} は A_2 の変化と同期して変化し, 振動数 $\omega_a - p_2$ と $2(\omega_a - p_2)$ の二つの振動成分を含む. このようなふれまわりの振幅変化とねじり角の変動についての特徴は, 第3章⁽⁴⁹⁾⁽⁵⁰⁾で述べたねじり振動の発生機構に関する説明から理解できる.

(2) 図4.8において, $\lambda = 1.000 \times 10^{-4}$ の場合, ω_a が ω_{a1a} から ω_{a2a} を通過する間でねじり振動の位相がほとんど変わっていないのに対して, $\lambda = 1.048 \times 10^{-4}$ の場合は, $\omega_a = 1.09 \sim 1.10$ 付近でねじり振動の位相が逆転している. そして, 位相の逆転したねじり振動がそのまま危険速度 ω_{a2a} で成長し, ピーク②を形成している.

(3) ω_a が ω_{a1a} を通過した後, θ_{t2} はねじりの固有角振動数 p_t で自由振動している ($\lambda = 1.048 \times 10^{-4}$ の場合は, $\lambda = 1.000 \times 10^{-4}$ の場合より ω_a の同じ変化に対して経過時間は短い).

上記(1), (2), (3)から, 図4.4あるいは図4.5に示されるような現象に関して, 次のような物理的解釈ができる.

ω_a がねじりの第1の危険速度 ω_{a1a} あるいは ω_{a1d} を通過した後に生ずるねじりの自由振動の位相が、第2の危険速度 ω_{a2a} あるいは ω_{a2d} において発生するねじり振動の位相と同じであるか逆であるかによって、第2のピーク②が大きくなったり小さくなったりする。そのどちらになるのかは、回転軸が第1の危険速度を通過してから第2の危険速度に至るまでの時間の長短と、ふれまわりの振幅 A_2 の振動的な変動の位相の変化の大きさによる。この時間の長さは、角加速度 $|\lambda|$ の大きさによって決まる。結果的に、 $|\lambda|$ が大きくなればなるほど、 $|\lambda|$ の変化に対する θ_{t2max} (ピーク②) の変動の周期が長くなっている。

ここで、この変動の周期を $\Delta\lambda$ とおき、加速の場合を例にとりて、 $\Delta\lambda$ の大きさについて簡単に考察してみる。 $\omega_a = \omega_{ac}$, ω_{a1a} , ω_{a2a} となる時間をそれぞれ $t = t_c, t_1, t_2$ とする。 λ の大きさを変えたときの θ_{t2max} の変化に関する量として、 $t = t_2$ でのねじり振動の位相 φ_t とふれまわりの振幅 A_2 の変動の位相 φ_2 がある。ただし、 θ_{t2max} は危険速度 $\omega_a = \omega_{a2a}$ において生ずるものであるとする。

図4.2, 図4.7, および図4.8に関連して行った物理的解釈に基づいて φ_t と φ_2 を計算すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}\varphi_t &= \varphi_{tc} + \int_{t_c}^{t_1} 2(\omega_a - p_2)dt + \int_{t_1}^{t_2} p_t dt \\ &= \varphi_{tc} + \frac{1}{\lambda}(\omega_{a1a}^2 - \omega_{ac}^2) - \frac{2}{\lambda} \int_{\omega_{ac}}^{\omega_{a1a}} p_2 d\omega_a + \frac{p_t}{\lambda}(\omega_{a2a} - \omega_{a1a}) \dots\dots\dots (4.28)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \varphi_{2c} + \int_{t_c}^{t_2} (\omega_a - p_2)dt \\ &= \varphi_{2c} + \frac{1}{2\lambda}(\omega_{a2a}^2 - \omega_{ac}^2) - \frac{1}{\lambda} \int_{\omega_{ac}}^{\omega_{a2a}} p_2 d\omega_a \dots\dots\dots (4.29)\end{aligned}$$

ここに、 φ_{tc} , φ_{2c} は $t = t_c$ での φ_t , φ_2 の値である。

式(4.28), (4.29)で与えられる φ_t , φ_2 を λ の関数とみなし、

$$\left. \begin{aligned}\Delta\varphi_t &= \varphi_t(\lambda - \Delta\lambda) - \varphi_t(\lambda) \\ \Delta\varphi_2 &= \varphi_2(\lambda - \Delta\lambda) - \varphi_2(\lambda)\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.30)$$

なる量を考える。そうすると、 θ_{t2max} の変化の1周期に対する $\Delta\lambda$ の大きさは

$$\Delta\varphi_t - \Delta\varphi_2 = 2\pi \dots\dots\dots (4.31)$$

から定められる。式(4.31)を $\Delta\lambda$ について解くと、

$$\Delta\lambda = \frac{2\pi\lambda^2}{\Lambda + 2\pi\lambda} \dots\dots\dots (4.32)$$

を得る．ここに，

$$\begin{aligned} \Lambda = & \omega_{a1a}^2 - \frac{1}{2}\omega_{a2a}^2 - \frac{1}{2}\omega_{ac}^2 + p_t(\omega_{a2a} - \omega_{a1a}) \\ & + \int_{\omega_{a1a}}^{\omega_{a2a}} p_2 d\omega_a - \int_{\omega_{ac}}^{\omega_{a1a}} p_2 d\omega_a \dots\dots\dots (4.33) \end{aligned}$$

である．なお，式(4.33)の右辺にある定積分は，振動数方程式(4.11)を利用して行うことができ，次のようになる．

$$\begin{aligned} & \int_{\omega_{a1a}}^{\omega_{a2a}} p_2 d\omega_a - \int_{\omega_{ac}}^{\omega_{a1a}} p_2 d\omega_a \\ = & \frac{\delta - \gamma^2}{I_p} \ln \frac{\omega_{ac} p_{22}}{p_{21}^2} + \frac{I}{2I_p} (p_{22}^2 + \omega_{ac}^2 - 2p_{21}^2) \\ & + \frac{\gamma^2}{2I_p} \left\{ \ln \frac{(1 - \omega_{ac}^2)(1 - p_{22}^2)}{(1 - p_{21}^2)^2} + \frac{2}{1 - p_{22}^2} - \frac{4}{1 - p_{21}^2} + \frac{2}{1 - \omega_{ac}^2} \right\} \dots\dots (4.34) \end{aligned}$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} p_{21} &= p_2(\omega_{a1a}) = \omega_{a1a} - \frac{1}{2}p_t \\ p_{22} &= p_2(\omega_{a2a}) = \omega_{a2a} - p_t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.35)$$

減速($\lambda < 0$)の場合についても同様の計算を行えば，式(4.32)，(4.34)は同じ形で与えられるが，式(4.33)，(4.35)は次のようになる．

$$\begin{aligned} \Lambda = & -\omega_{a1d}^2 + \frac{1}{2}\omega_{a2d}^2 + \frac{1}{2}\omega_{ac}^2 + p_t(\omega_{a2d} - \omega_{a1d}) \\ & - \int_{\omega_{a1d}}^{\omega_{a2d}} p_2 d\omega_a + \int_{\omega_{ac}}^{\omega_{a1d}} p_2 d\omega_a \dots\dots\dots (4.36) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} p_{21} &= p_2(\omega_{a1d}) = \omega_{a1d} + \frac{1}{2}p_t \\ p_{22} &= p_2(\omega_{a2d}) = \omega_{a2d} + p_t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.37)$$

