

図・本館

渦巻ポンプ内気液二相流の
三次元数値解析に関する研究

名古屋大学図書	
和	1143051

内 山 知 実

報告番号 乙第 - 4289 号

目 次

記号	IV
第1章 緒論	1
1. 1 本研究の意義と目的	1
1. 2 羽根車内单相流の数値解析に関する過去の研究の概要	2
1. 3 渦巻ポンプ内の気液二相流に関する過去の研究の概要	4
1. 3. 1 実験的研究	4
1. 3. 2 数値解析的研究	9
第2章 曲線境界をもつ領域に対する線形一次有限要素解析	14
2. 1 緒言	14
2. 2 基礎式	14
2. 2. 1 有限要素方程式	14
2. 2. 2 境界形状	15
2. 2. 3 境界条件の代入	16
2. 2. 4 境界条件と解の関係	17
2. 3 解析結果と考察	18
2. 3. 1 右辺ベクトルの変化が解に及ぼす影響	18
2. 3. 2 境界形状が右辺ベクトルに及ぼす影響	18
2. 3. 3 並進移動面の場合	20
2. 3. 4 回転面の場合	21
2. 4 結言	23
第3章 羽根車内单相流の線形一次有限要素解析	31
3. 1 緒言	31
3. 2 基礎式と数値解析法	31
3. 2. 1 回転羽根車内の流れの基礎式	31
3. 2. 2 有限要素方程式	32
3. 2. 3 第2種境界条件の扱い	32
3. 2. 4 羽根形状の扱い	33
3. 2. 5 Kutta条件と羽根車下流の周期境界の扱い	34
3. 3 解析結果と考察	36
3. 3. 1 Kutta条件の検証	36
3. 3. 2 羽根車下流の循環に及ぼす後縁位置の影響	37
3. 3. 3 後縁点を羽根車下流に置いた場合	38
3. 3. 4 後縁の羽根厚みが大きい羽根車への適用	39
3. 4 結言	40

第4章 気泡流モデルによる渦巻ポンプ内気液二相流の数値解析	49
4.1 緒言	49
4.2 基礎方程式	49
4.2.1 仮定	49
4.2.2 気液二相流の基礎式	50
4.2.2.1 単一気泡の運動方程式	50
4.2.2.2 連続式	51
4.2.2.3 運動方程式	51
4.2.3 ボイド率の定義	51
4.2.4 循環保存則	51
4.3 数値解析法	52
4.3.1 計算条件および境界条件	52
4.3.2 有限要素法	54
4.3.3 数値解析法	54
4.4 解析結果と考察	55
4.4.1 ボイド率分布	55
4.4.2 圧力分布	55
4.5 結言	56
第5章 気泡流モデルによる気液二相流時のポンプ性能の数値解析	64
5.1 緒言	64
5.2 基礎方程式	64
5.2.1 気液二相流時の羽根車ヘッドとポンプ揚程	64
5.2.2 速度分布と羽根車ヘッドの関係	66
5.2.3 二相流時の揚程変化	66
5.3 解析結果と考察	67
5.3.1 計算条件	67
5.3.2 羽根負荷	67
5.3.3 羽根車ヘッドの変化	68
5.3.4 気液間の運動量交換に基づくヘッド	69
5.3.5 損失ヘッド比	69
5.4 結言	71
第6章 空洞を伴う気泡流モデルによる数値解析	76
6.1 緒言	76
6.2 基礎方程式	76
6.2.1 仮定	76
6.2.2 気泡の運動方程式とボイド率	76
6.2.3 気液二相流の基礎方程式	77
6.2.4 計算領域と境界条件	78

6. 2. 5	計算条件	78
6. 2. 6	羽根車ヘッド	79
6. 3	空洞モデルと数値解析法	79
6. 3. 1	空洞モデル	79
6. 3. 2	数値解析法	80
6. 4	解析結果と考察	80
6. 4. 1	入口ボイド率による空洞形状の変化	80
6. 4. 2	空洞体積の変化	81
6. 4. 3	圧力分布	82
6. 4. 4	羽根車ヘッドの変化	83
6. 5	結言	83
第7章	結論	95
	謝辞	98
	文献	110
付録A	離散点で与えられた1階偏導関数値に対する数値積分法	110
A. 1	解析方法	110
A. 1. 1	問題の定式化	110
A. 1. 2	差分近似式による方法	110
A. 1. 3	FEM形状関数による方法	111
A. 1. 4	偏導関数近似式の解法	112
A. 2	解析結果	113
A. 2. 1	数値解析例	113
A. 2. 2	差分近似式を用いた場合	113
A. 2. 3	形状関数を用いた場合	114

記 号

- A : 六面体要素の底面積または羽根車流路面積
- C : (曲線または曲線上の点の位置ベクトル(第2章および第3章)
流体の絶対速度(第5章))
- C_D : 単一気泡の抵抗係数
- C_{DTP} : 気泡群中の気泡の抵抗係数
- C_U : 気泡の慣性質量係数
- f : 気泡に作用する外力
- {F} : 有限要素方程式の右辺ベクトル
- g : 重力加速度
- h : (水力損失ヘッド(第5章)
六面体要素の高さ(第6章))
- H : ポンプ実揚程
- H_a : 空気排出ヘッド
- H_b : 気液間の運動量交換量に相当するヘッド
- H_{imp} : 羽根車ヘッド
- H^* : 損失ヘッド比
- i : 流れ方向の節点番号
- j : 半径方向の節点番号
- k : 周方向の節点番号
- [K] : 有限要素方程式の係数マトリックス
- l : 部分線分
- L : 部分曲線または部分線分の長さ
- \dot{m} : 質量流量
- M : (気泡の質量または流体の角運動量
 ϕ の主変化方向(流れ方向)の節点数(第2章))
- n : 単位体積当りの気泡の数(気泡の数密度)
- \mathbf{n} : 曲線の単位法線ベクトル(正方向は境界から外向)
- N : (羽根枚数
 ϕ の主変化方向に垂直方向の節点数(第2章))
- [N] : 形状関数マトリックス
- p : 重力の影響を除いた場の圧力
- Δp : 翼素両面の圧力差またはポンプ内の損失圧力
- P : 点の位置ベクトル
- q : (気相の体積流量
流束または第2種境界条件で規定される速度(第2章および第3章))
- Q : 液相の体積流量
- r : 半径方向座標
- \mathbf{r} : 動径ベクトル
- Δr : 節点間の半径方向距離
- R_b : 気泡半径

- Re : 気泡レイノルズ数 $= 2R_b |W-V| / \nu$
 R^* : 損失圧力倍数
 S : 表面積
 S : (直線または直線上の位置ベクトル(第2章、第3章)
 時間
 t : (周方向の羽根厚みまたは助変数(第2章)
 羽根高さ(第5章)
 T : 羽根面に作用するトルク
 ΔT : 翼素に作用するトルク
 u : 羽根車周速度
 V : (気泡の速度
 壁面の速度(第2章)
 V_v : 空洞の体積
 W : (液相の速度
 流体の相対速度(第3章)
 z : 軸方向座標
 α : ボイド率
 α_{or} : 空洞が発生する限界ボイド率
 β : (減衰係数
 羽根車外周に対する相対角度(第3章)
 Γ : (循環 $= 2\pi r W_{au}$
 $= \oint W_a \cdot dl$ (第4章)
 δ : 節点の移動量
 ε : ϕ の変化割合 $= [\Delta \phi / (\phi_3 - \phi_0)] / (\Delta F / F)$
 θ : 周方向座標 $= \theta_0 + \omega t + \Theta$
 $\Delta \theta$: 羽根1ピッチの角度
 Θ : 羽根に相対的な周方向角度
 ν : 水の動粘度
 ρ : 密度
 ϕ : 場の変数、速度ポテンシャル
 または流量係数 $= \dot{m} / \rho T P A_2 u_2$
 $\{\Phi\}$: 領域全体の節点値ベクトル
 ϕ : H に対する揚程係数 $= H / (u_2^2 / g)$
 ϕ_a : H_a の無次元数 $= H_a / (u_2^2 / g)$
 ϕ_b : H_b の無次元数 $= H_b / (u_2^2 / g)$
 ϕ_h : h の無次元数 $= h / (u_2^2 / g)$
 ϕ_{imp} : H_{imp} に対する揚程係数 $= H_{imp} / (u_2^2 / g)$
 $\Delta \phi$: 二相流時の ϕ の減少量
 $\Delta \phi_h$: 二相流時の ϕ_h の増加量
 $\Delta \phi_{imp}$: 二相流時の ϕ_{imp} の増加量
 $\Delta \phi_r$: ポンプまたは羽根車入口を基準にした無次元圧力係数
 $= (p - p_0) / (\rho \iota u_2^2)$

ω : 回転角速度

添字

0 : (ポンプ入口、初期条件または水単相流時
計算領域入口または収束値(第2章))

1 : 羽根車入口

2 : (羽根車出口
計算領域出口(第2章))

3 : (ポンプ出口
後縁点(第3章))

a : 絶対座標系

g : 気相

i : 羽根車内部または一部区間

l : 液相

max : 最大値

r : 半径方向成分

TP : 気液二相流

u : 周方向成分

z : 軸方向成分

第1章 緒 論

1. 1 本研究の意義と目的

渦巻ポンプは、本来、液単相流用に設計されており、気液二相流時には羽根車の作用が一般に低下し、運転不能に陥ることもある。したがって、二相流に対する使用は極力避けるよう配慮されている。しかし、例えば、加圧水形原子炉の一次冷却材循環系の配管に亀裂が生じると、循環系内の圧力が低下して冷却材が蒸発し、冷却材循環用ポンプ内が気液二相流状態となる。また、海底油田の汲上用ポンプや廃液処理用ポンプは、液相中にとけ込んでいた気体が析出するため、気液二相流を扱わなければならない。したがって、原子炉の安全解析法や海底油田用ポンプなどの設計方法を確立する立場から、気液二相流時における渦巻ポンプ内の流動状態やポンプ特性を解明し、これらの予測法を提示することが重要かつ緊急な課題となっている。

気液二相流時のポンプ特性を解明するため、従来より系統的かつ多角的な実験的研究がなされ、ポンプ入口における気液体積流量比 α_0 とポンプ性能の関係や、ポンプ内の二相流動状態などが詳細に調べられてきた。その結果、羽根車内に複雑な圧力勾配や気液間相対速度が存在し、流れが著しい三次元性を示すこと、また流動状態がポンプ特性と密接に関連することなどが明らかにされた。さらに、羽根車内二相流に対する理論的考察と実験データに基づいて、 α_0 と二相流時の揚程低下量の関係を与える実験式が導かれ、広範囲の α_0 に対するポンプ性能予測法が提示された。しかし、ポンプ特性を支配する羽根車内の二相流動機構は極めて複雑であることから、このような実験的予測法は、比速度や運転条件が異なるポンプに対しては適用が困難であり、ポンプ特性に及ぼすポンプの設計変数の影響を個別に吟味できない欠点をもつ。

上述のように、二相流時の流動状態やポンプ特性を実験的に統一的に調べることには限界があることから、近年、ポンプ内二相流に関する数値解析的研究への期待が高まり、流動状態やポンプ特性を数値解析する試みが活発になってきた。しかし、従来より提示されている方法は、羽根車内二相流の複雑な挙動を単純化して一次元および二次元問題とした解析に留まり、三次元流れの詳細や、それに関連するポンプ特性を高精度に解明できる解析方法が未だ提示されていないのが現状である。

本研究の目的は、渦巻ポンプ内の気液二相流を三次元数値解析し、得られた解析結果を基にして二相流ポンプの性能予測法を確立することにある。ただし、ポンプ内二相流の数値解析の基礎となる、羽根車内単相流に対する高精度な数値解析法の確立も、本研究の目的に含まれる。

以下では、まず羽根車内単相流の数値解析に関する過去の研究を概説し、つぎに渦巻ポンプ内の気液二相流に関して過去になされた実験的および数値解析的研究の概要を述べる。

1. 2 羽根車内单相流の数値解析に関する過去の研究の概要

回転羽根車内の流れの数値解析は、Navier-Stokes方程式(N-S方程式)を解く粘性流解析と、羽根車内のレイノルズ数(Re)が大きいことに着目して、N-S方程式においてReを無限大と仮定して得られるEuler式を解く非粘性流解析に大別できる。羽根車内の境界層は、流路の曲がりや回転の影響を強く受け、静止した流れ場の境界層とは異なる極めて複雑な挙動を示す⁽¹⁾。この挙動を正確に求めようとする粘性流解析では、静止場に対する解析と比較して、一般に膨大な計算時間や記憶容量が必要とされる。許容される計算時間や記憶容量には限界があることから、粘性流解析に比べ、現象をモデル化した非粘性流解析が過去に多くなされた。本節では、準三次元解析を含めた三次元解析法をおもな対象として述べるが、まず非粘性流解析の概要を述べる。

羽根車内の流れが軸対称流面をもつものと仮定すれば、流れを二次元問題として扱うことが可能となり、子午面流れと羽根間流れの組合せにより表現できる。この場合には、子午面流れと羽根間流れの連立反復計算、すなわち準三次元解析により羽根車内の流れが定まる。

まず、子午面流れと羽根間流れの解析法を個別に眺めてみよう。子午面流れの解法としてはKatsanis・McNally⁽²⁾による差分法があり、公表された計算プログラムは多方面に利用された。また、三次元解析への拡張性を考慮して、Hirsh・Warzee⁽³⁾はGalerkin法による有限要素法を示した。また、Adler・Krimerman⁽⁴⁾は反復法による有限要素法を提示し、差分法による解析結果と良く一致した解が得られることを示している。

羽根間流れの解法としてはKatsanis⁽⁵⁾の差分法が有名であり、羽根前縁の計算精度を確保するために前縁近傍の格子を細分割した計算プログラム⁽⁶⁾も公表されている。このプログラムはDeshpande⁽⁷⁾により改良され、計算の収束性が高められた。なお、Katsanisの解法⁽⁵⁾⁽⁶⁾では、境界条件として羽根車が流体に与えた仕事量を表す羽根車下流の流出角度を与えなければならず、羽根車仕事を解析結果として得ることができない。このような欠点を解決するため、大宮司⁽⁸⁾は、羽根後縁をよどみ点と一致させる方法を差分法に採用し、流れがKuttaの条件を満たすような計算手法を示した。一方、Adler・Krimerman⁽⁹⁾は、三次元解析への拡張性を考慮して、子午面流れの解析と同様の、節点配置の自由度が高い有限要素法を示した。

つぎに、上述の二次元計算を組み合わせた準三次元解析に関する研究について述べる。Katsanis⁽¹⁰⁾は、子午面と羽根間の流れに対して準直交曲線法を用いた解析法を示した。ただし、準直交線に沿う曲率の変化が線形であること、流れ角度が一定であるなどの多くの仮定を用いている。中瀬・妹尾⁽¹¹⁾は、子午面流れを準直交曲線法、羽根間流れを特異点法により解析した。この方法は、設計点以外の流量に対しても流れの詳細を求めることができる。その後、流れの損失を考慮に入れたマトリックス法⁽¹²⁾、流線法⁽¹³⁾、有限要素法⁽¹⁴⁾による解析法が提案された。また、Krimerman・Adler⁽¹⁵⁾は、前述の有限要素法⁽⁴⁾

(9)を組み合わせ、より厳密な準三次元解法を提示した。

さて、回転角速度 ω をもつ回転場の相対流れに注目すると、主流方向に垂直な流路断面内に場の回転方向と逆向きの循環流れ(渦度: -2ω)が存在する⁽¹⁶⁾。また、羽根の負荷が羽根高さ方向に一様でない場合、つまり非一様負荷分布時には羽根後縁から離脱する渦により羽根車下流には随伴渦面が形成される⁽¹⁷⁾。これら流れの三次元的挙動は、軸対称流れを仮定した上述の準三次元解析では全く捕らえることができない問題であり、流れの三次元性を解明しようとする完全三次元解析が検討されるようになった。完全三次元解法には、遷音速流れに対するDenton⁽¹⁸⁾による有限体積法を用いた時間進行法(Denton法)、Rae⁽¹⁹⁾による微小じょう乱ポテンシャル理論に基づく緩和法があり、羽根面圧力分布の解析結果が実験結果と良く一致することなどが示された。Fruehauf⁽²⁰⁾、Martinon⁽²¹⁾、Grainger⁽²²⁾は、遷音速や超音速流れに対する特性の方法を提案した。複雑な境界形状をもつ羽根車に対しては、節点の配置が容易な有限要素法の適用が有効である。長藤は、回転場の絶対流れに非圧縮・渦なし流れを仮定した有限要素解法を示し⁽²³⁾、フランス水車ランナ内の流れを三次元解析して実験結果と良く一致する羽根面圧力分布を得た⁽²⁴⁾⁽²⁵⁾。Laskaris⁽²⁶⁾は、亜音速流れの有限要素解法を提案した。さらに、三宅ら⁽²⁷⁾⁽²⁸⁾は、非圧縮・渦なし流れの仮定を用い、計算領域の境界面上にのみ格子点を配置する境界要素法による解析法を示した。

完全三次元解析により、流れの三次元性や流路断面内の循環流れが求められた。しかし、羽根車下流の随伴渦面に関しては、渦面を近似表現するRae⁽¹⁹⁾や三宅ら⁽²⁷⁾⁽²⁸⁾の方法を除き、いずれの解析方法においてもその取扱方法が不明確であり、非一様負荷分布をもつ羽根車の解析において、渦面を正確には評価し難い。これを解決するため、大宮司^{(29)~(31)}は、長藤の方法⁽²³⁾を拡張することにより、有限要素法の計算過程に渦面を理論的に取り入れる解法を示した。つまり、一つの羽根間流路とこの羽根1ピッチに相当する上流および下流の流路部分を計算領域とし、随伴渦面すなわち羽根後縁を通過する相対岐点流面が羽根車下流の周期境界に一致するよう、渦面の形状を収束計算により定めた。

一方、非粘性流解析では、羽根後縁におけるKuttaの条件、すなわち羽根車が流体に与えた仕事量に相当する羽根車下流の循環量を如何に与えるかが問題となる。循環量の測定値を境界条件として用いた解析⁽²⁴⁾⁽²⁵⁾があるが、この方法では解析結果から羽根車仕事を評価できない。そこで、後縁の圧力側と負圧側の圧力が一致するように羽根車下流の循環量を定める方法が、長藤⁽²³⁾⁽²⁵⁾および三宅ら⁽²⁷⁾⁽²⁸⁾により提案された。また、大宮司^{(29)~(31)}は、後縁における流出角度が羽根のカンバ線方向と一致するように循環量を収束計算により定める手法を示した。しかし、Kutta条件の取扱方法が解析結果に及ぼす影響を詳細に調べた研究がなく、Kutta条件の扱いが未だ完全には確立していないのが現状である。

また、羽根車は三次元的な複雑な境界形状をもつため、有限要素解析におい

て要素分割が適正でない場合、要素の歪みが大きくなり、解析精度や計算の収束性が著しく低下することがある。したがって、通常は、要素歪みを小さく抑えるために要素分割数を増す手法が用られる。この場合には、多大な記憶容量や計算量が必要とされるため、実務的計算の障害となることがある。大宮司らは、三次元有限要素解析⁽²⁹⁾において、羽根車上流と下流に軸対称流れを仮定することにより計算量の削減と解の安定化を図る手法を示した⁽³²⁾。また、要素の歪を最小化することにより、流路の曲がり大きい羽根車に対しても解析が有効に適用できるようにした⁽³³⁾。しかし、解析精度を要素歪みのみで評価する方法に留まっている。

つぎに、粘性流解析に関する研究の概要を述べよう。1970年代から三次元粘性流解析に関する研究が活発になったが、最近の関心は回転羽根車内の三次元乱流解析に向けられており、その研究成果がHah⁽³⁴⁾、McNally⁽³⁵⁾および井上⁽³⁶⁾の解説に紹介されている。k-εモデルなど種々の乱流モデルを用いた三次元解析は、羽根車内の二次流れや低エネルギー流体の集積(ウェークの形成)など実験結果と定性的に一致する結果を与え、非粘性流解析では得ることができない粘性効果の詳細が求められるようになった。

しかし、たとえば半径流ポンプ羽根車内の流れを並列コンピュータによりk-εモデルを用いて三次元有限要素解析する場合⁽³⁷⁾、計算に要するCPU時間は約25時間であり、膨大な計算時間が要求される。また、壁面近傍の流れの詳細(二次流れが巻上がる位置や損失の分布など)が計算手法ばかりか乱流モデルによっても大きく異なる場合が多く、採用した乱流モデルの良否が解析精度を決定する⁽³⁶⁾。したがって、解析の実行が計算時間により制約を受けたり、解析結果の信頼性に多くの問題点が残されているのが現状である。粘性流解析に関するこのような状況から、現在では、形状設計などにおける工学的問題の解析には、もっぱら非粘性完全三次元解析が用いられているのが現状である。

1. 3 渦巻ポンプ内の気液二相流に関する過去の研究の概要

1. 3. 1 実験的研究

気液二相流時の渦巻ポンプの特性は、パルプ液や石油のポンプ輸送時に液中の気体が遊離する場合、ポンプ動力の制御やキャビテーション発生時の防振を目的として外部より空気を送入する場合などに関連して、古くから調べられており、1960年ごろまでの研究はStepanoff⁽³⁸⁾⁽³⁹⁾の著書に紹介されている。

1960年代になされた研究には、羽根車内流れに均質な圧縮性流体を仮定して二相流動や衝撃発生機構を説明したもの⁽⁴⁰⁾、ポンプのキャビテーション性能に及ぼす吸入空気の影響を調べたもの⁽⁴¹⁾、ポンプ特性と空気吸入様式との関係を明らかにしたもの⁽⁴²⁾、多段ポンプの特性に及ぼす段数および吸入気体の種類(空気あるいはアルゴン)の影響を調べたもの⁽⁴³⁾がある。

1970年代になると、原子炉の一次冷却材(軽水)循環系の破断により生ずる冷却材喪失事故(Loss of Coolant Accident, 略してLOCA)の安全解析を行う立場

から、蒸気を含む冷却材が循環用ポンプに流入した場合のポンプ特性が問題となり、二相流時におけるポンプの静特性や、LOCAにより冷却材が噴出する、いわゆるブローダウン時の過渡特性に関する研究が、アメリカ合衆国を中心に行われるようになった。このうち、1980年代初頭までの研究成果は、Runstadler⁽⁴⁴⁾、村上・峯村⁽⁴⁵⁾、Minemura・Murakami⁽⁴⁶⁾およびKim⁽⁴⁷⁾⁽⁴⁸⁾らにより展望されている。

まず、合衆国において行われた研究の概要を述べよう。

Aerojet Nuclear Co.(現在、EG&G Co.)のOlsonは、蒸気と水からなる二相流に対する半径流ポンプ(比速度: $n_s=140[\text{rpm}, \text{m}^3/\text{min}, \text{m}]$)の特性を、ポンプ入口における気液体積流量比(入口ボイド率)が0から1の範囲において測定した⁽⁴⁹⁾。また、測定結果に基づき、二相流時における揚程やトルクの单相流時に対する低下量を、ポンプ内の平均ボイド率のみの関数により表されるものと仮定してモデル化し、ポンプ性能変化の予測に関する実験式を与えた⁽⁵⁰⁾。この予測モデルはANCモデルと呼ばれ、原子炉の代表的な安全解析プログラム^{(51)~(54)}に採用されている。

その後、電力研究所(Electric Power Research Institute、略してEPRI)が推進役となり、Babcock & Wilcox Co.(B&W)、Combustion Engineering Inc.(C-E)、Creare Inc.、Massachusetts Institute of Technology (MIT)の合衆国における4つの研究機関と共同で、多角的かつ組織的な研究を大々的に展開した⁽⁵⁵⁾。

B&W^{(56)~(59)}は、加圧水形原子炉の冷却材循環用ポンプ[斜流ポンプ($n_s=655$)]を1/3の寸法に模型化し、ポンプ吐出側から吸込側へ流体が流れる逆流時や、羽根車が通常とは逆方向に回転する逆回転時を含む広範囲の運転条件において、空気/水の二相流に対する静特性や動特性を測定し、測定結果をホモログスパラメータ(流量や揚程などを正規状態の値で除して正規化したもの)により整理した。この整理法は種々の運転条件に対するポンプ特性を簡潔に表すことができる長所をもつ。なお、二相流時のポンプ性能の低下量を、Olsonの方法と同様に、ポンプ内の平均ボイド率のみの関数として表した。

C-EのKennedyらは、斜流ポンプ($n_s=637$)の1/5模型を用い、窒素/水二相流時の性能低下量に及ぼす吸込圧力の影響を調べ、吸込圧力が高いほど性能低下量が減ずる結果を得た⁽⁶⁰⁾。これは、吸込圧力が高いほど、キャビテーションが発生し難いことや、羽根車内において多量の蒸気が凝縮して平均ボイド率が低下することなどによるものと考察された。また、測定されたポンプの二相流特性を、ホモログスパラメータによる表示と等価な極座標表示により整理した⁽⁶¹⁾。この整理法は、ポンプの吐出流量 Q を横軸に、羽根車の回転速度 N を縦軸にとり、 Q と N で定まるポンプ作動点を横軸の正方向からの角度 θ つまり極座標により表し、逆流時(Q が負の場合)や逆回転時(N が負の場合)も含めて、ポンプ特性を θ に対して表示する。したがって、ホモログスパラメータによる整理法よりもさらに簡潔に、幅広いポンプ運転状態における二相流特性を表示できる利点をもつ。

Creare Inc.では、以下の研究が行われた。Kamath・Swift⁽⁶²⁾は、冷却材循環用ポンプに使われている斜流ポンプ($n_s=637$)の1/20模型を対象に、空気/水および蒸気/水二相流時のポンプ特性を測定した。Runstadler・Dolan⁽⁶³⁾⁽⁶⁴⁾は、模型ポンプで測定された空気/水二相流時の特性を実機の特性解析に適用する際の問題点を探るため、1/20模型ポンプの二相流(空気/水)性能と1/5模型ポンプの二相流(蒸気/水)性能をホモログスパラメータを用いて比較した。その結果、ポンプ入口ボイド率の増加に対して性能が低下する傾向は両ポンプともほぼ同じであるが、低下量の絶対値に違いが見られることを示した。この原因として、圧力が上昇する羽根車内では蒸気が凝縮することや、二相流時の寸法効果が無視できないこと、すなわち羽根車内二相流に相似則が厳密には成立しないことを推察している。Patel・Runstadler⁽⁶⁵⁾は、空気/水二相流時における1/20模型ポンプの性能測定と羽根車内部の流動状態の観察を行い、性能は羽根車内流動状態と密接に関連し、羽根車入口部に空洞が発生すると性能が急低下することなどの知見を得ている。また、Rotheら⁽⁶⁶⁾は、ポンプと配管系の振動問題を扱い、ポンプ特性が、たとえ单相流時に安定している場合でも、二相流時には不安定になりサージ現象が生ずる場合があることを指摘した。

MITでは、二相流時の揚程予測法が提示された⁽⁶⁷⁾⁽⁶⁸⁾。すなわち、羽根車内二相流を分離流モデルに基づいて理論的に考察し、液单相流時のポンプ水力損失に対する二相流時の水力損失の比により損失ヘッド比 H^* を定義し、 H^* がおもに入口ボイド率 α_0 と液相流量 ϕ の関数であるものと仮定して、 ϕ をパラメータにとり α_0 と H^* の関係を実験的に定めた。この方法によれば、 α_0 と H^* の関係が既知の場合には、二相流時の理論揚程を与える理論式と单相流時のポンプ性能から、二相流時のポンプ揚程を予測できる。また、正転正流時や逆転逆流時のポンプ作動点における、流動状態とポンプ性能との関連も調べられた⁽⁶⁹⁾。

合衆国では、上記の研究機関の他にも二相流特性が調べられた。Brookhaven National LaboratoryのRohatgi⁽⁷⁰⁾は、ブローダウン時や原動機入力急停止する場合におけるポンプの過渡特性を理論的および実験的に調べ、過渡現象の予測法を示した。EG&G Co.では、ブローダウン時のポンプ特性が測定され、計算結果と比較され⁽⁷¹⁾、またChen・Quapp⁽⁷²⁾は、窒素/水の二相流を用いて斜流ポンプ($n_s=630$)の特性を測定し、半径流ポンプから得られたANCデータに基づく安全解析コードRELAP4/MOD5⁽⁵¹⁾より予測される値と比較した。その結果、性能低下量の測定値が予測値よりも小さいことから、ポンプ特性がポンプ型式(半径流、斜流、軸流)により異なることを指摘した。General Electric Co.のSozzi・Burnette⁽⁷³⁾は、蒸気/水の二相流を用い、ポンプ性能に及ぼすポンプ配管系の圧力の影響を調べた。

一方、合衆国以外でも、系統的な研究が精力的に行われてきた。カナダでは、沸騰水形原子炉用ポンプの二相流特性⁽⁷⁴⁾や、蒸気/水二相流時のポンプ特性に及ぼす流体の温度の影響が調べられた⁽⁷⁵⁾。また、Heidrickら⁽⁷⁶⁾は、蒸気/水二相流に対するポンプ特性を調べて凝縮の影響を検討し、入口ボイド率が0.2以下の場合には羽根車内で全蒸気が凝縮し、空気/水二相流時よりも性能低下量が

小さくなることを示した。また、ポンプ軸が水平および垂直、また正流および逆流の運転条件に対しても実験を行った。東ドイツのKosmowskiは、ポンプ特性が急低下するときのポンプ入口ボイド率は、羽根出口角度を大きくすると大になり、半径方向を向く放射状羽根車の場合に最大になること⁽⁷⁷⁾、種々のケーシングに対する実験結果から、羽根車とケーシングの適合性が重要であることを指摘し⁽⁷⁸⁾、二相流輸送に適するポンプの設計法を提案した⁽⁷⁹⁾。フランスでは、Grison・Lauro⁽⁸⁰⁾がポンプ内の臨界二相流を理論的かつ実験的に調べ、Bonnin⁽⁸¹⁾がターボ機械内の非平衡二相流に対する相似則を検討した。西ドイツでは、軸流ポンプ($n_s=1018$)の1/4および1/5の模型ポンプを用いて蒸気/水の二相流特性が調べられ⁽⁸²⁾、吸込圧力と入口ボイド率がポンプ特性を決定する重要なパラメータであることが示された。

以上、海外で過去に行われた研究の多くは、ポンプ入口ボイド率とポンプ特性の関係の解明に主目的をおき、その関係を実験式として与えたものであり、Patel・Runstadler⁽⁶⁵⁾の観察実験を除き、ポンプ内部の流動状態とポンプ性能の関連を詳細に論じた研究が見あたらないのが現状である。

さて、日本では、1970年代初頭より現在に至るまで、多くの詳細な研究が行われてきた。まず、二相流時のポンプ特性の解明を主目的にした研究を概説しよう。

村上・峯村は、空気/水二相流に対する半径流ポンプ(比速度: $n_s=180$ [rpm, $m^3/min, m$])を対象に、系統的研究を行った。すなわち、性能変化と羽根車内の流動状態の関係を詳細に検討し、羽根車入口部の高ボイド率領域の発生がポンプ性能を低下させることを明らかにし、性能変化の定量的予測法を提案した⁽⁸³⁾。二相流時のポンプ性能に及ぼす羽根枚数⁽⁸⁴⁾の影響を調べ、羽根数が著しく少ないポンプでは、液单相流時よりも二相流時のほうが高い揚程が得られる場合があることを示した。また、羽根車とケーシング間の隙間の大きさ⁽⁸⁵⁾や吸込圧力⁽⁸⁶⁾が二相流時のポンプ特性に及ぼす影響を調べ、ポンプが吐出可能な空気を最大にする条件を検討した。さらに、軸流ポンプ($n_s=1920$)⁽⁸⁷⁾や斜流ポンプ($n_s=813$)⁽⁸⁸⁾を用いた実験により比速度の影響を検討し、比速度が大きいポンプほど二相流時の揚程低下割合が大きくなることなどの知見を得た。また、キャビテーション性能に及ぼす吸入空気の影響を調べ⁽⁸⁹⁾、ポンプ性能に及ぼすキャビテーションと吸入空気の影響の類似性を示した。

金子ら⁽⁹⁰⁾は、沸騰水形原子炉用ポンプ[立て形遠心ポンプ($n_s=813$)]の1/2模型を用いて、空気/水二相流に対するポンプ静特性を測定し、過去の研究結果とほぼ同一の結果を得た。湊・富永⁽⁹¹⁾は、蒸気/水二相流における正転正流時や逆転逆流時など幅広いポンプ運転条件に対してポンプ特性を測定し、結果を極座標表示により整理した。

また、二相流時のポンプ特性とポンプ内の流動状態の関連をより詳細に解明するため、流動状態が測定された。村上ら⁽⁹²⁾は、半径流羽根車内の圧力分布を測定し、二相流時における羽根車入口部の圧力分布の変化がポンプ性能の低下をもたらすことを解明した。峯村らは、半径流や軸流⁽⁹³⁾および斜流⁽⁸⁸⁾羽

根車内の気泡寸法の分布、半径流⁽⁹⁴⁾や斜流⁽⁸⁸⁾羽根車内の流速やボイド率の分布を測定して、二相流動状態とポンプ特性の関係を明らかにした。世古口ら⁽⁹⁵⁾は、半径流羽根車($n_s=120$)内の空気/水二相流を対象にボイド率分布を測定し、大庭ら⁽⁹⁶⁾は、汚水処理用曝気槽に用いられる軸流ポンプ($n_s=2256$)内の空気/水二相流を対象に流速や圧力分布を測定し、ポンプ性能との関連を調べた。

一方、ブローダウン時のポンプ過渡特性をおもに扱った研究には、二相流時に生ずる吸込管内の脈動流を遅れの入った微分方程式で表し、その線形化数値解により脈動周期の測定結果をよく説明できることを示した金子・大橋⁽⁹⁷⁾の研究、ブローダウン時のポンプ入口における圧力やボイド率の過渡特性を測定し、一次元理論による数値解と比較したNarabayashiら⁽⁹⁸⁾の研究がある。

また、二相流時のポンプ特性の実験的予測法を提示した研究には、Wilsonらが提案した揚程損失比による予測法⁽⁶⁷⁾を、ポンプの設計変数や運転条件を考慮可能な予測法に拡張した峯村ら⁽⁹³⁾の研究、羽根車内流れに関する保存則に基づいて予測法を開発し、予測値をC-E社の実験結果⁽⁶⁰⁾と比較した藤江⁽⁹⁹⁾⁽¹⁰⁰⁾の研究、ポンプ相似則を検討したFujie・Yamanouchi⁽¹⁰¹⁾の研究がある。

ポンプ性能と二相流動状態の関係をより簡単な体系のもとで明らかにするため、峯村ら⁽¹⁰²⁾は、鉛直軸回りに回転する水平円板上に回転中心から半径方向外向きに設けた直管流路内を流れる気泡流を対象に、流動損失とボイド率や圧力分布の関係を調べた。その結果、回転場流れの無次元数であるロスビー数により、流動状態と損失の関係を整理できることが示された。

以上は、気液二相流時のポンプ特性を解明し、その予測法を提示することに主眼をおいた研究であるが、近年、深い海底油田の汲上用ポンプ⁽¹⁰³⁾⁽¹⁰⁴⁾などの設計方法を確立する目的から、二相流時のポンプ性能の改善方法が以下のように検討された。

古川らは、半径流ポンプ羽根車に対して、羽根を二重に設置したタンデム翼の採用⁽¹⁰⁵⁾や羽根車上流へのインデューサの取付け⁽¹⁰⁶⁾により、性能低下を引き起こす羽根車内の気泡滞留領域を縮小化する、揚水性能改善法を検討した。また、自給式⁽¹⁰⁷⁾やIL型⁽¹⁰⁸⁾ポンプによる研究もなされた。なお、ポンプ入口でボイド率が0.4~0.5の二相流体を、ターボ形ポンプにより輸送可能であると報告⁽¹⁰⁹⁾⁽¹¹⁰⁾された。

一方、ポンプの二相流特性を積極的に利用しようとする研究が近年盛んになってきた。Pulpitel・Sob⁽¹¹¹⁾、後藤⁽¹¹²⁾、鈴木ら⁽¹¹³⁾は、ポンプの振動波形を用いた、空気吸入時の故障モード診断の可能性を考察した。また、降雨時の急激な水位上昇に備え、雨水排水用ポンプを先行待機運転させる方式が注目されているが、吸込深さが不足した状態でポンプを運転するため、吸込渦の発生により著しい振動を伴う場合がある。これを回避するため、空気吸入により揚水を遮断する方法がBrada⁽¹¹⁴⁾、小西ら⁽¹¹⁵⁾⁽¹¹⁶⁾、Maehara⁽¹¹⁷⁾により検討された。

上述の研究により、気液二相流時におけるポンプの静特性や動特性およびポンプ内の二相流動状態が調べられ、ポンプ特性に関する実験的予測法が示され

た。しかし、ポンプ特性を支配する羽根車内の二相流動機構は極めて複雑であることから、汎用性や精度の面で実験的予測法には限界がある。事実、二相流時には流れの相似則が厳密には成り立たないため、実機を小型化したモデルポンプで得られた実験結果をそのまま実機に適用できない場合があること、実験結果がポンプの比速度、設置条件(吸上式あるいは押込式)、運転条件(吸込圧力や液相の吐出流量)、作動二相流体(蒸気/水あるいは空気/水)などにより大きく異なることなどが、上述の研究で指摘されている。したがって、実験的予測法は、ポンプ特性に及ぼすポンプの設計パラメータの影響を個別に評価できない欠点をもつ。この欠点を克服するため、ポンプ性能と密接に関連する羽根車内の二相流動状態を数値解析により明らかにし、その結果に基づいてポンプ特性を解明する、数値解析的方法に大きな期待が寄せられている。

1. 3. 2 数値解析的研究

本節では、羽根車内二相流の数値解析に関する過去の研究の概要を述べるが、まず一般的な流れ場における気液二相流の数値解析法を概説する。

二相流を解析するには、まず現象を基礎方程式として定式化する必要がある。单相流の場合と異なり、気液二相流中には気液界面が存在する。この界面の気相側と液相側で物理量(流速や圧力など)が一般に異なるため、界面はいわゆる不連続面となる。したがって、二相流の基礎方程式は、気液各相に対する保存式と、とびの条件(Jump condition)と呼ばれる不連続面における保存式から構成される⁽¹¹⁸⁾⁽¹¹⁹⁾。適当な初期条件と境界条件のもとこの基礎式を解析すれば、二相流動状態が求められる。しかし、複雑に運動する不連続面の挙動を解の一部として求める必要上、移動多境界問題に対する解析が要求され、解析は一般に極めて困難である⁽¹¹⁸⁾。

そこで、解析を可能にするため、二相流動機構をモデル化して基礎方程式を単純化する研究がなされてきた。この気液二相流解析モデルを分類⁽¹¹⁷⁾すると、表1.1のようになる。各モデルは、片岡⁽¹¹⁹⁾⁽¹²⁰⁾により詳細に解説されている。

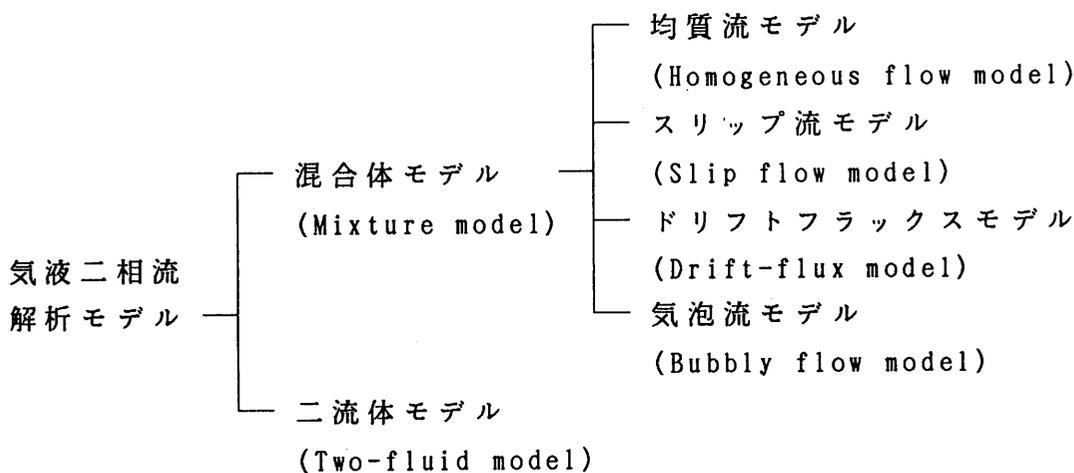


表1-1 気液二相流解析モデル

気液二相流解析モデルは、混合体モデルと二流体モデルの2つのモデルに大別できる。混合体モデルは二相流体を1つの混合流体としてモデル化するもので、モデル化により得られる基礎方程式は、混合流体の質量、運動量およびエネルギーに関する3つの保存式からなる。一方、二流体モデルは、各相を別個の流体とみなして各相の挙動を個別にモデル化するもので、質量、運動量、エネルギーに関する3つの保存式が各相に対して導かれ、二相流全体としては6つの基礎方程式が得られる。

これら基礎方程式では未知数に対する式数が不足するので、方程式系を閉じさせるため、未知数間の関係を記述する構成方程式(相関式)がさらに導入される。この構成方程式に用いる仮定により、表1.1のように、混合体モデルは、均質流モデル(Homogeneous flow model)、スリップ流モデル(Slip flow model)、ドリフトフラックスモデル(Drift-flux model)、気泡流モデル(Bubbly flow model)に細分される。以下に、各モデルの概要を述べよう。

均質流モデルは、気液各相の速度が等しい、すなわち気液間の相対速度が零であるものと仮定する最も簡単なモデルである。このモデル化により得られる基礎式は解析が容易であり、原子炉の熱流動解析コード「RELAP4」⁽⁵¹⁾など、広い分野の解析コードに用いられている。なお、このモデルは、二相が十分混合しており、気液間相対速度が両相の速度に比べ無視し得るほど小さい場合の解析に適している。ただし、得られる解は混合流体全体としての平均値であり、各相の挙動を個別に予測できない。

スリップ流モデルは、各相の速度が同一方向をもつものと仮定し、気液間相対速度をスリップ速度として定義するモデルである。スリップ速度は、一般に液相に対する気相の速度比により表されるため、速度比を与える相関式が必要とされる。このモデルは、気液間相対速度を考慮していることから、均質流モデルよりも正確な解析結果を与える。しかし、液相速度が零の場合には、スリップ速度を定義できず、解析が不可能となる欠点をもつ。

ドリフトフラックスモデルは、気液間相対速度を一般的な速度として考慮し、混合流体全体の運動量流束に対する各相の運動量流束をドリフト速度として定義するモデルである。このモデルは、汎用性が高く、原子炉の熱流動解析コード(たとえば、「TRAC-PD2」⁽⁵⁴⁾)等に広く用いられている。しかし、ドリフト速度の相関式を基礎実験などにより正確に与えておくことが要求される。

気泡流モデルは、混合流体の連続式および運動量式において、気相の質量および運動量を液相の値に比べ十分小さいものと仮定して無視し、さらに単一気泡に対する運動方程式および膨張・収縮方程式により気液間相対速度を定め、気相の質量保存則を考慮するモデルである。このモデルは、気泡が分散して流れる気泡流状態にある流れ場の解析に適用できる。しかし、液相に対する気相の体積流量比が増し、気泡の合体が生ずる流れ場に対しては解析精度が低下する。

一方、二流体モデルは、各相の挙動を個別にモデル化するため、気液間の質量、運動量、エネルギーの授受を精度よく考慮できる。したがって、混合体モデ

ルでは解析が困難である熱的に非平衡状態にある流れや過渡現象も扱うことができる。しかし、混合体モデルを用いる場合に比べ、基礎方程式や気液間の輸送量に関する構成方程式の数が多く、解析の難易度が著しく増す。

つぎに、羽根車内の気液二相流の数値解析に関連する過去の研究の概要を述べよう。ただし、本格的な数値解析は緒に就いたばかりであり、研究例は前節の実験的研究に比べ著しく少ない。

ポンプ内二相流の理解を深める目的から、峯村らは半径流形^{(121)~(124)}、斜流形⁽¹²⁵⁾およびスクリー形⁽¹²⁶⁾の各ポンプを、村上ら⁽¹²⁷⁾は軸流形ポンプを対象に、ポンプ内の気泡の挙動を解析した。ただし、非粘性・非圧縮流れの仮定のもと解析した水単相流の場合において、気泡がこの場を乱さないものとして単一気泡の運動方程式を解析した。その結果、気泡の運動がおもに粘性抗力と圧力勾配による力により支配されることや、羽根車入口部の羽根負圧側に気泡が滞留する領域があることなどの知見が得られた。しかし、ポンプ性能の定量的な予測法までは言及していない。また、峯村らは、同様の手法により、半径流ポンプ内の固体粒子の運動^{(128)~(129)}や、軸対称物体回りの気泡の挙動⁽¹³⁰⁾を数値解析した。

ポンプ内二相流の数値解析は、流動状態の解明に関する解析と、ポンプ特性の予測に関する解析に分類され、さらに前者は、ポンプを構成する基本的要素に対する解析と、ポンプ羽根車内における解析に細分される。まず、流動状態の解明に関する研究について述べよう。

流体機械要素に対する二相流動状態を基礎的な立場から明らかにする目的でなされた研究には、単独翼、翼列、半径流形単一流路における解析がある。

単独翼回りの二相流を二次元解析したIsay⁽¹³¹⁾は、微細な気泡が均質に分散し、気液間に相対速度がないものと仮定する均質流モデルを用い、非粘性流れを仮定した亜音速気体流の理論および解析手法を拡張して適用した。その結果、気相の存在により音速が低下する領域では圧力分布が単相流時と著しく異なることや、この傾向が実験結果と一致することなどが示された。

Shidaら⁽¹³²⁾は、均質流モデルをEulerの式とNavier-Stokesの式にそれぞれ適用して、単独翼回りの二相流を二次元解析し、翼回りの衝撃波の挙動に及ぼす流体の粘性の影響が大きいことなどを示した。

西山(哲)⁽¹³³⁾および西山(哲)・東野⁽¹³⁴⁾は、部分または超空洞状態にある直線軸翼列における亜音速および超音速二相流を二次元解析し、羽根面上の空洞長さや圧力分布などを求めた。ただし、均質流モデルにより微細な気泡が均一に水流中に混入しているものと仮定し、非粘性圧縮性気流の線形解析に用いるホドグラフ解法を拡張して用いた。その結果、亜音速空洞翼列と超音速空洞翼列の二相流特性が全く異質なものであることが明らかにされた。

西山(哲)・西山(秀)⁽¹³⁵⁾は、部分空洞状態にある直線軸翼列における二相流を二次元解析し、羽根面上の空洞の厚みや体積、圧力分布などを求めた。ただし、文献(133)(134)と同一の均質流モデルにより非粘性非定常水流に対する基礎式を導出し、これを特異点法により解析した。その結果、節弦比が小さい翼

列ほど、翼列の非定常特性に及ぼす空気含有による圧縮性の影響が顕著になることなどの知見が得られた。

以上の解析は、気液間相対速度を零と仮定する均質流モデルに基づいたものであり、二相流動状態に及ぼす気液間相対速度の影響を調べることができない。そこで、相対速度が翼列や半径流形単一流路内の流れに及ぼす影響を明らかにする目的から、以下の研究が行われた。

松本ら⁽¹³⁶⁾は、Noordzij・Wijngaarden⁽¹³⁷⁾が鉛直管内の気液二相流の一次元解析に用いた気泡流モデルを二次元場に拡張し、直線軸翼列内の二相流を二次元解析した。すなわち、二相流は微細な気泡が分散した気泡流状態にあり、気液間に相対速度に基づく粘性抗力を考慮しながらも、二相流全体としては非粘性流れであるものと仮定するモデルにより、圧力、マッハ数、ボイド率および気液間相対速度の分布を、有限体積法の一つであるDenton法⁽¹⁸⁾により求めた。その結果、翼回りの気泡流は圧縮流の特徴をもつことや、流れに及ぼす気液間相対速度の影響が大であることなどが明らかにされた。

Zakem⁽¹³⁸⁾⁽¹³⁹⁾は、Hench・Johnston⁽¹⁴⁰⁾が二相流時のディフューザ特性の一次元解析に用いた理論および手法を回転場に拡張することにより、半径流形単一回転流路内の二相流を一次元解析した。すなわち、二流体モデルにより一次元流路内の二相流の基礎式を導き、得られた式から流路に沿う未知変数をボイド率のみとする運動方程式を求め、これを有限体積法により解析した。その結果、流路の回転角速度が高まると、気液間相対速度が増加して流路内に気相が滞留し、流路内の平均ボイド率が増すことを示した。また、二相流体の慣性力に対する気相に作用する遠心力の比で表される無次元数を用いた、圧力ヘッド低下量の予測法を提案し、実験結果との良好な一致を得た。

以上の基礎的研究で得られた解析手法に基づき、ポンプ羽根車内の流動状態がFuruya⁽¹⁴¹⁾⁽¹⁴²⁾および西山(秀)ら⁽¹⁴³⁾により解析された。

Furuya⁽¹⁴¹⁾⁽¹⁴²⁾は、Zakemの二流体モデルに基づく方法⁽¹³⁸⁾⁽¹³⁹⁾を拡張することにより、ポンプ形状や羽根車内の流動様式(気泡流またはチャーン流)の考慮が可能な一次元解析法を示した。さらに、回転場の二相流に対するベルヌイ式をもとに二相流時の揚程低下量を予測する理論式を導き、種々の比速度のポンプに対して一次元解析を行った。その結果、羽根車出口部における液相速度の増加が二相流時の揚程低下をもたらすことが明らかにされた。また、ポンプ入口ボイド率 α_0 が増して羽根車内の流動様式が気泡流からチャーン流へ変化する場合に生ずる性能急低下現象がシミュレートされ、広範囲の α_0 に対して実験結果と高精度で一致する解析結果が得られた。

西山(秀)ら⁽¹⁴³⁾は、半径流形羽根車内の二相流を二次元解析した。ただし、均質流モデルに基づいて導いた非粘性亜音速水流の基礎式を特異点法により解析し、圧力およびボイド率分布、気液体積流量比の増加による羽根車仕事の変化などを求めた。その結果、羽根車入口の羽根負圧側に高ボイド率領域が存在し、この領域で圧縮流の特徴が顕著になることなどが示された。しかし、気液間相対速度や羽根出口端の剝離を無視していることなどに起因して、得られた

羽根車仕事は測定値と良好な一致を示さなかった。

一方、ポンプ特性の予測を主目的とした解析には、Minatoら⁽¹⁴⁴⁾、湊⁽¹⁴⁵⁾、Samiら⁽¹⁴⁶⁾⁽¹⁴⁷⁾の研究がある。

Minatoら⁽¹⁴⁴⁾および湊⁽¹⁴⁵⁾は、入口ボイド率が0.1以上の二相流に対して一次元理論による解析を行い、二相流時のヘッドやトルクを予測した。すなわち、二流体モデルにより導かれたポンプ内一次元流路における気液各相の運動方程式を、羽根車出口のボイド率や流速の値を仮定して数値積分することにより、羽根車出入口間の各相の圧力上昇量を求め、得られた圧力上昇量が二相間で等しくなるように羽根車出口のボイド率や流速を繰り返し修正する、繰り返し計算法により、ポンプ性能を予測した。その結果、静止管内気泡流のドリフト速度から算出した相関式により気液間の相間摩擦力を評価する場合には、解析結果が実験結果と良く一致することが示された。

Samiら⁽¹⁴⁶⁾⁽¹⁴⁷⁾は、原子炉冷却用ポンプのブローダウン時の特性を解析した。すなわち、羽根車出入口間の一次元流路上で二相間の相変化を考慮して基礎式を導き、これらを解析してポンプの過渡特性を求め、実験結果とよく一致する結果を得た。

ポンプ羽根車内の二相流は、気液間の密度の相違などに起因して、流路の回転による遠心力やコリオリ力、また流路の曲がりの影響を強く受け、著しい三次元性を呈することが前節で述べた測定結果より明らかにされている。したがって、上述の気液間相対速度を無視した均質流モデルによる解析および一次元や二次元の解析により、羽根車内二相流の本質が解明できたとは言い難い。しかし、相対速度を考慮した羽根車内二相流の三次元数値解析法が未だ提示されていないのが実状である。

本研究は、前述した羽根車内单相流の数値解析法や渦巻ポンプ内の気液二相流に関する研究状況を考慮して、渦巻ポンプ内の気液二相流を三次元数値解析し、二相流時のポンプ性能を数値的に予測することを目的とする。そこで、まず曲線境界からなる羽根車に対し、その内部流れの線形一次有限要素解法を確立するため、第2章では曲線境界からなる領域に対する線形一次有限要素解析における節点数低減法や解析精度向上法を検討し、第3章では第2章で得られた解析手法を羽根車内流れに適用し、Kutta条件の適正な扱い方を提示する。つづいて、第4章では渦巻ポンプ内の気液二相流を理論的に考察して気泡流モデルによる三次元数値解析法を提案し、流動状態を三次元数値解析する。第5章では、第4章で得られた解析結果を基にして、ポンプ入口の気液体積流量比 α_0 とポンプ性能の関係などを求める。さらに、第6章では、 α_0 に対する気泡流モデルの適用可能範囲を拡張するため、空洞を伴う気泡流モデルを提案し、気液二相流時の揚程喪失現象などの解析を可能とする。最後に、第7章で以上の結果を総括し、結論とする。

2. 1 緒言

近年、各種工学問題の解析・設計に有限要素法が多用される傾向にある。設計された形状は一般に円弧や自由曲線により構成されている場合が多いが、このような境界形状に対して有限要素法では、高次要素の採用が推奨されている⁽¹⁴⁹⁾。しかし、たとえば二次要素を用いる場合、節点数が同一であれば一次要素を用いる場合に比べ、約2倍の記憶容量を必要とするため、複雑な境界形状や境界条件を伴う実務的大規模計算では、一般に境界を折れ線や平面で近似する線形一次要素を用いることが多い。一方、解析領域の要素分割方法が結果に大きな影響を及ぼすことがあるため、形状の急変部分や変数の急峻な変化が予測される領域の要素分割が細分化され、節点数は否応なく増す傾向にある。このため、実務的計算では著しく大きな記憶容量を必要とするが、容量限界から十分に増すことができない場合が多く、記憶容量が少なくすむアルゴリズムの開発は切実な課題である。

線形一次要素による有限要素解析では、境界での既知量を与える第1種境界条件に対しては、境界上に節点をとれば境界形状の折れ線や平面近似による誤差は少ない。しかし、境界に垂直方向の微分値を与える第2種境界条件、たとえば、流体および熱伝導解析における流体や熱の流束、あるいは応力解析における表面荷重などに関しては、これらの分布が一般に境界の位置や形状に依存して大きく変わるので、境界形状の折れ線や平面近似による誤差が大になる。とくに、移動または回転する曲面から構成されるターボ機械の解析においては、その影響が大きいものと考えられる。

本章では、二次元問題に対して最もよく用いられる三角形一次要素を用いた有限要素解析において、自由曲線形状をもつ境界上に作用する第2種境界条件の影響を検討し、節点数の低減法を示した。また、この方法を回転羽根車内の流れ解析に適用し、二次要素を用いた場合とも比べて、その有用性を明らかにした。

2. 2 基礎式

2. 2. 1 有限要素方程式

流体の渦なし流れ、熱伝導、弾性体のねじりなど場の変数 ϕ で表される物理現象は、一般に準調和方程式により記述され、二次元定常状態の場合には次式で与えられる⁽¹⁵⁰⁾。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + Q = 0 \quad (2-1)$$

ただし、係数 K_x 、 K_y は一般には場の関数であり、 Q は領域内部の生成量である。

境界 s_1 では第1種境界条件として ϕ の値 ϕ_1 が与えられ、残りの境界 s_2 では第

2種境界条件として外向き法線方向の ϕ の微分値が与えられるものとする。

$$\phi = \phi_1 \quad (\text{on } s_1) \quad (2-2)$$

$$K_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) n_x + K_y \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) n_y = q \quad (\text{on } s_2) \quad (2-3)$$

ただし、 n_x および n_y は境界に垂直なベクトルの方向余弦である。

有限要素法では、解析領域を有限の大きさの要素に分割し、各要素内の ϕ を要素節点における値 Φ により表す。すなわち、

$$\phi = [N] \{\Phi\} \quad (2-4)$$

ここで、 $[N]$ は形状関数マトリックス、 $\{\Phi\}$ は節点値を表す行ベクトルである。

式(2-1)の残差をとり、境界条件式(2-3)を考慮し、重み関数に $[N]$ を用いる Galerkin法を適用して残差の重み平均が零になるように定式化すれば、次式を得る。

$$\int_A [N]^T \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + q \right] dA - \int_{s_2} [N]^T \left[K_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) n_x + K_y \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) n_y - q \right] ds = 0 \quad (2-5)$$

式(2-5)を Gauss の定理により変形し、式(2-4)を代入して離散化すれば、つぎの有限要素方程式を得る。

$$[K] \{\Phi\} = \{F\} \quad (2-6)$$

ここで、領域全体の節点値ベクトル $\{\Phi\}$ 、係数マトリックス $[K]$ および右辺ベクトル $\{F\}$ に、境界条件式(2-2)が代入される⁽¹⁵¹⁾。また $[K]$ および $\{F\}$ は、すべての要素について集め、組み立てることにより得られる。すなわち、

$$\begin{aligned} [K] &= \sum_e [k] \\ &= \sum_e \int_{A_e} \left[K_x \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial [N]}{\partial x} \right) + K_y \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial [N]}{\partial y} \right) \right] dA \end{aligned} \quad (2-7)$$

$$\begin{aligned} \{F\} &= \sum_e \{f_q\} + \sum_e \{f_q\} \\ &= \sum_e \int_{A_e} Q [N]^T dA + \sum_e \int_{s_{2e}} q [N]^T ds \end{aligned} \quad (2-8)$$

式(2-8)の右辺第1項は要素の境界形状(境界の傾きなど)に依存しない内部生成量 Q に関する面積分であり、第2項は第2種境界条件が与えられる境界上の線積分である。

2. 2. 2 境界形状

設計曲線は円弧も含めて点列を通る補間曲線としてのスプライン関数により表現できる。図2-1において、 n 個の節点 $P_1, \dots, P_i, \dots, P_n$ が与えられ、これら点列を通る境界曲線を C とする。 P_i から P_{i+1} の区間の部分曲線上の位置 C_i は、定数ベクトル A_k ($k=1 \sim 4$)とこの区間において正規化された助変数 t_i に関する三次スプライン関数により表される⁽¹⁵²⁾。すなわち、

$$C_i = \sum_{k=1}^4 A_k t_i^{(k-1)} \quad (0 \leq t_i \leq 1) \quad (2-9)$$

ここで、定数 A_{ki} は、2点 P_i 、 P_{i+1} の座標値、これら2点における曲線 C の一次および二次導関数の連続性、および C の両端 (P_1 、 P_n) における境界条件 (傾きあるいは曲率) より決定される。

三角形一次要素を適用する場合、部分曲線 C_i を線分 $P_i P_{i+1}$ で直線近似し、内部に節点 R_i を設けて図2-1に破線で示すような三角形要素をつくる。 $P_i P_{i+1}$ 上の位置 S_i は、定数ベクトル B_{ki} ($k=1\sim 2$) と、この区間において正規化された助変数 τ_i により、

$$S_i = \sum_{k=1}^2 B_{ki} \tau_i^{(k-1)} \quad (0 \leq \tau_i \leq 1) \quad (2-10)$$

ただし、定数 B_{ki} は2点 P_i 、 P_{i+1} の座標値より定まる。

また、節点 P_i から P_{i+1} の方向に曲線 C_i に沿った距離を c 、点 P_{i+1} においては $c=L_c$ とする。同様に、直線 S_i に沿った距離は s 、点 P_{i+1} においては $s=L_s$ とする。

この場合、線素 dc および ds は、

$$dc = |\dot{C}_i| dt_i \quad (2-11)$$

$$ds = |\dot{S}_i| d\tau_i \quad (2-12)$$

ここで、 \dot{C}_i は C_i の t_i 、 \dot{S}_i は S_i の τ_i に関する微分を表す。

2. 2. 3 境界条件の代入

図2-1において、自由曲線 C が第2種境界条件の作用する境界 s_2 を表し、境界に垂直方向の ϕ の微分値である第2種境界条件として、ここでは流束 q_i を考える。ベクトル q_i は境界の外向き法線 n と同一方向をもち、曲線の位置 C_i と傾き \dot{C}_i 、すなわち助変数 t_i の関数 $q_i(t_i)$ として分布する。

三角形一次要素では境界が折れ線で近似され、位置 S_i において定まる流束 $q_i'(\tau_i)$ が分布する。すなわち C_i を S_i で近似するとき q_i' の値は折れ線上で与えられ、曲線上の値 q_i とは異なり、境界形状の近似精度に依存する誤差が生ずる。このため、普通は境界上での節点数を増して近似精度を高める方法がとられる。

三角形一次要素の節点番号を節点 R_i 、 P_{i+1} 、 P_i の順に1、2、3と割り振れば、境界 $P_i P_{i+1}$ 上での形状関数マトリックス $[N]$ は次式で表される。

$$[N] = [0 \quad s/L_s \quad 1-s/L_s] \quad (2-13)$$

したがって、当該要素の要素内節点番号1、2、3に対する右辺ベクトル $\{F\}$ の第2項、 f_{q1} 、 f_{q2} および f_{q3} は、

$$f_{q1}' = 0$$

$$f_{q2}' = \int_0^{L_s} q_i' \left(\frac{s}{L_s} \right) ds \quad (2-14)$$

$$f_{q3}' = \int_0^{L_s} q_i' \left(1 - \frac{s}{L_s} \right) ds$$

式(2-14)の f_{q2}' および f_{q3}' は式(2-12)を用いると、

$$\begin{aligned} f_{q2}' &= \left(\frac{s}{L_s} \right) \int_0^1 |S_i(\tau_i) - S_i(0)| q_i'(\tau_i) |\dot{S}_i| d\tau_i \\ f_{q3}' &= \left(\frac{s}{L_s} \right) \int_0^1 |S_i(\tau_i) - S_i(1)| q_i'(\tau_i) |\dot{S}_i| d\tau_i \end{aligned} \quad (2-15)$$

さて、第2種境界条件として境界上に分布する流束を外力とみなせば、式(2-15)は節点まわりの偶力の釣合式に相当する。すなわち、境界上の分布流束をエネルギー的に等価な換算流束として節点に割り当てたものと言える。したがって、解析精度を高めるには、境界上の節点数を増す方法のほかに、境界曲線に分布する流束 q_i に等価な換算流束を右辺ベクトルに用いる方法が考えられる。この場合、式(2-15)は、

$$\begin{aligned} f_{q2} &= \left(\frac{s}{L_s} \right) \int_0^1 |C_i(t_i) - C_i(0)| \times q_i(t_i) | \bar{C}_i | dt_i \\ f_{q3} &= \left(\frac{s}{L_s} \right) \int_0^1 |C_i(t_i) - C_i(1)| \times q_i(t_i) | \bar{C}_i | dt_i \end{aligned} \quad (2-16)$$

ここで、演算子 \times は外積を示す。

本章は、線形一次要素を用い、このような換算右辺ベクトルを用いる手法の有用性について述べようとするものである。その際、左辺マトリックス[式(2-7)]および右辺ベクトル[式(2-8)]第1項の面積積分にかかわる値も曲線形状を折れ線で表すことの影響を受けるが、その影響は小さく無視し得るものとみなし、三角形一次要素に対する値をそのまま用いることにする。

2. 2. 4 境界条件と解の関係

有限要素方程式(2-6)は、全節点数に等しい元数をもつ連立一次方程式であり、左辺の係数マトリックス $[K]$ は節点の座標値より、右辺ベクトル $\{F\}$ は境界条件より定まる。したがって、上述の境界条件の差が解に及ぼす影響は、式(2-6)の解析手法を調べることにより予測できる。

式(2-6)を解くには、 $[K]$ の対称かつバンド状の性質を利用したLU分解法が最も効果的である⁽¹⁵³⁾。すなわち、式(2-6)の $[K]$ を下三角マトリックス $[L]$ と上三角マトリックス $[U]$ に分解し、行ベクトル $\{Z\}$ を導入して以下のように変形する。

$$[L] \{Z\} = \{F\} \quad (2-17)$$

$$[U] \{\Phi\} = \{Z\} \quad (2-18)$$

式(2-17)より $\{Z\}$ を求めれば、式(2-18)より式(2-6)を満たす $\{\Phi\}$ が得られる。

いま、 z 個の全節点のうち第 k 節点に対応する右辺ベクトル F_k が ΔF_k だけ変化したとする。この場合、ベクトル $\{Z\}$ の成分 Z_j ($j=1, 2, \dots, z$)の変化量 ΔZ_j を式(2-17)より求めると、

$$\Delta Z_j = \begin{cases} 0 & \{j < k\} \\ \Delta F_k / l_{kk} & \{j = k\} \\ -l_{jk} \Delta F_k / (l_{kk} l_{jj}) & \{j > k\} \end{cases} \quad (2-19)$$

ただし、 l_{jk} は $[L]$ の成分である。また、 Φ_i ($i=1, 2, \dots, z$)の変化量 $\Delta \Phi_i$ は、式(2-18)を変形した次式により与えられる。

$$\sum_{i=1}^z (u_{ji} \Delta \Phi_i) = \Delta Z_j \quad (2-20)$$

ただし、 u_{ji} は $[U]$ の成分である。

式(2-20)に式(2-19)を代入すると、 $\Delta \Phi_i$ は、

$$\frac{\Delta \Phi_i}{\Phi^*} = \left(\frac{\Delta F_k}{\Phi^*} \right) \cdot \alpha(l_{ij}, u_{ij}) \quad (2-21)$$

ここで、 Φ^* は代表値であり、 $\alpha(l_{ij}, u_{ij})$ は要素形状と節点の座標値より定まる無次元定数である。また、 $[K]$ は $\{F\}$ の変化に対して不変であるから式(2-21)右辺の Φ^* は右辺ベクトルの代表値 F^* で代替できる。よって、 k 節点での F_k で代表させると次式を得る。

$$\frac{\Delta \Phi_i}{\Phi^*} = \left(\frac{\Delta F_k}{F_k} \right) \cdot \alpha(l_{ij}, u_{ij}) \quad (2-22)$$

2. 3 解析結果と考察

2. 3. 1 右辺ベクトルの変化が解に及ぼす影響

式(2-22)より、第2種境界条件を反映する右辺ベクトルの値が変化すると、解にはこれに比例した誤差が生ずる。いま、場の関数 ϕ を定常渦なし流れの速度ポテンシャルとすれば、 ϕ は式(2-1)において $K_x=K_y=0$ 、 $Q=0$ としたラプラス式を満足する。一例として、図2-2(a)に示す長方形領域において、 $x=0$ の一辺に第1種境界条件 ϕ 、 $y=0$ 、 L_y および $x=L_x$ の各辺に第2種境界条件 q が作用するものとする。すなわち、 $x=0$ において $\phi = \phi_0$ 、 $y=0$ 、 $y=L_y$ 、 $x=L_x$ においてそれぞれ $q=0$ 、 0 、 $-W_3$ が与えられているものとする。なお、領域境界が直線のため、式(2-15)と式(2-16)は一致する。

x 方向を $(M-1)$ 等分、 y 方向を $(N-1)$ 等分し、二辺の長さの比を l_y/l_x とする三角形一次要素を生成する。 $M=4$ 、 $N=3$ の場合の二等辺三角形の要素($l_y/l_x=1$)に対し、節点 \ominus ($x=L_x$, $y=0$)における右辺ベクトル F を ΔF だけ変化させたときの各節点における ϕ の相対変化量 $\varepsilon = \{[\Delta \phi / (\phi_3 - \phi_0)] / (\Delta F / F)\}$ を求め、その等値線を示すと図2-2(b)のようになる。ただし、式(2-22)の Φ^* には $x=0$ 、 $x=L_x$ における解 ϕ_0 、 ϕ_3 の差を用いた。右辺ベクトルの影響は領域全体に及んでいるが、右辺ベクトルが変化した節点 \ominus において ε は最大値をとり、この点から離れるにしたがい ε が低下する。

つぎに、 l_y/l_x の値を一定つまり要素形状を相似に保ったまま節点数 M と N を変えて $\Delta \phi$ の最大値 $\Delta \phi_{max}$ を求め、相対変化量の最大値 ε_{max} を $1/M$ に対して示すと、図2-3の○印のようになる。 $1/M$ すなわち節点間距離が減るほど、 ε_{max} は低下し、解に及ぼす右辺ベクトルの変化の影響が減る。図2-3には、三角形要素の形状を変化させ、 l_y/l_x の値を変えたときの結果も併記してある。 l_y/l_x の値が大きい、すなわち ϕ の変化方向(流れ方向)と直角方向に長い辺をもつ要素ほど、右辺ベクトルの変化による影響を大きく受ける。

2. 3. 2 境界形状が右辺ベクトルに及ぼす影響

曲線境界形状に三角形一次要素を適用した場合、一般的な式(2-15)から求めた右辺ベクトルの値と、本章で提案した式(2-16)から求めた値は通常異なる。

本節では、Bezier曲線により境界曲線を与えた場合を例にとり、式(2-15)と式(2-16)を用いたときの右辺ベクトルに及ぼす影響の差異を調べてみる。

三次Bezier曲線は4つの制御点により定まるが、本解析では図2-4(a)に示すように曲線の端点 P_0 を原点に、他端 P_3 を $x=L_s$ に固定し、残る2つの制御点(P_1, P_2)は任意の位置に指定した点 P_4 と曲線の両端点との各中点とする。つまり、 P_4 の座標のみを制御して曲線形状を変えることにより曲線の頂点 C_{max} の位置(x_{max}, y_{max})を x, y 方向に変化させる。ここでは、図2-4(b)に示した12種類の曲線形状に対する結果について述べる。ただし、頂点の座標(x_{max}, y_{max})はそれぞれ L_s で無次元化して示してある。図2-1と対比して、 x 軸が境界曲線の近似直線に相当するものとする。また、 P_0 に要素内節点番号3、 P_3 に節点番号2を割り振ることにする。

一方、曲線上に分布する流束 q として、つぎに示す3種類を考えることにする。

(1) 線形分布 重力場における水中の圧力のように、 q が x 方向に線形変化する場合、つまり、 P_0 における q_0 から P_3 における q_3 まで直線的に変化するとき、

$$q = \left[a \left(\frac{x}{L_s} \right) + 1 \right] \cdot q_0, \quad [a = (q_3 - q_0) / q_0] \quad (2-23)$$

(2) ベクトル内積形分布 並進運動する面に接する流体のように面に垂直な速度成分をもつ場合、すなわち q が面の法線ベクトル n と壁面の速度ベクトル V_a の内積により定まる場合、

$$q = n \cdot V_a \quad (2-24)$$

(3) スカラ三重積形分布 回転する面に接する流体のように面に垂直な速度成分をもつ場合、すなわち q が、動径ベクトル r 、回転ベクトル ω 、面の法線ベクトル n のスカラ三重積により定まる場合、

$$q = n \cdot \omega \times r \quad (2-25)$$

ただし、動径ベクトルの始点の座標を $(-bL_s, 0)$ とし、曲線境界はこの点を中心に一定角速度 ω で反時計方向に回転するものとする[図2-4(a)]。

(1)の流束分布に対し、式(2-15)、(2-16)より右辺ベクトル $f_{q'}$ 、 f_q を求めてその比をとり、 P_0 における値 $f_{q_3'}/f_{q_3}$ を3種の x_{max} に対して示すと図2-5(a)の左側のようになる。流束が一定の場合($a=0$)、曲線の頂点の座標 x_{max} および y_{max} を変えてもその影響はほとんど現れない。しかし、 $a=-1, 1$ に対しては y_{max} が増すとその影響が大になる。 x_{max} の変化による影響はほとんどないから、右辺ベクトルの値は曲線の両端を結ぶ弦からの曲線の最大変位置 y_{max} に大きく依存する。図2-5(a)の右側は節点 P_3 に対する値 $f_{q_2'}/f_{q_2}$ であるが、影響が P_0 の場合と逆に現れる。よって、円弧のように頂点に関して対称な曲線の場合、すべての要素に対する結果を集めて得られる有限要素方程式の右辺[式(2-8)]には、隣接する要素間で影響が打ち消し合うため、式(2-15)、(2-16)の違いによる影響は少なくなる。

(2)の流束分布の場合 $f_{q_3'}/f_{q_3}$ は V_a に依存せず、 P_0 における結果は図2-5(b)の左側のようになる。 x_{max} にはほとんど影響されないが、 y_{max} が増すと急増大し、増加量は線形分布[図2-5(a)]の場合に比べ相当に大きい。 P_3 における結果は図

2-5(b)の右側に示してあるが、 P_0 の場合とほぼ同じである。隣接要素間で y_{max} の影響が打ち消し合うことなく、式(2-15)と(2-16)を用いたときの結果に大きな差が生ずることになる。

(3)の流束分布の場合は図2-5(c)のようになる。 $f_{q3'}/f_{q3}$ および $f_{q2'}/f_{q2}$ は、 x_{max} や回転中心の位置 b にほとんど依存しないが、 y_{max} が増すと急増大し、その増大割合はベクトル内積形分布の場合よりも大きい。

式(2-15)と式(2-16)を用いたときの結果に大きな相違が生ずる境界条件は、(2)のような並進移動面および(3)のような回転面における条件であるから、以下ではこのような境界面をもつ流路内の流れを例にとり有限要素解析し、結果を検討してみる。式(2-15)と式(2-16)の違いは曲線の最大変位置に依存するので、曲線の分割数すなわち節点数に関係することは言うまでもない。

2. 3. 3 並進移動面の場合

図2-6(a)に示すような、軸回りに回転し、同一円周上にある水車のバケット状の環状流路内の流れを考える。流路は上方に速度 V_a で移動しており、絶対速度 $3V_a$ の水が左側下端の境界より上方へ流入し、右側の下端境界より下方へ流出するものとする。円弧壁面における絶対速度はベクトル内積形分布となり、式(2-24)で表される。流路内の絶対流れに渦なし流れを仮定すれば、流れは式(2-1)のラプラス式で与えられる。流路を流れ方向(i)に $(M-1)$ 等分、流れと垂直方向(j)に $(N-1)$ 等分する三角形一次要素に対し、 $i=1$ の断面で第1種境界条件 ϕ が、また $i=M$ の断面と円弧壁面では第2種境界条件 q が作用する。図2-6(b)は、 $M=25$ 、 $N=7$ に対し式(2-16)を用いたときの結果である。流路入口の値(ϕ_0)を基準にした等ポテンシャル線 $[(\phi - \phi_0)/(\phi_3 - \phi_0) = \text{一定}]$ を実線で、また相対速度ベクトルを矢印で示してある。

解に及ぼす節点数の影響を調べるため、種々の N の値に対して M の値を変え、数値解と解析解との差の絶対値 $\Delta\phi$ を求め、その相対誤差 $\Delta\phi / (\phi_0 - \phi_3)$ を M に対して示すと図2-7の上段のようになる。ただし、2.3.1節で述べたように、右辺ベクトルの影響は当該節点で最大に現れるので、 $\Delta\phi$ には境界曲線上の全節点に対する平均値を用いてある。式(2-16)を用いた $N=3$ 、7、9に対する結果を太い実線で示してある。 N が同一の場合、 M を増すと相対誤差は減少するが、ある値以上に M を増しても誤差は変わらず、一定値に収束する。 $N=9$ に対する収束値は $N=7$ の場合とほぼ同じである。

図2-7には、式(2-15)を用いたときの結果($N=3$ 、9)を破線で示してある。同一節点数の場合には、本方法[式(2-16)]を用いたほうが誤差が小さく、とくに節点数が小さい範囲でその効果が著しい。図2-7には、三角形二次要素を用いた場合の結果も一点鎖線で併記してある。 $N=9$ に対する結果を示してあるが、 $N=3$ の場合にもほぼ同一結果が得られる。節点数が同一の場合、収束値の相対誤差は上述の式(2-16)の結果よりも小さいが、 M が小さい範囲では式(2-15)を用いた一次要素の結果よりも大になる。

ほぼ満足すべき結果が得られる $N=9$ のとき、式(2-15)の代わりに式(2-16)を一

次要素に用いれば、相対誤差を0.004に留めるにはMを8(低減率42%)、0.005の場合5(36%)、0.01の場合1(22%)だけ低減できる。すなわち、より小さい相対誤差を望む場合ほど低減効果大きい。また、節点数Mに関する限り、本方法は二次要素を用いる場合に比べてもほぼ同様な節点数低減効果がある。ただし二次要素の場合、Nの影響をほとんど受けないので、本解析とほぼ同じ高精度を得るにも流れと垂直方向の節点数を9から3(1/3倍)に減ずることができるが、一次要素を用いる場合に比べ有限要素方程式の係数マトリックスのバンド幅が約2倍となり、有限要素方程式(2-6)を解く際に必要とする記憶容量の面からはほとんど効果がない。

境界に面する三角形一次要素において境界曲線の最大変位量 y_{max} を求め、要素辺の長さ L_s で無次元化した値 y_{max}/L_s [図2-4参照]をMに対して示すと、図2-7の下段のようになる。ただし、境界は円弧であるから $x_{max}=0.5$ である。N=9において、相対誤差 $\Delta\phi/(\phi_0-\phi_3)$ を0.005に留めようとする、式(2-16)には $y_{max}/L_s \leq 0.058$ 、式(2-15)には $y_{max}/L_s \leq 0.035$ (二次要素に対してもほぼ同程度)なる条件を満たすようにMの値を定めればよい。また、式(2-16)を用いる場合、ほぼ収束解(相対誤差=0.003)を得るには、 $y_{max}/L_s \leq 0.016$ ととればよい。