式(4.23)に示したパラメータの値に対して，加速の場合は $\Lambda = 6.8572 \times 10^{-3}$ ，減速の場合は $\Lambda = -7.4735 \times 10^{-3}$ となる．この Λ の値を式(4.33)に代入し， $\lambda = 2.0 \times 10^{-4}$ および $\lambda = -2.0 \times 10^{-4}$ のときの $\Delta\lambda$ を計算してみると，それぞれ $\Delta\lambda = 0.310 \times 10^{-4}$ および $\Delta\lambda = -0.288 \times 10^{-4}$ となる．これら $\Delta\lambda$ の値は図4.4あるいは図4.5から読みとれる θ_{t2max} の変動の周期とよく一致している．また， Λ の値の大小関係から $|\lambda|$ の同じ値に対して， $|\Delta\lambda|$ は，一般に λ が負の場合より正の場合の方が大きいこともわかる．

4・7 結 言 本章では、一つの非対称回転体を持つ軸系がふれまわりの危険速度を通過した直後で、回転軸にねじりの共振が2度起こることを示し、その原因と特徴を明らかにした。

駆動端での軸の回転角速度を ω_a 、ふれまわりの危険速度を ω_{ac} 、ねじりの固有角振動数を p_t とすれば、回転軸にねじりの共振が起こるのは、加速の場合には、 $\omega_a = \omega_{ac} + p_t/2$ および $\omega_a = \omega_{ac} + p_t$ となるときであり、減速の場合には $\omega_a = \omega_{ac} - p_t/2$ および $\omega_a = \omega_{ac} - p_t$ となるときである。ねじり振動の大きさは、角加速度 λ の大きさや不つりあい方向によっても変化する。角加速度 λ のみを変えたときのねじりの振幅の最大値は周期的に変化し、この最大値が増加・減少を1回繰り返す $|\lambda|$ の値の変化量は、 $|\lambda|$ の増加とともに増加する。したがって、角加速度のある限られた範囲で運転しようとするときには、角加速度の大きさを少し調整するだけでねじり振動の大きさをかなり抑えることができる。このとき、回転体が対称である場合よりもその振幅の最大値は小さくなることもある。

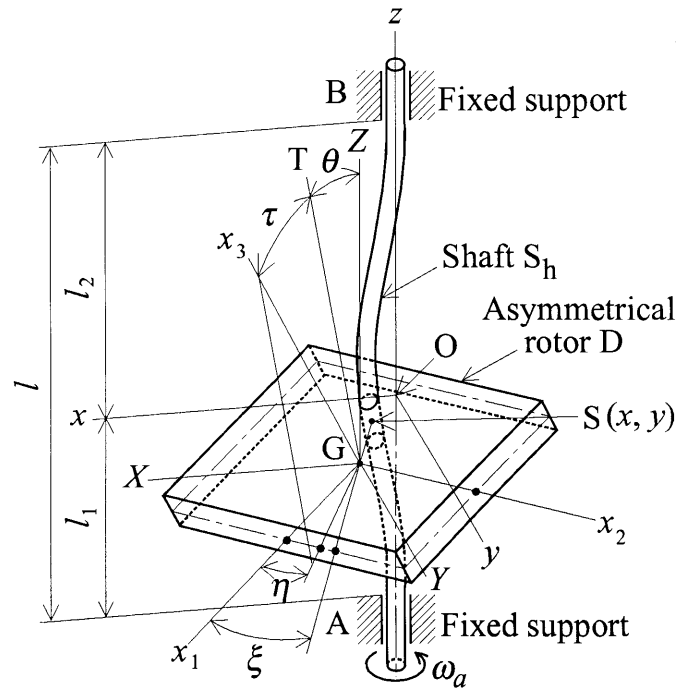


図 4.1 非対称回転体-軸系と座標系 (x_1 と x_2 , x_3 は 3 慣性主軸, $\overline{GS} = e$ は偏心, τ は動不つりあいである. 点 S 上の軸のたわみ曲線に平行にひいた直線が GT である)

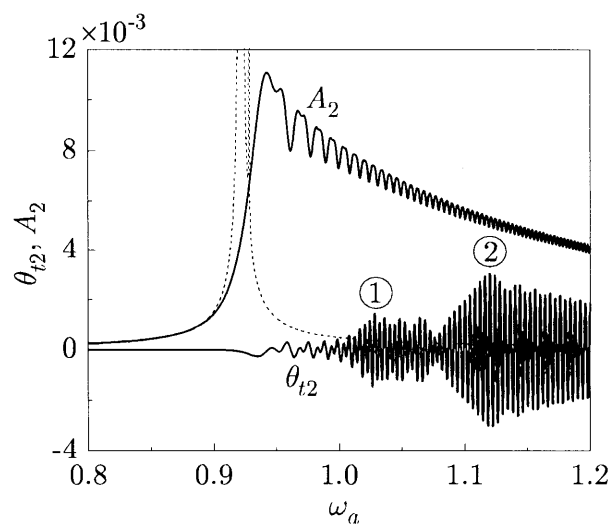


図 4.2 ふれまわりの危険速度通過時のねじり振動 ($\Delta I/I = 0.05$, $\lambda = 1.0 \times 10^{-4}$, $\xi = 0$, $\eta = \pi$)

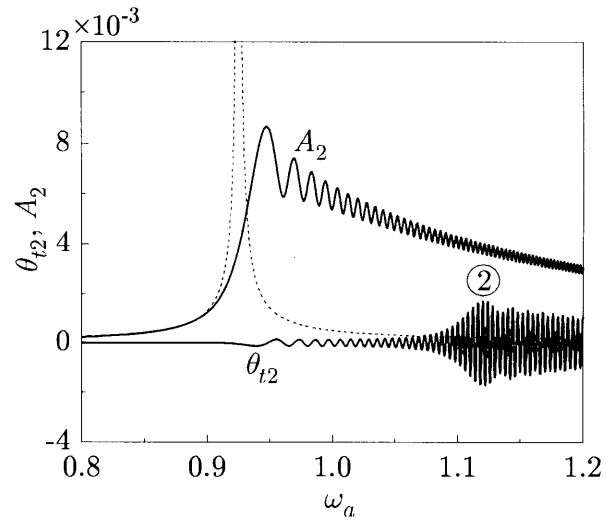


図 4.3 ふれまわりの危険速度通過時のねじり振動 ($\Delta I = 0$, $\lambda = 1.0 \times 10^{-4}$, $\xi = 0$, $\eta = \pi$)

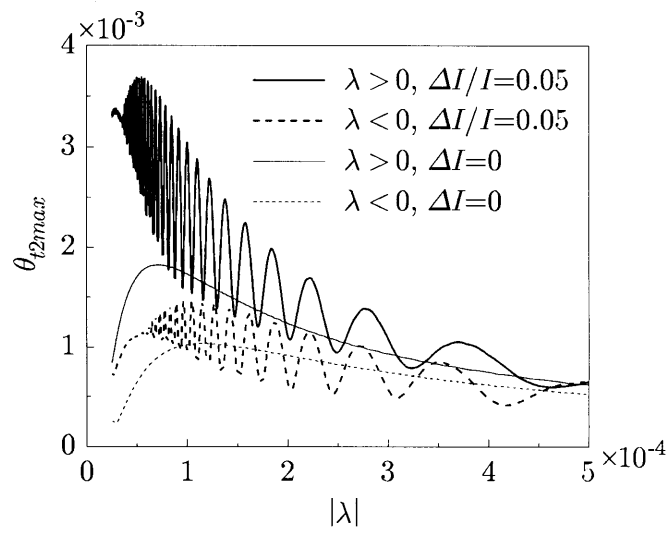


図 4.4 ねじり振動の最大値に対する角加速度の影響 ($\xi = 0$, $\eta = \pi$)

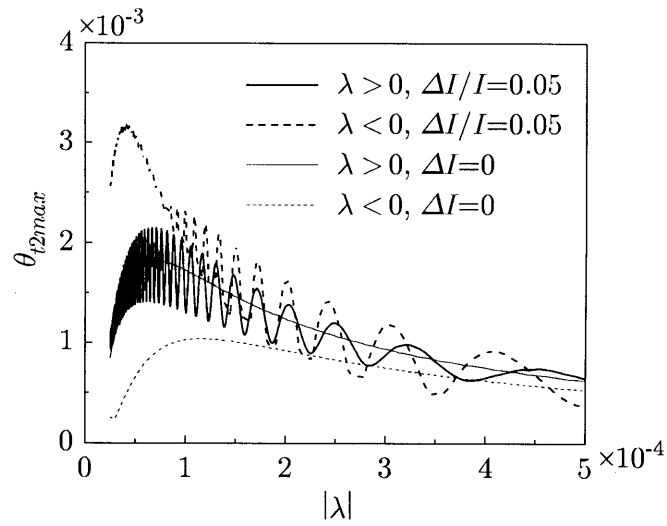


図 4.5 ねじり振動の最大値に対する角加速度の影響 ($\xi = 0.5\pi$, $\eta = 1.5\pi$)

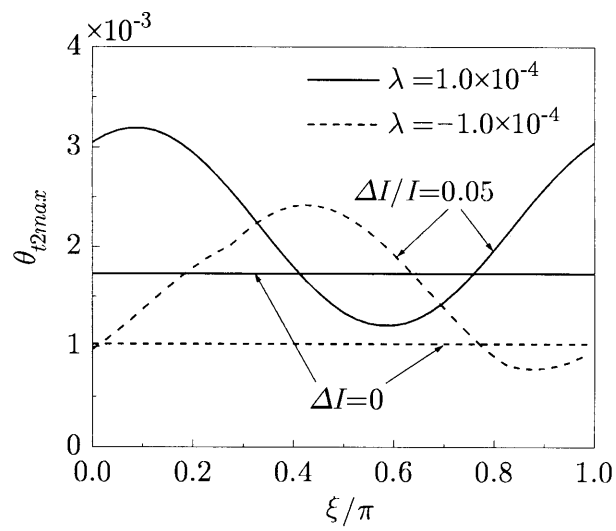


図 4.6 ねじり振動の最大値に対する動不つりあいの角位置の影響 ($\eta = \xi + \pi$)

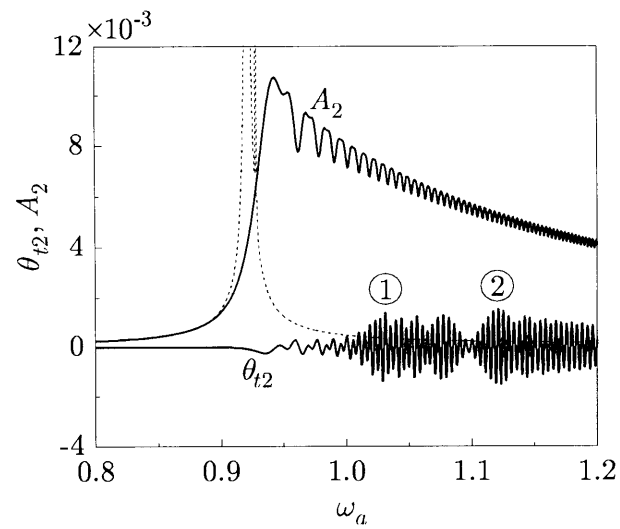


図 4.7 ふれまわりの危険速度通過時のねじり振動
 $(\Delta I/I = 0.05, \lambda = 1.048 \times 10^{-4}, \xi = 0, \eta = \pi)$

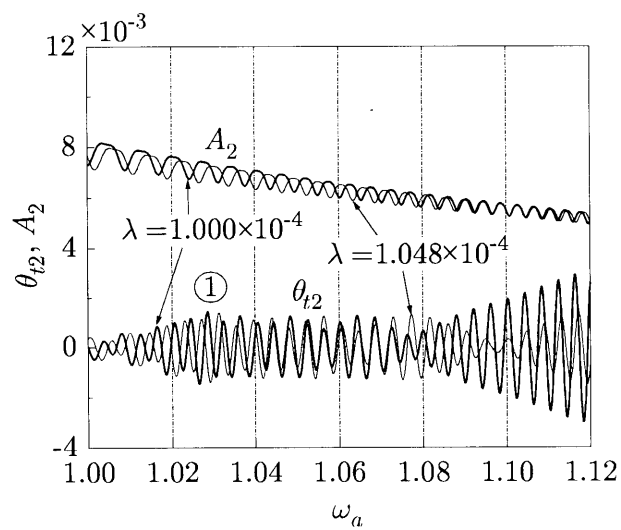


図 4.8 図 4.2 と図 4.7 の拡大図 $(\Delta I/I = 0.05, \xi = 0, \eta = \pi)$

第5章 回転角速度が変化する回転軸の運動方程式の考察⁽⁶⁰⁾

5・1 緒言 回転機械は起動や停止，負荷トルクの変動，自在継手を用いた駆動⁽³²⁾などにより軸の回転角速度に変動が生じる⁽²⁸⁾．このような系の運動方程式について，既に報告されているいくつかの論文を比較すると表現に一致を見られないことがある．主なものは回転体の傾き運動を表す慣性項であって，オイラーの運動方程式を用いたと思われる式⁽²⁸⁾⁽³⁵⁾

$$M_r = I\ddot{\theta}_{rz} - iI_p\dot{\theta}_r\dot{\theta}_{rz} - iI_p\ddot{\theta}_r\theta_{rz} \dots\dots\dots (5.1)$$

と，ラグランジュの運動方程式を用いたと思われる式⁽²²⁾⁽⁵²⁾⁽⁵³⁾

$$M_r = I\ddot{\theta}_{rz} - iI_p\dot{\theta}_r\dot{\theta}_{rz} - \frac{1}{2}iI_p\ddot{\theta}_r\theta_{rz} \dots\dots\dots (5.2)$$

の違いが挙げられる（記号表記は本章のものを用いた）．剛体の回転運動については，二つの方法は全く等価でなければならないので，この違いが発生してしまったのはなぜか考察する必要がある．この違いは回転体の振動を解析する上で基本的な問題となる．

違いの生じた原因は，運動方程式の導出の際に回転軸の変形にたいして1次の微小量の精度しか確保していないことにある．したがって，本章での解析では軸変形の成分がその2次の微小成分を保つように計算をすすめる．この場合，ラグランジュの運動方程式では軸のひずみエネルギーを軸変形の3次の微小量の精度で与えなければいけない．そのために，曲げとねじりの弾性理論⁽⁵⁴⁾を導入して軸のひずみエネルギーを計算することとする．

5・2 回転体と回転軸 図5.1に示される対称回転体－軸系について検討する．質量 m の対称回転体Dが片持軸 S_h の一端Sに固定してある．軸はもう一端のAで固定支持されている．また，軸の長さは l であり，断面も一様である．そして変動する駆動トルクは軸の駆動点Aに作用する．軸の分布荷重と，重力は計算の対象としない．

空間に固定された直交座標系 $O - xyz$ を設定する．軸端Sは，軸に変形のないときに座標原点Oに一致する．図5.2の $G - XYZ$ は $O - xyz$ に平行に空間内を移動できる直交座標系であり，その原点は回転体Dの重心Gに一致する． x_1, x_2, x_3 の3軸は回転体Dに固定された慣性主軸である．軸のたわみ曲線に点Sでひいた接線に平行な直線