2. 3. 4 回転面の場合

図2-8に示すような渦巻ポンプ羽根車内の流れ解析においては、曲線形状の羽根が軸回りに反時計方向に一定角速度 ω で回転するので、羽根面上の絶対流れの流速分布は式(2-25)で表されるスカラ三重積分分布の場合に相当する。

羽根車内の流れを定常非圧縮・非粘性流と仮定し、その絶対流れに渦なし流れを仮定すれば、速度はポテンシャル ϕ をもち、式(2-1)において $K_x=K_y=1$ 、 $Q=0$ とおいたラプラス式により表される。図2-8に示した一つの羽根間流路とこの羽根1ピッチ分の上流および下流の流路部分の計算領域に対して、以下の境界条件のもと解けばよい。

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \phi = q = \begin{cases} W_{a0} & (B_1) \\ -W_{a3} & (B_2) \\ -\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} & (B_3, B_4) \end{cases} \quad (2-26)$$

ただし、羽根後縁では羽根両面の流れが滑かに合流するという、Kuttaの条件を満足しなければならない。このため、繰り返し計算により羽根車下流の循環 Γ を定める⁽²⁹⁾⁽³¹⁾。ここで用いた羽根面形状 (B_3, B_4) は二つの円弧($x_{max}=0.5$)の接続により構成されている。この形状を図2-8に○印で示した点列を通るスプライン曲線で表し、節点をスプライン補間により定める。

羽根面上の流れ方向の節点数 M_i を種々に変えて羽根車内の流れを解析し、その際の羽根面上の節点における速度ポテンシャルの絶対値の平均値 ϕ を求め、収束値 ϕ_0 ($M_i=23$)との差 $(\phi-\phi_0)$ の相対誤差 $(\phi-\phi_0)/\phi_0$ を M_i に対して示すと、図2-9の上段のようになる。ただし、周方向の節点数Nが9のときの結果である。図2-9にはN=7に対して式(2-16)を用いた結果も実線で示してあるが、N=9の結果とほぼ一致しており、十分なNの値に対する結果である。本方法[式(2-16)]による結果を○印で、式(2-15)を用いた結果を△印で示してある。 M_i がある値 $M_{i,cr}$

よりも増すと、いずれの方法においても相当誤差 $(\phi - \phi_0)/\phi_0$ は一定値に収束する。 $M_{i,cr}$ の値は式(2-15)に対しては19、式(2-16)に対しては17である^{**1}。したがって、式(2-15)の代わりに式(2-16)を用いることにより、節点数 M_i を11%低減できる。図2-9には、三角形二次要素を用いた結果も●印で示してあるが、式(2-15)を用いた場合とほぼ同じ値を示す。図2-6の場合に比べ二次要素を用いる効果が顕著でないが、図2-8の場合、 ϕ の変化の方向が境界曲線の方向と一致しないことによる影響が大きいものと考えられる。

図2-9の下段には、羽根面上の各要素に対する曲線の最大変位量 y_{max}/L_s を M_i に対して示してある。収束値 ϕ_0 に対する ϕ の相対誤差を零とするには $y_{max}/L_s \leq 0.012$ 、 0.03 とするには $y_{max}/L_s \leq 0.022$ なるように M_i の値を定めればよい。

流れ解析においては、速度ポテンシャル ϕ よりも、その微分値である流速や流速により定まる圧力が重要である。とくに羽根車上下流断面における流れの周速度成分に基づく循環は、羽根車のなす理論仕事に関係する。そこで、羽根車下流($r \geq r_2$)の循環 $\Gamma (=2\pi rW_{au})$ に関し、 $N=9$ に対する収束値 $\Gamma_0 (M_i=23)$ の相対誤差 $(\Gamma_0 - \Gamma)/\Gamma_0$ を M_i に対して示すと図2-10のようになる。計算方法の違いを区別する記号法は図2-9の場合と同じであり、いずれの方法においても収束時には同一の Γ_0 が得られる。収束時の M_i は、式(2-15)では $M_{i,cr}=23$ 、式(2-16)では $M_{i,cr}=15$ であり、 M_i に関する節点数の低減率は35%である。節点数の低減率がポテンシャル ϕ を基にして定めた図2-9の場合と異なるが、これは図2-9の ϕ が境界曲線上の平均値であるのに対し、図2-10では後縁近傍の節点における ϕ の数値微分より求まる循環を用いていることによる。図2-10には二次要素を用いた結果も示してあるが、限界節点数 $M_{i,cr}$ は式(2-16)の結果と同一($M_{i,cr}=15$)で精度がよい。二次要素の場合、 $N=7$ においてもほぼ同じ結果が得られるが、 $N=5$ のときは正常な解が得られなかった。

^{**1}この場合、流れとほぼ直角方向の要素辺長さに対する流れ方向の要素辺長さの比は1.41である。

2. 4 結言

自由曲線で境界形状が与えられる領域に対する三角形一次要素を用いた有限要素解析において、第2種境界条件に基づく右辺ベクトルを従来の方法よりも少ない計算節点数により算出する手法を示し、以下の事柄を明らかにした。

(1) 右辺ベクトルの変化が解に及ぼす影響は式(2-22)で与えられる。この影響は当該節点で最も大きく現れるが、節点間距離の減少とともに低下する。また、 ϕ の変化方向に対して直角方向に長い辺をもつ要素ほどその影響が大になる。

(2) 曲線境界に対する右辺ベクトルを式(2-15)、式(2-16)で表す場合、両者の差は曲線の最大変位量の増大とともに大になるが、最大変位の弦方向の位置には依存しない。両者の差は第2種境界条件が線形分布の場合には小さいが、並進移動面や回転面に作用する場合には著しく大きい。

(3) 第2種境界条件が並進移動面上に作用する場合、式(2-15)の代わりに式(2-16)を用いて右辺ベクトルを求めることにより、計算精度が向上し、第2種境界条件が作用する曲線に沿う節点数を低減できる。低減率は高精度の解を要求するほど大きい。収束解は、 $y_{\max}/L_s \leq 0.016$ となるように節点数をとるときに得られた。

(4) 第2種境界条件が回転面に作用する場合の流れ解析においては、式(2-16)を用いることにより羽根面に沿う節点数を12%程度低減できる。収束解は、 $y_{\max}/L_s \leq 0.012$ となるように節点数をとるときに得られた。

(5) 式(2-16)を用いる方法は二次要素を用いる場合とほぼ同量の記憶容量を必要とし、ほぼ同じ精度が得られるが、節点数が過少なときの誤差は相当に小さい。

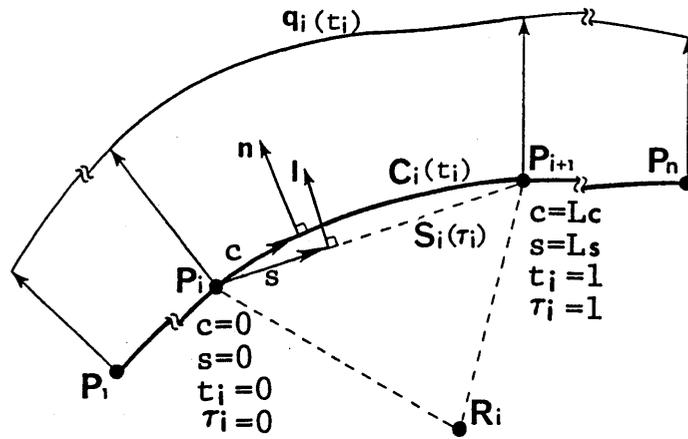


図 2-1 境界 s_2 の形状と境界条件

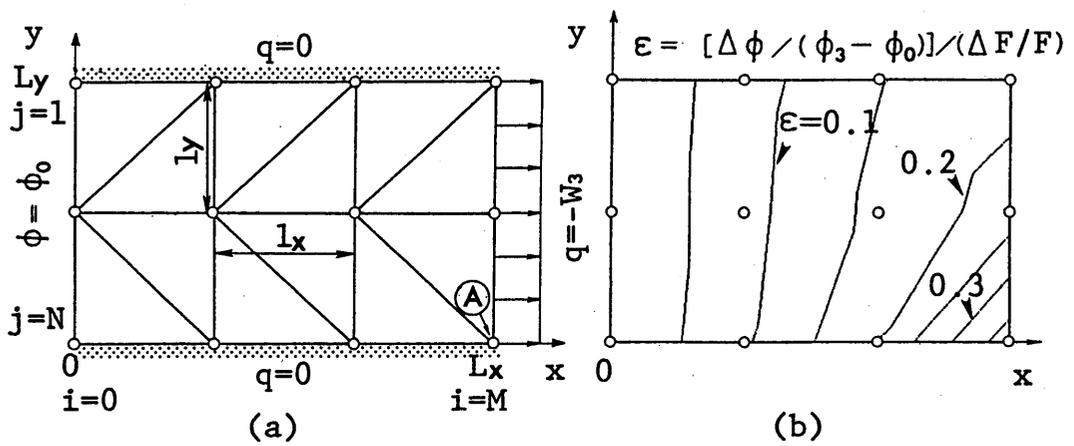


図 2-2 右辺ベクトルの変化に対する解の変化量

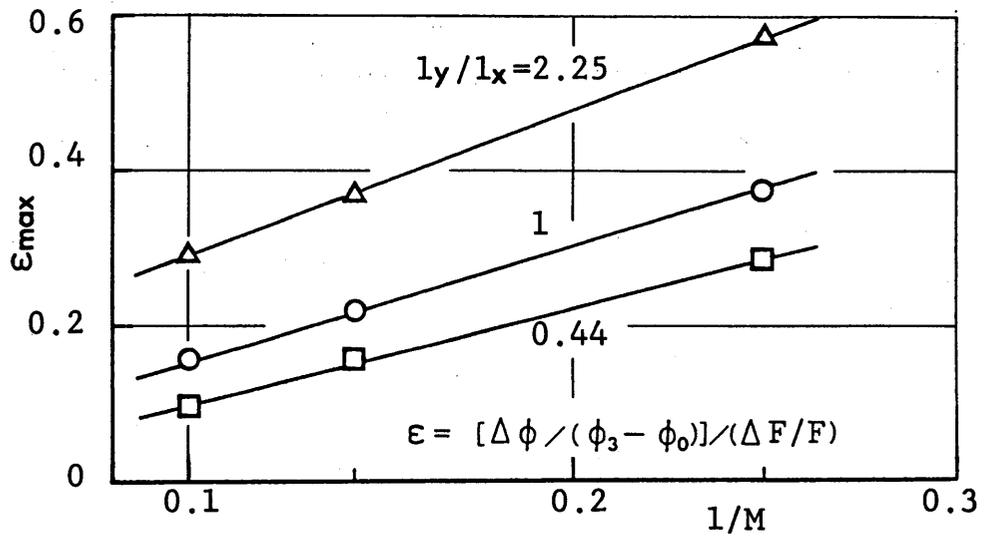


図2-3 節点数に対する解の変化量

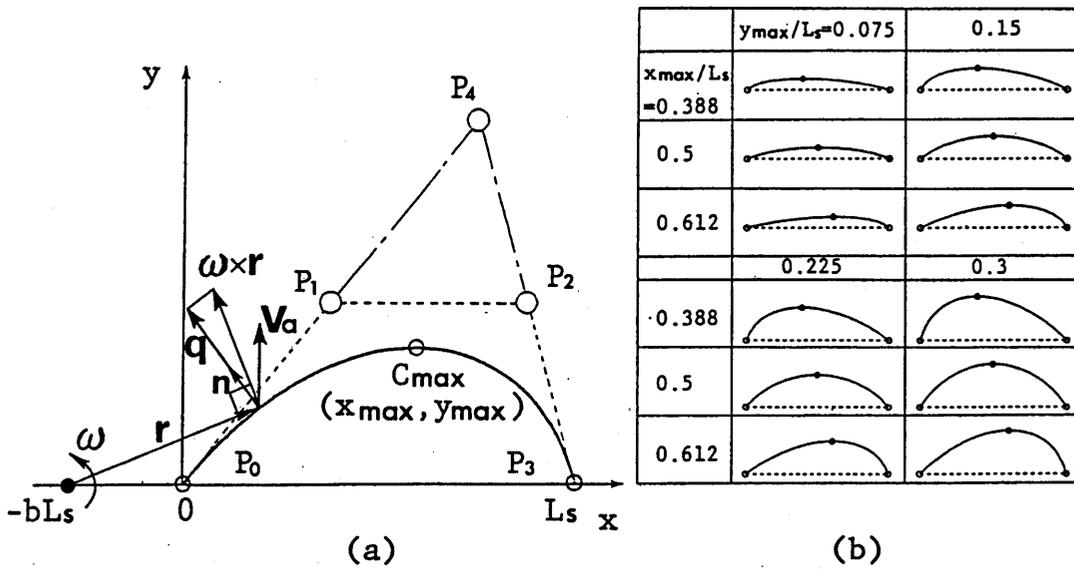
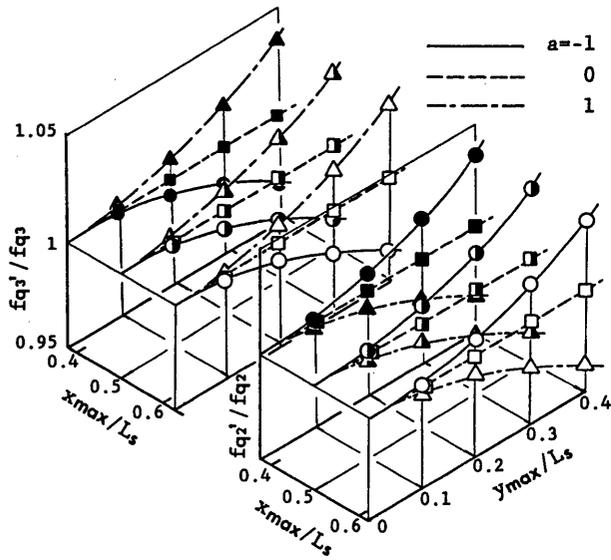
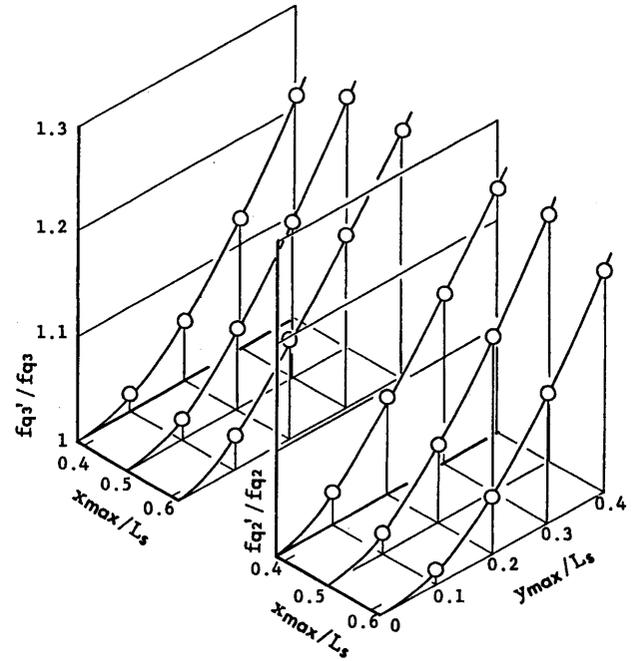


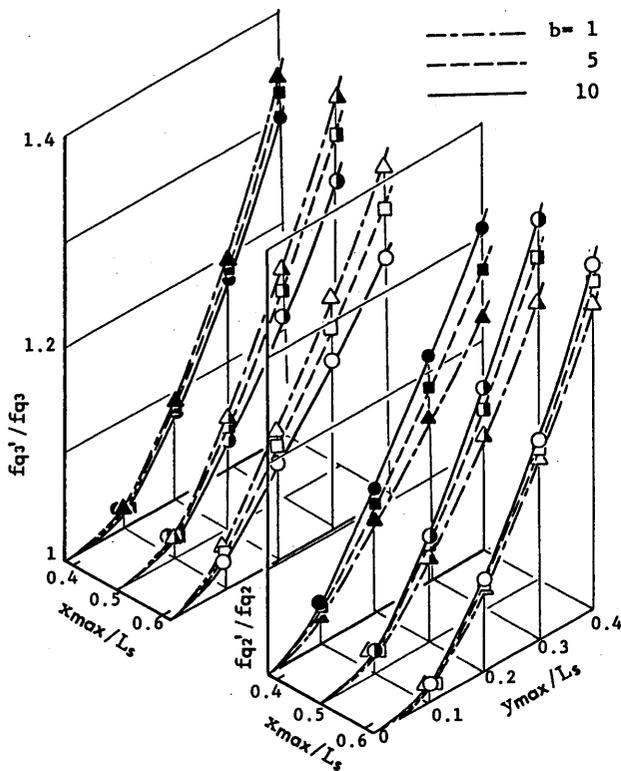
図2-4 第2種境界条件が作用する曲線形状



(a) 線形分布の場合



(b) ベクトル内積形分布の場合



(c) スカラ三重積形分布の場合

図2-5 曲線形状の影響

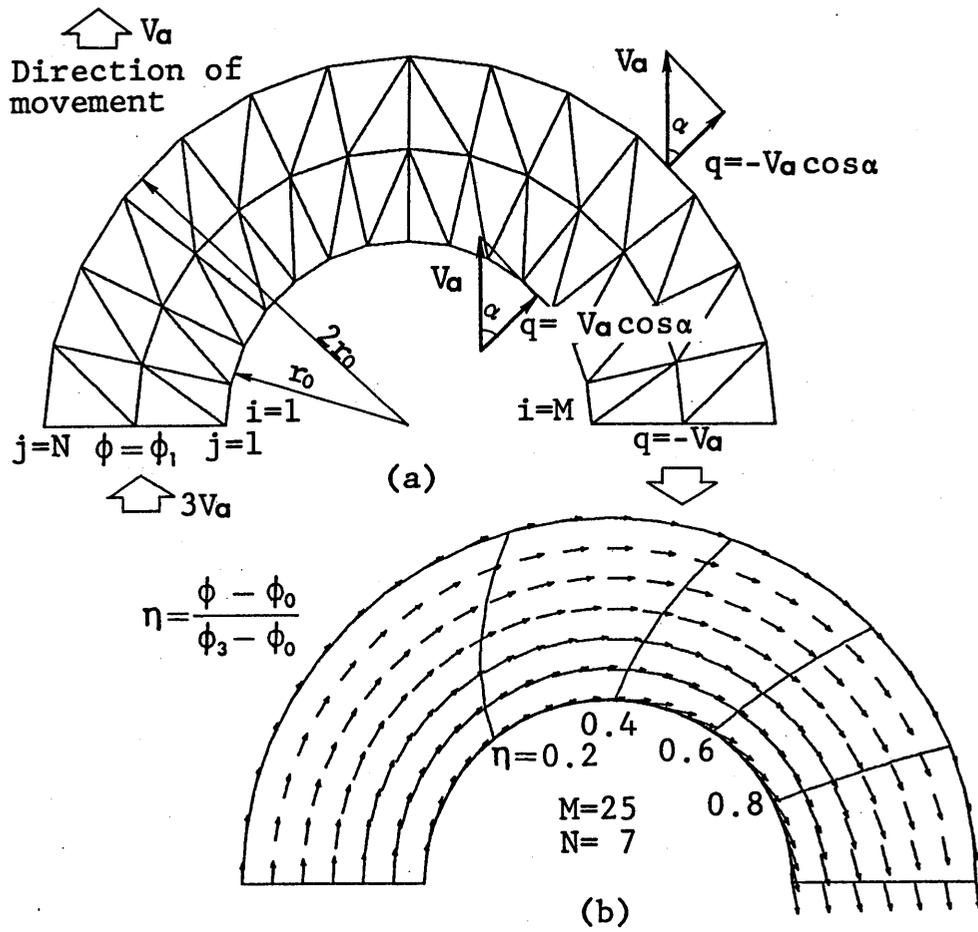


図 2-6 環状流路への適用

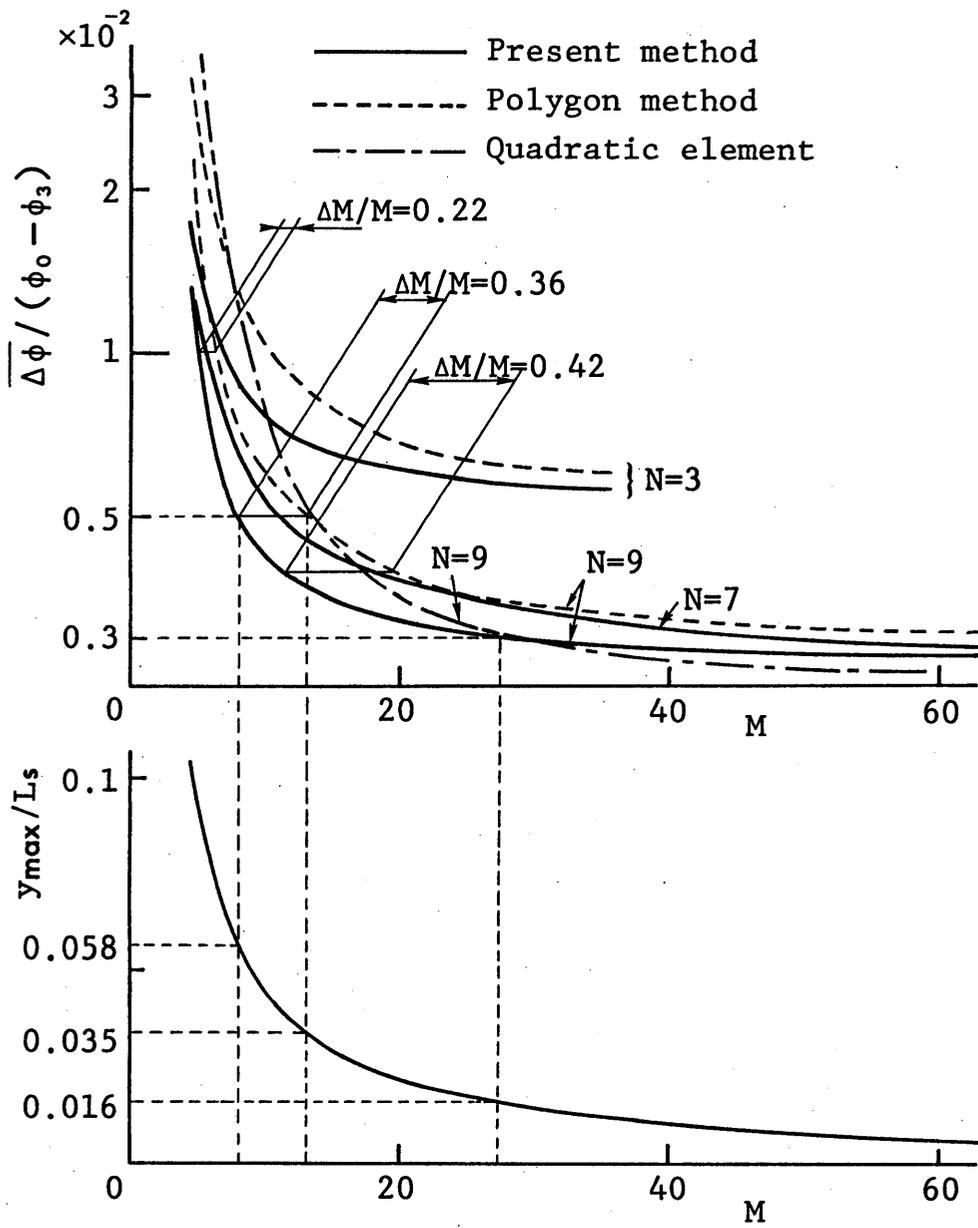


図2-7 相対誤差に及ぼす節点数の影響

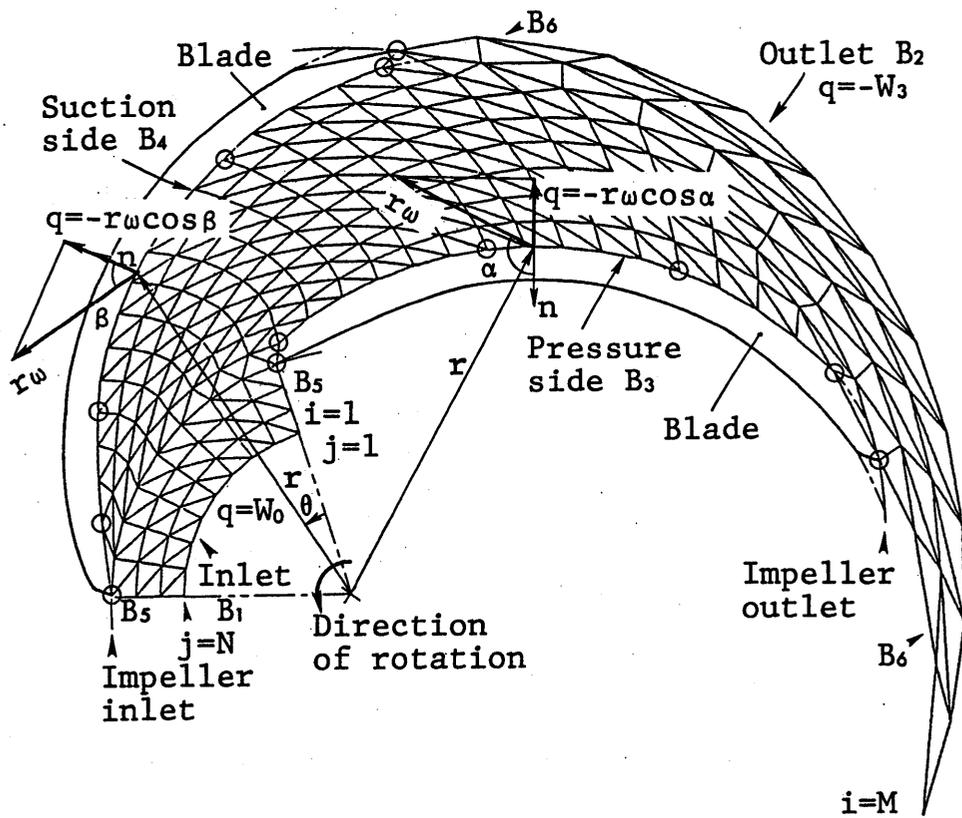


図2-8 渦巻ポンプ羽根車の形状と境界条件

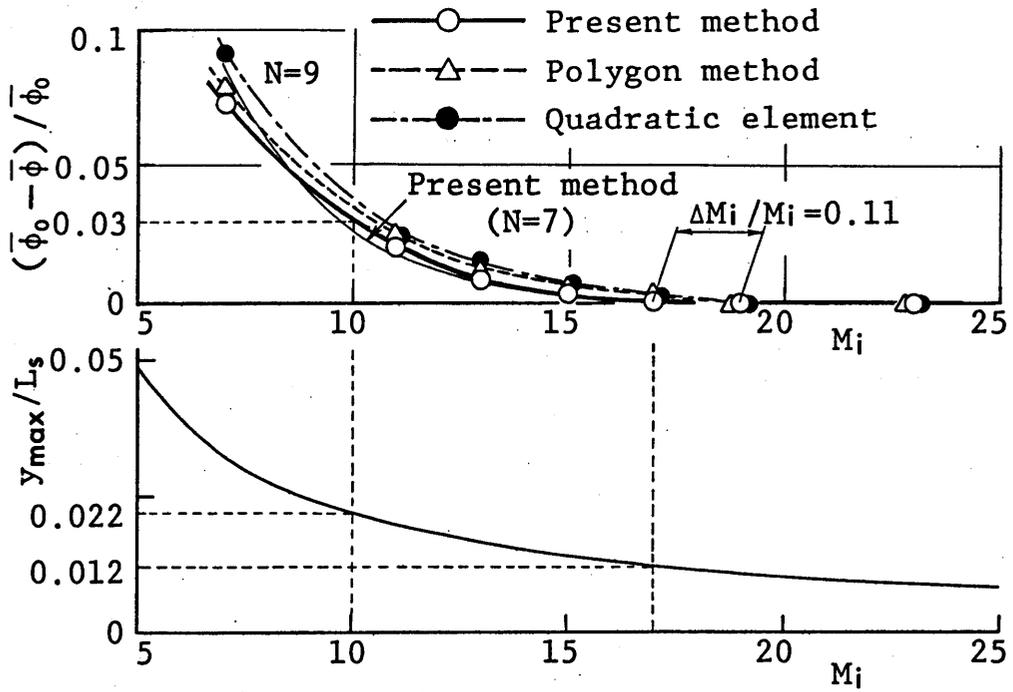


図2-9 羽根面上の速度ポテンシャルに及ぼす節点数の影響

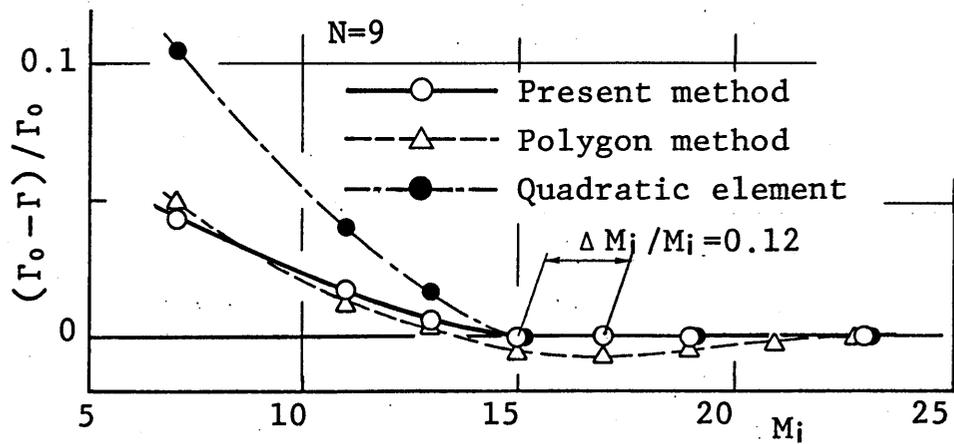


図2-10 羽根車下流の循環に及ぼす節点数の影響

3. 1 緒言

円弧や自由曲線により設計された形状の領域に対して一次要素を用いた有限要素法を適用する場合には、境界形状を折れ線で近似することになる。線形微分方程式の解析においては、有限要素方程式の右辺ベクトルは境界に垂直方向の微分値を与える第2種境界条件に基づいて定めることから、この境界形状の近似精度に依存した誤差が結果に生ずる。第2章では、二次元問題でよく用いられる三角形一次要素による解析において、曲線形状を考慮して第2種境界条件を右辺ベクトルへ導入する方法を示し、第2種境界条件が作用する曲面境界が並進または回転する場合、つまり曲面形状の羽根車からなるターボ機械の解析に対しては、従来の方法よりも少ない節点数でかつ高精度に計算できることを示した。

ターボ機械内流れの有限要素解析では、羽根後縁が一般に有限の厚みをもつため、従来は計算上この後縁部分を尖らして、後縁で羽根厚みが零となるような仮想的な羽根形状に対する解析を余儀なくされている。しかし、流れは後縁でKuttaの条件を満たさなければならないので、この後縁部の形状変更は解析結果に敏感に反映するはずであるが、形状変更の影響については従来ほとんど検討されていない。

本章では、Kutta条件の扱いを吟味するとともに、上述の問題に対して羽根後縁部の形状を最大限考慮した曲線セグメントで表す方法により、任意の羽根形状をもつ羽根車内流れが解析できることを明らかにした。

3. 2 基礎式と数値解析法

3. 2. 1 回転羽根車内の流れの基礎式

本章では、ターボ機械内の流れが軸対称流面をもつものと仮定したときに現れる、二次元翼列流れの問題を扱うことにする。

羽根車内の流れに定常非圧縮・非粘性流を仮定し、その絶対流れに渦なし流れを仮定すれば、絶対速度 \mathbf{W}_a はポテンシャル ϕ をもち、相対速度 \mathbf{W} との間には次式が成り立つ。

$$\mathbf{W}_a = \mathbf{W} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = -\nabla_a \phi \quad (3-1)$$

このような流れの支配方程式は、式(3-1)を連続の式に代入して得られるラプラス式により表される。つまり、

$$\nabla_a^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (3-2)$$

また、圧力 p は式(3-1)より定まる速度 \mathbf{W} を用いて、次式に示す回転場におけるベルヌイの式より求められる。

$$p = p_1 - \rho \omega \lambda + \rho [(\mathbf{W}_1^2 - \mathbf{W}^2) - (u_1^2 - u^2)] / 2 \quad (3-3)$$

ここで、 λ は羽根車入口における流体の単位質量あたりの角運動量である。

計算領域を図3-1で示すように、一つの羽根間流路とこの羽根1ピッチに相当する上流および下流の流路部分とする。この計算領域において、式(3-2)は以下の境界条件を満足しなければならない。すなわち、第2種境界条件として、境界に垂直方向の ϕ の微分値つまり境界に垂直な速度 q が入口(B_1)、出口(B_2)および羽根面(B_3, B_4)において、次式で与えられる。

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \phi = q = \begin{cases} W_{ar} & (B_1) \\ -W_{ar} & (B_2) \\ -\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} & (B_3, B_4) \end{cases} \quad (3-4)$$

また、残りの羽根車上流(B_5)および下流(B_6)の周方向側面においては、つぎの周期性の条件が成立する。

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta + 2\pi/N) &= \phi(r, \theta) - \Gamma/N \\ \frac{\partial \phi(r, \theta + 2\pi/N)}{\partial \mathbf{n}} &= - \frac{\partial \phi(r, \theta)}{\partial \mathbf{n}} \end{aligned} \quad (3-5)$$

ただし、 N は羽根枚数である。式(3-5)の循環 Γ は羽根後縁においてKuttaの条件が満足されるように決定される。

3. 2. 2 有限要素方程式

羽根車内の流れは、境界条件式(3-4)、(3-5)のもと、式(3-2)を有限要素解析することにより得られる。この有限要素方程式は、第2章で導いた準調和方程式に対する式をもとに次式で表される。

$$[K]\{\Phi\} = \{F\} \quad (3-6)$$

ここで、係数マトリックス $[K]$ および右辺ベクトル $\{F\}$ は、各要素内の ϕ を直交座標系 (x, y) を用いた形状関数マトリックス $[N]$ で表せば、次式で与えられる。

$$[K] = \sum_e \int_{A_e} \left[\left(\frac{\partial [N]^T}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial [N]}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial [N]^T}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial [N]}{\partial y} \right) \right] dA \quad (3-7)$$

$$\{F\} = \sum_e \{f_q\} = \sum_e \int_{s_{2e}} q [N]^T ds \quad (3-8)$$

ただし、 A は要素面積、 s は境界線の長さである。

第2種境界条件は、式(3-8)から知れるように、境界上に分布する速度 q [式(3-4)]に関する線積分として右辺ベクトル $\{F\}$ に与えられる。

3. 2. 3 第2種境界条件の扱い

図3-2に示すように、 n 個の節点 P_i ($i=1 \sim n$)を通る曲線 C により第2種境界条件が作用する境界形状が与えられるものとする。三角形一次要素を用いる有限要素解析においては、境界上の2点 P_i および P_{i+1} と内部領域に設けた1点 R_i を3節点とする、図3-2に破線で示すような三角形要素により領域を分割する。従来の方法では、部分曲線 C_i は線分 $P_i P_{i+1}$ により直線近似され右辺ベクトルを式(3-8)から求める際、第2種境界条件により規定される速度 q に対して、線分 $P_i P_{i+1}$ 上の速度 q' を用いることになる。つまり、節点 R_i, P_{i+1}, P_i に対する右辺ベクトル $f_{q1}', f_{q2}', f_{q3}'$ は次式で表される。

$$f_{q1}' = 0$$

$$f_{q2}' = \int_0^{L_s} q_i' \left(\frac{s}{L_s} \right) ds \quad (3-9)$$

$$f_{q3}' = \int_0^{L_s} q_i' \left(1 - \frac{s}{L_s} \right) ds$$

ここで、 s は線分 $P_i P_{i+1}$ に沿う長さ、 L_s はその全長である。

曲線 C が回転する羽根曲線の場合には、第2種境界条件により規定される速度 q が、式(3-4)から知れるように、半径位置 r とその位置における羽根面の法線ベクトル n の内積として与えられる。すなわち、 C_i 上の速度 q_i が曲線の位置 C_i と傾き $\dot{C}_i (=dC_i/dt)$ 、つまり曲線に沿った長さの助変数 t_i の関数 $q_i(t_i)$ として分布する。したがって、第2章で示したように、線分上の値 q' は羽根面上の値 q と異なり、右辺ベクトルには羽根形状の直線近似に依存する誤差が生じることになる。

境界上に作用する速度を外力と見なせば、式(3-9)は節点まわりの偶力の釣合式に相当するから、第2章では、曲線境界上の分布速度をエネルギー的に等価な換算速度として節点に割り当て、右辺ベクトルを求める方法を提案した。この場合、式(3-9)の第2、第3式は、

$$f_{q2} = \left(\frac{s}{L_s} \right) \int_0^1 |C_i(t_i) - C_i(0)| \times q_i(t_i) |\dot{C}_i| dt_i \quad (3-10)$$

$$f_{q3} = \left(\frac{s}{L_s} \right) \int_0^1 |C_i(t_i) - C_i(1)| \times q_i(t_i) |\dot{C}_i| dt_i$$

ここで、演算子 \times は外積を表す。

ただし、式(3-7)で表される係数マトリックス $[K]$ の面積分に関する値も曲線形状を折れ線近似することの影響を受けるが、その影響は小さく無視し得るものと見なし、三角形一次要素に対する値をそのまま用いる。

3. 2. 4 羽根形状の扱い

第2種境界条件 q が作用する境界は、入口(B_1)、出口(B_2)、羽根面(B_3, B_4)である。入口および出口の境界形状は円弧であり、かつ q は一般に境界上で一定であるから、境界形状を折れ線近似することの影響は第2章により微小であり、無視できる。影響が大きく現れる回転羽根面に対してのみ、式(3-10)を用いて右辺ベクトルを求めればよい。

羽根面の形状は点列(図3-1の○印)を通る三次スプライン曲線により表し、羽根面上の有限要素節点の位置はスプライン補間により定める。前縁形状は本計算の場合円弧であり、前縁の一つ下流の圧力面上の節点を円弧と羽根曲線の接点位置におく。また、一般に羽根後縁(点線)は有限の厚みをもつから、そのままでは計算上、Kuttaの条件を実現し難い。そのため、図3-3(a)に示すように、後縁部の羽根形状が円弧の場合には、この円弧上に後縁点(●印)を設け、後縁の羽根厚みを零とし、節点間を直線で結んだ折れ線(破線)により近似表現する方法がとられている。本方法を用いれば、この円弧形状をそのまま式(3-10)に用いることになる。ただし、後述するように後縁点の位置は羽根車下流の循環量に関係するので、この点は3.2.5節で述べる計算手順の中で繰り返し修正され