G Tに対して、極軸である x_3 軸は τ だけ傾いている。計算の便宜のために、傾き（動不つりあい） τ の角位置を x_1 軸に一致させる。重心Gは回転体の取付位置Sから e だけ偏心しているとする。偏心 e の角位置は、 x_1 軸から軸の回転方向に測って ξ であるとする。 x_1, x_2 軸まわりの回転体の慣性モーメントを I , x_3 軸まわりの回転体の慣性モーメントを I_p とする。回転体の3慣性主軸の方向をオイラー角 θ_r, ϕ_r, ψ_r , 弾性回転軸の方向を θ_s, ϕ_s, ψ_s , で表す。無次元偏心 e/l や動不つりあい τ が軸のたわみやたわみ角、軸のねじり角と同じオーダーの微小量であると考える。

5.3 ラグランジュの運動方程式

5.3.1 運動エネルギー この回転体の運動エネルギー T は次式(5.3) で与えられる。

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_r^2 + \dot{y}_r^2) + \frac{1}{2}I(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2}I_p\omega_3^2 \dots\dots\dots (5.3)$$

ここで x_r, y_r は重心Gの x, y 方向への水平変位, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ は回転体の回転角速度の x_1, x_2, x_3 軸方向の成分である。ここで x_3 軸と z 軸のなす角を θ_r , その θ_r の xz, yz 平面への正射影を θ_{rx}, θ_{ry} と与え, さらに

$$\Theta_r = \phi_r + \psi_r \dots\dots\dots (5.4)$$

とする。この置き換えにより、式(5.3)は

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_r^2 + \dot{y}_r^2) + \frac{1}{2}I(\dot{\theta}_{rx}^2 + \dot{\theta}_{ry}^2) + \frac{1}{2}I_p\{\dot{\Theta}_r^2 + \Theta_r(\dot{\theta}_{rx}\dot{\theta}_{ry} - \dot{\theta}_{ry}\dot{\theta}_{rx})\} \dots\dots (5.5)$$

になる。この式(5.5)は、 θ_{rx}, θ_{ry} の3乗以上の項を省略して得られた山本の結果⁽²²⁾と一致する。

5.3.2 位置エネルギー 外力 F_{sx}, F_{sy} , モーメント M_{sx}, M_{sy}, M_{sz} が図5.1に示したように回転軸端の点Sに作用し、一方駆動点Aは固定されていると考える。そうすると、軸は曲げとねじりの両方をうけることになる。この条件下で、「位置エネルギー」すなわちひずみエネルギーが軸に貯えられる。軸の曲げこわさを EI_0 , ねじりこわさを GI_z とおく。軸端Aを基点として、弾性軸の中心線に沿った座標 s をとる。その s をもちいて、位置エネルギーを次式(5.6)の表現で得る。

$$V = \frac{1}{2}\int_0^l \{EI_0(\Omega_\xi^2 + \Omega_\eta^2) + GI_z\Omega_\zeta^2\}ds \dots\dots\dots (5.6)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \Omega_\xi &= -\left(\frac{d\theta}{ds} \sin \psi - \frac{d\phi}{ds} \sin \theta \cos \psi\right), \\ \Omega_\eta &= -\left(\frac{d\theta}{ds} \cos \psi + \frac{d\phi}{ds} \sin \theta \sin \psi\right), \\ \Omega_\zeta &= -\left(\frac{d\phi}{ds} \cos \theta + \frac{d\psi}{ds}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.7),$$

であり、さらに、弾性軸の主軸の方向をオイラー角 θ, ϕ, ψ で表している⁽⁵⁴⁾。ここで、軸にひずみがないならば主軸の方向は s に無関係に一定とする。図 5.1 で、 M_ξ, M_η, M_ζ で弾性軸上の点 S での軸断面の下側から上側にはたらく力のモーメントの主軸方向の成分を表すと、次式 (5.8) が成立する。

$$\left. \begin{aligned} M_\xi &= EI_0 \Omega_\xi, \\ M_\eta &= EI_0 \Omega_\eta, \\ M_\zeta &= GI_z \Omega_\zeta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.8)$$

点 A から s の位置にある点のねじり角 θ_t は、

$$\theta_t = \phi + \psi - \Theta_a \dots\dots\dots (5.9)$$

で定義される。ここで Θ_a は軸端 A での回転角である。角 θ の xz, yz 平面への投影角を θ_x, θ_y とする。式 (5.6) を $\theta_x, \theta_y, \theta_t$ の 3 次の微小量の精度で表しなおすと、 z 軸の原点を点 A として、次式 (5.10) を得る。

$$V = \frac{1}{2} \int_{-l}^0 \left[EI_0 \left\{ \left(\frac{d\theta_x}{dz} \right)^2 + \left(\frac{d\theta_y}{dz} \right)^2 \right\} + GI_z \left\{ \left(\frac{d\theta_t}{dz} \right)^2 - \frac{d\theta_t}{dz} - \left(\theta_x \frac{d\theta_y}{dz} - \theta_y \frac{d\theta_x}{dz} \right) \right\} \right] dz \dots\dots (5.10)$$

式 (5.7), (5.9) を式 (5.8) に代入し、図 5.1 に示す境界条件にしたがって積分すると、軸のたわみ $x(z), y(z)$, たわみ角 $\theta_x(z), \theta_y(z)$, ねじり角 $\theta_t(z)$ を得る。これで式 (5.10) が計算可能になり、点 S での軸のたわみ x_s, y_s , たわみ角 θ_{sx}, θ_{sy} , ねじり角 θ_{st} を次式 (5.11) のように計算できる。

$$\left. \begin{aligned} x_s &= x(0), \quad y_s = y(0), \\ \theta_{sx} &= \theta_x(0), \quad \theta_{sy} = \theta_y(0), \quad \theta_t = \theta_t(0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.11)$$

式(5.11)の右辺には F_{sx} , F_{sy} , M_{sx} , M_{sy} , M_{sz} が含まれている. 式(5.11)をこれらについて解けば, 式(5.12)を得る.

$$\left. \begin{aligned} F_s &= \alpha z_s + \gamma \theta_{sz} + i \frac{\delta_t}{l} \theta_{st} \theta_{sz}, \\ M_s &= \gamma z_s + \delta \theta_{sz} - i \delta_t \theta_{st} \left(\frac{\theta_{sz}}{2} + \frac{z_s}{l} \right), \\ M_{sz} &= \delta_t \theta_{st} - \left(\gamma + \frac{\delta_t}{l} \right) (x_s \theta_{sy} - y_s \theta_{sx}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.12)$$

ここで次式(5.13)のばね定数

$$\alpha = \frac{12EI_0}{l^3}, \quad \gamma = -\frac{6EI_0}{l^2}, \quad \delta = \frac{4EI_0}{l}, \quad \delta_t = \frac{GI_z}{l} \quad \dots\dots\dots (5.13)$$

と, (5.14)の複素変数

$$\left. \begin{aligned} F_s &= F_{sx} + iF_{sy}, \\ M_s &= M_{sy} - iM_{sx}, \\ z_s &= x_s + iy_s, \\ \theta_{sz} &= \theta_{sx} + i\theta_{sy} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.14)$$

を用いた.