る。

後縁が図3-3(b)に示すように、羽根車外周上で有限幅をもつ場合、後縁点を羽根車外周上に設けて後縁近傍の羽根形状を折れ線で近似する。本章では、このような羽根形状を解析の対象とするが、その際、後縁形状をできる限り正確に表現する観点から、この後縁部形状を後縁の一つ上流の節点における座標、曲線の傾き、曲率および後縁点の座標から定まる三次曲線セグメントにより表し(図3-3(b)の破線)、この間を滑らかな曲線で結ぶ方法を用いる^{**1}。また、後縁形状をより忠実に表現する立場から、羽根後縁部下流に生ずる剝離流域を仮想して、図3-3(c)に示すように、羽根後縁点を羽根車の下流に設けた場合も扱う。この場合には、後縁点における座標と流体の相対流出角度、羽根車外周上の節点の座標より定まる二次曲線セグメントで領域の境界形状を表す。

3. 2. 5 Kutta条件と羽根車下流の周期境界の扱い

回転翼列の非粘性流解析においてKuttaの条件を実現するには、次の方法が考えられている。

(1) 後縁における圧力側と負圧側の圧力が周方向に連続であると考え、両側の圧力すなわち速度の絶対値を一致させる⁽²³⁾⁽²⁷⁾⁽²⁸⁾。

(2) 流れが羽根から滑らかに流出し、滑らかに合流すると考え、後縁の圧力側と負圧側の平均速度ベクトルの方向をカンバ線の方向に一致させる⁽²⁹⁾⁽³¹⁾。

(3) 上記(2)と同様な観点から、圧力側と負圧側の速度ベクトルの方向を一致させる。

これらの条件は羽根車下流における循環 Γ_2 の値を変えることにより実現する。すなわち、循環 Γ_{2j} を仮定して流れ場を有限要素解析し、後縁の圧力側および負圧側における結果より相対誤差 ε が得られたとすれば、修正後の値 Γ_{2j+1} を次式により求め、繰返し計算により Γ_2 の収束値を定める。

$$\Gamma_{2j+1} = \Gamma_{2j} + \gamma \varepsilon \Gamma_{2j} \quad (3-11)$$

ここで、 γ は計算の収束性を高めるための減衰係数である。

条件(1)の場合、圧力側と負圧側の圧力を p_p 、 p_s とすれば、判定誤差 ε は $\varepsilon = 1 - p_p/p_s$ である。条件(2)においては、羽根車に対する後縁の圧力側および負圧側の相対速度ベクトルの合成方向を β 、カンバ線の相対角度を β_{cam} とすれば、 $\varepsilon = 1 - \beta/\beta_{cam}$ である。条件(3)においては、後縁の圧力側および負圧側の相対速度ベクトルの方向を β_p 、 β_s とすれば、 $\varepsilon = 1 - \beta_p/\beta_s$ である。本計算では、

^{**1} 後縁部の三次曲線セグメントの形状は、羽根面形状を定める三次スプライン曲線の点列データに後縁点座標を加え、後縁点における曲率を零と仮定した自由端末条件のもとで三次スプライン補間したときの曲線と一致する。

いずれの条件においても減衰係数 γ は $\gamma = 0.1$ とした^{**2}。

一方、式(3-5)から知れるように、羽根車下流における周期境界(B₆)において速度ポテンシャルが不連続に変化する。よって、上記の繰返し計算において、この境界形状を周期境界上の平均速度ベクトルより定まる相対岐点流線に一致するようにその都度修正する。この扱いは、翼列流れの三次元有限要素解析の場合、この周期境界が随伴渦面に相当することから重要である⁽²⁹⁾⁽³¹⁾。周期境界上の節点の座標 (r, θ) は、 Γ_{2j} に対して求められた境界上の平均速度 (W_r, W_u) を用いて、流線を表す次式から求める。

$$\int_{\theta_3}^{\theta} d\theta = \int_{r_3}^r \left(\frac{W_u}{rW_r} \right) dr \quad (3-12)$$

ただし、式(3-12)の積分の始点は後縁点である。ここで、修正後の θ_{j+1} は次式により定める。

$$\theta_{j+1} = \theta_j + \gamma (\theta_{j+1} - \theta_j) \quad (3-13)$$

ただし、 γ は減衰係数であり、本計算では $\gamma = 0.9$ とした。

後縁点の位置は解析結果に大きく影響を及ぼすので、後縁が円弧[図3-3(a)]の場合には、羽根後縁の圧力側および負圧側を通る流線と後縁円弧の接点を求め、これら接点に対する円弧上の中点を始点として、式(3-12)により岐点流線を求めることになる^{**3}。

羽根後縁部の下流に剝離領域を仮定する場合には、後縁点を羽根車下流におき、この点と羽根車出口の圧力端と負圧端を結び、空洞領域を設ける。その際、後縁点の半径座標を規定し、その周方向座標を前述した循環 Γ_{2j} を求める繰返し計算と連立させて定める。後縁点の座標 (r_3, θ_{3j}) と循環 Γ_{2j} を仮定すれば、羽根車下流 ($r \geq r_2$) では、連続および角運動量保存則が成り立つので、半径 r における平均速度成分は、

$$\bar{W}_{rj} = \frac{\int_{\theta}^{\Delta\theta} r_3 W_{r3j} d\theta}{r \Delta\theta - t} \quad (3-14)$$

$$\bar{W}_{uj} = \frac{\int_{\theta}^{\Delta\theta} r_3^2 W_{r3j} (u_3 + W_{u3j}) d\theta}{r(r \Delta\theta - t) \bar{W}_{rj}} - r\omega \quad (3-15)$$

ただし、 t は空洞の周方向厚みであり、半径 r の関数である。

式(3-14)、(3-15)を式(3-12)に代入し、後縁点から羽根車外周まで半径方向

^{**2} 減衰係数 γ の値は循環の初期値と収束値との差に依存し、この差が小さい、すなわち初期値の見積が正確な場合には、 γ をより大きくとることができる。循環の初期値にその収束値よりも約10%大きな値を用い、繰返し計算毎に γ の値を0.1ずつ増して収束を加速させた場合、条件(1)では4回、条件(2)、(3)では6回の繰返し計算により収束解が得られた。ただし、収束判定条件は、 $|\varepsilon| \leq 0.3 \times 10^{-2}$ とした。

^{**3} 図3-6の結果から、後縁点を平均カンバ線上に置けばよいことから、循環を定める繰返し計算毎に後縁点の位置を変更する必要はないことになる。

内向きに積分することにより、羽根車外周上における後縁点を通過する相対流線の周方向座標 θ_{2j} が求まる。よって、 θ_{2j} が羽根車外周上のカンバ線の周方向座標 θ_{cam} と一致するように θ_{3j} を修正し、繰返し計算により θ_3 の収束値を定める。

3. 3 解析結果と考察

3. 3. 1 Kutta条件の検証

解析の対象として、古川ら⁽¹⁵⁶⁾が実験した低比速度[187(m, m³/min, rpm)]の半径流形渦巻ポンプを用いる。その羽根車の形状は図3-1に示したものであり、羽根車外径は190mm、羽根数は6枚、羽根の溝深さ(13mm)が半径方向に変わらない二次元羽根をもち、羽根厚みは一定である。ここでは、定格回転数(1600rpm)における定格流量($\phi=0.106$)時の流れを解析する。

まず、後縁点を羽根車外周上においた場合[図3-3(b)]を考える。このとき、羽根後縁部の形状が後縁点の周方向位置と後縁点とこの一つ上流の節点との半径距離 Δr_2 により変化することになる。本解析では、羽根面に沿う節点数を同一にして十分多くとり、後縁部を除く羽根面境界を折れ線近似することによる誤差が生じないようにした場合の結果について述べる。

後縁点をカンバ線上におき、 Δr_2 を種々に変えた場合に対しKutta条件(1)を満たすように羽根車下流の循環 Γ_2 を定め、その無次元値 Γ_2/r_2u_2 を無次元半径距離 $\Delta r_2/t_2$ に対して示すと図3-4のようになる。有限要素方程式の右辺ベクトルを式(3-10)より求める本方法による結果を○印と太い実線で示してあるが、 Γ_2/r_2u_2 は $\Delta r_2/t_2=0.25$ で極大値をとり $\Delta r_2/t_2 \leq 0.17$ においてはほぼ一定値に収束する。図3-4には、WiesnerおよびStodolaのすべり係数から求まる循環を一点鎖線で示してあるが、本解析により得られた収束値はこれらの中間の値をとり、ほぼ妥当な Γ_2 が得られているものと思われる。図3-4には、式(3-9)を用いる従来の方法による結果を△印と太い破線で示してある。 Γ_2/r_2u_2 は $\Delta r_2/t_2 < 0.25$ では本方法とほぼ同一の値をとるが、 $\Delta r_2/t_2$ が大きい範囲ではより大きく低下し、 $\Delta r_2/t_2$ の影響をより大きく受けることが知れる。 $\Delta r_2/t_2$ の小さい範囲で本方法による結果と一致する理由は、節点間距離が短く境界曲線のたわみ割合が少ないためである。

上述の結果は、判定誤差 ε に用いる後縁点の圧力側および負圧側の圧力として、後縁点の近傍要素[図3-3(b)に示した要素④および⑤]における値を用いた場合のものである。近傍要素の値で代表させた理由は、一次要素を用いた有限要素解析において直接求まる速度ひいては圧力が要素内では本来一定であるということからである。一方、各節点における速度は、要素内では一定である速度を要素の重心に集中的に分布するものとみなして、当該節点を共有する各要素の重心までの距離に応じた最小二乗法により定めるか、あるいは当該節点を含む各要素の全節点における速度ポテンシャルを最小二乗法により微分して求める⁽²⁹⁾⁽³¹⁾。本解析ではより高い精度をもつ後者の方法を用いているが、後

縁節点における圧力側と負圧側の圧力を用いて Γ_2 を求めてみると、細い破線で示したように、 Γ_2/r_2u_2 は過小となる。ただし、 $\Delta r_2/t_2$ の小さい範囲における本方法[式(3-10)]と従来の方法[式(3-9)]による差異は小さいので、従来の方法による結果のみを図示してある。 Γ_2 が過小となるのは、羽根面や羽根車下流のポテンシャルの不連続面の存在により、速度を求める際の数値微分上の誤差が生じやすいことや、後縁点の圧力にはその求め方から羽根車内の圧力も反映していることなどの理由によるものと考えられる。

Kutta条件(2)に対して従来の方法[式(3-9)]を適用し、 Γ_2/r_2u_2 を求めると△印を結んだ細い実線のようになる。後縁点近傍要素の代わりに後縁点の速度ベクトルを用いた場合には△印を細い破線で結んだ曲線のようになる。 Γ_2/r_2u_2 は $\Delta r_2/t_2$ によらずほぼ一定で、図3-4に二点鎖線($\Gamma_2/r_2u_2=4.84$)で示した羽根車出口ですべりが無いときの Γ_2/r_2u_2 に近いかなり大きな値となる。条件(2)の方法は Γ_2 を過大、すなわちすべりを過小に与えることがわかる。

Kutta条件(3)に対して従来の方法を適用し、 Γ_2/r_2u_2 を求めると▲印を結んだ細い実線のようになる。これは後縁点の近傍要素における速度ベクトルを用いた場合の結果であるが、 Γ_2/r_2u_2 はKutta条件(1)を用いた場合とほぼ同じ値が得られる。しかし、後縁点の値を用いた場合には▲印を結ぶ細い破線のように、 Γ_2/r_2u_2 はかなり小さくなり、同一条件でも用いる圧力によりかなりの差が生ずる。

後縁近傍要素における圧力を用い、Kutta条件(1)に対して本方法[式(3-10)]を適用すると(ただし、 $\Delta r_2/t_2=0.169$)、後縁点近傍の水流の相対速度ベクトルは図3-5の矢印のようになる。ただし、図3-5(a)は要素重心、図3-5(b)は節点における結果を示す。相対岐点流線(周期境界)は実線で示してある。この線上の下流領域におけるベクトルの方向差はわずかであるが、後縁点近傍における速度ベクトルの方向は圧力側と負圧側で大きく異なる。これは上流の羽根厚みの影響によるものであり、後縁部の形状変更の影響をかなり受けることが考えられるので、条件(3)の方法は必ずしも適切でないことが知れる。図3-5には、後縁点の速度ベクトルが条件(2)を満たすように解析した場合に対する、羽根車下流の周期境界の形状を破線で示してある。羽根車に対するこの境界の相対角度は条件(1)に対する結果よりも相当に大きく、条件(2)では、相対岐点流線の方角をカンバ線の方角に一致させていることから、羽根車出口におけるいわゆる流れの角超過が過小になる。

上述の結果より、Kuttaの条件としては後縁点の圧力側および負圧側の近傍要素における圧力を一致させる条件(1)が妥当であると考えられる。この方法は、羽根車内流れに対する三次元問題に対してもそのまま適用できる。以下ではこのような条件により Γ_2 を定めた場合について述べる。

3. 3. 2 羽根車下流の循環に及ぼす後縁位置の影響

羽根車外周上の後縁点の位置を周方向に変えるとともに、後縁点の一つ上流の節点位置すなわち Δr_2 も変えると、後縁の形状は相当に変化し、同時に後縁

点を通るカンバ線の角度 β^* も変わることになる。そこで、後縁点の位置をカンバ線上、カンバ線と羽根圧力面との中央、負圧面との中央のいずれかの位置におき、 Δr_2 の値を $\Delta r_2/t_2$ が0.085から0.423の範囲で変えた場合に得られた循環の収束値 Γ_2 を β^* に対して示すと、図3-6の○印のようになる。ただし、 β^* は羽根後縁における本来のカンバ線角度 β_{cam} で無次元化し、 $\Delta r_2/t_2$ を大きくしたときに結果が変化する方向を矢印で示してある。上記3種類の後縁位置に対する結果は記号を変えてあるが、後縁点をカンバ線上や羽根負圧面よりに置いた場合、 $\Delta r_2/t_2$ が小さいときの Γ_2/r_2u_2 に及ぼす β^* の影響は小さく、図3-4で求めた収束値を表す実線($\Gamma_2/r_2u_2=3.52$)にほぼ一致する。折れ線近似による従来の方法の結果も△印で示してあるが、本方法による結果に比べて β^* の違いによる影響が大きく現れ、後縁形状に対しより敏感であることが知れる。

後縁点をカンバ線上に設け、後縁点の一つ上流の節点の位置 Δr_2 を $\Delta r_2/t_2=0.169$ にとるとき($\Gamma_2/r_2u_2=3.52$)の羽根面圧力分布を求めると図3-7の一点鎖線のようになる。ただし、羽根車入口の静圧を基準にした無次元圧力係数 $\Delta\phi_r$ を無次元半径 r/r_2 に対して示してある。図3-7には、圧力面および負圧面の測定値⁽¹⁵⁶⁾を○印および●印で、また境界層排除厚さを考慮した特異点法による解析結果⁽¹⁵⁶⁾を細い破線で併記してある。本解析結果はこれらと比較的よく一致しているが、羽根車後半部($r/r_2 \geq 0.72$)の圧力側における $\Delta\phi_r$ がやや過大である。この欠点は次節で述べる方法によりかなり是正される。

3. 3. 3 後縁点を羽根車下流に置いた場合

後縁点を羽根車外周の下流におき、羽根出口端下流に剝離領域を想定して空洞部を設けた場合を考える。ただし、領域の境界形状を二次曲線セグメントで表し、3.3.1節で述べたKutta条件(1)に対する方法はそのまま適用できるものとする。

後縁の半径座標 r_3 を種々に変えた場合に対し、Kutta条件を満たすように Γ_2 を定め、その無次元値 Γ_2/r_2u_2 を無次元半径 r_3/r_2 に対して示すと図3-8のようになる。本方法[式(3-10)]を用いた場合の結果を○印で示し、太い実線で結んである。 Γ_2/r_2u_2 は $r_3/r_2 \leq 1.053$ (2節点下流)の範囲では変化が少なく、 $r_3/r_2 > 1.053$ では急増大する。 Γ_2 が急増大する理由は、後縁点と羽根車外周との区間が有限要素解析では羽根の一部であることから、式(3-15)の角運動量保存則が正確には満足されないためである。このため、後縁点と羽根車外周との距離は最小にとる必要がある。境界形状を折れ線近似する従来の方法[式(3-9)]による結果を図3-8に△印と太い破線で示してあるが、後縁点と羽根車外周との距離が小さい場合($r_3/r_2 \leq 1.023$)、本方法による結果と一致する。後縁点を羽根車外周上に置いた場合の図3-4から見られるように、節点間距離が小さい場合には直線による曲線境界の近似精度が高く Γ_2/r_2u_2 が一致することから、羽根厚みが比較的薄い羽根車に対しては、後縁点を羽根車外周の1節点下流に置くことができるものと考えられる。

後縁点を1節点下流($r_3/r_2=1.026$)に置き、本方法を用いてKutta条件を満たす

と $\Gamma_2/r_2u_2=3.64(\theta_3/\Delta\theta=-1.62)$ となり、後縁点を羽根車外周上に置いた場合に比べ3.4%高い値になる。この場合の羽根面圧力分布は図3-7の実線のようなになる。羽根車後半部 ($r/r_2 \geq 0.72$) の圧力面における $\Delta\phi_r$ が低下し、後縁点を羽根車外周上に置いた解析結果(一点鎖線)に比べ、実験結果とより良く一致するような結果が得られる。

3. 3. 4 後縁の羽根厚みが大きい羽根車への適用

一般に、羽根形状は半径方向流速がほぼ一定となるように設計される⁽¹⁵⁷⁾ので、二次元羽根の場合には後縁の羽根厚みが相当に大きくなる。ここでは、このような羽根車の流れ解析に対しても、3.3.3節で述べた羽根出口端の下流に仮想的な剝離領域を設ける方法が有効に適用できることを示す。

解析の対象として、低比速度の半径流形渦巻ポンプ[比速度: $180(\text{m}, \text{m}^3/\text{min}, \text{rpm})$ 、流量: $0.9\text{m}^3/\text{min}$ 、揚程: 19m 、回転数: 1750rpm]を選び、その定格回転数、定格流量 ($\phi=0.08$) 時の流れに対する解析結果について述べる。羽根車は図3-9に示すように、羽根の溝深さ (18mm) が半径方向に変わらない二次元羽根をもつ。この場合、羽根の負圧面が羽根車出口部で削除されているため、圧力側と負圧側の羽根後流に対する曲線セグメントが交差してしまい、剝離領域が設定できない。そこで、負圧側の羽根形状も破線で示すような後方に傾いた形状として、滑らかに外挿した曲線として定めることにする。また、後縁点を羽根車外周の1節点下流の半径位置 ($r_3/r_2=1.044$) に置いた場合には、後縁点と圧力側の羽根出口端を結ぶ直線の一部が羽根車外周領域よりも内側に位置してしまい、従来の折れ線近似による方法では要素分割が不可能となる。そこで、後縁点を外周の2節点以上下流の半径位置に置いて解析することにする。

後縁点の無次元半径座標 r_3/r_2 に対して循環の無次元値 Γ_2/r_2u_2 を示すと、図3-8のようになる。本方法による結果を○印と細い実線で示してあるが、後縁点を羽根車外周の2節点下流 ($r_3/r_2=1.089$) に置いた場合の値は外周上に置いた場合の値とほぼ一致し、 $\Gamma_2/r_2u_2=3.34(\theta_3/\Delta\theta=-1.86)$ を得る。また、従来の方法による結果を△印と細い破線で示してあるが、2節点下流に置いた場合に得られる Γ_2/r_2u_2 の値の本方法による値に対する比は1.015である。しかし、3節点を超えて下流に置いた場合には、 Γ_2/r_2u_2 はいずれの方法を用いても急増大し、結果に及ぼす方法の違いによる影響が増す。

後縁点を2節点下流に置いて本方法により求めた羽根車内の水流の相対速度ベクトルと、羽根車入口を基準とした無次元圧力係数の等しい点を結んだ等圧線を図示すると、図3-10のようになる。また、羽根面上の無次元圧力係数 $\Delta\phi_r$ を無次元半径 r/r_2 に対して示すと、図3-11の実線のようなになる。図3-11には、圧力面および負圧面の測定値⁽⁹²⁾を○印および●印で、また特異点法による解析結果⁽¹⁴³⁾を破線で併記してあるが、本解析結果は実験結果とかなり良く一致している。

3. 4 結言

三角形一次要素を用いた有限要素法により羽根車内の流れを数値解析する際に、羽根車後縁部の羽根形状を曲線セグメントにより表し、Kutta条件の扱いを吟味し、以下の事柄を明らかにした。

(1) 羽根後縁でKuttaの条件を実現するには、後縁の圧力側および負圧側の近傍要素における圧力を一致させるように循環 Γ_2 を定めればよい。得られる Γ_2 は、WiesnerやStodolaのすべり係数より与えられる値にほぼ等しい。

(2) 後縁点を羽根車外周上のカンバ線上もしくは羽根負圧側よりに置く場合には、後縁点とその一つ上流の節点間の半径距離 Δr_2 の変化による影響は軽微である。また、境界形状を折れ線近似する方法を用いると Δr_2 の変化による影響がより大きく現れる。

(3) 羽根後縁部に小さい剝離領域を仮定し、羽根車下流で角運動量保存則が満足される周方向位置に後縁点を置くことにより、後縁の羽根厚みによらず、羽根面上の圧力分布が実験結果とかなり良く一致する結果が得られる。

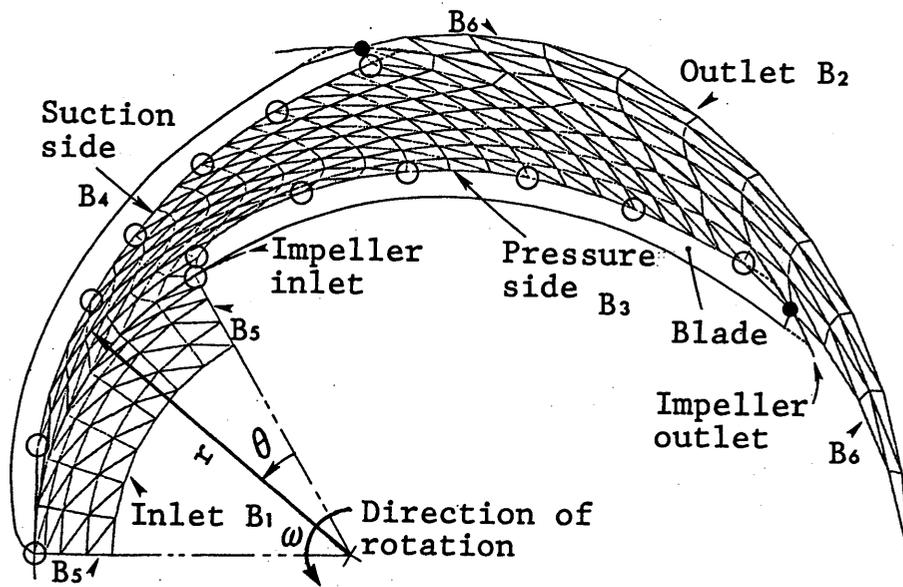


図3-1 渦巻ポンプ羽根車の形状と計算領域

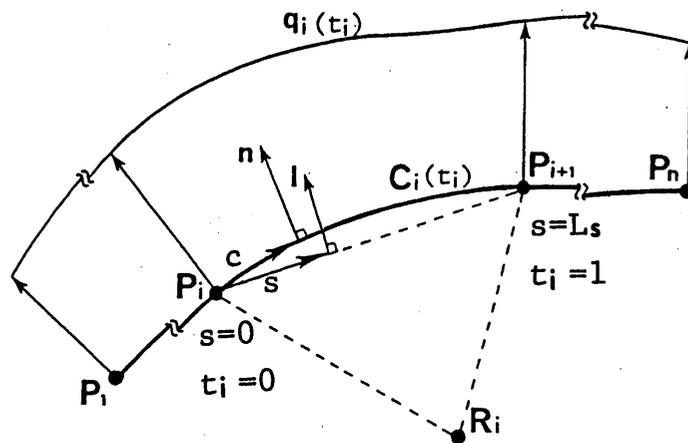
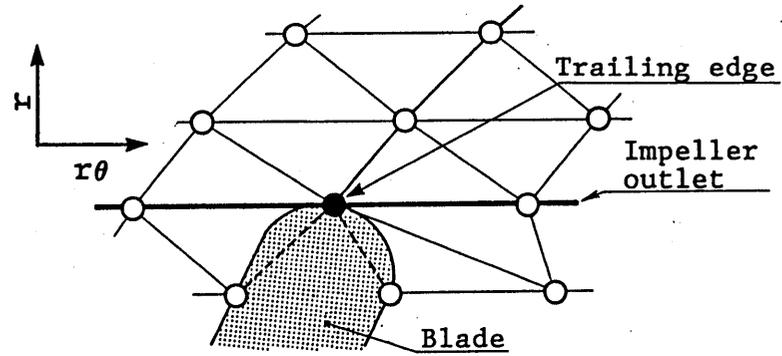
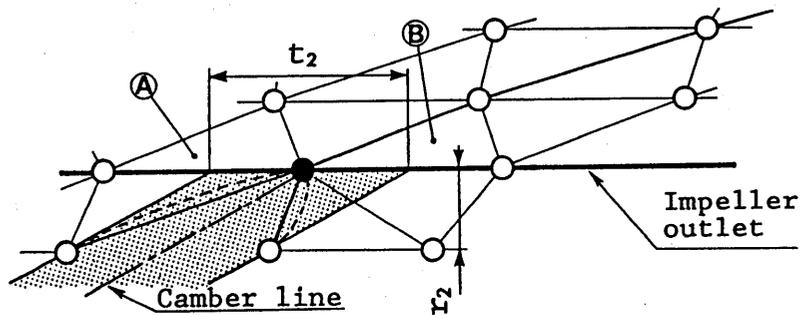


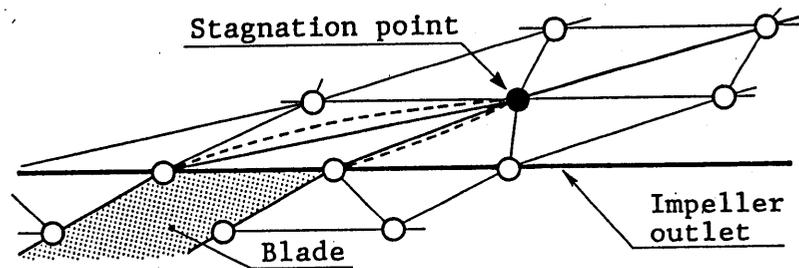
図3-2 第2種境界条件と座標系



(a)



(b)



(c)

図 3-3 羽根後縁部の扱い

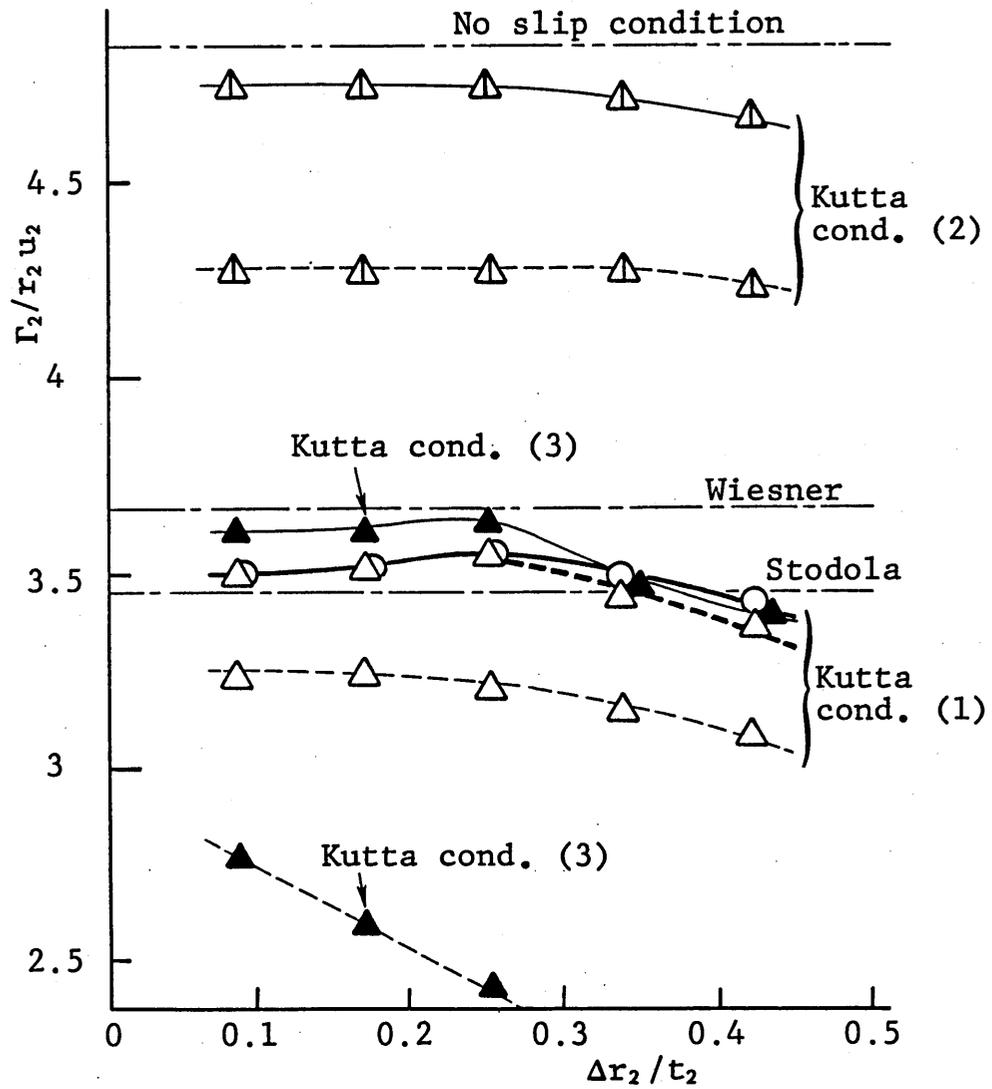
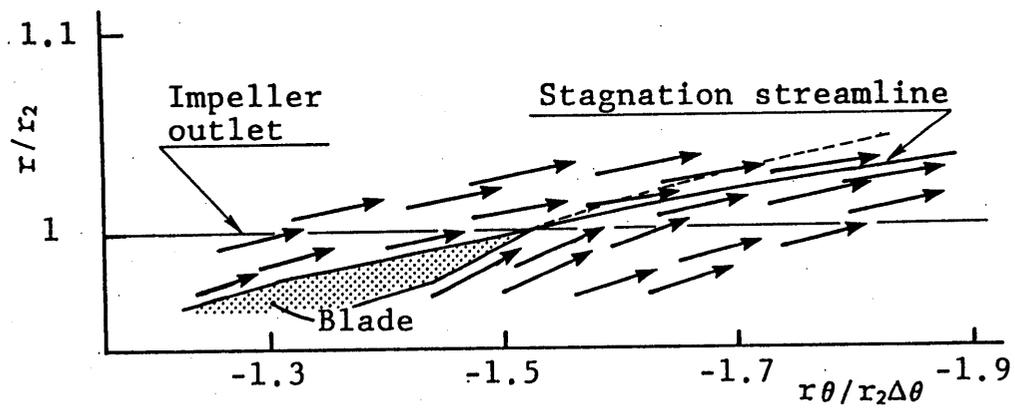
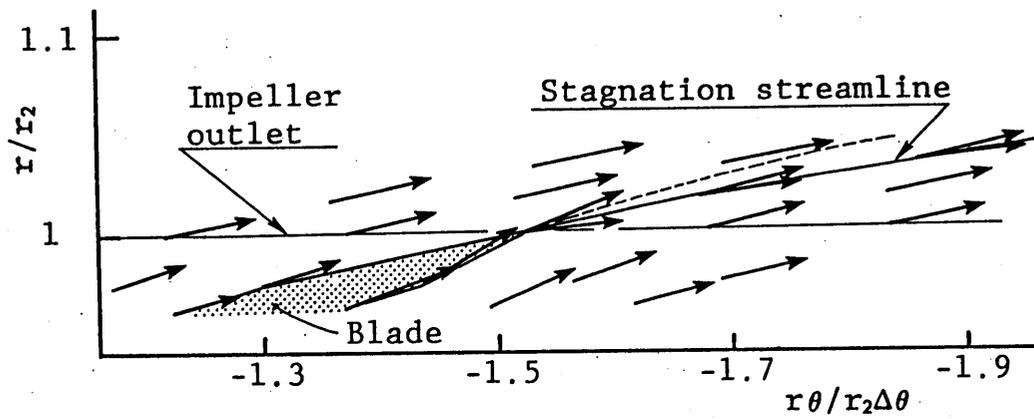


図3-4 Γ_2 に及ぼすKutta条件の扱い方の影響



(a)



(b)