ここで式(5.12)を式(5.10)に代入し, θ_{sx} , θ_{sy} , θ_{st} , x_s/l , y_s/l の3次の微小量の精度を保って計算を行うと, 次式(5.15)の位置エネルギーを得る.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \alpha (x_s^2 + y_s^2) + \gamma (x_s \theta_{sx} + y_s \theta_{sy}) + \frac{1}{2} \delta (\theta_{sx}^2 + \theta_{sy}^2) + \frac{1}{2} \delta_t \theta_{st}^2 \\ &\quad - \frac{\delta_t}{l} \theta_{st} (x_s \theta_{sy} - y_s \theta_{sx}) \quad \dots\dots\dots (5.15) \end{aligned}$$

これまでに報告された位置エネルギーの式と式(5.15)とを比較すると, 式(5.15)の下線部の3次の微小量を含む項が存在する点が異なる. 位置エネルギーに関するこれまでの報告の中には式(5.15)の $\frac{1}{2} \delta_t \theta_{st}^2$ に相当する項が(本章の表現で) $-M_{az} \theta_s$ の形で表されているのもある⁽⁸⁾⁽³⁵⁾. ここで M_{az} は軸端Aでの駆動トルクである. これは, 弾性軸を剛体として計算したものである. 位置エネルギー内の $-M_{az} \theta_s$ という項は軸のねじり角 θ_{st} が零からある値になるまでの変化が考慮されていない.

5・3・3 散逸関数 回転体Dには, 粘性摩擦が重心Gの運動と, 極軸に垂直な軸回りの回転運動, 極軸回りの回転運動に対して作用するとする. この粘性摩擦係数を

順に c_1 , c_2 , c_3 とすれば, 散逸関数 F は式 (5.3) の m , I , I_p をそれぞれ c_1 , c_2 , c_3 と置き換えれば次式 (5.16) の通り得られる.

$$F = \frac{1}{2}c_1(\dot{x}_r^2 + \dot{y}_r^2) + \frac{1}{2}c_2(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2}c_3\omega_3^2 \quad \dots\dots\dots (5.16)$$

5・3・4 ラグランジュの運動方程式 回転体の回転角 Θ_r と, 軸の回転角 Θ_s には次式 (5.17) の関係がある.

$$\Theta_r = \Theta_s + \frac{\tau}{2}(\theta_{sx} \sin \Theta_s - \theta_{sy} \cos \Theta_s) \quad \dots\dots\dots (5.17)$$

更に次式 (5.18) の複素表記を導入する.

$$\left. \begin{aligned} z_r &= x_r + iy_r = z_s + e \exp\{i(\Theta_s + \xi)\}, \\ \theta_{rz} &= \theta_{rx} + i\theta_{ry} = \theta_{sz} + \tau \exp(i\Theta_s) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5.18)$$

これらの式 (5.17), (5.18) の関係を考慮した上で, 式 (5.5), (5.15), (5.16) をラグランジュの運動方程式に代入すると, 次式 (5.19)~(5.21) の運動方程式を得る.

$$M_I - \frac{1}{2}i(I_p\ddot{\Theta}_s + c_3\dot{\Theta}_s - \delta_t\theta_{st})\theta_{sz} = 0 \quad \dots\dots\dots (5.19)$$

$$M_R = me\{\ddot{x}_s \sin(\Theta_s + \xi) - \ddot{y}_s \cos(\Theta_s + \xi)\} \quad \dots\dots\dots (5.20)$$

$$\begin{aligned} m\ddot{z}_s + c_1\dot{z}_s + F_s \\ = me\dot{\Theta}_s^2 \exp\{i(\Theta_s + \xi)\} - ie(m\ddot{\Theta}_s + (c_2 - c_3)\dot{\Theta}_s) \exp\{i(\Theta_s + \xi)\} \\ \dots\dots\dots (5.21) \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} M_I &= I_p\ddot{\theta}_{sz} - iI_p\dot{\Theta}_s\dot{\theta}_{sz} + c_2\dot{\theta}_{sz} + M_s \\ &\quad - \tau(I - I_p)\dot{\Theta}_s^2 \exp(i\Theta_s) + i\tau\{(I - I_p)\ddot{\Theta}_s + (c_2 - c_3)\dot{\Theta}_s\} \exp\{i(\Theta_s)\} \quad \dots (5.22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_R &= I_p\ddot{\Theta}_s + c_3\dot{\Theta}_s + \delta_t\theta_{st} - \frac{\delta_t}{l}(x_s\theta_{sy} - y_s\theta_{sx}) \\ &\quad + \frac{1}{2}I_p(\ddot{\theta}_{sx}\theta_{sy} - \ddot{\theta}_{sy}\theta_{sx}) - \tau(I - I_p)(\ddot{\theta}_{sx} \sin \Theta_s - \ddot{\theta}_{sy} \cos \Theta_s) \quad \dots\dots\dots (5.23) \end{aligned}$$

である.

点Aにおける駆動トルク M_{az} はモーメントのつりあいから次式 (5.24) となる.

$$M_{az} = -\delta_t \theta_{st} + \frac{\delta_t}{l} (x_s \theta_{sy} - y_s \theta_{sx}) \quad \dots\dots\dots (5.24)$$

5・4 オイラーの運動方程式 回転体の傾き角 θ_r の3乗以上の項を無視すると、オイラーの運動方程式は次式 (5.25) で表わされる.

$$\left. \begin{aligned} H_x \cos \Theta_r + H_y \sin \Theta_r &= K_1 - c_1 \omega_1, \\ H_y \cos \Theta_r + H_x \sin \Theta_r &= K_2 - c_2 \omega_2, \\ I_p \ddot{\Theta}_r + \frac{1}{2} I_p (\ddot{\theta}_{rx} \theta_{ry} - \ddot{\theta}_{ry} \theta_{rx}) &= K_3 - c_3 \omega_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.25)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} H_x &= I_p \dot{\Theta}_r \dot{\theta}_{rx} - I \ddot{\theta}_{ry}, \\ H_y &= I_p \dot{\Theta}_r \dot{\theta}_{ry} - I \ddot{\theta}_{rx} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.26)$$

である.

式 (5.25) の K_1 , K_2 , K_3 は回転体に作用する, 重心Gのまわりの復元力によるモーメントの x_1 , x_2 , x_3 軸方向の成分である.

回転軸のS点に力 F_{sx} , F_{sy} とモーメント M_{sx} , M_{sy} , M_{sz} を加えたときに, たわみが x_s , y_s , たわみ角が θ_{sx} , θ_{sy} , ねじり角が θ_{st} となると前もって定めてあったので, 点Sにこれらのたわみやたわみ角, ねじり角が生じているならば, 復元力の大きさは $-F_{sx}$, $-F_{sy}$, 復元モーメントの大きさは $-M_{sx}$, $-M_{sy}$, $-M_{sz}$ である. このことから, K_1 , K_2 , K_3 は次式 (5.27) で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= -(M_{sx} - \theta_{rx} M_{sz}) \cos \Theta_r - (M_{sy} - \theta_{ry} M_{sz}) \sin \Theta_r, \\ K_2 &= (M_{sx} - \theta_{rx} M_{sz}) \sin \Theta_r - (M_{sy} - \theta_{ry} M_{sz}) \cos \Theta_r, \\ K_3 &= -\theta_{rx} M_{sx} - \theta_{ry} M_{sy} - M_{sz} + M_e \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.27)$$

ここで

$$M_e = e(\alpha y_s + \gamma \theta_{sy}) \cos(\Theta_r + \xi) - e(\alpha x_s + \gamma \theta_{sx}) \sin(\Theta_r + \xi) \quad \dots\dots\dots (5.28)$$

である.

式 (5.25) は慣性主軸まわりのモーメントのつりあいを表す式である。慣性主軸の方向余弦を用いて、 x, y, z 軸まわりの式に変換できる。式 (5.12), (5.17), (5.19), (5.28) を式 (5.25) に代入すれば、回転軸上の点 S での傾き、及び回転運動の次式 (5.29), (5.30) を得る。

$$M_I - i(I_p \ddot{\Theta}_s + c_3 \dot{\Theta}_s) \theta_{sz} = 0 \quad \dots\dots\dots (5.29)$$

$$M_R + \theta_{sx}(I \ddot{\theta}_{sy} - I_p \dot{\Theta}_s \dot{\theta}_{sx} + \gamma y_s) - \theta_{sy}(I \ddot{\theta}_{sx} + I_p \dot{\Theta}_s \dot{\theta}_{sy} + \gamma x_s) - M_e - \tau \dot{\Theta}_s^2 (I - I_p)(\theta_{sx} \sin \Theta_s - \theta_{sy} \cos \Theta_s) = 0 \quad \dots\dots\dots (5.30)$$

ニュートンの運動の第 2 法則から、回転体の並進運動に関する式は次式 (5.31) になる。

$$m \ddot{z}_r = -F_s - c_1 \dot{z}_r \quad \dots\dots\dots (5.31)$$

式 (5.31) の z_r を z_s に変換して式 (5.21) になる。

5・5 ラグランジュの運動方程式とオイラーの運動方程式の比較 回転体の傾き運動、回転運動についてのラグランジュの運動方程式から導出される式 (5.19), (5.20) は、オイラーの運動方程式から導出された対応すべき式 (5.29), (5.30) と異なる表現である。しかし、式 (5.20) を参照すれば次式 (5.32) の結果に至る。

$$\delta_t \theta_{st} \theta_{sz} = -(I_p \ddot{\Theta}_s + c_3 \dot{\Theta}_s) \theta_{sz} \quad \dots\dots\dots (5.32)$$

式 (5.32) を用いれば、2 次の精度を保ったまま式 (5.19) は式 (5.29) になる。同じように、式 (5.19), (5.21) を用いれば、式 (5.20) は式 (5.30) になる。すなわち、式 (5.19), (5.20) は、式 (5.29), (5.30) と外見が異なるが、等価である。

オイラーの運動方程式は、単位時間あたりの回転体の角運動量の変化量と力のモーメントの x, y, z 直交座標系への投影を表している。一方、ラグランジュの運動方程式は、 $\dot{\theta}_{sx}, \dot{\theta}_{sy}, \dot{\Theta}_s = \dot{\phi}_s + \dot{\psi}_s$ 方向への投影を表している。ここで $\dot{\Theta}_s$ 方向は、大きさが $\dot{\phi}_s$ の z 軸方向のベクトルと、大きさが $\dot{\psi}_s$ の回転軸のたわみ曲線の点 S での接線方向（図 5.2 の G T 方向）のベクトルの合成ベクトルで決まる。また、 $\dot{\Theta}_s$ の方向は、 $\dot{\theta}_{sx}, \dot{\theta}_{sy}$ のどちらとも直交していない。

5・6 結言 本章では，回転角速度の変化する場合の軸の運動方程式を，軸のたわみ，たわみ角，ねじり角の2次の微小量の精度で導き，次の結果を得た．

(1) ラグランジュの運動方程式を用いてもオイラーの運動方程式を用いても，同じ運動方程式が導かれる．つまり，二つの方法は，少なくとも回転体の運動の記述については等価である．

(2) 従来用いられてきた運動方程式が導き方によって異なるのは，2次の微小量の精度が保たれていないからである．

(3) 軸のたわみ，たわみ角，ねじり角の3次の微小量の精度で運動エネルギーおよび位置（ひずみ）エネルギーを求めると，運動エネルギーは式(5.5)で与えられ，2次の微小量の精度で導かれた従来の結果と一致するが，位置エネルギーは式(5.15)で与えられる．

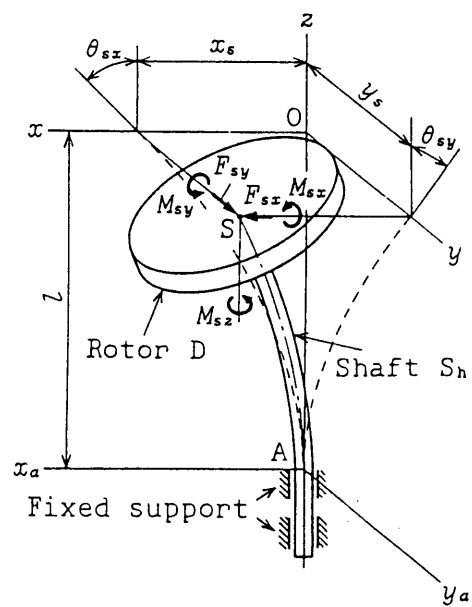


图 5.1 回轉軸系

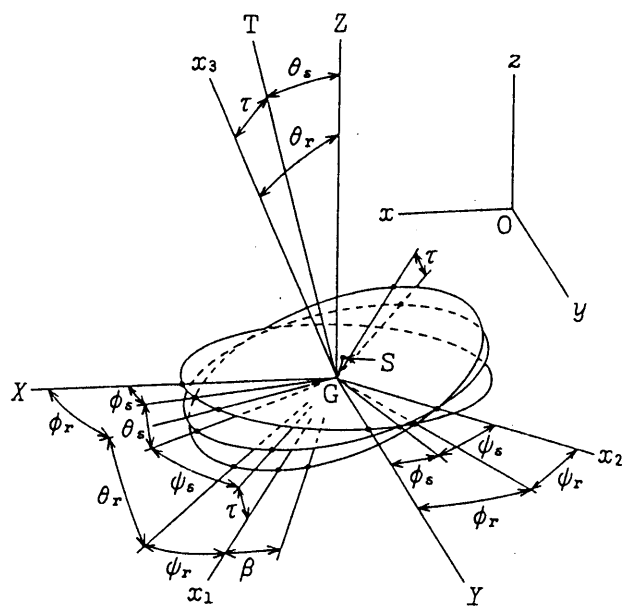


图 5.2 座標系

第6章 本論文の結論

本論文は6章から構成されている。以下のように結論を述べる。

第1章は序論であり、本論文のあらましを述べた。

第2章では非対称回転体を持つ回転軸を一定トルクで駆動する軸系のふれまわりについて、危険速度を通過させた場合に発生するふれまわり振動などを述べた。駆動トルクが十分に大きい場合に危険速度を滑らかに通過することはもちろん、駆動トルクが小さすぎて危険速度を通過できない場合に回転角速度が危険速度の付近で振動的に変化すること、また、危険速度を通過できない場合においても、系の減衰を変化させることにより危険速度を通過させうることを示した。加えて、不つりあいの角位置によっては、対称回転体の場合よりも非対称回転体の場合の方がなめらかに危険速度を通過できることを示した。

第3章では対称回転体を持つ回転軸を一定角加速度で駆動し、その軸系のふれまわりについての危険速度を通過させた後に発生する軸のねじり振動について述べた。軸はふれまわり振幅の増大とともにねじれ、そのふれまわり振幅の変化を起因とする軸のねじり振動は、軸から見たふれまわり角速度がねじりの固有振動数と一致する場合に共振を起こすことを示した。

第4章では非対称回転体を持つ回転軸を一定角加速度で駆動し、その軸系のふれまわりについての危険速度を通過させた後に発生する軸のねじり振動について述べた。第3章で述べた対称回転体の場合とあわせた漸近近似式を提示した。第3章で述べられる結果の他に、回転体の非対称性によってねじり振動が増大する回転角速度が存在することを示した。