図3-5 後縁近傍の水流の相対速度ベクトル

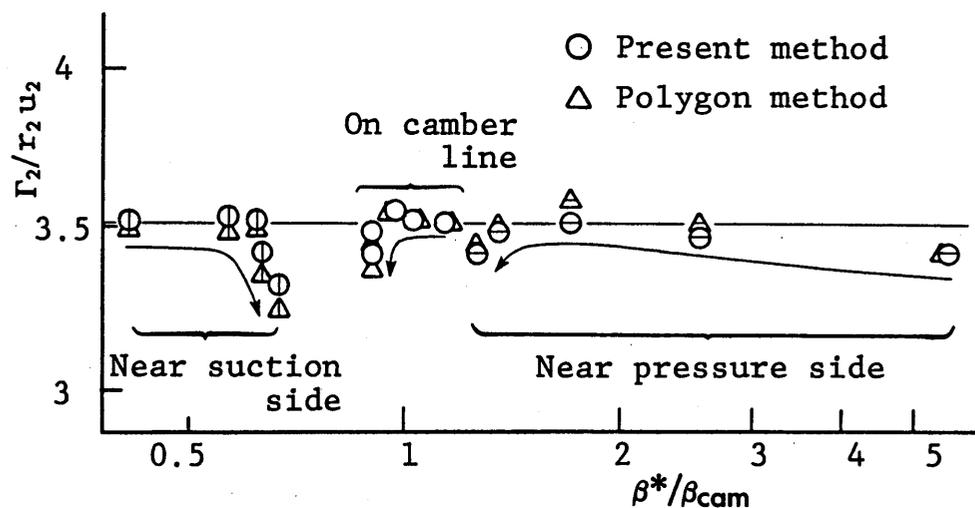


図3-6 Γ_2 に及ぼす後縁位置の影響

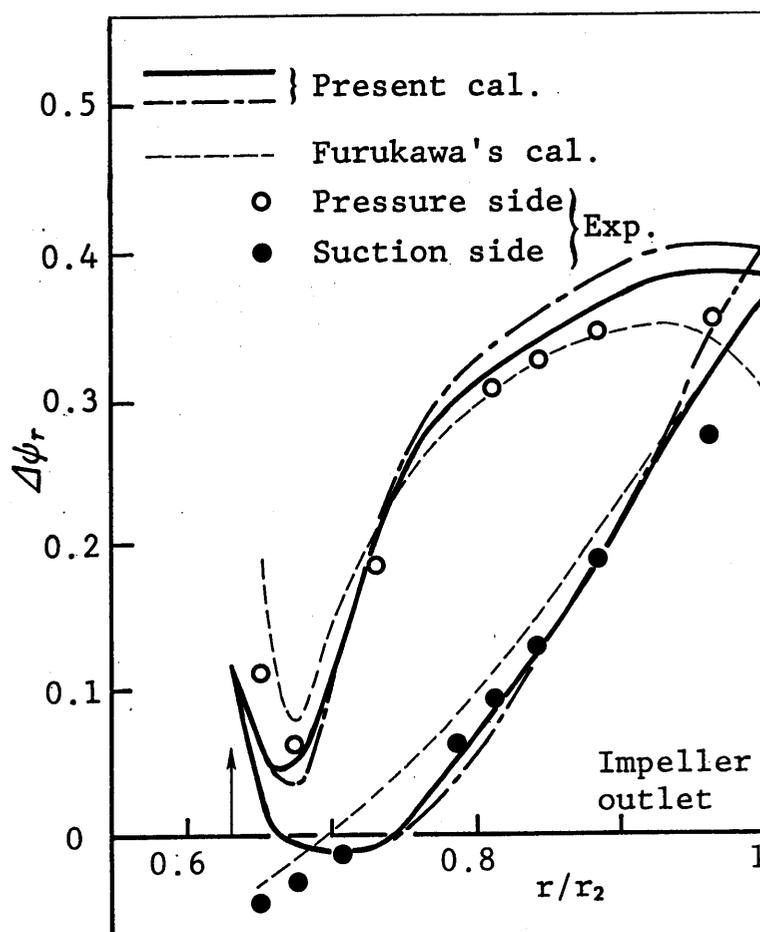


図3-7 羽根面圧力分布

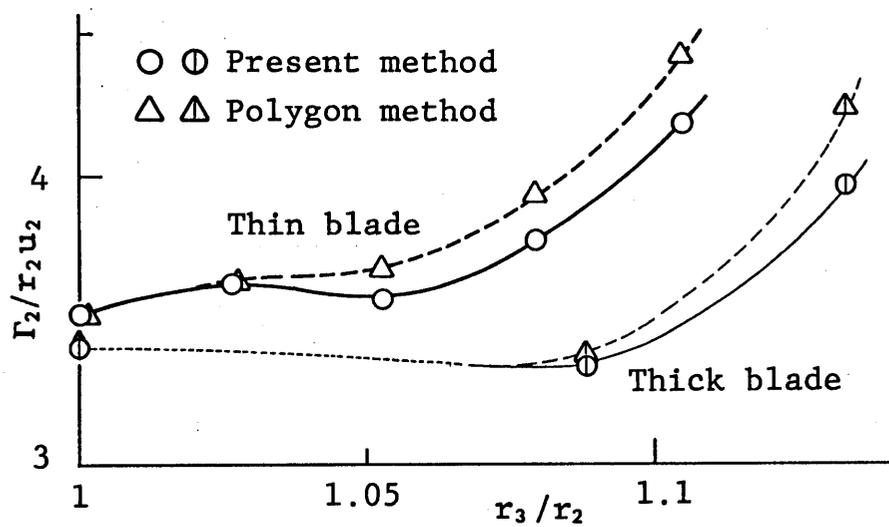


図3-8 Γ_2 に及ぼす後縁位置の影響

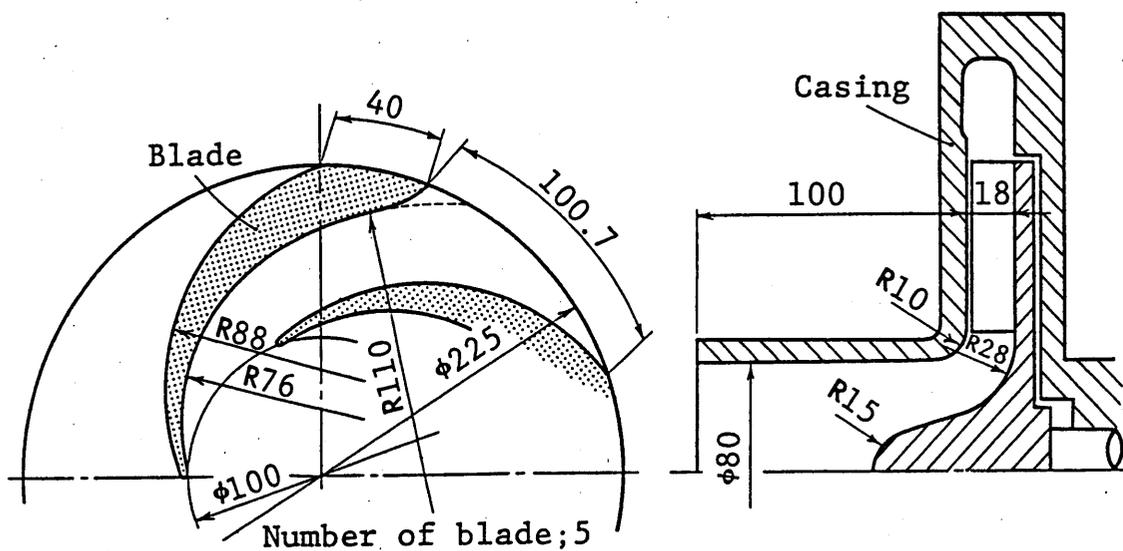


図3-9 羽根車の形状と寸法

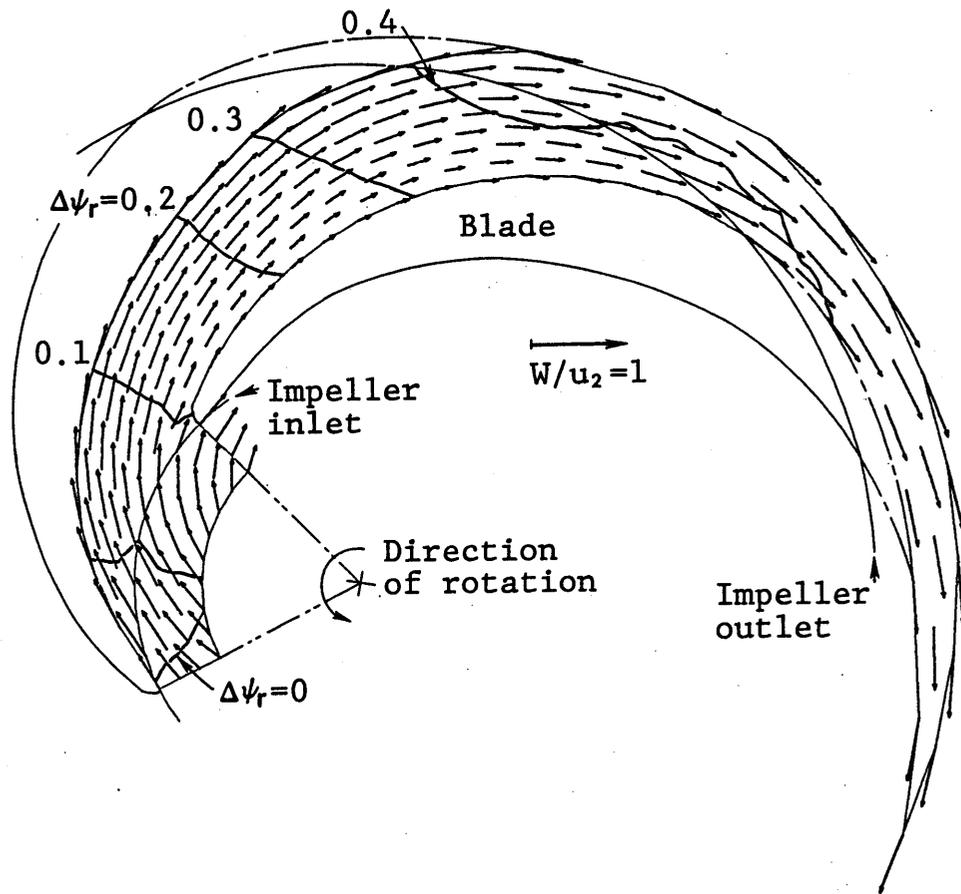


図3-10 水流の相対速度ベクトルと等圧線

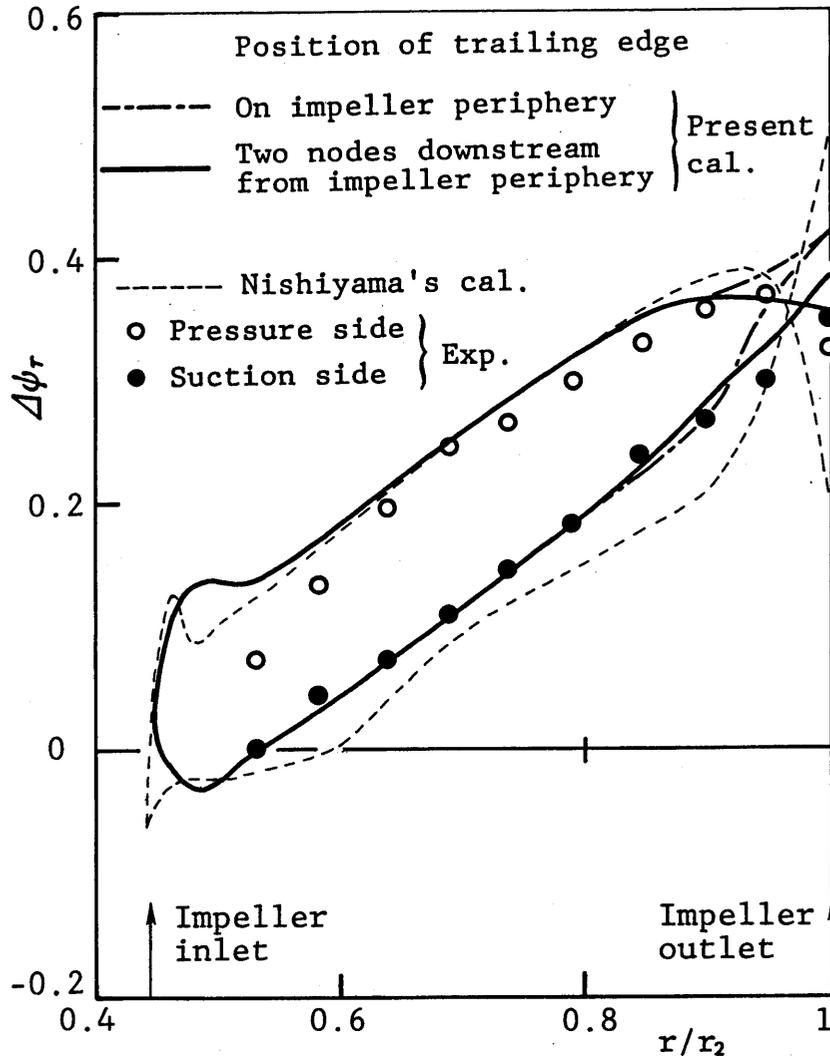


图3-11 羽根面压力分布

第4章 気泡流モデルによる渦巻ポンプ羽根車内気液二相流の 数値解析⁽¹⁵⁸⁾⁽¹⁵⁹⁾

4. 1 緒言

原子炉の一次冷却材喪失事故に対する安全解析に関連して、気液二相流時の渦巻ポンプの特性を精度良く予測することが重要であり、多くの性能予測法が提案されている。たとえば、液单相流時と二相流時の実験データに基づく单相流時と二相流時の水力損失の比、いわゆる損失ヘッド比による方法⁽⁶⁸⁾⁽⁹³⁾や無次元相似則に基づく極座標表示による方法⁽⁶¹⁾⁽⁹¹⁾、羽根車内の二相流動現象の理論的な解析に基づいて二相流方程式を二相流の流線上、つまり一次元流路に対して数値解析したFuruya⁽¹⁴²⁾の方法などがある。

ポンプ特性を正確に予測するには、それと密接に関連する羽根車内の二相流動状態を把握することが必要である。流動状態を理論的に求めたものとしては、気液間相対速度を零とした均質流モデルを用いて、翼列特性を解析し圧縮性の影響を調べた西山⁽¹³³⁾の研究、均質流モデルをEulerの式とNavier-Stokesの式に適用し、単独翼まわりの衝撃波の挙動に対する粘性の影響を解析したShidaら⁽¹³²⁾の研究がある。気液間相対速度をもつ気泡流に対し、松本ら⁽¹³⁶⁾は局所的な密度変化を考慮して二次元翼列まわりの流れをDenton法を用いて解析し、翼列性能に及ぼす気液間相対速度の影響が大きいことを示している。

回転する羽根車内の流れは強い三次元性をもつことから、上述のような一次元や二次元の解析法では羽根車内二相流の本質を見失う恐れも多い。そこで本章では松本らの解析モデル、すなわち羽根車流路の代表長さ比べ微細な気泡が均質に分散した気泡流を仮定することにより、二相流を液相の流れで代表させて表すモデルを、三次元の羽根間流路の流れ解析に拡張できるようにした。この流れ場に対する循環保存則の考察から、ポンプ入口での絶対流れに渦なし流れを仮定すれば、速度がポテンシャルをもち、準調和方程式で表される。この式を有限要素法により数値解析して液相の速度や圧力などを求め、得られた流れ場において気泡の運動方程式を数値積分することによりボイド率分布を求める、三次元連立数値解析法を示した。また、この手法を半径流形渦巻ポンプに適用し、得られたボイド率および圧力分布が実測値とかなり良く一致することを示した。

4. 2 基礎方程式

4. 2. 1 仮定

本計算に用いる仮定を以下に示す。

(1) 二相流は羽根車の代表長さ比べ微細な気泡が比較的均質に分散した気泡流状態にあり、Basset-Bousinesq-Oseenの式により気泡の運動が定まる。

(2) 二相流全体の絶対流れは定常であり、気液間の粘性抗力を除いて非粘性

流である。

(3) 流れに含まれる気泡の分裂や合体がない。

(4) 気泡は球形であり、気泡の体積は重力の影響を考慮した気泡の周囲圧力に応じて断熱変化する。また、液相は非圧縮性である。

(5) 気泡の抵抗係数は固体粒子に対する値と同一であり、気泡相互の干渉の影響は固体粒子群中で単一粒子が受ける影響と同一である。

(6) 気液間には物質および熱の移動がない。

(7) 気相の密度および運動量は、液相の値に比べ十分小さく、無視し得る。

4. 2. 2 気液二相流の基礎式

4. 2. 2. 1 単一気泡の運動方程式 水流の速度 W_a の場を質量 M の気泡が速度 V_a で運動するとき、仮定(1)および(4)に基づけば、気泡の運動方程式は次式で与えられる⁽¹²¹⁾。

$$\frac{d_a(MV_a)}{dt} = f_P + f_Y + f_D + f_U \quad (4-1)$$

ただし、単一気泡が受ける圧力勾配による力 f_P 、浮力 f_Y 、流動抗力 f_D 、および慣性質量に作用する力 f_U は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} f_P &= -(4/3)\pi R_b^3 \nabla_a p \\ f_Y &= (\rho_l / \rho_g - 1) Mg \nabla_a (r \cdot \sin \theta) \\ f_D &= (1/2) \rho_l (\pi R_b^2) C_{DTP} |W_a - V_a| (W_a - V_a) \\ f_U &= (4/3) \pi \rho_l C_U \cdot \left[\frac{Da(R_b^3 W_a)}{Dt} - \frac{d_a(R_b^3 V_a)}{dt} \right] \end{aligned} \quad (4-2)$$

$$\frac{D_a}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + W_a \cdot \nabla_a$$

一定角速度 ω で回転する回転座標系(図4-1)においては、式(4-1)の左辺および式(4-2)の液相の加速度項は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \frac{d_a V_a}{dt} &= \frac{dV}{dt} + 2\omega \times V + \omega \times (\omega \times r) \\ \frac{D_a W_a}{Dt} &= \frac{DW}{Dt} + 2\omega \times W + \omega \times (\omega \times r) \end{aligned}$$

また、絶対流れの速度ベクトルと相対速度ベクトルとの関係は、

$$W_a = W + \omega \times r, \quad V_a = V + \omega \times r$$

気泡の抵抗係数 C_{DTP} はボイド率 α の気泡群中における単一気泡に対する値であり、仮定(5)に基づいて空隙率 $(1-\alpha)$ の場における固体粒子の液相に対する相対速度の実験値⁽¹⁶⁰⁾から求めると、

$$C_{DTP} = (1-\alpha)^{-q} C_D \quad (4-3)$$

ただし、 C_D は干渉の影響がないときの単一気泡の抵抗係数であり、 q は気泡レイノルズ数 Re の関数として次式で表される。

$$q = \begin{cases} 8.9 Re^{-0.1} & (1 < Re < 500) \\ 4.78 & (500 \leq Re < 7000) \end{cases}$$

4. 2. 2. 2 連続式 気液二相流の絶対流れに対する連続式は、仮定(2)より、次式で表される。

$$\nabla_a [(1-\alpha) \rho_l \mathbb{W}_a + \alpha \rho_g \mathbb{V}_a] = 0 \quad (4-4)$$

仮定(1)、(7)を用いれば、式(4-4)より気泡流に対する連続式を得る。

$$\nabla_a [(1-\alpha) \rho_l \mathbb{W}_a] = 0 \quad (4-5)$$

4. 2. 2. 3 運動方程式 仮定(2)のもと、気液二相流の絶対流れの単位体積に対して運動量の収支をとると、次式を得る。

$$\nabla_a [(1-\alpha) \rho_l \mathbb{W}_a \mathbb{W}_a + \alpha \rho_g \mathbb{V}_a \mathbb{V}_a] = -\nabla_a p \quad (4-6)$$

式(4-6)の関係を各相について表せば、液相に対しては

$$\nabla_a [(1-\alpha) \rho_l \mathbb{W}_a \mathbb{W}_a] = -(1-\alpha) \nabla_a p - F \quad (4-7)$$

気相に対しては

$$\nabla_a (\alpha \rho_g \mathbb{V}_a \mathbb{V}_a) = -\alpha \nabla_a p + F \quad (4-8)$$

ここで、Fは単位流体要素中における、気泡と水流の相対速度により生じる流動抗力の総和である。

いま、式(4-6)に仮定(1)、(7)を用いると、気泡流に対する運動方程式を得る。

$$\nabla_a [(1-\alpha) \rho_l \mathbb{W}_a \mathbb{W}_a] = -\nabla_a p \quad (4-9)$$

式(4-9)に連続式(4-5)を代入し、液相の密度 ρ_l は一定とする仮定(4)を用いて変形整理すると、気泡流の絶対流れに対するオイラーの運動方程式を得る。すなわち、

$$(1-\alpha) \mathbb{W}_a \cdot \nabla_a \mathbb{W}_a = -\nabla_a p / \rho_l \quad (4-10)$$

式(4-10)を相対速度ベクトルで表すと、

$$(1-\alpha) \mathbb{W} \cdot \nabla \mathbb{W} + (1-\alpha) \boldsymbol{\omega} \times (2\mathbb{W} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \nabla p / \rho_l = 0 \quad (4-11)$$

4. 2. 3 ボイド率の定義

本章では、後述するように三次元有限要素法により液相速度を求めるため、流れの領域を有限要素に分割する。要素の体積が単一気泡の体積に比べて十分大きい場合には、ボイド率 α は、要素体積に対する要素に含まれる気泡の総体積の比により定義できる。すなわち、気泡の数密度が n 、気泡の平均半径が \bar{R}_b である要素に対する α は、次式で与えられる。

$$\alpha = (4/3) \pi \bar{R}_b^3 \cdot n \quad (4-12)$$

ただし、 \bar{R}_b の値は、仮定(4)より、気泡の周囲圧力から定める。この圧力は重力の影響を含んでいるが、気泡の寸法は一般に小さく気泡の運動に及ぼすその影響はきわめて微小である⁽¹²¹⁾から、実質的には重力の影響を考慮しない圧力 p により \bar{R}_b の値が変化する。したがって、 α は p および n の関数とみなすことができる。すなわち、

$$\alpha = \alpha(p, n) \quad (4-13)$$

4. 2. 4 循環保存則

液单相流時に循環保存則が成り立つ場合、羽根車上流のポンプ入口の絶対流

れに渦なし流れを仮定すれば、羽根車内の流れも渦なしとなり、液相速度がポテンシャルをもつ。以下では、気泡流に対する循環保存則を考察する。

絶対流れ場における任意の閉曲線(線素 $d\ell$ 、面素 dS)に沿う循環 Γ を時間に関して微分し、Stokesの定理により変形すれば次式を得る。

$$\frac{D_a \Gamma}{Dt} = \frac{D_a (\oint \mathbf{W}_a \cdot d\ell)}{Dt} = \int \nabla_a \times (\mathbf{W}_a \cdot \nabla_a \mathbf{W}_a) \cdot dS \quad (4-14)$$

さて、式(4-10)で表される絶対流れの気泡流に対して式(4-14)を適用し、 ρ_l が一定の仮定を用いれば、次式を得る。

$$\frac{D_a \Gamma}{Dt} = -(1/\rho_l) \int \nabla_a \times \frac{\nabla_a p}{1-\alpha} \cdot dS \quad (4-15)$$

式(4-13)より α は p および n の関数であるから、 $\nabla_a \times \nabla_a p = 0$ 、 $\nabla_a p \times \nabla_a p = 0$ なる関係を用いて式(4-15)を変形し、無次元化して表すと、

$$\frac{D_a \Gamma^*}{Dt^*} = -(1/\rho_l) \int \left(\frac{\partial \alpha}{\partial n^*} \right) (\nabla_a^* p^* \times \nabla_a^* n^*) \cdot dS^* \quad (4-16)$$

ただし、 $\Gamma^* = \Gamma / (r_1 u_1)$ 、 $t^* = t / (1/\omega)$ 、 $n^* = n / (1/r_1^3)$ 、 $p^* = p / (\rho_l u_1^2)$ 、 $\nabla_a^* = \nabla_a / (1/r_1)$ 、 $dS^* = dS / r_1^2$ 。

ここで、式(4-16)の右辺の被積分項のオーダーを評価してみる。 $\partial \alpha / \partial n^*$ に関しては式(4-12)を用い、

$$\frac{\partial \alpha}{\partial n^*} = (4/3) \pi \cdot \frac{(R_{ba}/r_1)^3 (p_0/p)}{(1-\alpha)^2} \approx 0(10^{-11})$$

つぎに、気泡は慣性力が極めて小さいため圧力勾配の存在する方向に水流と相対速度をもって流れ⁽¹²¹⁾、その方向に気泡の数密度 n^* の勾配が生じるので、定常流では $\nabla_a^* p^* // \nabla_a^* n^*$ なる関係が成り立つ。よって、 $\nabla_a^* p^* \times \nabla_a^* n^* \ll 0(1)$ 。したがって、式(4-16)の左辺は以下のような関係にある。

$$\frac{D_a \Gamma^*}{Dt^*} < 0(10^{-11})$$

すなわち、気泡流状態では時間に対する循環 Γ^* の変化割合は極めて微少であり、一定であると見なすことができる。よって、羽根車上流のポンプ入口での絶対流れに渦なし流れを仮定すれば、羽根車内においても渦なし流れとなり、その速度 \mathbf{W}_a はポテンシャル ϕ をもつ。速度ベクトル \mathbf{W}_a と相対速度ベクトル \mathbf{W} 、ならびに三次元速度ポテンシャル ϕ の間には、次の関係が成り立つ。

$$\mathbf{W}_a = \mathbf{W} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = -\nabla_a \phi \quad (4-17)$$

式(4-17)を連続式(4-5)に代入すると、 ρ_l は一定であると仮定しているから、気泡流の絶対流れは準調和方程式で表される。すなわち、

$$\nabla_a [(1-\alpha) \nabla_a \phi] = 0 \quad (4-18)$$

4. 3 数値解析法

4. 3. 1 計算条件および境界条件

解析の対象としたポンプは、低比速度の半径流形渦巻ポンプ[比速度:180(m, m³/min, rpm)、流量:0.9m³/min、揚程:19m、回転数:1750rpm]である。これは、

既報⁽⁹³⁾の実験で用いたポンプとほぼ同一形状である**1。

計算領域は、図4-1に示すように、一つの羽根間流路とこの羽根1ピッチに相当する上流および下流の流路部分とする。ポンプ吸込側は同心円筒間の環状流路、吐出側は平行板流路である。本解析では、定格回転数での定格流量($\phi=0.08$)の状態において、ポンプ吐出質量流量は二相流時においてもつねに一定に保ち、ポンプの入口断面($z_0/r_1=-1.8$)での気液体積流量比 α_0 を種々に変えた場合の流動状態を求めた。ただし、入口断面における気泡の初期直径 $2R_{b0}$ は、このポンプの運転条件のとき羽根車入口で観察される最も頻度の高い値 0.3mm ⁽⁹³⁾とした。また、入口断面において、気泡は水流と同一速度で均一に分散して流入し、ボイド率分布が一様であるものと仮定した。

つぎに、式(4-18)が満たすべき境界条件について述べる。入口断面と出口断面の境界 B_1 、 B_2 、羽根表面 B_3 、 B_4 、ハブとシュラウド面 B_5 、 B_6 における境界条件は、境界面の単位法線ベクトルを \mathbf{n} とすると、半径流ポンプの場合、次式で与えられる。

$$(1-\alpha)\mathbf{n}\cdot\nabla\phi = \begin{cases} W_{az} \\ -W_{ar} \\ \pm \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \\ 0 \end{cases} \begin{cases} (B_1) \\ (B_2) \\ (B_3, B_4) \\ (B_5, B_6) \end{cases} \quad (4-19)$$

残りの境界 $B_7\sim B_{10}$ ではつぎの周期性の条件が成立する。

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta+2\pi/N, z) &= \phi(r, \theta, z) - \Gamma/N \\ \frac{\partial\phi(r, \theta+2\pi/N, z)}{\partial\mathbf{n}} &= -\frac{\partial\phi(r, \theta, z)}{\partial\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (4-20)$$

ただし、羽根後縁においてKuttaの条件が満足されねばならないから、後縁の圧力側と負圧側の圧力が一致するように、循環 Γ の値は繰り返し計算⁽¹⁵⁴⁾により定める。

ポンプ入口(B_1)では、流れに予旋回がなく圧力およびボイド率分布は一様とする。すなわち、速度(W_{az})分布は一様とする。また、ポンプ出口(B_2)における速度($-W_{ar}$)分布は、この断面内で軸方向速度成分がなく、流速およびボイド率分布が周方向に一様と仮定して式(4-11)より得られる半径平衡式

$$\frac{dW_{ar}^2}{dz} = (\omega/\pi) \left(\frac{d\Gamma}{dz} \right) - \frac{1}{(2\pi r)^2} \left(\frac{d\Gamma^2}{dz} \right) \quad (4-21)$$

および流れの連続式とより定める。

ポンプ入口(B_1)で初期位置を異にする多数の気泡に対し、各気泡の運動方程式を解くことにより、 B_1 上で一様なボイド率分布を得ることができる**2。なお、

**1 実験で用いたポンプ羽根車は二次元羽根であり羽根後縁が厚い。そのため、後縁におけるKuttaの条件を実現し難い。そこで、本解析では羽根厚みは一定(=6mm)とし、流路断面積がほぼ一定となるように羽根の溝深さ(軸方向間隔)のみを半径方向に変えてある。

**2 気泡の初期位置は周方向に16列、半径方向に8列の合計128箇所とし、気泡間の半径方向距離 Δr_0 および周方向角度 $\Delta\theta_0$ は α_0 によらず一定($\Delta r_0/r_1=0.088$, $\Delta\theta_0/\Delta\theta=0.063$)とした。

B_1 上のボイド率 α (入口ボイド率 α_0)は以下の方法により求められる。すなわち、単一気泡の運動方程式を解くことにより気泡の軌道、つまり境界 B_1 に面する各検査体積における気泡の滞在時間 Δt や平均半径 \bar{R}_b が求められる。また、入口ボイド率 α_0 は、入口断面の気相の体積流量を規定し、単位時間当りの流入気泡数 \dot{n} を与える^{**3}。したがって、各検査体積における Δt と \dot{n} の積の総和を検査体積の体積で除した値が気泡の数密度 n を表すので、式(4-12)から各検査体積におけるボイド率 α が求められる。

4. 3. 2 有限要素法

境界条件式(4-19)~(4-21)のもと、式(4-18)を有限要素解析することにより液相速度 \mathbf{W} が求められる。本計算では、四面体一次要素を用いて解析するため、得られる速度は各要素内で一定値をとる。しかし、各節点における速度を、当該節点を共有する全要素に対する速度を用いて最小二乗法により求めることができる。また、同様な方法により節点におけるボイド率 α が得られる。

速度 \mathbf{W} とボイド率 α が全節点で求まれば、式(4-11)により各節点の圧力勾配が知れる。したがって、境界条件としてポンプ入口断面(B_1)で入口圧力を与え、FEMの形状関数を用いた最小二乗法により圧力勾配を数値積分⁽¹⁶¹⁾すれば、ポンプ内の圧力分布が求められる。

4. 3. 3 数値解析法

本解析の仮定の下で導かれた二相流の基礎方程式は、ボイド率[式(4-12)]、圧力[式(4-11)]および液相の速度ポテンシャルに関する方程式[式(4-18)]に帰着した。図4-2に示すように、これらの式を連立反復解析することにより、ボイド率 α 、速度 \mathbf{W} および圧力 p の収束解が得られる。以下に計算手順を示す。

(1) 初期値($i=0$)として、ボイド率が零($\alpha_i=0$)の場合における \mathbf{W}_i 、 p_i を求める。これには4.3.1節で述べた境界条件のもとで三次元有限要素法⁽¹²²⁾を用いる。

(2) ボイド率分布を求めるために、 α_i 、 \mathbf{W}_i 、 p_i の流れ場において初期位置を異にする多数の単一気泡の運動方程式(4-1)を解き、各検査体積での α_{i+1} を式(4-12)から求める。

(3) α_{i+1} を用いた式(4-18)から、 ϕ_{i+1} を有限要素法により求める。なお解の発散を防止し、かつ収束性を高めるため、 $\alpha_{i+1}=\alpha_i+\beta(\alpha_{i+1}-\alpha_i)$ とした。ここで β は減衰係数であり、本解析では $\beta=0.5$ とした。

(4) ϕ_{i+1} を微分して⁽¹²²⁾、式(4-17)から \mathbf{W}_{i+1} を求める。

(5) α_{i+1} 、 \mathbf{W}_{i+1} を用いて式(4-11)から圧力勾配 ∇p_{i+1} を求め、これを数値積

^{**3} \dot{n} の値は、気泡の軌道上における隣接気泡間の軸方向距離 Δz_0 に相当する。たとえば、 $\alpha_0=0.01$ のとき、最も管壁寄りの初期位置では $\Delta z_0/r_1=0.012$ である。気泡間距離が、半径方向、周方向および軸方向で異なるにもかかわらず、初期断面からやや下流(図4-1の $i=1\sim 3$ の断面)の位置までの一様な軸方向流れ場における各要素において、ほぼ同一のボイド率が得られた。

分することにより p_{i+1} を求める。

(6) 羽根後縁における圧力が Kutta の条件を満足するように循環 Γ_{2i+1}^j を修正してステップ(3)へ戻り、再び流れ場を求める。修正後の Γ_{2i+1}^{j+1} は、

$$\Gamma_{2i+1}^{j+1} = \Gamma_{2i+1}^j + \beta (1 - p_p/p_s) \cdot \Gamma_{2i+1}^j \quad (4-22)$$

ただし、 p_p および p_s は後縁の圧力側および負圧側の圧力であり、減衰係数 β は 1 とした。

(7) (2) から (6) の計算を、ボイド率分布が一定値に収束するまで、すなわち Γ_{2i} が収束するまで反復する。

4. 4 解析結果と考察

4. 4. 1 ボイド率分布

入口ボイド率 α_0 が 0.05 のときのボイド率 α の分布を図 4-3 に示す。ただし、子午面流路内における α/α_0 に対する等ボイド率線を示してあり、図 4-3(a) は羽根の負圧面(図 4-1 の $k=9$ の断面)、(b) は羽根間流路中央 ($k=5$)、(c) は圧力面 ($k=1$) 上の結果である。 α は羽根車入口領域で局所的に高く、とくにシュラウド側の負圧面上で著しく、その最大値は α_0 の 4 倍以上に達する。しかし、 α はハブ側ではほとんど零である。このように羽根車入口の羽根負圧面上に高ボイド率領域が存在するのは、ポンプ入口より流入した気泡が、羽根車入口直前の流路曲がり部において曲がり内側の低圧領域へ移動し、そのまま羽根車内をシュラウド面に沿って流れる⁽¹²¹⁾からである。

図 4-4 は、 $\alpha_0=0.05$ に対する羽根間流路内のボイド率分布であり、図 4-4(a) はシュラウド面(図 4-1 の $j=5$ の断面)、(b) はシュラウドとボスの中央断面 ($j=3$) 上の結果を示す。シュラウド面上のほうが中央断面上よりも α が高い。また、羽根圧力側から負圧側に向かって α が増加し、羽根車入口近傍の負圧側に高ボイド率領域が存在する。この領域では、気泡の流れ方向に対して圧力勾配の正負の符号が反転するため、気泡の密集が生じやすい⁽¹²¹⁾からである。このような分布の状態は、測定値の傾向⁽⁹⁴⁾⁽⁹⁵⁾とよく一致する。しかし、ボイド率の最大値は測定値の約 1/2 である。これは、流体の粘性の影響が考慮されていないことによるものだろう。

羽根車入口直後の流路断面 ($r/r_1=1.1$) におけるボイド率分布を示すと図 4-5 のようになる。ただし、入口ボイド率 α_0 が 0.02、0.05、0.07 のときの結果を併記してある。 α_0 が増すとボイド率の絶対値も増すが、いずれの α_0 においても、分布形状はほぼ相似であり分布が著しく不均一である。

4. 4. 2 圧力分布

図 4-6 は、ポンプ入口の静圧を基準とした無次元圧力係数 $\Delta\phi_r$ の等しい点を結んだ子午面内の等圧線を、種々の入口ボイド率 α_0 に対して線の種類を変えて示してある。図 4-6(a) は羽根負圧面(図 4-1 の $k=9$ の断面)、(b) は羽根間流路中央 ($k=5$)、(c) は圧力面 ($k=1$) 上の結果を示す。水単相流時 ($\alpha_0=0$) には、一点鎖線

で図示してあるように、羽根車内の全域で等圧線がポンプ軸にほぼ平行である。しかし、 α_0 が増すとシュラウド側でボイド率が高く圧力低下が大になるため等圧線は右下りになり、 α_0 の増大とともに傾きが大になる。この傾向は下流ほど顕著であり、羽根車出口の圧力側[図4-6(c)]でとくに著しい。

羽根間流路内の圧力分布を図4-7に示す。図4-7(a)はシュラウド面(図4-1のj=5の断面)上の結果である。 $\Delta\phi_r \leq -0.05$ なる低圧領域が羽根車入口の羽根負圧側に存在する。 α_0 が増すとこの領域は羽根車入口方向に縮退し、圧力側の前縁近傍を除いて、 $\alpha_0 \geq 0.05$ に対する等圧線が羽根車出口方向に大きく移動する。このような傾向は、気液二相流時に測定された本ポンプの羽根車内圧力分布の傾向⁽⁹²⁾と良く一致する。ただし、羽根車出口部の領域では両者の傾向が異なる。これは、流体の粘性により生ずる二次流れの影響がこの領域で顕著に現れるからである。図4-7(b)は、シュラウドとボスの中央断面(j=3)上の結果である。 α_0 に対する等圧線の変化の様子はシュラウド面上の結果とほぼ同じであるが、変化量はかなり小さい。

4. 5 結言

羽根車内二相流を気泡流モデルに基づいて理論的に考察し、流動状態を求める三次元数値解析法を示すとともに、これを低比速度の半径流ポンプに適用して、以下の事柄を明らかにした。

(1) 羽根車の流路の代表長さに比べ微細な気泡が均質に分散した気泡流は、与えられたボイド率分布をもつポテンシャル場として準調和方程式で表すことができる。

(2) ボイド率は羽根車入口部で著しく高く、かつ不均一である。その最大値は入口ボイド率の4倍以上に達する。

(3) 半径流形羽根車内の圧力上昇量は、水単相流時には軸方向にほぼ一定であるが、二相流時にはボイド率が高いシュラウド側で低下し、軸方向に不均一となる。この傾向は羽根車出口においてとくに顕著に現れる。

(4) ボイド率および圧力分布の解析結果が測定値とかなり良く一致することから、本数値解析法により、任意形状をもつ羽根車内の気泡流を三次元解析できる。

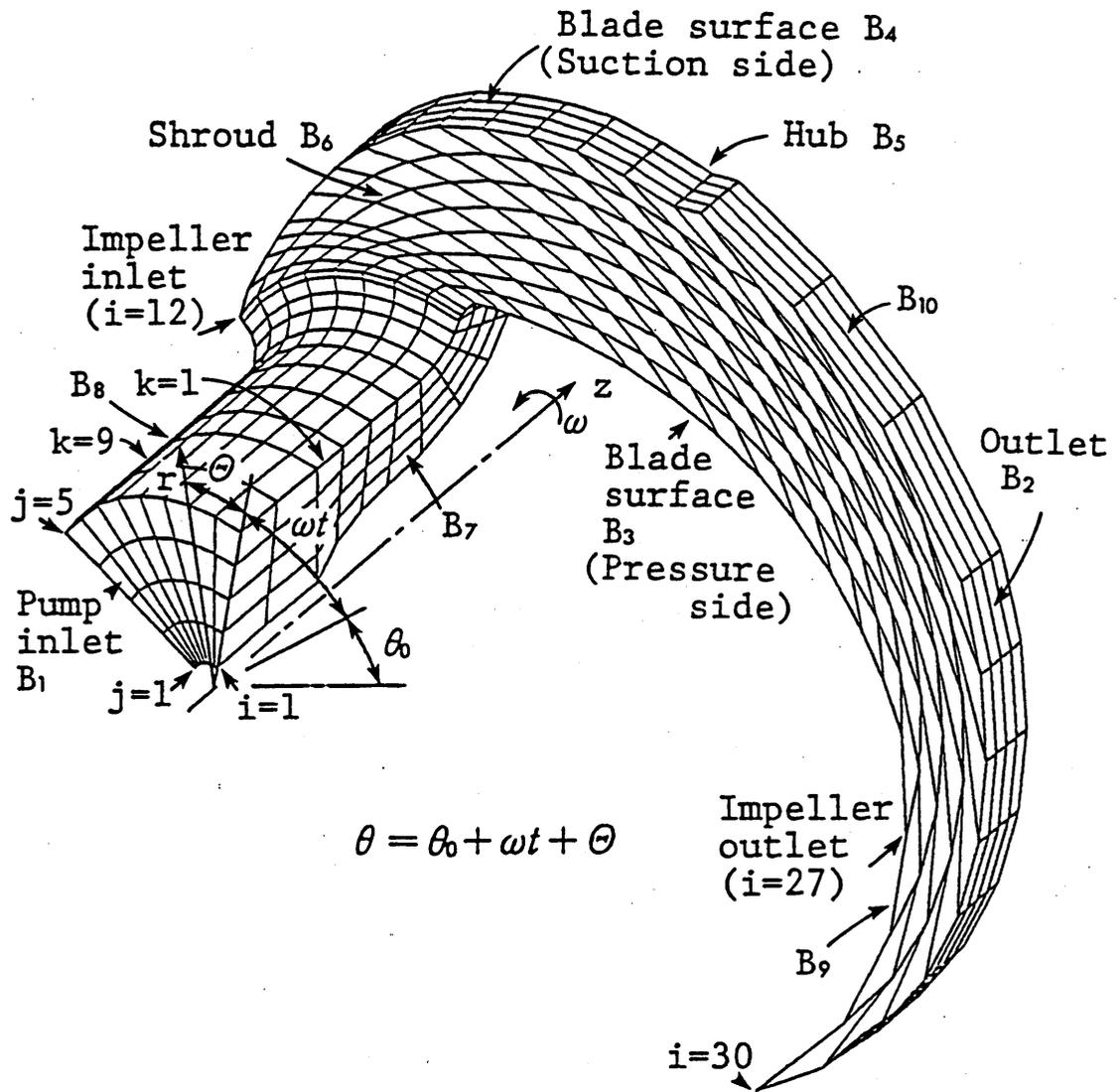


図 4-1 流れの領域

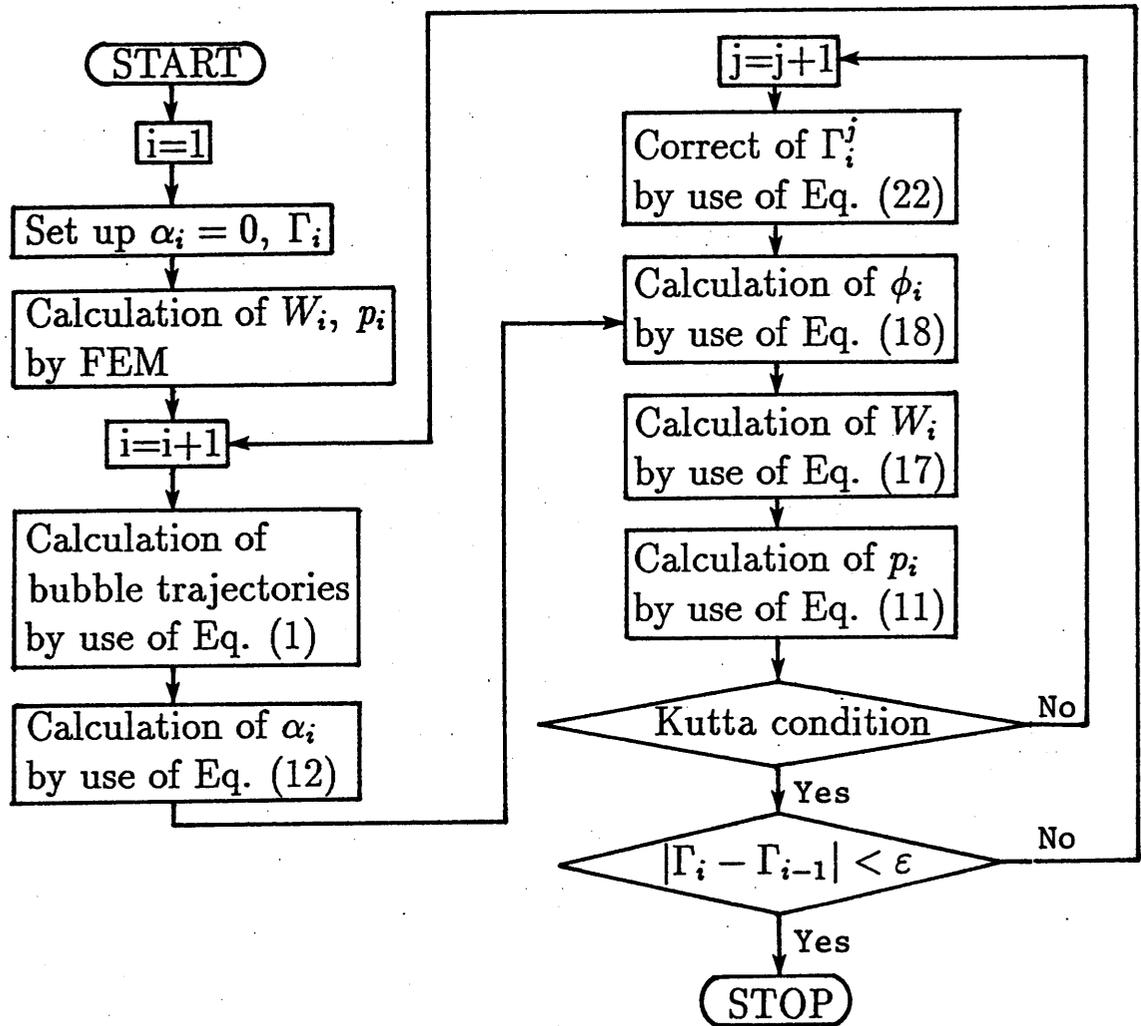


図4-2 計算の流れ図

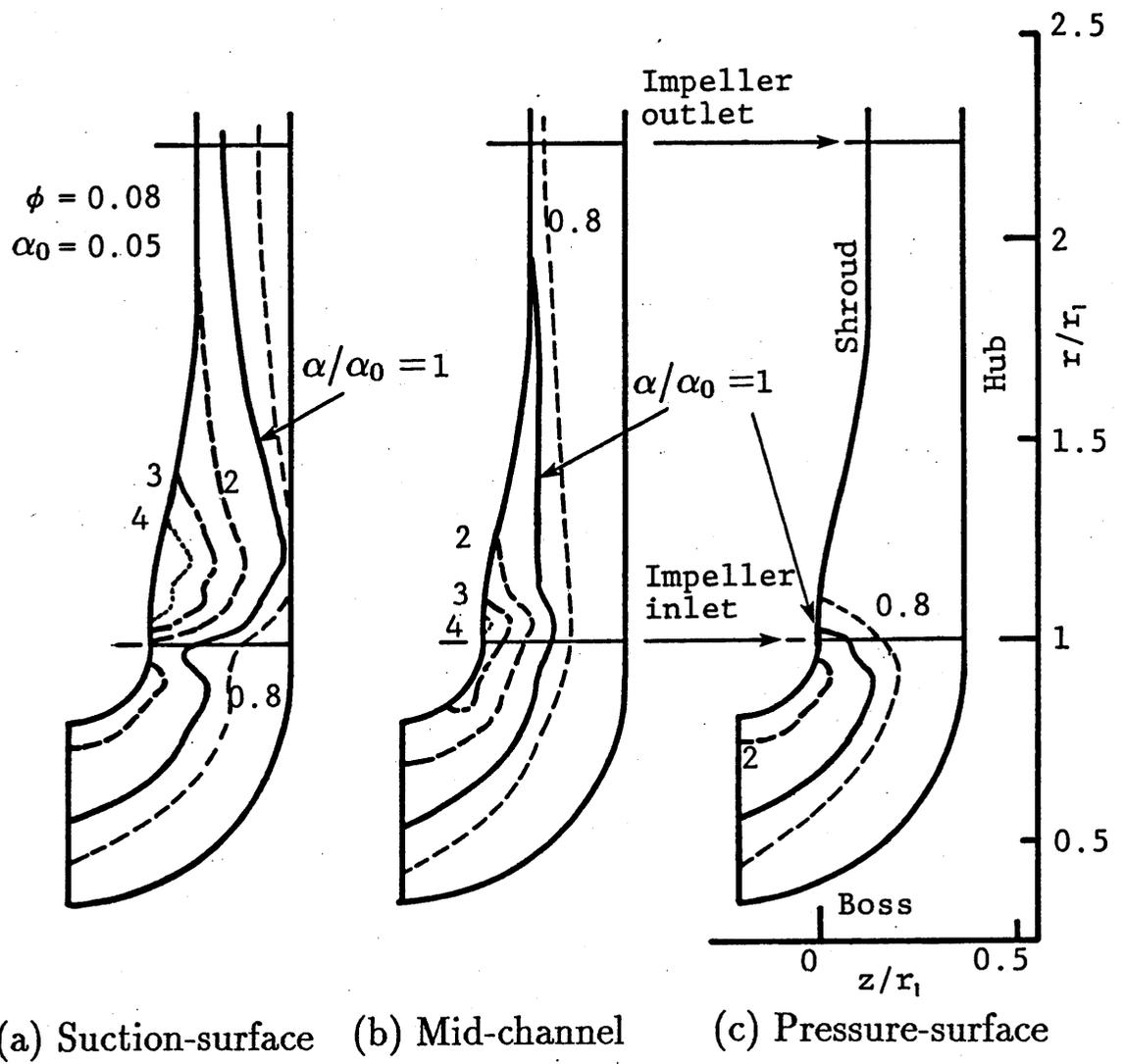
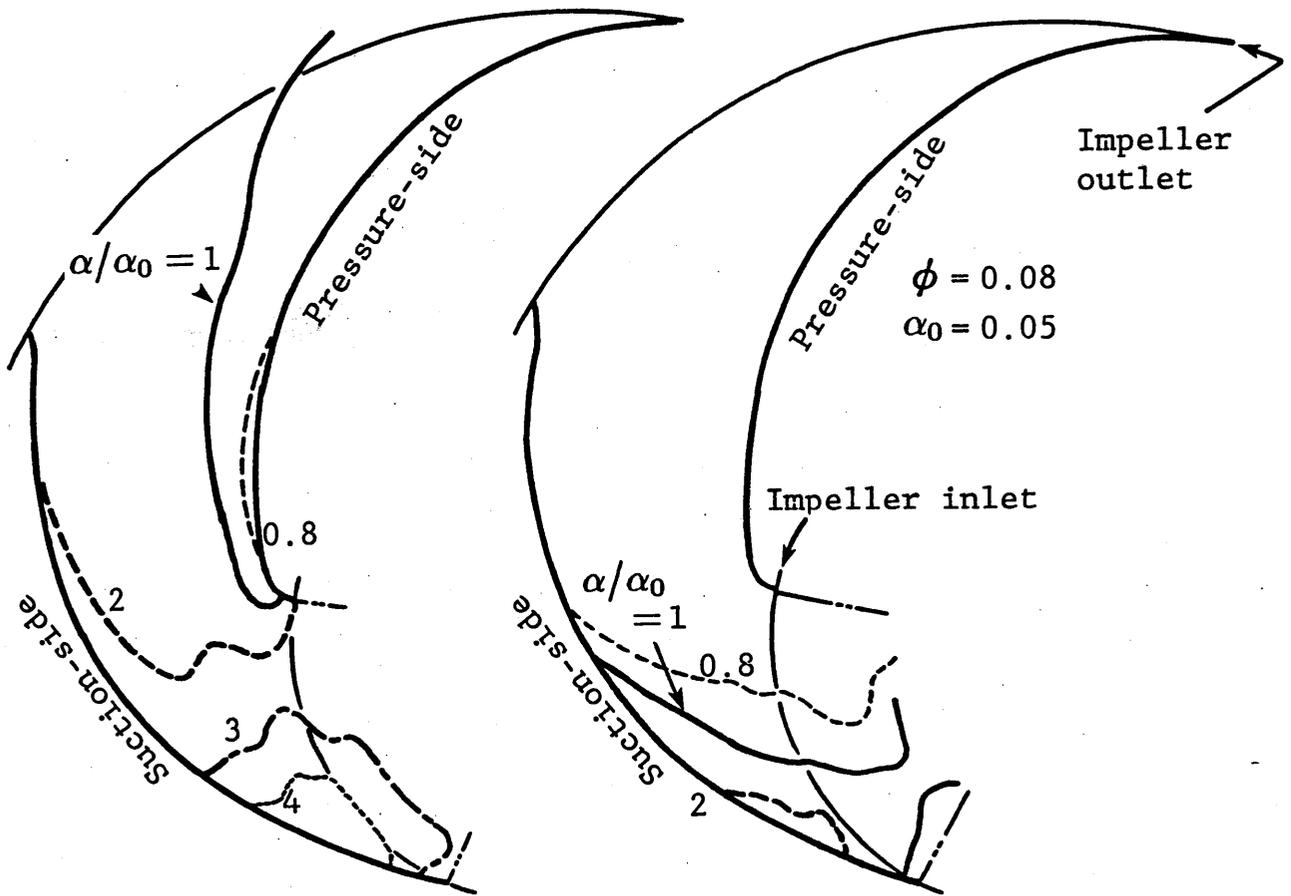


図4-3 子午面流路内のボイド率分布 ($\alpha_0 = 0.05$)



(a) Result on shroud (b) Result on mid-channel

図4-4 羽根間流路内のボイド率分布 ($\alpha_0 = 0.05$)

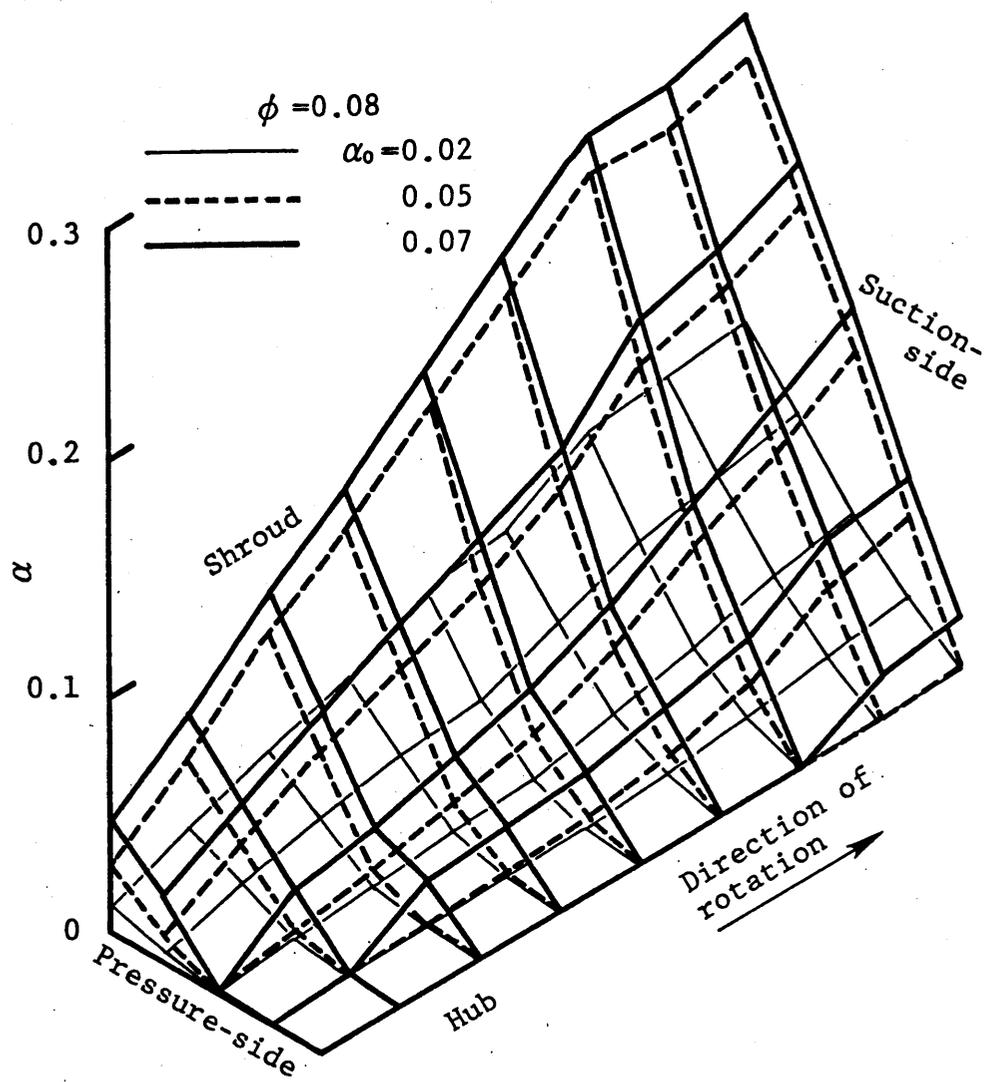


図4-5 羽根車入口直後の断面 ($r/r_1=1.1$) 内のボイド率分布

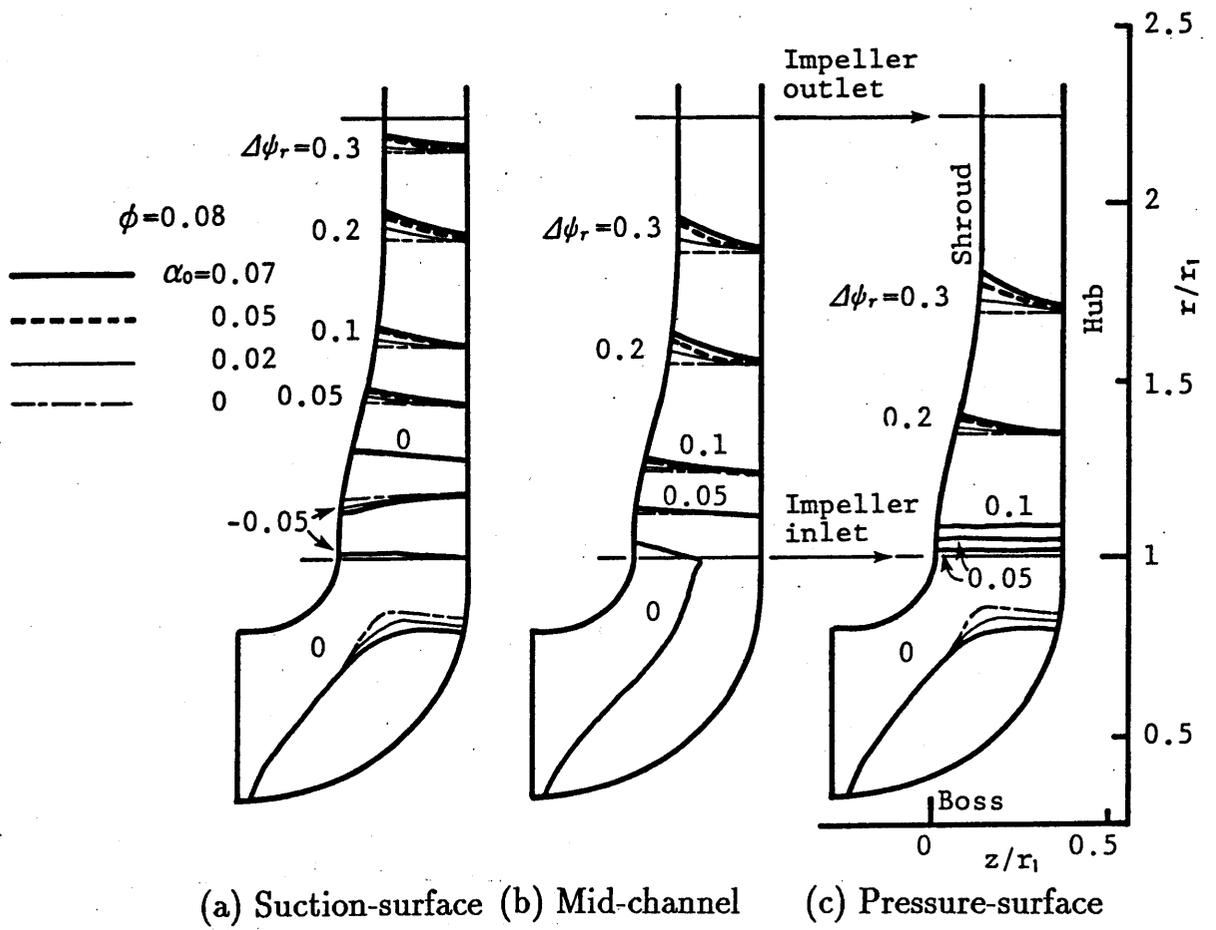


図4-6 子午面流路内の圧力分布

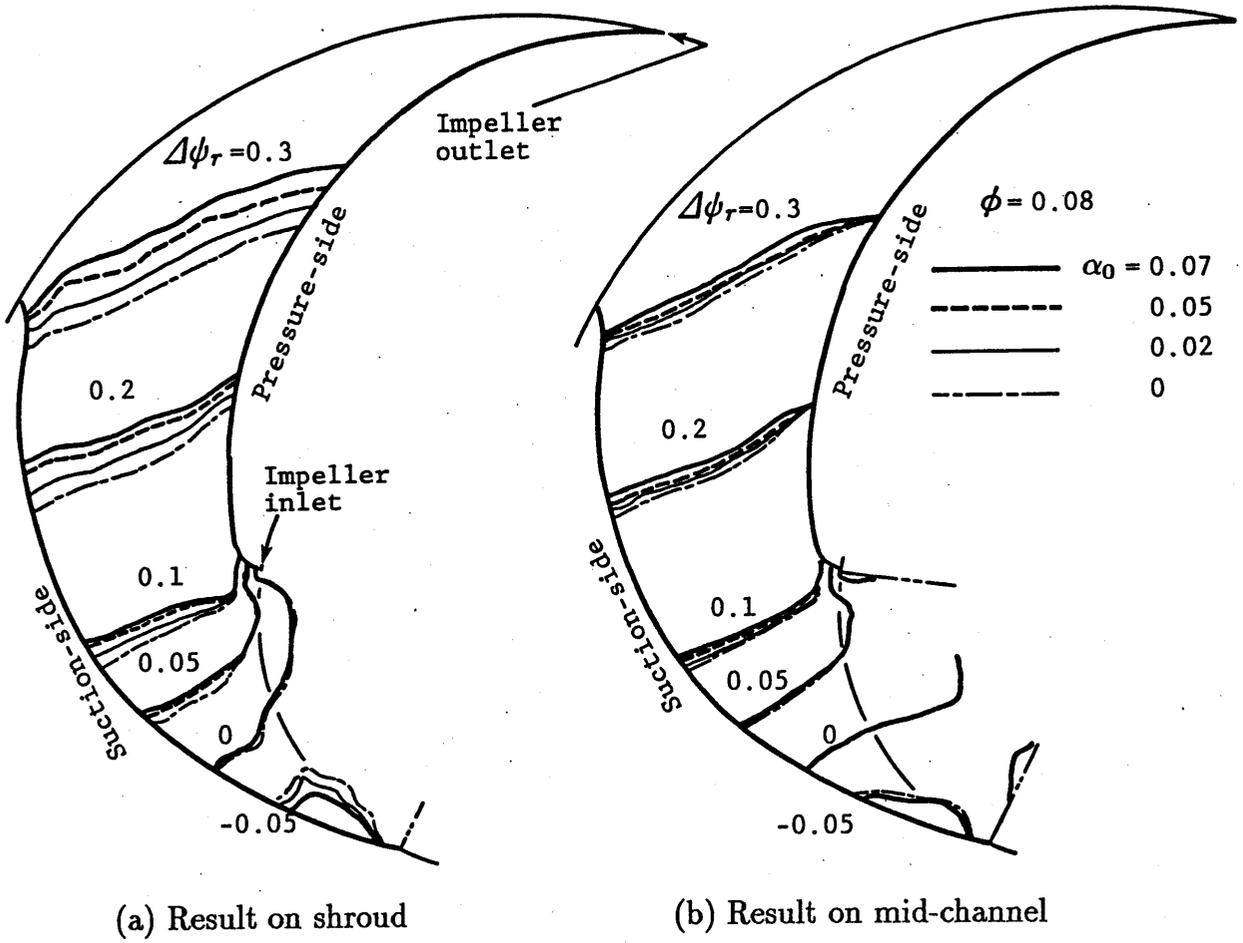


図4-7 羽根間流路内の圧力分布

第5章 気泡流モデルによる気液二相流時の ポンプ性能の数値解析⁽¹⁶²⁾⁽¹⁶³⁾

5. 1 緒言

原子炉の安全解析に関連して、気液二相流時の渦巻ポンプの特性を知ることが重要であり、これにはポンプ特性と密接に関連する羽根車内部の流動状態を詳細に把握することが必要不可欠である。第4章では、羽根車内での二相流動現象を理論的に明らかにするための、二相流全体としては非粘性流を仮定した気泡流モデルに基づく三次元数値解析法を示した。また、この手法を低比速度の半径流ポンプに適用し、種々の入口ボイド率に対して羽根車内のボイド率分布や圧力分布を求め、その結果が実測値とかなり良く一致することを示した。

本章では、第4章で得られた羽根車内における速度およびボイド率分布に基づいて入口ボイド率に対する二相流時の羽根車ヘッドの変化を求め、実験値⁽⁹³⁾と比較検討した。その結果、気泡流モデルが成り立つ程度に入口ボイド率が低い場合には両者の値が一致すること、また二相流時にも水力損失が零であると仮定して求めた気液間の運動量の交換量に相当するヘッドが、実験値と良く一致することにより、本手法により二相流時のポンプ性能変化の予測が可能であることなどを示した。

5. 2 基礎方程式

5. 2. 1 気液二相流時の羽根車ヘッドとポンプ揚程

第4章では、羽根車流路の代表長さに比べ微細な気泡が均質に分散した気泡流を仮定し、気泡の運動にのみ粘性による流動抗力を考慮し、二相流全体としては非粘性流を仮定した気泡流モデルに基づいて、回転座標系における二相流に対するEulerの式を導いた。すなわち、

$$(1-\alpha)\mathbf{W}\cdot\nabla\mathbf{W}+(1-\alpha)\boldsymbol{\omega}\times(2\mathbf{W}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})+\nabla p/\rho_l=0 \quad (5-1)$$

式(5-1)と流線素 ds との内積をとり、液相の密度 ρ_l は一定として、流線 s に沿ってポンプ入口から出口まで積分すれば、回転座標系における気泡流に対するBernoulliの式を得る。すなわち、

$$\left[\frac{\mathbf{W}^2-u^2}{2} \right]_0^3 + (1/\rho_l) \int_{p_0}^{p_3} \frac{dp}{1-\alpha} = 0 \quad (5-2)$$

式(5-2)の左辺第2項すなわち二相流体の圧力ヘッドを、 $1/(1-\alpha)=1+\alpha/(1-\alpha)$ なる関係を用いて変形すれば、式(5-2)は次式で表される。

$$\left[\frac{\mathbf{W}^2-u^2}{2} + \frac{p}{\rho_l} \right]_0^3 + (1/\rho_l) \int_{p_0}^{p_3} \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot dp = 0 \quad (5-3)$$

気泡流は一般に分散した少量の気泡を含むため、連続体を成す液相を媒体として圧力が伝播する。したがって、式(5-3)の左辺第1項および第2項は液相のみがポンプ内を流れている場合に対する見かけのヘッドを、また第3項は気液間の運

動量の交換量に相当するヘッドを表すものと考えられる。

速度三角形から得られる関係、 $W^2 - u^2 = C_l^2 - 2u C_{u_l}$ 、を用いれば、式(5-3)は次式に変形される。

$$\frac{u_3 C_{u_{3l}} - u_0 C_{u_{0l}}}{g} = \frac{p_3 - p_0}{\rho l g} + \frac{C_{3l}^2 - C_{0l}^2}{2g} + (1/\rho l g) \int_{p_0}^{p_3} \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot dp \quad (5-4)$$

いま、液単相流時($\alpha_0=0$)において、ポンプ出入口間の一次元流路に対して式(5-4)を適用すると、次式を得る。

$$\frac{(u_3 C_{u_{3l}} - u_0 C_{u_{0l}})_0}{g} = \frac{(p_3 - p_0)_0}{\rho l g} + \frac{(C_{3l}^2 - C_{0l}^2)_0}{2g} \quad (5-5)$$

本解析ではポンプ内の流れに渦なし流れを仮定しているため、羽根車の上流と下流では $rC_u = \text{一定}$ の関係が成り立ち、式(5-5)の左辺は羽根車ヘッド H_{imp0} に相当する。すなわち、

$$\frac{(u_3 C_{u_{3l}} - u_0 C_{u_{0l}})_0}{g} = \frac{(u_2 C_{u_{2l}} - u_1 C_{u_{1l}})_0}{g} \equiv H_{imp0} \quad (5-6)$$

液体が粘性をもつ場合には、水力損失ヘッド h_0 を考慮して式(5-5)は次式で表されねばならない。

$$H_{imp0} = H_0 + h_0 \quad (5-7)$$

ただし、 H_0 はポンプ実揚程であり、式(5-5)の右辺に相当する。すなわち、

$$H_0 = \frac{(p_3' - p_0')_0}{\rho l g} + \frac{(C_{3l}^2 - C_{0l}^2)_0}{2g} \quad (5-8)$$

ここで、 p_3' 、 p_0' は摩擦損失に応じて圧力 p_3 、 p_0 が低下した値であることを示す。当然、損失の影響は C_{3l} 、 C_{0l} にも現れるが、ここでは損失の有無を区別するために圧力の記号法のみを変えることにする。

同様にして、粘性をもつ気泡流に式(5-3)を適用すると、流体と壁面との流動摩擦による水力損失ヘッド h を考慮した次式により表される。

$$\frac{u_3 C_{u_{3l}} - u_0 C_{u_{0l}}}{g} = \frac{p_3' - p_0'}{\rho l g} + \frac{C_{3l}^2 - C_{0l}^2}{2g} + (1/\rho l g) \int_{p_0'}^{p_3'} \frac{\alpha}{1-\alpha} dp' + h \quad (5-9)$$

ここで、

$$H_{imp} = H + H_b + h \quad (5-10)$$

ただし、

$$H_{imp} = \frac{u_3 C_{u_{3l}} - u_0 C_{u_{0l}}}{g} \quad (5-11)$$

$$H = \frac{p_3' - p_0'}{\rho l g} + \frac{C_{3l}^2 - C_{0l}^2}{2g} \quad (5-12)$$

$$H_b = (1/\rho l g) \int_{p_0'}^{p_3'} \frac{\alpha}{1-\alpha} dp' \quad (5-13)$$

気液間相対速度が零の場合には、ボイド率 α は気相および液相の体積流量 q および Q で定まり $\alpha = q/(q+Q)$ であるから、式(5-13)の右辺を H_a とすれば、 H_a は次式で表される。

$$H_a = (1/\rho l g Q) \int_{p_0'}^{p_3'} q dp' \quad (5-14)$$

H_a は空気の排出に要するヘッドであり、その値は実験的に求めることができる(83)。

5. 2. 2 速度分布と羽根車ヘッドの関係

羽根車入口および出口の断面における二相流体の角運動量 M_1 および M_2 の差は、羽根車が二相流体に与えたトルク T に相当する。すなわち、

$$T = M_2 - M_1 \quad (5-15)$$

ここで、

$$M_1 = r_1^2 \int_0^{t_1} \int_0^{\Delta \theta} [\alpha_1 \rho_g C_{r1g} C_{u1g} + (1 - \alpha_1) \rho_l C_{r1l} C_{u1l}] d\theta dz \quad (5-16)$$

$$M_2 = r_2^2 \int_0^{t_2} \int_0^{\Delta \theta} [\alpha_2 \rho_g C_{r2g} C_{u2g} + (1 - \alpha_2) \rho_l C_{r2l} C_{u2l}] d\theta dz$$

ただし、第4章の羽根車内気泡流に対する仮定によれば、式(5-16)の被積分項において、第1項は第2項に比べ十分小さく無視し得る。

したがって、羽根車が単位質量流量当りの二相流体に与えた仕事量、すなわち羽根車ヘッド H_{imp} は、質量流量を $\dot{m} (= \dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \rho_l Q)$ とすれば、

$$H_{imp} = \frac{\omega T}{g \dot{m}} = \frac{\omega (M_2 - M_1)}{g \dot{m}} \quad (5-17)$$

ここで、 \dot{m} は任意の流路断面を通過する質量流束から求められるが、たとえば羽根車入口断面における値 \dot{m}_1 は次式で表される。

$$\dot{m}_1 = r_1^2 \int_0^{t_1} \int_0^{\Delta \theta} [\alpha_1 \rho_g C_{r1g} + (1 - \alpha_1) \rho_l C_{r1l}] d\theta dz \quad (5-18)$$

ただし、羽根車内気泡流に対する仮定によれば、式(5-18)の被積分項において、第1項は第2項に比べ十分小さく無視し得る。

羽根車入口および出口断面における速度およびボイド率分布は第4章で述べた手法により既知であるから、これらを式(5-16)、(5-18)に用いると、式(5-17)により二相流時の H_{imp} が求められる。

式(5-3)の右辺第3項、気液間の運動量の交換量に相当するヘッドは、各水流線に沿って羽根車入口から出口まで数値積分することにより定まり、羽根車出口断面上におけるヘッドの分布を与えることができる。これら各流線の質量流束を $[\alpha_2 \rho_g C_{r2g} + (1 - \alpha_2) \rho_l C_{r2l}]$ であると見なして、この断面上におけるヘッドと質量流束の積の面積積分をとり、全質量流量 \dot{m} で平均化することにより全ヘッド H_b が定まる。すなわち、

$$H_b = \frac{r_2^2 \int_0^{t_2} \int_0^{\Delta \theta} [\alpha_2 \rho_g C_{r2g} + (1 - \alpha_2) \rho_l C_{r2l}] \left(\int_{p_1}^{p_2} \frac{\alpha}{1 - \alpha} dp' \right) d\theta dz}{\dot{m} \rho_l g} \quad (5-19)$$

5. 2. 3 二相流時の揚程変化

液単相流時のポンプ実揚程 H_0 から二相流時の実揚程 H を差し引いて得られる揚程低下量 ΔH は、式(5-7)から式(5-10)を引くことにより次式で与えられる。

$$\Delta H = H_b + \Delta h - \Delta H_{imp} \quad (5-20)$$

ただし、

$$\Delta H = H_0 - H \quad (5-21)$$

$$\Delta h = h - h_0 \quad (5-22)$$

$$\Delta H_{imp} = H_{imp} - H_{imp0} \quad (5-23)$$

式(5-20)を (u_2^2/g) で無次元化して表せば、

$$\Delta \phi = \phi_b + \Delta \phi_h - \Delta \phi_{imp} \quad (5-24)$$

式(5-24)より、二相流時に生じるポンプ揚程の低下量 $\Delta \phi$ は、気液間の運動量の交換量に相当するヘッド ϕ_b 、水力損失ヘッドの増加量 $\Delta \phi_h$ および羽根車ヘッドの減少量 $(-\Delta \phi_{imp})$ の和として表される。この関係は、 H_b が式(5-14)で与えられる空気排出ヘッド H_0 であると見なすと、空気吸入によるポンプ性能の変化量を実験的に求めた場合の関係式⁽⁸³⁾に一致する。

5. 3 解析結果と考察

5. 3. 1 計算条件

第4章で述べたように、低比速度の半径流形渦巻ポンプ[比速度 : $180(\text{m}, \text{m}^3/\text{min}, \text{rpm})$]において、定格運転時の流れを解析の対象とする。ポンプの形状と寸法を図5-1に示す。ポンプ入口断面($z_0/r_1 = -1.3$)において、気泡は水流と同一速度で均一に分散して流入するものとする。また、気泡の初期直径($2R_{b0}$)はこのポンプの運転条件において羽根車入口で観察される頻度の最も高い値 0.3mm としたが、気泡直径の影響は後述する。

5. 3. 2 羽根負荷

図5-2は、種々の入口ボイド率 α_0 に対するシュラウド面(図5-1の $j=5$ の断面)上の羽根面圧力分布である。ただし、ポンプ入口の静圧を基準とした無次元圧力係数 $\Delta \phi_r$ を無次元半径 r/r_2 に対して示してある。 α_0 が増すと、圧力が羽根圧力面で低下し負圧面で上昇するため羽根両面の圧力差が減じ、羽根面負荷が低下する。この羽根面負荷の低下は、羽根後半部($r/r_2 \geq 0.6$)でとくに顕著である。 α_0 の増加による圧力分布のこのような変化の傾向は、実験結果⁽⁹²⁾とよく一致する。

軸方向に単位長さをもつ羽根面素に作用するトルク ΔT_j は、羽根圧力面と負圧面の圧力差を Δp 、半径 r における半径方向の微小長さを dr とすると、次式で与えられる。

$$\Delta T_j = (1/g) \int_{r_1}^{r_2} \Delta p r dr \quad (5-25)$$

第4章の数値解析より得られた圧力 p を式(5-25)に代入して ΔT_j を求め、シュラウド面からの無次元軸方向距離 z/t に対して示すと図5-3のようになる。ただし、式(5-15)より求められる羽根一枚当りに作用するトルク T/N と羽根高さ t_2 により ΔT_j を無次元化した値、 $\Delta T_j / [(T/N)/t_2]$ を種々の α_0 に対して示してある。水単相流時($\alpha_0 = 0$)には、 $\Delta T_j / [(T/N)/t_2]$ すなわち羽根面負荷は軸方向に一定

であるが、 α_0 の増大とともにシュラウド側 ($z/t < 0.5$)で低下し、ハブ側 ($z/t > 0.5$)で増大する。これは、ハブ側ではボイド率が極めて小さいため ΔT_j は单相流時とほとんど変わらないが、二相流時には $(T/N)/t_2$ が低下するからである。つまり二相流時には、シュラウド側においてのみ羽根負荷が低下し、羽根車仕事の減少をもたらす。

5. 3. 3 羽根車ヘッドの変化

第4章の数値解析より得られた速度とボイド率の分布を式(5-16)、(5-18)に代入し、式(5-17)から二相流時の羽根車ヘッド H_{imp} を求め、その無次元値 ϕ_{imp} の水单相流時の値 ϕ_{imp0} に対する比、 ϕ_{imp}/ϕ_{imp0} 、を入口ボイド率 α_0 に対して示すと、図5-4の○印のようになる。ヘッド比 ϕ_{imp}/ϕ_{imp0} は、 α_0 の増大とともに緩やかに低下し、 $\alpha_0 \geq 0.07$ ではほぼ一定値 ($\phi_{imp}/\phi_{imp0} = 0.92$)をとる。

気泡の抵抗係数は気泡群中で単一気泡が受ける粘性抗力を基にして定めているので、高ボイド率領域では抵抗係数が著しく増大し、水流に対する気泡の相対速度を低下させる。したがって、 α_0 が増すとき、とくに局所ボイド率 α の大きな領域において、 α の増加割合が α_0 の増加割合に比べて小さくなる。高ボイド率領域の存在は羽根負荷の低下をもたらすから、 α_0 が高くなるほどこの抵抗係数の影響により羽根車ヘッドの低下割合が減ずることになる。

試みに、抵抗係数 C_{DTP} として、つねに単一気泡に対する値 C_D を用いたときのヘッド比を求めてみると、図5-4の*印のようになる。 $\alpha_0 \geq 0.07$ の領域で前述の結果との差が現れ、 α_0 が増すほど ϕ_{imp}/ϕ_{imp0} がより大きく低下するが、その差はかなり少ない。

図5-4には、形状や寸法が解析に用いたポンプとほぼ等しいポンプに対する実験結果⁽⁹³⁾も□印で併記してある。 α_0 の小さな領域 ($\alpha_0 \leq 0.06$)において本解析結果の傾向とよく一致しているが、低下割合は本計算値よりも多少小さい。 $\alpha_0 \approx 0.07$ を越す領域で実測値が急低下し、本解析結果の傾向と大きく異なってくる。羽根車内流れの観察⁽⁸³⁾によると、羽根車入口部において気泡の滞留により大きな空洞が生じていることから、本解析に用いた気泡流モデルをこのような α_0 の大きな領域にまでそのまま適用できないことを示すものである。

羽根車ヘッドに及ぼすポンプ入口における気泡の初期直径 ($2R_{b0}$)の影響を調べるため、本解析に用いた初期直径の2倍に相当する $2R_{b0} = 0.6\text{mm}$ の気泡に対しても解析してみたが、その結果は図5-4の◇印のようになる。ただし、入口ボイド率 $\alpha_0 = 0.05$ 、 0.07 、 0.09 に対してのみ結果を示してある。気泡径が大きい場合には羽根車ヘッドの低下も大になるが、その影響は微小であると言える。

第4章で述べたように、羽根車入口のシュラウド側のボイド率 α は局所的に入口ボイド率 α_0 の4倍以上にも達する。本解析においては、気泡の抵抗係数 C_{DTP} を局所ボイド率を考慮して次式から求めている。

$$C_{DTP} = (1 - \alpha)^{-q} \cdot C_D \quad (q = 8.9 \text{Re}^{-0.1})$$

二相流動様式が変わると、 C_{DTP} の値も当然変化する。Hench・Johnston⁽¹⁴⁰⁾は、気液二相流時のディフューザ性能を測定し、 $\alpha \geq 0.35$ のチャーン流の流動様式

に対してつぎの抵抗係数を与え、それを用いた一次元数値解析結果が測定結果とよく一致することを示した。

$$C_{DTP} = 0.11R_b(1-\alpha)^3 \quad [\text{mm}]$$

試みに、高ボイド率領域($\alpha \geq 0.35$)ではチャーン流であると仮定して抵抗係数を上式より定めヘッド比を求めてみると、図5-4の●印のようになる。 ϕ_{imp}/ϕ_{imp0} は $\alpha_0 \geq 0.07$ の領域で相当に低下するが、実測値に比べると低下割合は少ない。二相流時のポンプ性能の解析に際して、Furuya⁽¹⁴²⁾もこの方法を二相流方程式の一次元解析に用い、入口ボイド率 α_0 が増して流動様式が気泡流からチャーン流へ変化することにより性能が急低下することを示している。しかし、本解析が扱う三次元流路に対しては、局所的な高ボイド率領域にチャーン流の抵抗係数を採用しても、一次元解析の場合ほど顕著にはその影響が現れないことが知れる。

図5-4には、上述のFuruyaの一次元理論による解析結果も細かい実線で示してある。ただし、図示の入口ボイド率 α_0 の範囲は最大でも $\alpha_0 = 0.09$ であるから、すべて気泡流の領域に属し、チャーン流の領域($\alpha \geq 0.35$)を含まない。Furuyaの結果は本解析結果とほぼ一致するが、本解析結果より低下量がやや過大である。

5. 3. 4 気液間の運動量交換に基づくヘッド

水力損失ヘッド h を零と仮定して、式(5-19)により気液間の運動量の交換量に相当するヘッド H_b を求め、その無次元値 ϕ_b を入口ボイド率 α_0 に対して示すと図5-5の○印のようになる。5.2.1節で述べたように、気液間相対速度を零と仮定すれば、 H_b は空気排出ヘッド H_a に相当し、その値は式(5-14)から求められる。図5-5には H_a の無次元値 ϕ_a も点線で示してある。 α_0 の増大とともに ϕ_a および ϕ_b は増すが、 ϕ_b は ϕ_a の約2~3倍であり、気液間の運動量の交換量が相当に大きいことが知れる。

実測値から H_b を単独に求めることは難しいが、いま二相流時にポンプ壁面で生ずる摩擦損失 h が单相流時の値 h_0 と等しい、すなわち $h = h_0$ ($\Delta h = 0$)であると仮定すれば、 ΔH と ΔH_{imp} の測定値を式(5-20)に用いることにより、 H_b が求められる。このようにして得られた H_b の無次元値 ϕ_b を図5-5に□印で併記してあるが、 $\alpha_0 < 0.05$ において計算値と良く一致している。したがって、摩擦のない理想的な流れの場において求められる気液間の運動量交換による損失ヘッドが、二相流時に生じる全損失にほぼ相当することが知れる。図5-5には、初期直径が大きい気泡($2R_{b0} = 0.6\text{mm}$)に対する結果、前述のチャーン流に対する C_{DTP} を用いた結果および単一気泡に対する C_{DTP} を用いた結果も併記してあるが、これらの影響は $\alpha_0 \geq 0.05$ の領域で現れる。しかし、その変化量は微小である。