第5章では回転角速度が変化する回転体－軸系の運動方程式を提示した。たわみ、たわみ角、ねじり角などの変位について2次の微小量までを考慮したモデルを提示した。回転体の運動方程式を導出する際に、オイラーの運動方程式とラグランジュの運動方程式では一部の項に違いが生じることがあるが、導出の際に軸の変位の2次の微小量を切り捨てて計算したために違いが生じることがを示し、さらに2次の微小量をも考慮した場合に二つの方法が等価であることを示した。

参 考 文 献

- (1) 山本敏男・太田博, 機械力学 (増補改訂版), 朝倉書店 (1986-11), pp. 238-240.
- (2) Rankine, W. J. McQ., *On the Centrifugal Whirling of Shafts*, The Engineer, Vol. **27** (1869-4), p. 249.
- (3) Grammel, R., *Kritische Drehzahl und Kreiselwirkung*, Z. Ver. deutsch. Ing., Bd. **64**, Nr. 44 (1920-10), S. 911-914.
- (4) Stodola, A., *Steam and Gas Turbines*, McGraw-Hill Book (1927), pp. 424-430.
- (5) Den Hartog, J. P., *Mechanical Vibrations (Fourth Edition)*, McGraw-Hill Book (1956), pp. 225-229.
- (6) Kimball, A. L. and Hull, E. H., *Vibration Phenomena of a Loaded Unbalanced Shaft While Passing Through Its Critical Speed*, Trans. ASME, Vol. **47** (1925), pp. 673-698.
- (7) 下山美徳・山本敏男, 軸の危険速度領域通過に関する研究, 日本機械学会論文集, **15**-50, I (1949-10), pp. 113-121.
- (8) Dimentberg, F. M., *Flexural Vibration of Rotating Shafts*, Butterworths (1961), pp. 42-60.
- (9) 矢鍋重夫・田村章義, 危険速度通過時の回転軸振動 (第1報 実験および数値解), 日本機械学会論文集, **37**-294, 1 (1971-2), pp. 268-275.
- (10) 矢鍋重夫, 危険速度通過時の過渡振動, 機械の研究, **29**-10 (1977-10), pp. 1191-1196.
- (11) 文献 (4), pp. 1122-1130.
- (12) 文献 (8), pp. 155-186.
- (13) Taylor, H. D., *Critical-Speed Behavior of Unsymmetrical Shafts*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, **7**-2 (1940-6), pp. A-71-A-79.
- (14) Brosens, P. J. and Crandall, S. H., *Whirling of Unsymmetrical Rotors*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, **28**-3 (1961-9), pp. 355-362.
- (15) Crandall, S. H., and Brosens, P. J., *On the Stability of Rotation of a Rotor with Rotationally Unsymmetric Inertia and Stiffness Properties*, J. Appl. Mech., Trans ASME, **28**-4 (1961-12), pp. 567-570.

- (16) 山本敏男・太田博, 非対称回転体の振動について, 日本機械学会論文集, **28**-188, 1 (1962-4), pp. 475-485.
- (17) 山本敏男・太田博, 非対称回転体の振動について (主危険速度付近における軸系の共振曲線), 日本機械学会論文集, **28**-194, 1 (1962-10), pp. 1272-1282.
- (18) 山本敏男・太田博, 非対称回転体の動的不安定振動, 日本機械学会論文集, **30**-209, 1 (1964-1), pp. 149-160.
- (19) 加藤正義・太田博, 非対称回転体を持つ軸の危険速度通過時のふれまわり振動, 日本機械学会論文集, **57**-543, C (1991-11), pp. 3417-3422.
- (20) 山本敏男, 回転軸の分数調波, “和差調波” 振動について, 日本機械学会論文集, **26**-164, 1 (1960-4), pp. 612-620.
- (21) 山本敏男・石田幸男・池田隆, 偏平軸の和差調波振動, 日本機械学会論文集, **46**-405, C (1980-5), pp. 465-472.
- (22) Yamamoto, T., *On the Critical Speeds of a Shaft*, Memoirs of Faculty of Engineering, Nagoya University, **6**-2 (1954-11), pp. 106-174.
- (23) Tondl, A. (前澤成一郎訳), 回転軸の力学, コロナ社, (1971-5), pp. 281-299.
- (24) 太田博・岡崎幸広・三輪正夫, 剛性に方向差のある軸受台で支えられた偏平軸の不安定振動, 日本機械学会論文集, **44**-380, 1 (1978-4), pp. 1225-1233.
- (25) 太田博・水谷一樹, 剛性に方向差のある軸受台で支えられた非対称回転体の不安定振動, 日本機械学会論文集, **47**-416, C (1981-4), pp. 415-423.
- (26) 石田幸男・池田隆・山本敏男・増田信之, クラックロータの振動 (第1報, 不つりあい方向による主危険速度付近の共振曲線の変化), 日本機械学会論文集, **53**-488, C (1987-4), pp. 925-932.
- (27) Stodola, A., *Kritische Drehzahlen rasch umlaufender Wellen*, Z. Ver. deutsch. Ing., Bd. **63**, Nr. 36 (1919-9), S. 867-869.
- (28) 山本敏男・河野和豊, 回転速度が変動する回転体の振動について, 日本機械学会論文集, **35**-278, 1 (1969-10), pp. 2044-2052.
- (29) 藤井澄二, 自動車プロペラ軸の低い速度で起こるふれまわり (第1報), 日本機械学会論文集, **22**-115, 1 (1956-3), pp. 178-181.
- (30) Porter, B., *A Theoretical Analysis of the Torsional Oscillation of a System Incorporating a Hooke's Joint*, J. Mech. Eng. Sci., **3**-4 (1961), pp. 324-329.

- (31) 藤井澄二・柴田碧・重田達也, 自動車プロペラ軸の低い速度で起こるふれまわり (第2報), 日本機械学会論文集, **22**-119, 1 (1956-7), pp. 489-491.
- (32) 太田博・加藤正義, 自在継手により駆動される回転軸の横振動 (第1報, 二次モーメントによる偶数倍振動の発生), 日本機械学会論文集, **50**-449, C (1984-1), pp. 101-105.
- (33) 太田博・加藤正義・水野雅彦, 自在継手により駆動される偏平軸の横振動 (第1報, 角速度変化による不安定振動の発生と不安定領域の拡大), 日本機械学会論文集, **51**-467, C (1985-7), pp. 1482-1489.
- (34) 野波健蔵・東成昭・戸谷隆美, 回転軸系の危険速度通過法に関する一考察, 日本機械学会論文集, **53**-496, C (1987-12), pp. 2495-2500.
- (35) 矢鍋重夫, 危険速度通過時の回転軸の振動 (第4報, ジャイロモーメントの影響), 日本機械学会論文集, **45**-398, C (1979-10), 1082-1091.
- (36) 山川宏・村上誠爾, 駆動源との相互作用を考慮した回転軸系の最適運転曲線に関する研究 (第2報), 日本機械学会論文集, **56**-527, C (1990-7), 1739-1744.
- (37) Macduff, J. N., and Curreri, J. R. (小堀与一訳), 振動制御, コロナ社 (1967-8), pp. 296-300.
- (38) 文献 (5), pp. 247-249.
- (39) 岩壺卓三・神吉博・川井良次, 有限駆動力を持つ非対称回転軸の危険速度通過に関する研究 (第2報, 回転軸の偏心の位相角の影響), 日本機械学会論文集, **40**-335, 1 (1974-7), 1908-1916.
- (40) 太田博・石田幸男・加藤安久・近藤博大, 偏平軸系の危険速度通過時の過渡振動に関する実験, 日本機械学会論文集, **53**-490, C (1987), pp. 1160-1165.
- (41) 飯田裕・田村章義・菊池勝昭・阿片寛志, 歯車軸の曲げとねじりの連成振動, 日本機械学会論文集, **46**-404, C (1980-4), pp. 375-382.
- (42) 岩壺卓三・有井士郎・川井良次, 歯車で連結された回転軸の曲げねじり連成振動 (第1報, 伝達マトリクス法による解析), 日本機械学会論文集, **49**-422, C (1983-6), pp. 929-936.
- (43) 加藤正義・太田博・加藤利一, 自在継手により駆動される回転軸の曲げとねじりの連成振動 (第1報, 運動方程式の導出および漸近法による近似解析), 日本機械学会論文集, **53**-495, C (1987-11), pp. 2257-2264.
- (44) 文献 (5), pp. 170-206.