5. 3. 5 損失ヘッド比

二相流時のポンプ揚程を予測する方法として、Mikielewicz⁽⁶⁸⁾らは損失ヘッド比 H^* を提案している。すなわち、

$$H^* = \frac{h}{h_0} = \frac{H_{imp} - H}{H_{imp0} - H_0} \quad (5-26)$$

ここで、 H^* はおもに入口ボイド率 α_0 の関数である。

本解析では5.3.3節で示したように α_0 と H_{imp} の関係が既知であるから、 α_0 と H^* の関係が知れている場合には、次式により二相流時のポンプ実揚程 H の変化が予測できる。すなわち、

$$H = H_{imp} - H^* \cdot (H_{imp0} - H_0) \quad (5-27)$$

式(5-20)～(5-23)の関係を用いると、式(5-26)は次式に変形される。

$$H^* = 1 + \frac{H_b + \Delta h}{h_0} \quad (5-28)$$

図5-5で述べたように、水力損失ヘッド h の増加量 Δh を零と見なし、 H_b を求めることができた。また、单相流時の水力損失ヘッド h_0 を求めるには種々の予測法が提案されているので、これを用いることができる。いま、 H_b には図5-5の計算値を用い、本ポンプに対する測定値から $H_0/H_{imp0} = (H_{imp0} - h_0)/H_{imp0} = 0.75$ の関係を用いると、式(5-28)から α_0 と H^* の関係を求めることができ、図5-6の○印のようになる。図5-6には実測値も□印で併記してある。 $\alpha_0 < 0.05$ の領域で両者は良く一致している。

一方、一般管路系における二相流時の性能解析では、損失をおもに摩擦圧力として求め、損失圧力倍数として整理する場合が多い。したがって、ポンプを含む管路系の性能解析にも損失をヘッドでなく圧力で評価するほうがより直接的である。損失圧力倍数 R^* は次式で与えられる。

$$R^* = \frac{\Delta p}{\Delta p_0} \quad (5-29)$$

ここで、 Δp_0 、 Δp はそれぞれ单相流時と二相流時におけるポンプの損失圧力である。

したがって、損失ヘッド比 H^* と R^* は次式により換算できる⁽⁹³⁾。

$$R^* = (\rho_{TP}/\rho_l) \cdot H^* \quad (5-30)$$

ただし、 ρ_{TP} はポンプ内二相流の平均密度であり、平均ボイド率 α を用いた次式で与えられる。

$$\rho_{TP} = \alpha \rho_g + (1 - \alpha) \rho_l$$

このように、ポンプ内のボイド率から R^* を計算できるが、複雑な圧力勾配が存在するポンプ内において ρ_{TP} あるいは α を正確には測定し難い。そこで、ポンプ入口での値(ρ_{TP0} または α_0)または入口と出口の平均値が便宜上用いられている。しかし、これらの値はポンプ内の値を必ずしも代表しているとは考え難い。 ρ_{TP0} と ρ_{TP} の相違を調べるため、第4章の解析より得られたポンプ内のボイド率分布を用いて ρ_{TP} の平均値 ρ_{TP} を求め、ポンプ入口での密度 ρ_{TP0} に対する比 ρ_{TP}/ρ_{TP0} を α_0 に対して示すと図5-7のようになる。 ρ_{TP}/ρ_{TP0} は α_0 とともに増大するが、その増加割合は小さく、 $\alpha_0 \leq 0.09$ の範囲では2%以下である。これより、羽根車の回転速度が比較的低い(1750rpm)ポンプ内の気泡流に対しては、ポンプ入口での値 ρ_{TP0} がポンプ内二相流の平均密度をほぼ代表しているものとみなせる。

5. 4 結言

気泡流モデルにより数値解析した半径流形羽根車内の二相流の速度、圧力およびボイド率分布に基づいて、入口ボイド率に対する羽根面負荷、羽根車ヘッド、損失ヘッド比の変化などを求め、以下の事柄を明らかにした。

- (1) ポンプ入口ボイド率 α_0 が小さく羽根車内の流れが気泡流状態にある場合には、計算より得られた速度やボイド率を用いて、二相流時の羽根車ヘッドを求めることができる。
- (2) 気液間の運動量の交換量に相当するヘッドが、気泡流領域においては実測値より求めた全損失ヘッドの増加量とほぼ等しいことから、この値に基づきポンプの損失ヘッド比や損失圧力倍数を求めることができる。
- (3) 羽根車ヘッド、気液間の運動量交換による損失、損失ヘッド比に及ぼす気泡の初期直径の影響は極めて少ない。
- (4) 高ボイド率領域($\alpha \geq 0.35$)においてチャーン流に対する気泡の抵抗係数を用いると、羽根車ヘッドの低下量が大になるが、実測値ほどの低下は生じない。
- (5) 気泡群中の気泡に対する抵抗係数の代わりに単一気泡に対する抵抗係数を用いると、入口ボイド率が高い場合($\alpha_0 \geq 0.07$)においてのみ運動量交換によるヘッドがわずかに小さくなる。

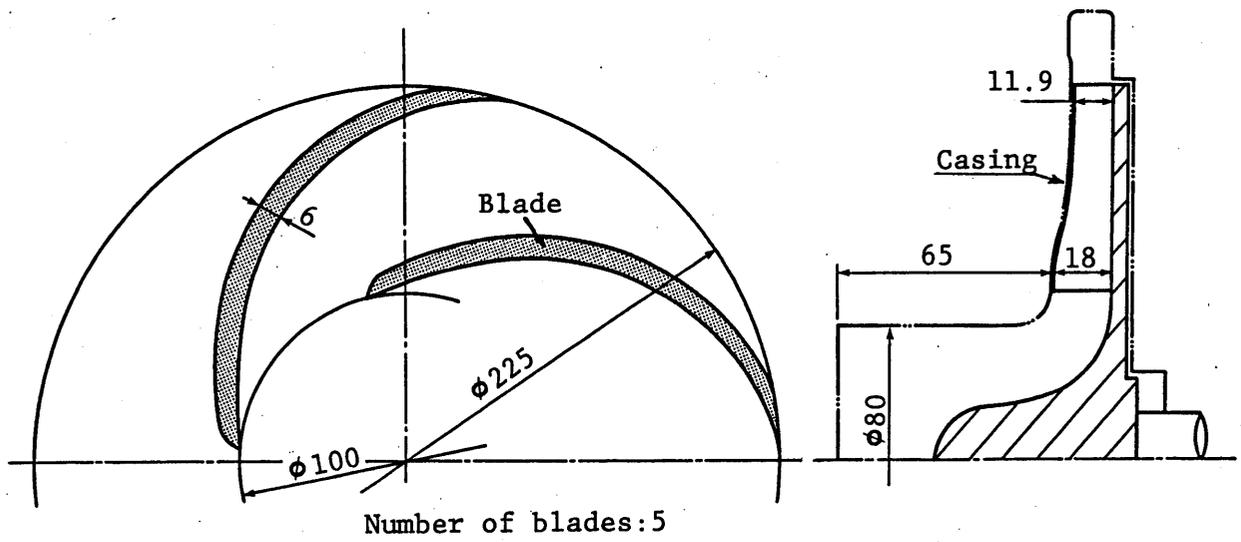


図5-1 ポンプの形状と寸法

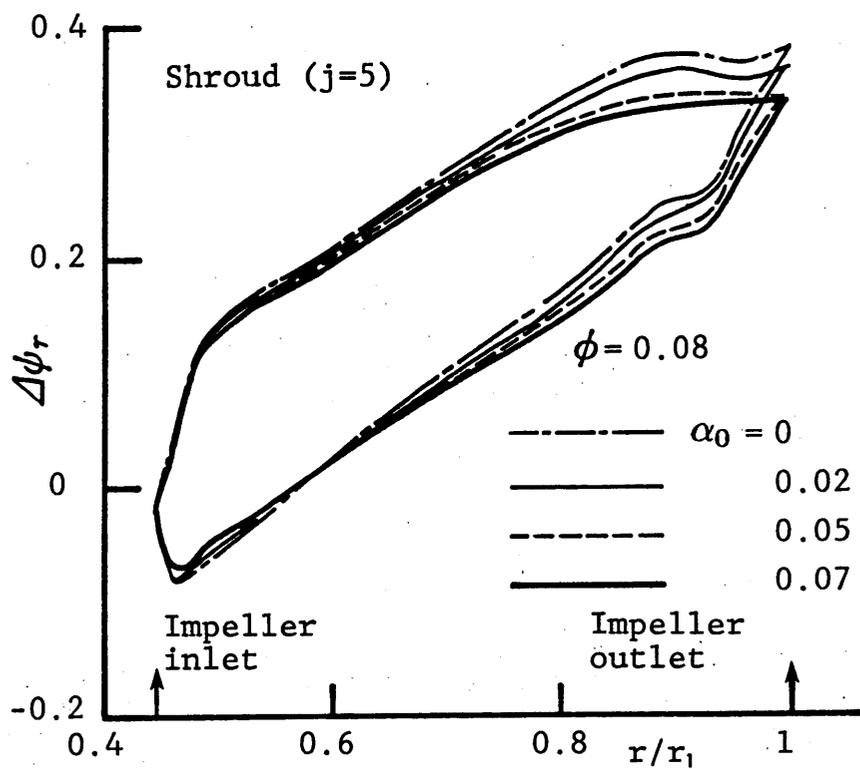


図5-2 羽根面圧力分布

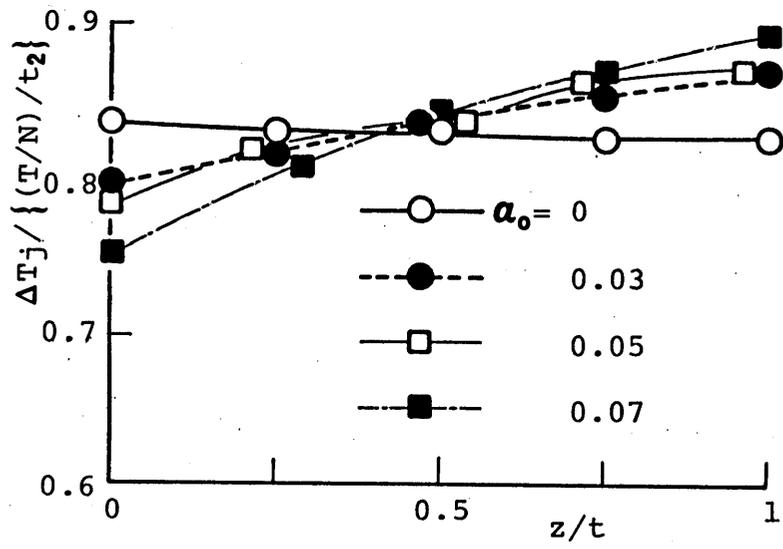


図5-3 α_0 と羽根面負荷分布の関係

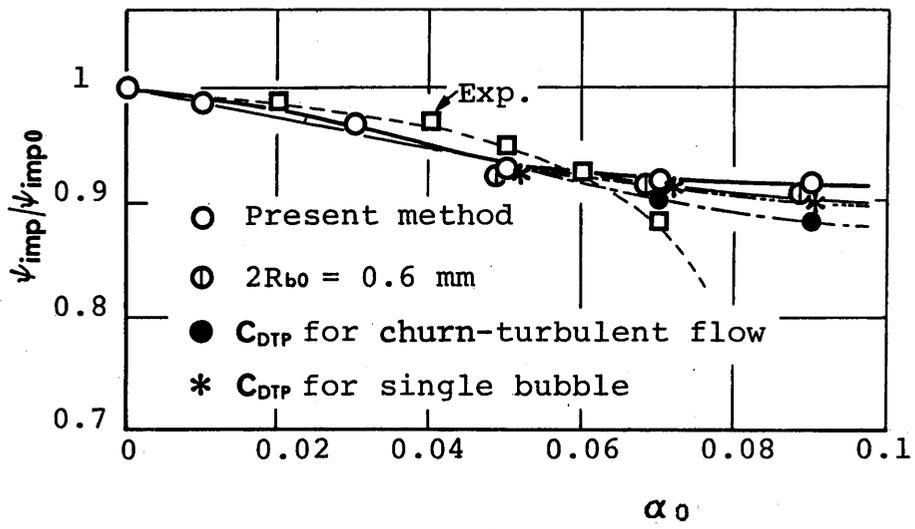


図5-4 α_0 と羽根車ヘッドの変化

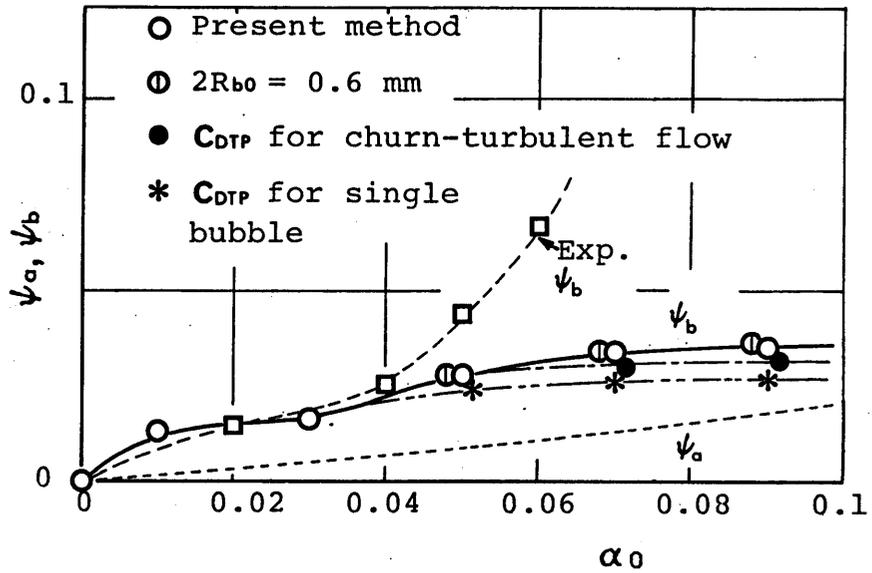


図5-5 α_0 と気液間の運動量交換量に相当するヘッドの関係

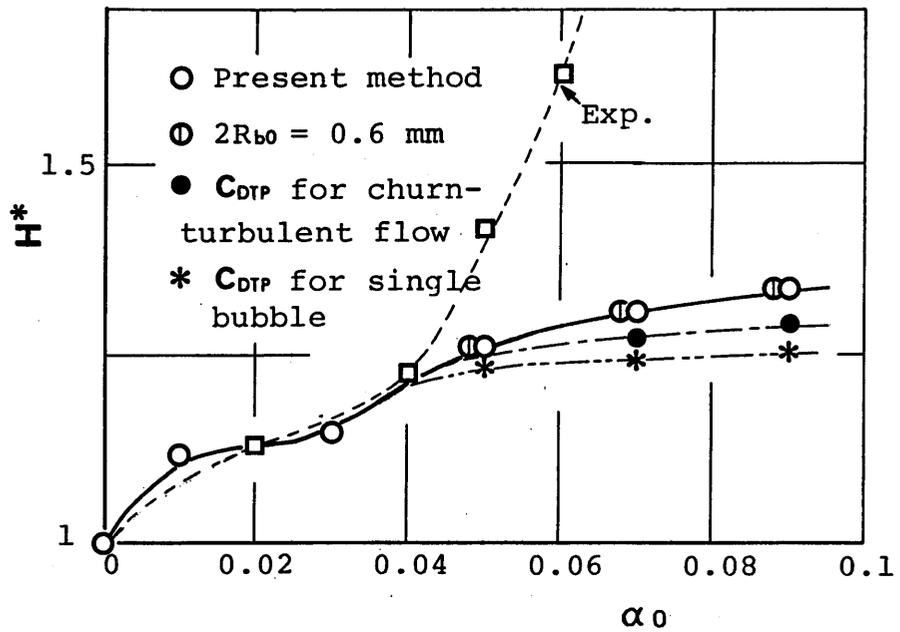


図5-6 α_0 と揚程損失比の関係

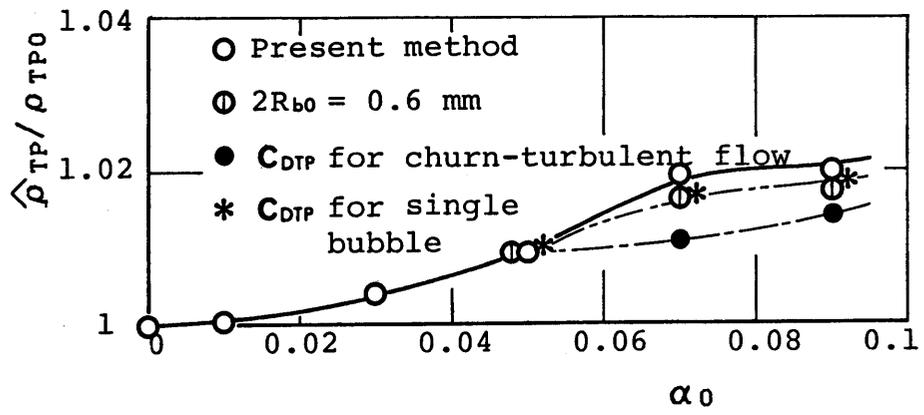


図5-7 α_0 と二相流体の平均密度の関係

6. 1 緒言

原子炉冷却用ポンプの安全解析法⁽¹⁴²⁾や海洋油田汲上用ポンプ⁽¹⁰⁴⁾などの設計方法を確立する立場から、気液二相流時の渦巻ポンプの特性を知ることが重要な課題となっている。

第4章では、流路の代表長さに比べ微細な気泡が比較的均質に分散した流れを仮定した気泡流モデルにより、半径流形渦巻ポンプ内の二相流動状態を三次元数値解析した。また第5章では、第4章で得られた解析結果を基に入口ボイド率の増加に対する羽根車ヘッドの変化などを求めた。その結果は実験結果の傾向とよく一致するが、入口ボイド率が増すと羽根車内に局所ボイド率が著しく高い気泡密集領域が現れる。このような領域は気泡流モデルの適用限界を超えているものと考えられるので、本章では、高ボイド率領域においては気泡が羽根車壁面に付着して固着空洞が生ずるものと仮定する、空洞を伴う気泡流モデルを提案する。そして、本モデルを半径流ポンプに適用して、入口ボイド率に対するボイド率や圧力分布、羽根車ヘッドの変化などを求め、測定値と比較検討した。その結果、空気によりポンプが揚水能力を失うときの、すなわち空洞が羽根車流路を急閉塞するときの現象もシミュレートできることなどが知れた。

6. 2 基礎方程式

6. 2. 1 仮定

本章で提案する空洞を伴う気泡流モデルでは、以下の仮定を用いる。

(1) 気相の密度、運動量および角運動量は、液相の値に比べ十分小さく、無視し得る。

(2) 二相流全体の絶対流れは定常であり、気液間の粘性抗力を除いて非粘性流である。

(3) 気泡は球形であり、気泡の体積は重力の影響を考慮した気泡の周囲圧力に応じて断熱変化する。また、液相は非圧縮性である。

(4) 気液間には物質および熱の移動がない。

(5) ボイド率がある限界値を超している羽根車内の高ボイド率領域においては、気泡は羽根車壁面に付着して、壁面上に空洞を形成する。

(6) 空洞領域を除いた流れ場は、羽根車の代表長さに比べ微細な気泡が比較的均質に分散した、気泡流状態にあり、Basset-Boussinesq-Oseenの式により気泡の運動が定まる。

ただし、上記(5)以外は、第4章の気泡流モデルに対する仮定と同一である。

6. 2. 2 気泡の運動方程式とボイド率

仮定(3)、(6)より、気泡の挙動は、ポンプ入口において初期位置を異にする

多数の単一球形気泡の運動を解析することにより求められる。

絶対座標系において、水流の速度 W の場を質量 M の気泡が速度 V で運動するとき、気泡の運動方程式は次式で与えられる。

$$\frac{d_a(MV_a)}{dt} = f_P + f_Y + f_D + f_U \quad (6-1)$$

ここで、

$$\begin{aligned} f_P &= -(4/3) \pi R_b^3 \nabla_a p \\ f_Y &= (\rho_l / \rho_g - 1) Mg \nabla_a (r \cdot \sin \theta) \\ f_D &= (1/2) \rho_l (\pi R_b^2) C_{DTP} |W_a - V_a| (W_a - V_a) \\ f_U &= (4/3) \pi \rho_l C_U \cdot \left[\frac{Da(R_b^3 W_a)}{Dt} - \frac{d_a(R_b^3 V_a)}{dt} \right] \end{aligned} \quad (6-2)$$

$$\frac{D_a}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + W_a \cdot \nabla_a$$

ただし、気泡の抵抗係数 C_{DTP} には、ボイド率 α の気泡群中における単一気泡に対する値を用いた。すなわち、

$$C_{DTP} = (1 - \alpha)^{-q} C_D \quad (6-3)$$

ここで、 C_D は気泡相互の干渉がないときの単一気泡の抵抗係数であり、 q は気泡レイノルズ数 Re の関数として次式で表される。

$$q = \begin{cases} 8.9 Re^{-0.1} & (1 < Re < 500) \\ 4.78 & (500 \leq Re < 7000) \end{cases} \quad (6-4)$$

ただし、式(6-3)の代わりに単一気泡に対する抵抗係数を用いても、第4章の結果から、解析結果に及ぼす影響は顕著ではない。

式(6-1)を一定角速度で回転する回転座標系に対する式に変換し、ポンプ入口で初期条件(気泡の位置、速度、半径)を与え、仮定(3)、(4)に基づいてポンプ入口から出口まで数値積分することにより、ポンプ内の気泡の軌道や寸法が求められる。

本章では、四面体要素による三次元有限要素法を用いる。そこでは、流れの領域をまず六面体に分割し、ついでこれを6つの四面体に分割して要素とする。ボイド率 α は、隣接する6つの四面体要素からなる六面体を検査体積として、これに含まれる全気泡の体積割合により定義し、同一六面体に属する各四面体要素のボイド率は同じとする。よって、式(6-1)の解から気泡の軌道とその軌道に沿っての気泡体積 $(4/3) \pi R_b^3$ の変化が求まり、各検査体積に含まれる気泡数すなわち気泡の数密度 n が定まるので、検査体積であるすべての六面体における α が次式により求められる。

$$\alpha = (4/3) \pi R_b^3 n \quad (6-5)$$

6. 2. 3 気液二相流の基礎方程式

二相流の絶対流れの連続式は、仮定(1)～(3)、(6)のもとでは、液相速度 W_a とボイド率 α を用いた次式で表される。

$$\nabla_a \cdot [(1 - \alpha) W_a] = 0 \quad (6-6)$$

第4章の羽根車内気泡流に対する循環保存則の考察から、ポンプ入口で渦なし

流れを仮定すれば、 W_a がポテンシャル ϕ をもつので、式(6-6)はつぎの準調和方程式で表される。

$$\nabla_a \cdot [(1-\alpha)\nabla_a \phi] = 0 \quad (6-7)$$

一方、一定角速度 ω で回転する回転座標系における二相流の運動方程式は、仮定(1)~(3)、(6)のもとでは、次式で表される。

$$(1-\alpha)W \cdot \nabla W + (1-\alpha)\omega \times (2W + \omega \times r) = -\nabla p / \rho \quad (6-8)$$

流速 W およびボイド率 α が有限要素各節点で既知の場合には、式(6-8)左辺の各項の値が定まり、右辺は各節点での圧力勾配を与える。ポンプ入口断面では一般に圧力の一様分布を仮定するので、その圧力値を境界条件とし、各節点での W および α を用いれば式(6-8)は数値積分可能であり⁽¹⁶¹⁾、ポンプ内の圧力分布が求まる。なお、空洞表面では、 $\alpha=1$ が成り立つから式(6-8)より圧力勾配が零となり、圧力は一定である。

6. 2. 4 計算領域と境界条件

本解析では、与えられたボイド率分布の流れ場において、未知数を速度ポテンシャル ϕ とする式(6-7)を、四面体一次要素を用いた三次元有限要素法により解析する。計算領域は、図6-1に示すように、一つの羽根間流路とこの羽根1ピッチに相当する上流および下流の流路部分とする。

計算領域入口および出口断面の境界 B_1 、 B_2 、羽根面 B_3 、 B_4 、ハブおよびシュラウド面 B_5 、 B_6 における境界条件は、半径流ポンプの場合、次式で与えられる。

$$(1-\alpha)n \cdot \nabla_a \phi = \begin{cases} W_{az} & \{B_1\} \\ -W_{ar} & \{B_2\} \\ \pm n \cdot \omega \times r & \{B_3, B_4\} \\ 0 & \{B_5, B_6\} \end{cases} \quad (6-9)$$

残りの境界 $B_7 \sim B_{10}$ では流れの周期条件が成立する。

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta + 2\pi/N, z) &= \phi(r, \theta, z) - \Gamma/N \\ \frac{\partial \phi(r, \theta + 2\pi/N, z)}{\partial n} &= - \frac{\partial \phi(r, \theta, z)}{\partial n} \end{aligned} \quad (6-10)$$

ただし、羽根後縁においてKuttaの条件が満足されねばならないから、後縁の圧力側と負圧側の圧力が一致するように、循環 Γ の値は繰り返し計算により定める。

ポンプ入口(B_1)では、流れに予旋回がなく圧力およびボイド率分布は一様とする。すなわち、速度(W_{az})分布は一様とする。また、ポンプ出口(B_2)における速度($-W_{ar}$)分布は、この断面内で軸方向速度成分はなく、流速およびボイド率分布は周方向に一様と仮定して式(6-8)より得られる半径平衡式

$$\frac{dW_{ar}^2}{dz} = (\omega/\pi) \left(\frac{d\Gamma}{dz} \right) - \frac{1}{(2\pi r)^2} \left(\frac{d\Gamma^2}{dz} \right) \quad (6-11)$$

および流れの連続式により定める。

6. 2. 5 計算条件

計算対象は口径80mmの半径流形渦巻ポンプ[比速度180(m, m³/min, rpm)]である。このポンプでは、二相流時の羽根車内流動状態の観察⁽⁸³⁾、半開放羽根車に対

するケーシング内壁面の圧力測定⁽⁹²⁾、羽根車内の気泡寸法⁽⁹³⁾およびボイド率分布⁽⁹⁴⁾の測定などを行い、二相流時のポンプ特性がよく知れているからである。ポンプを定格回転数(1750rpm)で運転し、单相流時の規定流量($\phi=0.08$)とともに低流量($\phi=0.06$)と高流量($\phi=0.1$)の運転状態における流れを解析した。ただし、二相流時にも吐出質量流量は单相流時と同一という条件で求めた。ポンプ入口静圧は、いずれの場合にも54kPaであり、キャビテーション発生はない。

ポンプ入口断面(B₁)における気泡の初期速度は水流と同一であり、気泡の初期位置は、周方向に18列、半径方向に10列の合計180箇所とし、同一位置での単位時間当りの流入気泡数を変えることにより、 α_0 が規定値になるようにした。また、この断面における気泡の初期半径(R_{b0})は、羽根車入口で観察される最も頻度の高い値を与える実験式⁽⁹³⁾より定めた。

6. 2. 6 羽根車ヘッド

羽根車が単位質量流量当りの二相流体に与えた仕事量すなわち羽根車ヘッド H_{imp} は、羽根車入口直前および出口直後の断面における二相流体の角運動量 M_1 および M_2 、質量流量 \dot{m} をもとにして、次式で表される。

$$H_{imp} = \frac{\omega (M_2 - M_1)}{g \dot{m}} \quad (6-12)$$

ただし、仮定(1)、(2)のもとでは次式が成り立つ。

$$M_1 = r_1 \rho_l \int_{A_1} (1 - \alpha_1) W_{ar1} W_{au1} dA \quad (6-13)$$

$$M_2 = r_2 \rho_l \int_{A_2} (1 - \alpha_2) W_{ar2} W_{au2} dA \quad (6-14)$$

$$\dot{m} = \rho_l \int_{A_1} (1 - \alpha_1) W_{ar1} dA = \rho_l \int_{A_2} (1 - \alpha_2) W_{ar2} dA \quad (6-15)$$

6. 3 空洞モデルと数値解析法

6. 3. 1 空洞モデル

気泡流モデルによる数値解析によれば、高ボイド率領域が羽根車の壁面近傍で生ずるので、仮定(5)によりボイド率 α が限界値 α_{cr} を超えた領域で現れる空洞形状を図6-2のように定める。

図6-2(a)は、壁面上の検査体積の1つのみが $\alpha > \alpha_{cr}$ となる場合の例を、壁面上の隣接する検査体積とともに示す。○印および△印は壁面上および内部領域の格子点である。説明の便宜上、壁面は平坦で各体積は同一寸法とし、その底面積を A 、高さを h とする。当該検査体積に占める気相の全体積 $V_v (= \alpha Ah)$ が壁面に付着し、空洞となるものとする。この気相体積部分は、検査体積の重心を含む壁面に垂直な断面では、図6-2(b)に斜線部で示すように壁面から高さ αh の凸状をなす。実際の空洞表面は滑らかであるから、本解析では、これを多面体で近似する。この際、まず各検査体積の底面の中心から気相体積部分に相当する距離にある点(●印)をとり、これを三次スプライン曲線(実線で示す)で表し、

この曲線と検査体積境界(節点N1、N2)の交点(○印)を求め、これを結ぶ折れ線(破線)で空洞表面を表すことにする。検査体積をさらに6つに分割して四面体有限要素としているので、空洞は図6-2(c)に破線で示す面で囲まれる領域となる。羽根車壁面から交点までの距離つまり節点の移動量を δ とすると、この領域の全体積 $V_p (=4\delta A)$ は、一般に、 V_v に比べて過大となる。したがって、 V_p と V_v の値を等しくするため δ を δ' に修正する必要がある。図6-2のような矩形の検査体積の場合、この無次元修正量 $(\delta - \delta')/\delta$ は0.5である。

同様にすると、壁面上の隣接する4つの要素が $\alpha > \alpha_{cr}$ となる場合は図6-2(d)、直角をなす2面に接する1つの要素の場合は図6-2(e)の例のような空洞が得られる。ただし、6.3.2節で述べるように、流動状態と空洞領域を求める解析を連立させて収束解が得られるまで繰り返すので、解の発散や過大な空洞を生じさせないように、節点移動量 δ' には減衰係数 γ を乗じた値 $(\gamma \delta')$ を用いて空洞領域を定める。本解析では $\gamma = 0.2$ とした。なお、空洞領域の構成法としては、等ボイド率曲線より求める方法も考えられる。すなわち、検査体積のボイド率から各節点での値を求め、これを線形補間すれば等ボイド率曲線が得られるので、 $\alpha \geq \alpha_{cr}$ となる領域が空洞に相当する。後述するように空洞表面は等ボイド率曲線とはほぼ平行であることから知れるように、両者の方法はほぼ同一の空洞形状を与えることを付記しておく。

6. 3. 2 数値解析法

計算は入口ボイド率 α_0 に対し以下のような手順で行う。図6-3にはその概略を示してある。空洞形状に対する収束解が得られた場合、 α_0 を $\Delta \alpha_0 (=0.001)$ だけ増して同じ計算を繰り返す。

(1) 初期値($i=0$)として、前段階の計算から得られた収束値、 p_0 、 W_0 および空洞形状を用い、 α_i の分布を求める。

(2) 空洞モデルにより空洞形状を定める。

(3) 空洞形状が収束していない場合には、空洞を除いた残りの流れ場を分割して有限要素を再構成し、各要素のボイド率 α_i' を要素重心の座標値をもとに α_i を補間して求める。

(4) α_i' の場において、式(6-7)より ϕ_i を有限要素解析して W_i を求め、ついで α_i' 、 W_i を用いて式(6-8)より p_i を求める。

(5) 羽根後縁の圧力がKuttaの条件を満たさない場合には、循環 Γ_i を修正してステップ(4)へ戻り、流れ場を再計算する。

(6) α_i' 、 W_i 、 p_i の流れ場において、式(6-1)、(6-5)より α_i を求め、ステップ(2)に戻り空洞形状を修正する。

6. 4 解析結果と考察

6. 4. 1 入口ボイド率による空洞形状の変化

気泡流モデルによる数値解析によれば、規定流量($\phi = 0.08$)に対する羽根車入

口直後の流路断面内におけるボイド率分布は、図6-4のようになる。3種の入口ボイド率 α_0 に対する結果を示してあるが、ボイド率 α はシュラウド側とくに羽根負圧側で大きな値をもつ。この分布形状は測定結果⁽⁹⁴⁾の傾向とかなりよく一致しているが、 α は測定値より小さく約4割でしかない。流体の粘性の影響が考慮されていないことによるものであろう。 $\alpha_0=0.05$ において $\alpha \geq 0.2$ となる領域が同一のポンプ運転条件において観察されるシュラウド面上の空洞領域⁽⁸³⁾とほぼ一致しているので、本章では、気泡が羽根車壁面に付着して固着空洞が生ずる限界ボイド率 α_{0r} を0.2と仮定する。この値を変えたときの影響については後述する。

規定流量($\phi=0.08$)に対する空洞領域および等ボイド率線を求めると図6-5のようになる。これは、収束解が得られる最大の入口ボイド率 $\alpha_0=0.075$ のときの結果であり、羽根負圧面から圧力面までの周方向に異なる9つの子午面断面に対し、空洞領域は斜線部により、 α/α_0 に対する等ボイド率線は線の種類を変えて示してある。空洞は羽根車入口直後のシュラウド面上の羽根負圧側に存在しており、その領域は気泡流モデルにより得られたボイド率の高い領域(図6-4)にほぼ一致している。ポンプ軸方向(z方向)の空洞厚さはそれほど大きくなく、最大で流路幅の22%である。また、空洞近傍の等ボイド率線は空洞形状にほぼ平行である。

規定流量時の空洞形状を立体的に示すと図6-6のようになる。ただし、空洞の厚みが薄いので、周方向(θ)に比べ軸方向(z)の縮尺をやや大きくとってある。空洞が初生する α_0 の値は0.05であるが、図6-6(a)は、 α_0 がこの値よりやや大きい、 $\alpha_0=0.06$ のときの結果である。羽根車入口直後のシュラウド面上に羽根間中央部から羽根負圧側にかけて空洞が存在している。

図6-6(b)は、 α_0 がやや大きい $\alpha_0=0.068$ のときの結果である。空洞領域が羽根負圧側に沿って半径方向に大きく拡大し空洞の厚みも増している。図6-6(c)は、 α_0 が最大の、 $\alpha_0=0.075$ のときの結果であり、空洞領域が羽根圧力側へも拡大し、厚みも増している。これと同一のポンプ運転条件で観察される⁽⁸³⁾シュラウド面上の空洞領域と比べると、周方向はほぼ同様であるが、半径方向の広がりはかなり少ないようである。

ポンプ流量 ϕ の異なる $\phi=0.06$ 、 0.1 の場合における空洞形状や等ボイド率線の α_0 による変化は $\phi=0.08$ の場合とほぼ同様な傾向を示すので、これらの図示は省略した。空洞領域は、観察結果⁽⁸³⁾と同様、いずれの ϕ の場合にも羽根負圧側に生じた。また、負圧側に高ボイド率領域が存在することもボイド率測定結果⁽⁹⁴⁾⁽⁹⁵⁾の傾向と一致する。

6. 4. 2 空洞体積の変化

入口ボイド率 α_0 を増したときの空洞の全体積 V_v の変化を求めると図6-7のようになる。ただし、 V_v は羽根車入口半径 r_1 で無次元化してあり、3種のポンプ流量、 $\phi=0.06$ 、 0.08 、 0.1 に対する結果を記号を変えて併記してある。

規定流量($\phi=0.08$)時は、○印で示すように $\alpha_0=0.05$ で空洞が生じ、 $0.05 \leq$

$\alpha_0 \leq 0.071$ では α_0 の増加に対して V_v はほぼ直線的に増すが、 $\alpha_0 > 0.071$ で V_v の増加割合が急増する。このため、 $\alpha_0 \geq 0.071$ に対しては、 α_0 の増分値 $\Delta \alpha_0$ を小さくし、0.0005毎に計算を進めた。しかし、 $\alpha_0 > 0.075$ の場合には、羽根車入口直後の空洞部がシュラウド側からハブ側に向けて単調に急拡大し、収束解が得られなかった。空洞体積の急増大がこの α_0 近傍で生ずることは図6-7から明らかである。実験結果⁽⁸³⁾によれば、ほぼ同じ $\alpha_0 (=0.07)$ から α_0 をわずかに増すだけで揚程が急低下し(図6-11参照)、ポンプが揚水能力を失う。これは、羽根車入口直後における気泡滞留領域が α_0 の増加とともに成長し、ついには大きな空洞となって羽根車入口部を閉塞して、水流を遮断するためである。図6-7に見られる空洞体積急増大は、この揚水不能現象に対応しているものと考えられる。

図6-7には、低流量($\phi = 0.06$)時の結果を Δ 印、高流量($\phi = 0.1$)時の結果を \square 印で併記してある。 α_0 に対する V_v の変化の傾向は $\phi = 0.08$ の場合とほぼ同様であるが、 ϕ が大きいほど空洞が初生する α_0 が小さくなり、かつ α_0 に対する V_v の増加割合は大となって、より小さい α_0 で空洞体積の急増大が生ずる。この空洞急拡大時の α_0 は、いずれの ϕ の場合にもポンプが揚水能力を失うときの α_0 にほぼ等しい(図6-11参照)。

図6-7には、規定流量($\phi = 0.08$)時に対して、限界ボイド率 α_{cr} を0.18、0.22に変えたときの結果も二点鎖線および一点鎖線で併記してある。 α_{cr} を増すと空洞が初生する α_0 および空洞急拡大を示す α_0 はより大きくなるが、 α_{cr} が大なるほど結果に及ぼす影響は減ずる。

6. 4. 3 圧力分布

気泡流モデルにより求めた規定流量($\phi = 0.08$)時の子午面流路内圧力分布を図6-8に示す。ただし、ポンプ入口の静圧を基準とした無次元圧力係数 $\Delta \phi_r$ の等しい点を結んだ羽根負圧面の等圧線を図6-8(a)に、流路中央断面の結果を図6-8(b)に、圧力面の結果を図6-8(c)に示す。水単相流時($\alpha_0 = 0$)には、一点鎖線で示してあるように、3断面とも等圧線が羽根車全域でポンプ軸にほぼ平行である。二相流時には、 α_0 の増加とともにシュラウド側のボイド率が高くなるので、シュラウド側の圧力上昇量がより大きく低下し、曲線は右下がりの傾向を増すようになる。