- (45) 小野京右, トルク励振による弾性ロータのつりあわせ (理論的研究), 日本機械学会論文集, **50**-458, C (1984-10), pp. 1790-1798.
- (46) 文献 (23), pp. 239-259.
- (47) Gasch, R. and Pfützner, H. (三輪修三訳), 回転体の力学, 森北出版 (1978-10), pp. 49-56.
- (48) 文献 (37), pp. 348-359.
- (49) Kato, M., Ota, H., Nakamura, S., *Torsional Vibration of a Rotating Shaft Driven by Constant Acceleration*, Proc. of the 5th Asia-Pacific Vibration Conference, Kitakyushu, (1993-11), pp. 434-439.
- (50) 加藤正義・太田博・中村慎一郎, ふれまわりの危険速度を通過する回転軸のねじり振動, 日本機械学会論文集, **61**-584, C (1995-4), pp. 1265-1270.
- (51) 太田博・河野和豊・三矢保永, 非対称回転体によって生ずる主危険速度付近の不安定領域の除去 (弾性軸受台あるいは軸への付加質量による動的効果), 日本機械学会論文集, **34**-265, 1 (1968-9), pp. 1512-1522.
- (52) 野波健蔵・宮下政和, ジャイロ効果を考慮した回転体の危険速度通過問題 (第3報, 弾性支持回転軸の場合), 日本機械学会論文集, **46**-404, C (1980-4), pp. 365-374.
- (53) 山川宏・西岡康志・鈴木良明, 駆動源との相互作用を考慮した回転軸系の最適運転曲線に関する研究, 日本機械学会論文集, **52**-484, C (1986-12), pp. 3108-3114.
- (54) A. E. H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover Publications, (1927), pp. 381-398.
- (55) Bogoliubov, N. N. and Mitropolisky, Y. A. (益子正教訳), 非線形振動論—漸近的方法—, 共立出版 (1965-8), pp. 312-329.
- (56) Kato, M., Ota, H., Nakamura, S., *Passing Problems of an Asymmetrical Rotor-Shaft through its First Critical Speed (Case of Constant Driving Torque)*, Proc. of IFToMM-jc Int. Symp. on Theory of Machines and Mechanisms, Nagoya, (1992-9), pp. 515-519.
- (57) 加藤正義・太田博・中村慎一郎, 非対称回転体を持つ軸の危険速度通過時のふれまわり振動 (駆動トルクが一定の場合), 日本機械学会論文集, **59**-560, C (1993-4), pp. 976-981.

- (58) 中村慎一郎・太田博・加藤正義, 非対称回転体を持つ軸の危険速度通過時に発生するねじり振動, 日本機械学会論文集 (C編), 投稿中.
- (59) Nakamura, S., Ota, H. and Kato, M., *Torsional Vibration of an Asymmetrical Rotor-Shaft System after Passing its Critical Speed for Whirling*, Proc. of IMechE, 6th Int. Conf. on Vibrations in Rotating Machinery, Oxford, UK, (1996-9), (to be submitted).
- (60) Kato, M., Ota, H. and Nakamura, S., *Equations of motion of a shaft-rotor system with variable rotating speed*, Proc. of IMechE, 5th Int. Conf. on Vibrations in Rotating Machinery, Bath, UK (1992-9), pp. 469-473.
- (61) 加藤正義・太田博, 負荷トルクを受ける回転軸のふれまわり振動 (負荷トルクによる不安定化現象), 日本機械学会論文集, **56**-522, C (1990-2), pp.308-314.

謝 辞

本研究は、名古屋大学工学部 機械工学科 機械運動学講座において、名古屋大学 太田博 教授 および 愛知教育大学 加藤正義 教授の御指導のもとに行われたものであります。本論文をここに結ぶにあたり、絶えず懇切なる御指導とこの上ない御鞭撻を賜った太田博 教授と 加藤正義 教授に心からの謝意を表すものであります。

また、本研究について有益な御教示、御助言を頂いた名古屋大学 電子機械工学科 安田仁彦 教授、名古屋大学 マイクロシステム工学専攻 三矢保永 教授には心より感謝申し上げます。

さらに、本研究を行うにあたって有益な御助言を頂いた機械運動学講座の皆様方に、とりわけ研究結果について有益な議論を交わした卒業研究生の中里浩二君、河野健司君に厚く御礼申し上げます。

1995年 11月

中村 慎一郎

本論文に関連する発表論文一覧

(1) 学会誌、学術誌

| 論文題目 | 公表の方法及び時期 | 著者 |
|---|--|-------------------------|
| 1. 非対称回転体を持つ軸の危険速度通過時のふれまわり振動 (駆動トルクが一定の場合) | 日本機械学会論文集 (C編) 59巻560号, (1993年4月) pp. 976-981. | 加藤 正義 太田 博 中村 慎一郎 |
| 2. ふれまわりの危険速度を通過する回転軸のねじり振動 | 日本機械学会論文集 (C編) 61巻584号, (1995年4月) pp. 1265-1270. | 加藤 正義 太田 博 中村 慎一郎 |
| 3. 非対称回転体を持つ軸の危険速度通過時に発生するねじり振動 | 日本機械学会論文集 (C編) (投稿中) | 中村 慎一郎 太田 博 加藤 正義 |

(2) 国際会議議事録

| 論文題目 | 公表の方法及び時期 | 著者 |
|---|--|----------------------------------|
| 1. Passing Problems of an Asymmetrical Rotor-Shaft through its First Critical Speed (Case of Constant Driving Torque) | Proceedings of the IFToMM-jc International Symposium on Theory of Mechanics and Mechanisms, Nagoya, (Sept., 1992), pp. 515-519. | M. Kato H. Ota S. Nakamura |
| 2. Equations of Motion of a Shaft-Rotor System with Variable Rotating Speed | Proceedings of the fifth International Conference on Vibrations in Rotating Machinery, Bath, United Kingdom (Sept., 1992), pp. 469-473. | M. Kato H. Ota S. Nakamura |
| 3. Torsional Vibration of a Rotating Shaft Driven by Constant Acceleration | Proceedings of the fifth Asia-Pacific Vibration Conference, Kitakyushu (Nov., 1993), pp. 434-439 | M. Kato H. Ota S. Nakamura |
| 4. Torsional Vibration of an Asymmetrical Rotor-Shaft System after Passing its Critical Speed of Whirling | Proceedings of the sixth International Conference on Vibrations in Rotating Machinery, Oxford, United Kingdom (Sept., 1996), (to be submitted) | S. Nakamura H. Ota M. Kato |