空洞モデルにより求めた規定流量($\phi = 0.08$)時の子午面流路内圧力分布は、図6-9のようになる。空洞が存在する $\alpha_0 = 0.06$ 、空洞が流路を閉塞する直前の $\alpha_0 = 0.075$ に対する結果が併記してあり、空洞領域は斜線部で示し、その形状を等圧線と同じ線の種類で表してある。空洞近傍の上流側の等圧線が羽根車入口方向に湾曲し、圧力低下が空洞上流端から始まっているが、羽根車後流部にはその影響が顕著に現れず、等圧線の右下がり傾向は気泡流モデルによる結果(図6-8)とほぼ同様である。

図6-9の結果に相当する羽根間流路内圧力分布を図6-10に示す。図6-10(a)は、 α_0 の影響が顕著に現れるシュラウド面上の結果である。空洞(斜線部)の存在に

より空洞部の等圧線が下流方向に移動し、この影響は流れとともに羽根負圧側から流路中央部へと及んでいる。このため、羽根車出口近傍の流路中央部で凸形の等圧線が見られるが、気泡流モデルによる結果ではほぼ平行である。圧力分布の測定結果⁽⁹²⁾に比べると α_0 による等圧線の移動量は少ないが、変化の傾向は図6-10(a)の結果とよく似ている。図6-10(b)は流路中央断面内の結果であるが、 α_0 の影響はシュラウド側ほど顕著ではない。

低流量($\phi=0.06$)時および高流量($\phi=0.1$)時における圧力分布の状態は、規定流量($\phi=0.08$)時の結果(図6-9、図6-10)とほぼ同様である。

6. 4. 4 羽根車ヘッドの変化

羽根車入口直前および出口直後の流路断面における液相の速度分布とボイド率分布を式(6-13)~(6-15)に用い、これらを式(6-12)に代入して二相流時の羽根車ヘッド H_{imp} を求めると図6-11のようになる。水単相流時のヘッド H_{imp0} に対する H_{imp} の比、 H_{imp}/H_{imp0} を入口ボイド率 α_0 に対して太い実線で示し、空洞を考慮しない気泡流モデルによる結果(○印を結ぶ点線)と比較してある。規定流量($\phi=0.08$)時の結果は図6-11の中段である。空洞モデルと気泡流モデルによる違いは空洞初生値($\alpha_0=0.05$)より大きい $\alpha_0 \geq 0.05$ の領域で生ずることになるが、両者はこの領域でも実質的にほぼ同一である。すなわち、 α_0 の増大とともに H_{imp}/H_{imp0} は緩やかに減少し、 $\alpha_0 \geq 0.06$ では一定値($H_{imp}/H_{imp0}=0.978$)をとる。羽根車ヘッドに及ぼす空洞の影響についてはキャピテーション空洞に対する計算結果とよく似ている。すなわち、定常・非粘性流れの仮定のもと、羽根前縁部のキャピテーション領域を空洞で表し、特異点法により二次元数値解析した研究^{(166)~(168)}によれば、空洞が前縁負圧側に存在する場合、空洞の大きさを変えても羽根車ヘッドはほとんど変わらず、空洞がない場合の値とほぼ同じである。

図6-11には測定値⁽⁹³⁾を□印で併記してある。 $\phi=0.08$ の場合、測定値は $\alpha_0 \leq 0.04$ において本モデルの結果と一致するが、 $\alpha_0 \geq 0.05$ では測定値がより大きく低下する。観察によれば $\alpha_0=0.051$ のとき既に空洞が存在し、 $\alpha_0=0.071$ で性能が急低下する。

図6-11の最上段は低流量($\phi=0.06$)時の結果である。 H_{imp}/H_{imp0} と α_0 の関係は規定流量の場合と同様であるが、収束解が得られる最大入口ボイド率は $\alpha_0=0.0805$ であり、この値は実験より得られる性能急低下時の $\alpha_0(=0.07)$ よりやや大きい。図6-11の最下段は高流量($\phi=0.1$)時の結果である。空洞急拡大時の入口ボイド率は $\alpha_0=0.058$ であり、性能急低下時の $\alpha_0(=0.06)$ よりやや小さい。

6. 5 結言

羽根車内気液二相流に対する空洞を伴う気泡流モデルによる三次元数値解析法を示し、これを低比速度の半径流ポンプに適用して、以下の事柄を明らかにした。

(1) ポンプ吐出量 ϕ ($0.06 \leq \phi \leq 0.1$)に応じたある入口ボイド率 α_0 で、羽根車入口直後のシュラウド面上に空洞が発生し、 α_0 の増加に対して空洞体積は直線的に増大する。さらに α_0 を増すと、空洞は羽根車入口部において急拡大し、羽根間流路を覆うようになる。

(2) 空洞体積急拡大時の α_0 にほぼ等しい α_0 において、実験によれば、空気が羽根車流路を閉塞し、ポンプ性能が急低下する。この性能急低下限界を本モデルによりシミュレートすることができる。

(3) 空洞発生時には、空洞上流端から半径方向の圧力上昇量が低下し、 α_0 の増加による空洞領域の拡大とともにシュラウド面上の圧力上昇量が低下する。

(4) 空洞を伴う気泡流モデルにより求めた羽根車ヘッドは、空洞をもたない気泡流モデルによる結果とほとんど変わらない。

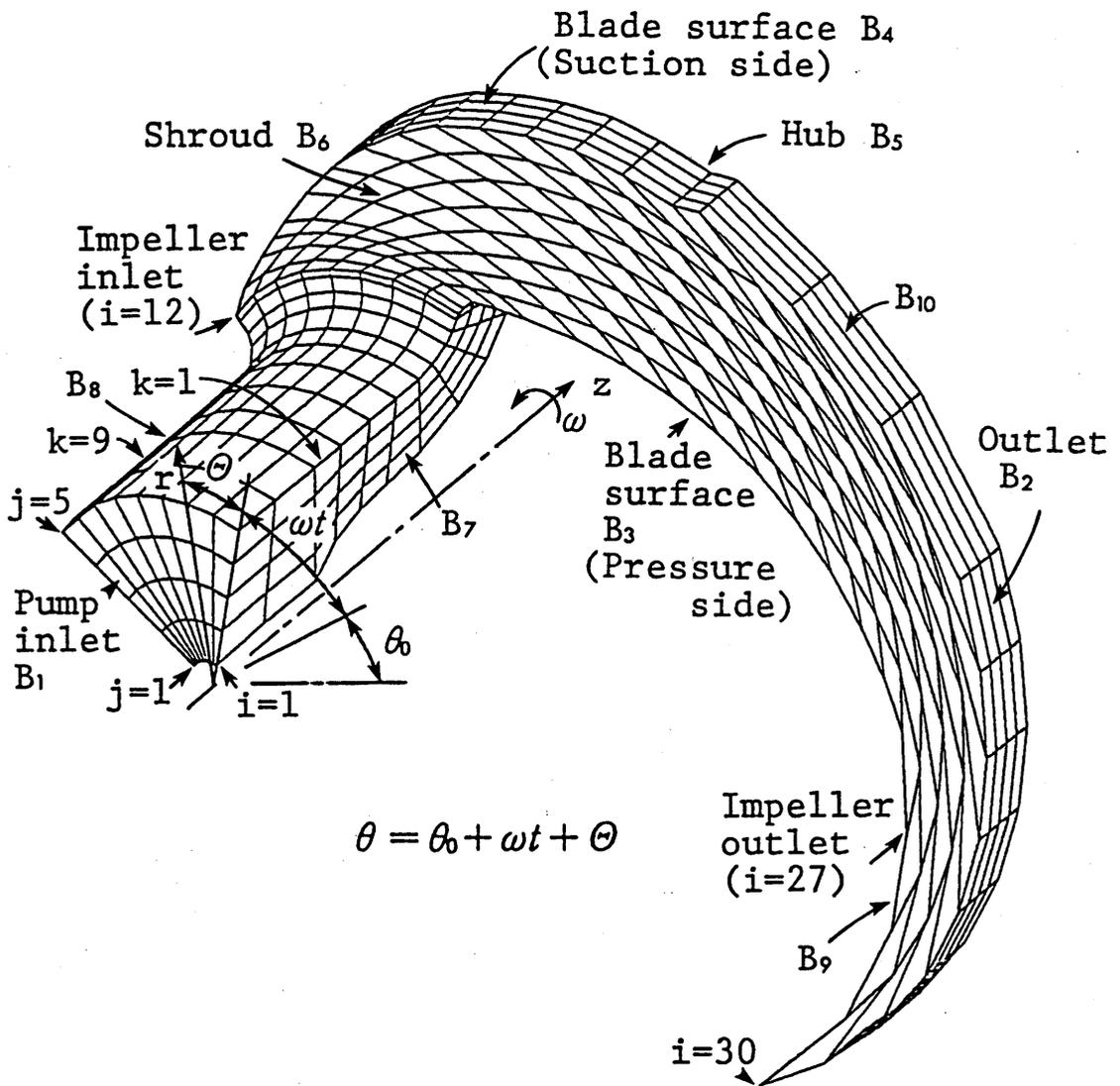
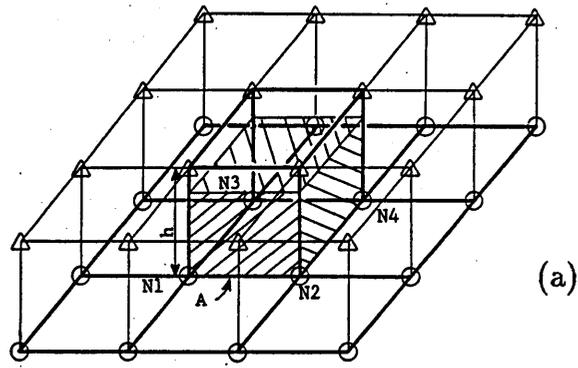
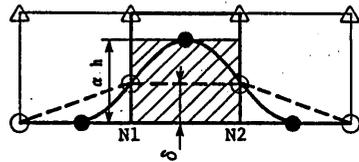


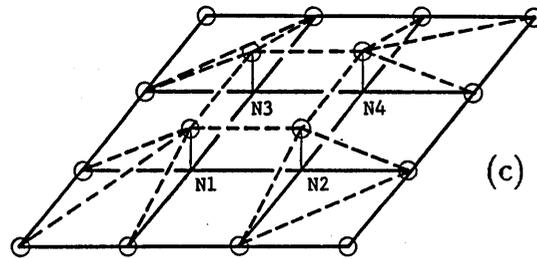
図 6-1 流れの領域



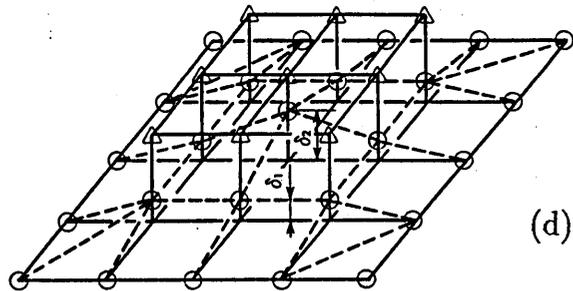
(a)



(b)



(c)

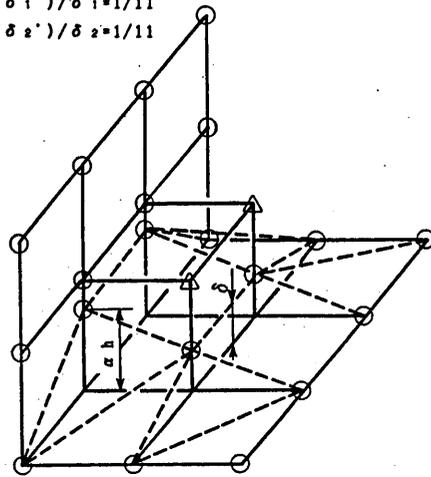


(d)

$$V_v = 4\alpha Ah, \quad V_p = (25/3)\delta_1 A + (2/3)\delta_2 A$$

$$(\delta_1 - \delta_1')/\delta_1 = 1/11$$

$$(\delta_2 - \delta_2')/\delta_2 = 1/11$$



(e)

$$V_v = \alpha Ah, \quad V_p = 2\delta A + \alpha Ah$$

$$(\delta - \delta')/\delta = 1$$

図6-2 空洞モデルによる空洞形状の設定方法

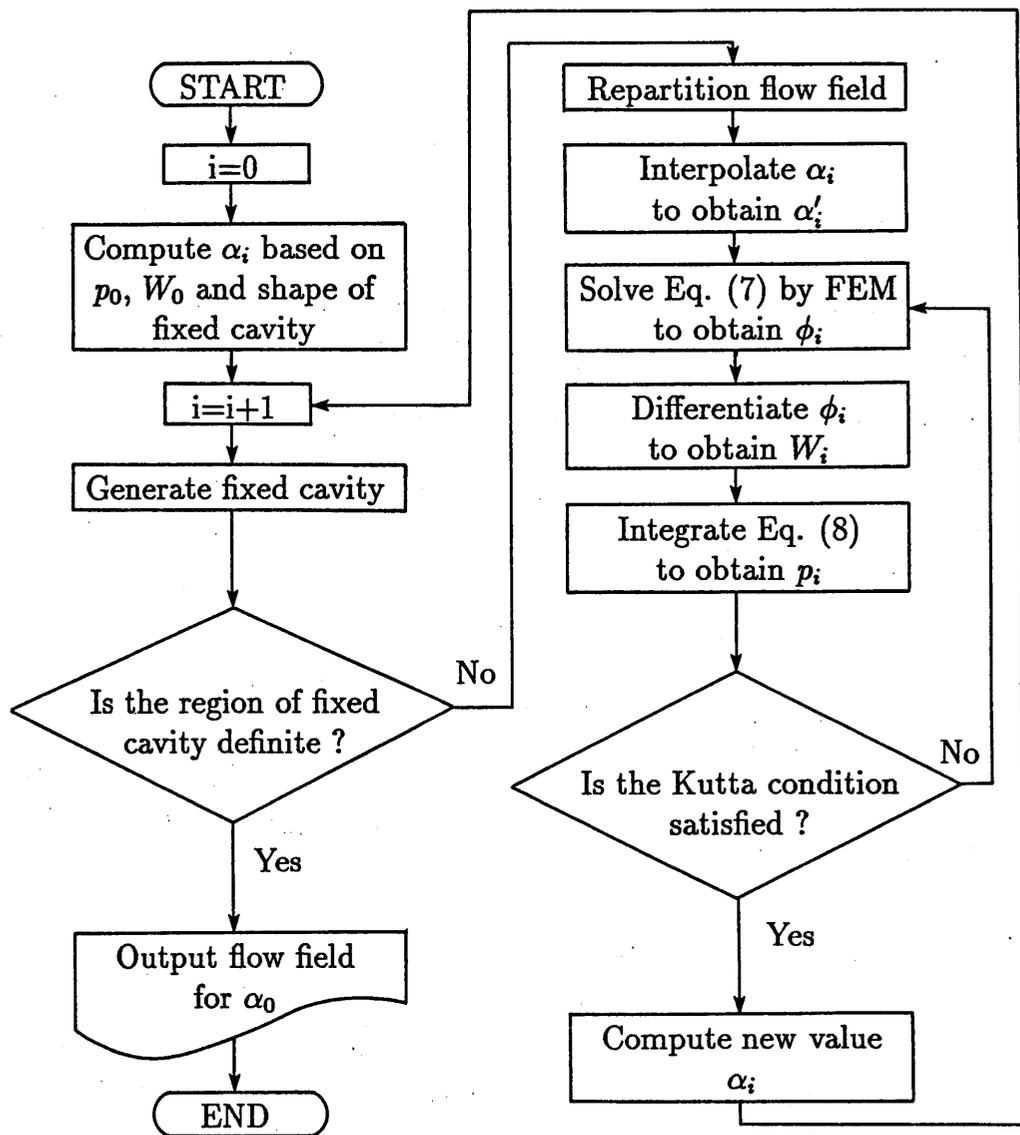


图 6-3 计算手順

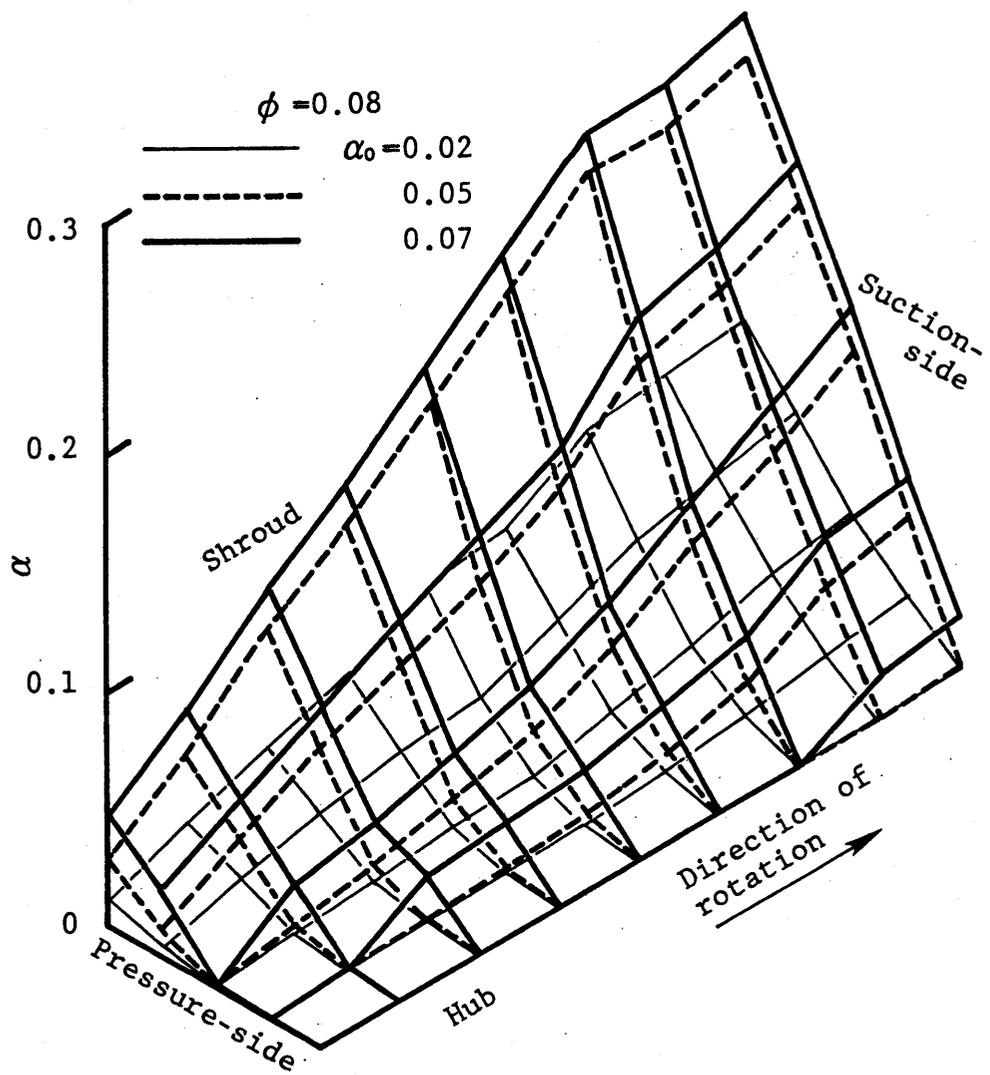


図6-4 羽根車入口直後断面のボイド率分布
 (気泡流モデル、 $r/r_1=1.1$ 、 $\phi=0.08$)

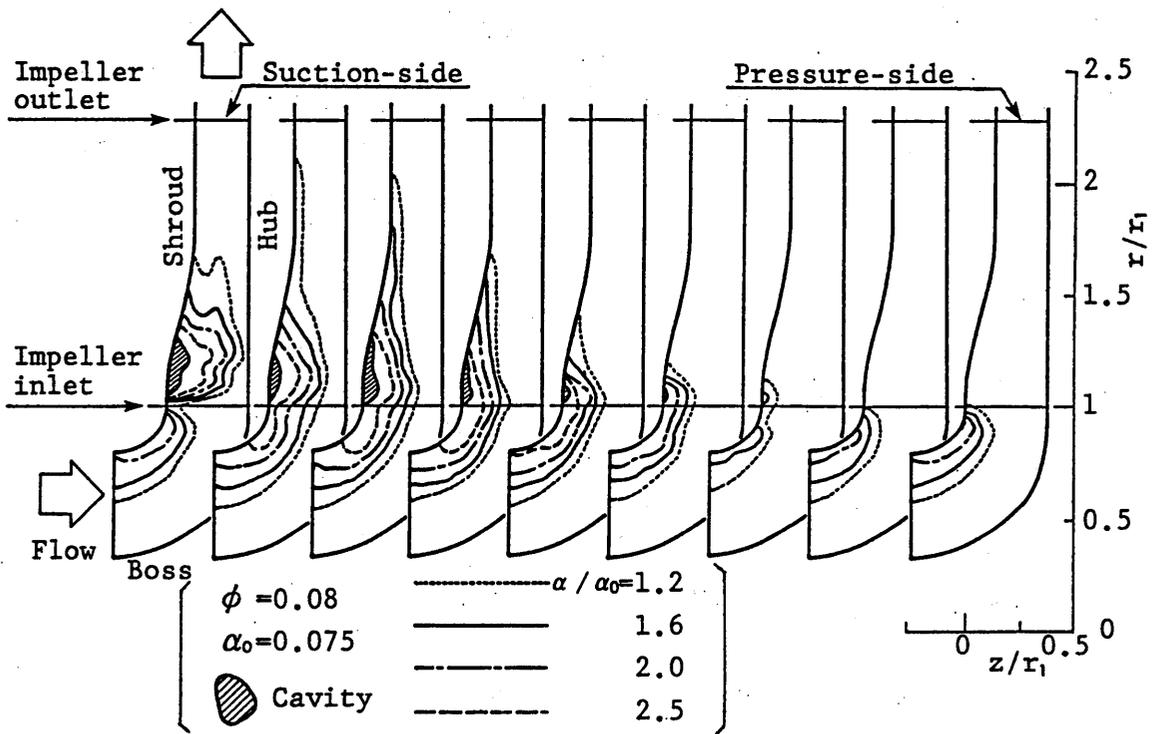


図6-5 子午面流路内の空洞形状とボイド率分布 ($\phi = 0.08$)

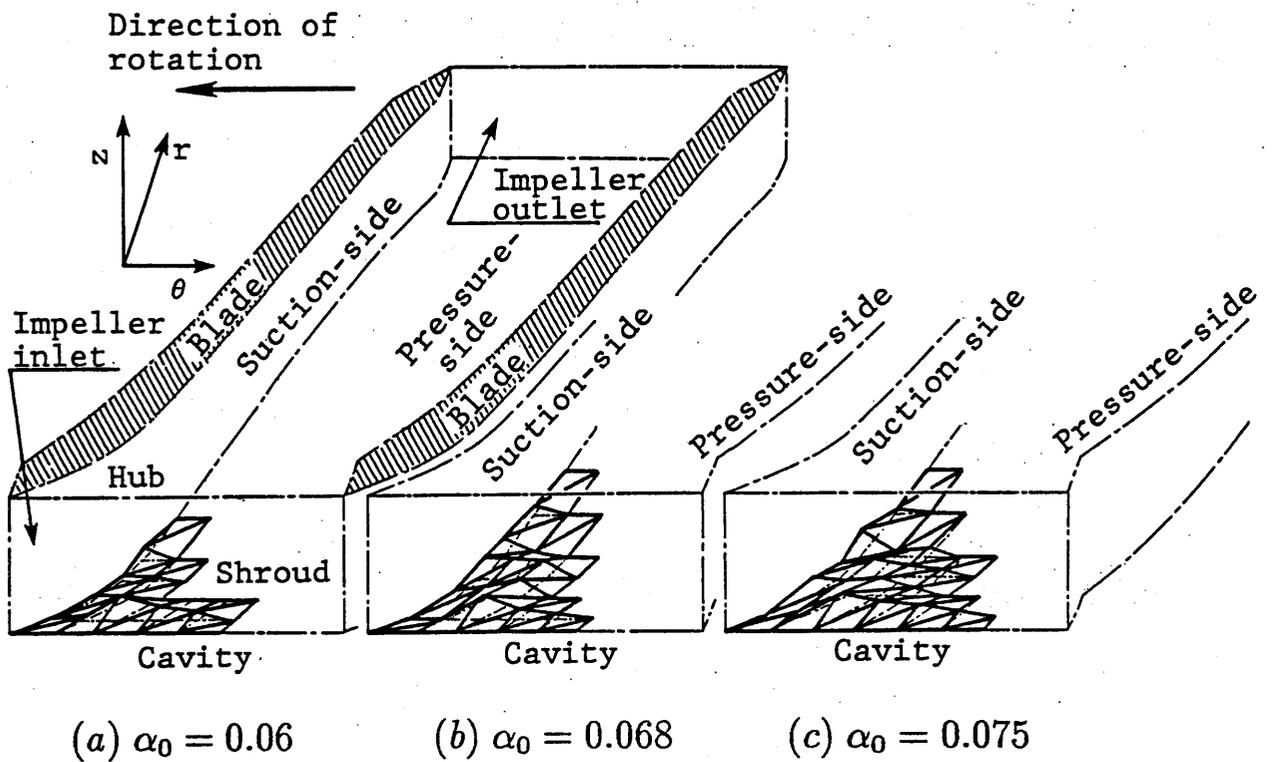


図6-6 羽根車内の空洞形状 ($\phi = 0.08$)

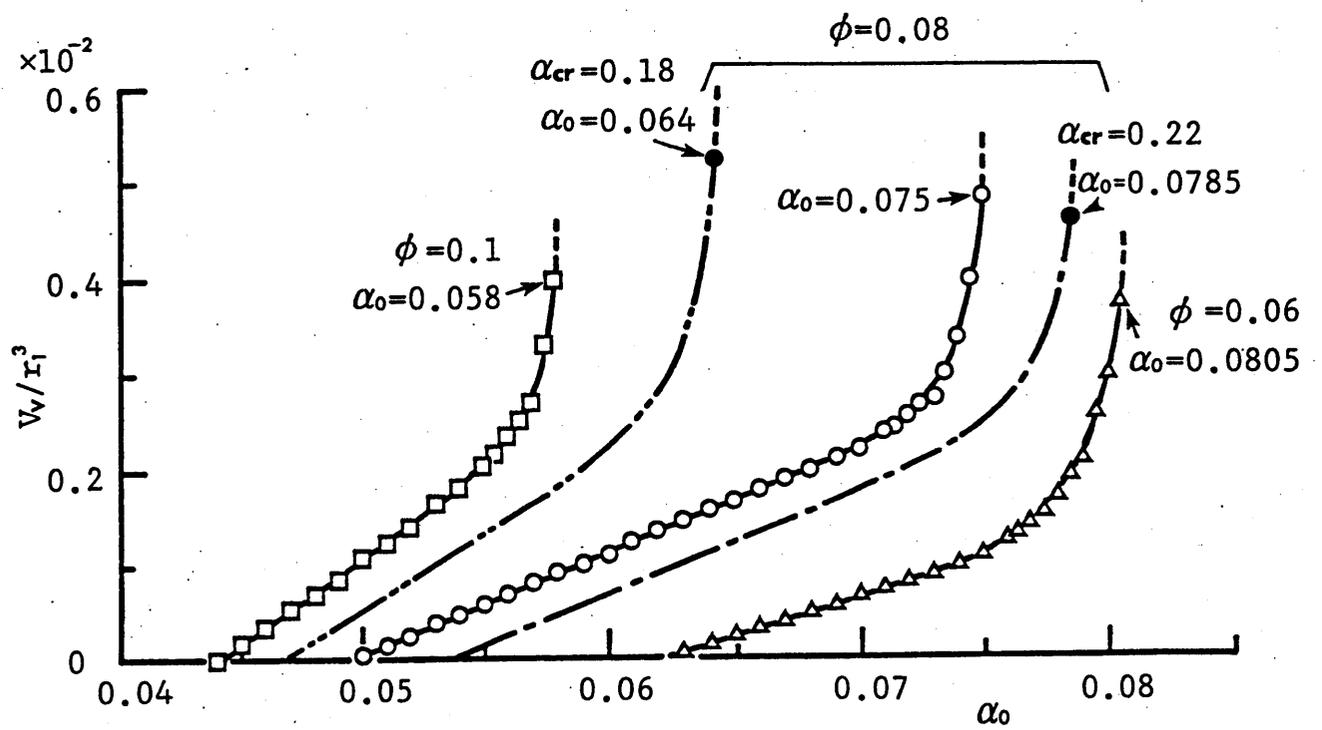


図6-7 α_0 に対する空洞体積の変化

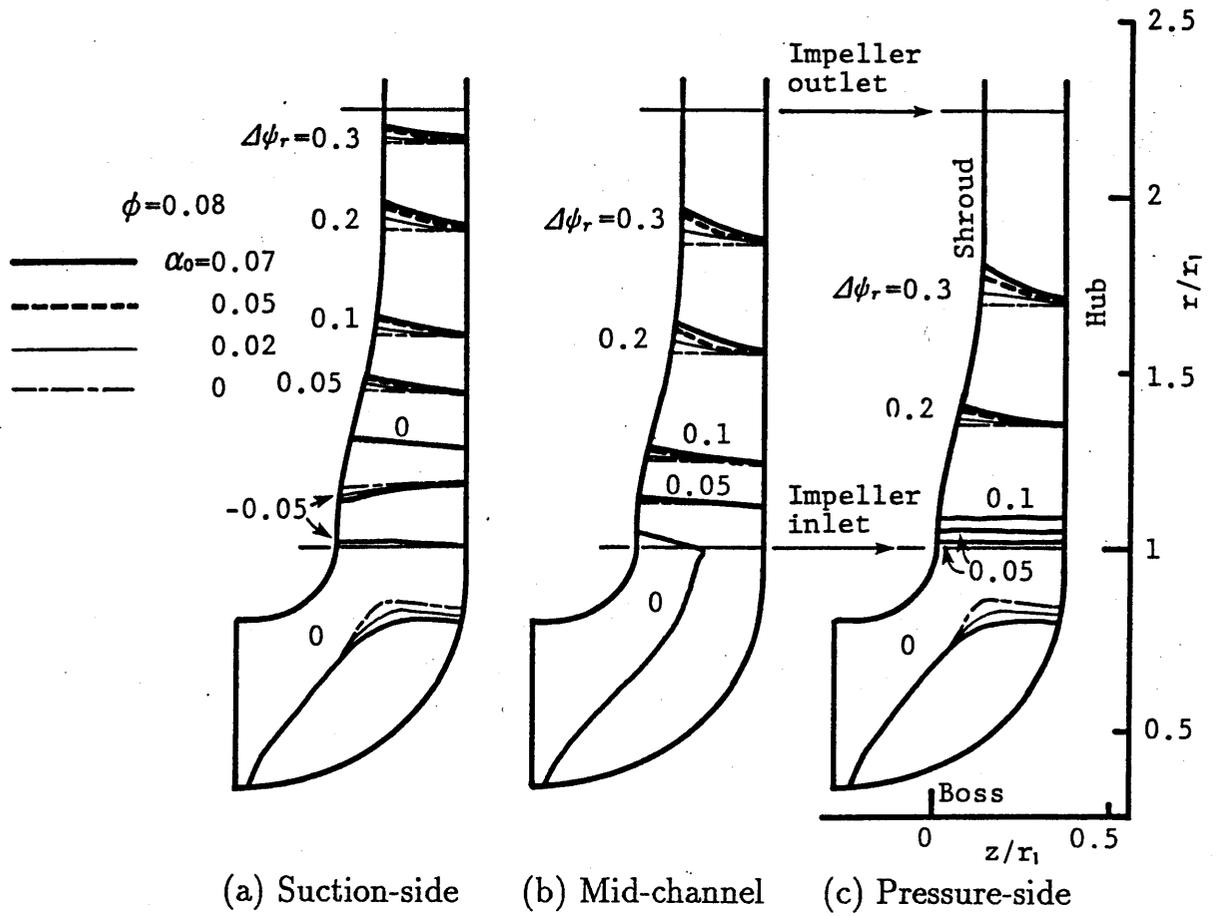


図6-8 子午面流路内の圧力分布(気泡流モデル、 $\phi=0.08$)

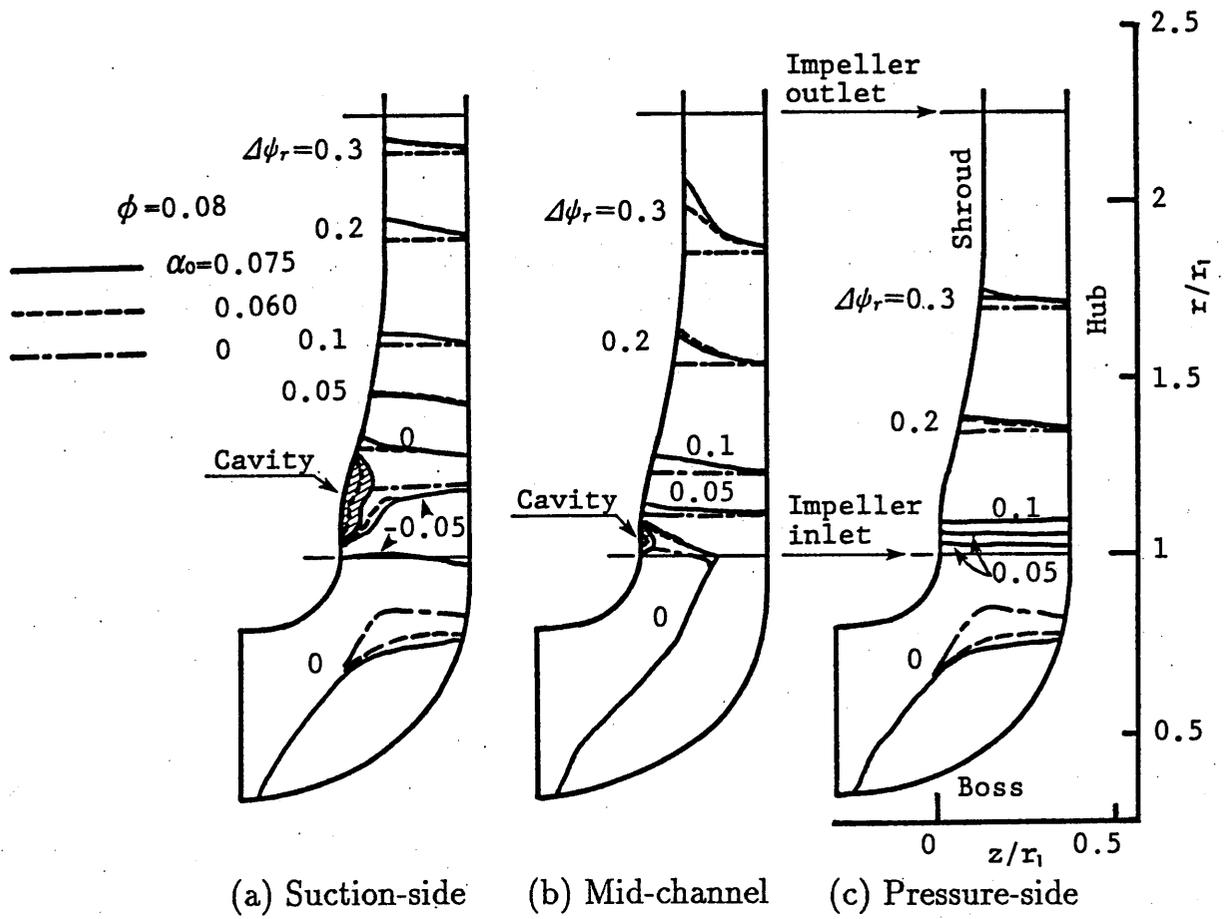


図6-9 子午面流路内の圧力分布 ($\phi = 0.08$)

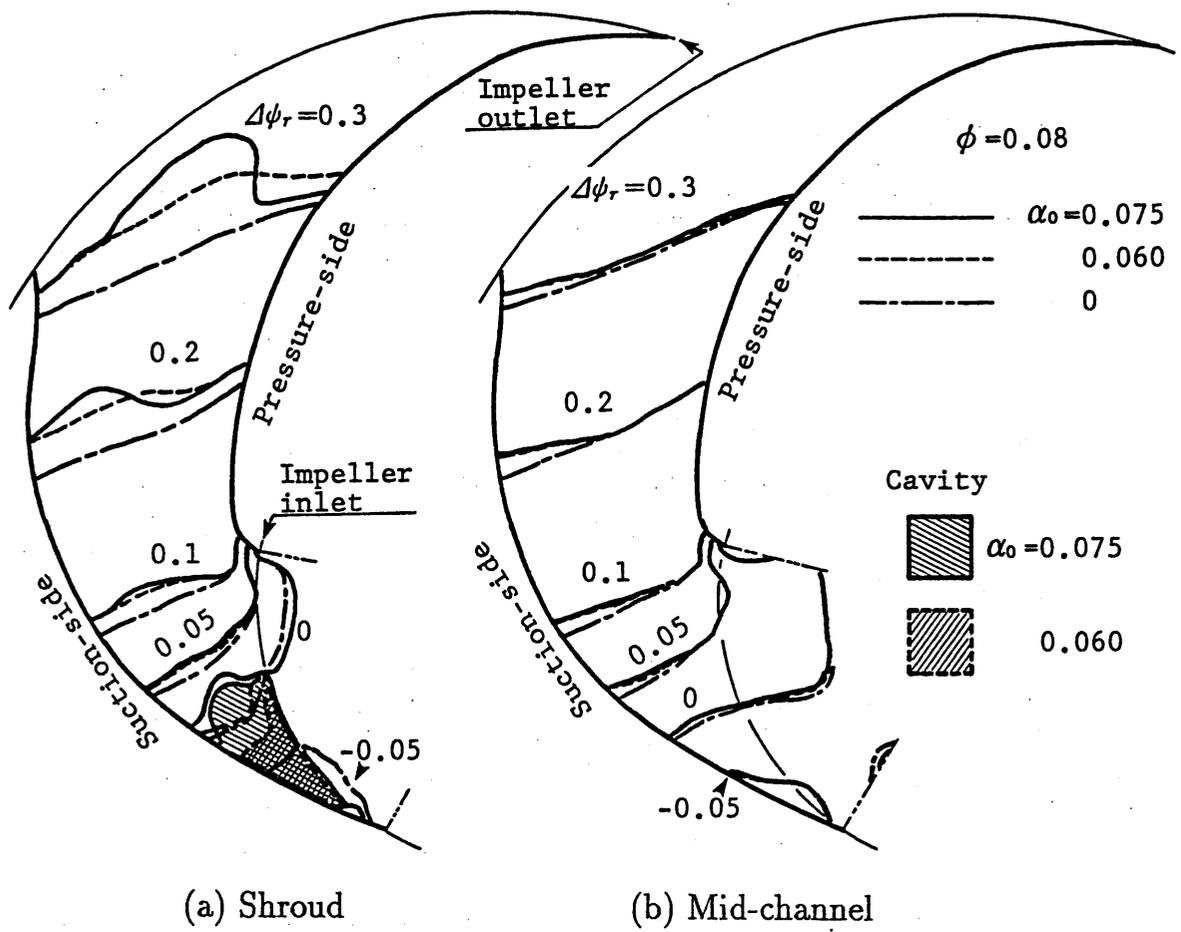


図6-10 羽根間流路内の圧力分布 ($\phi = 0.08$)

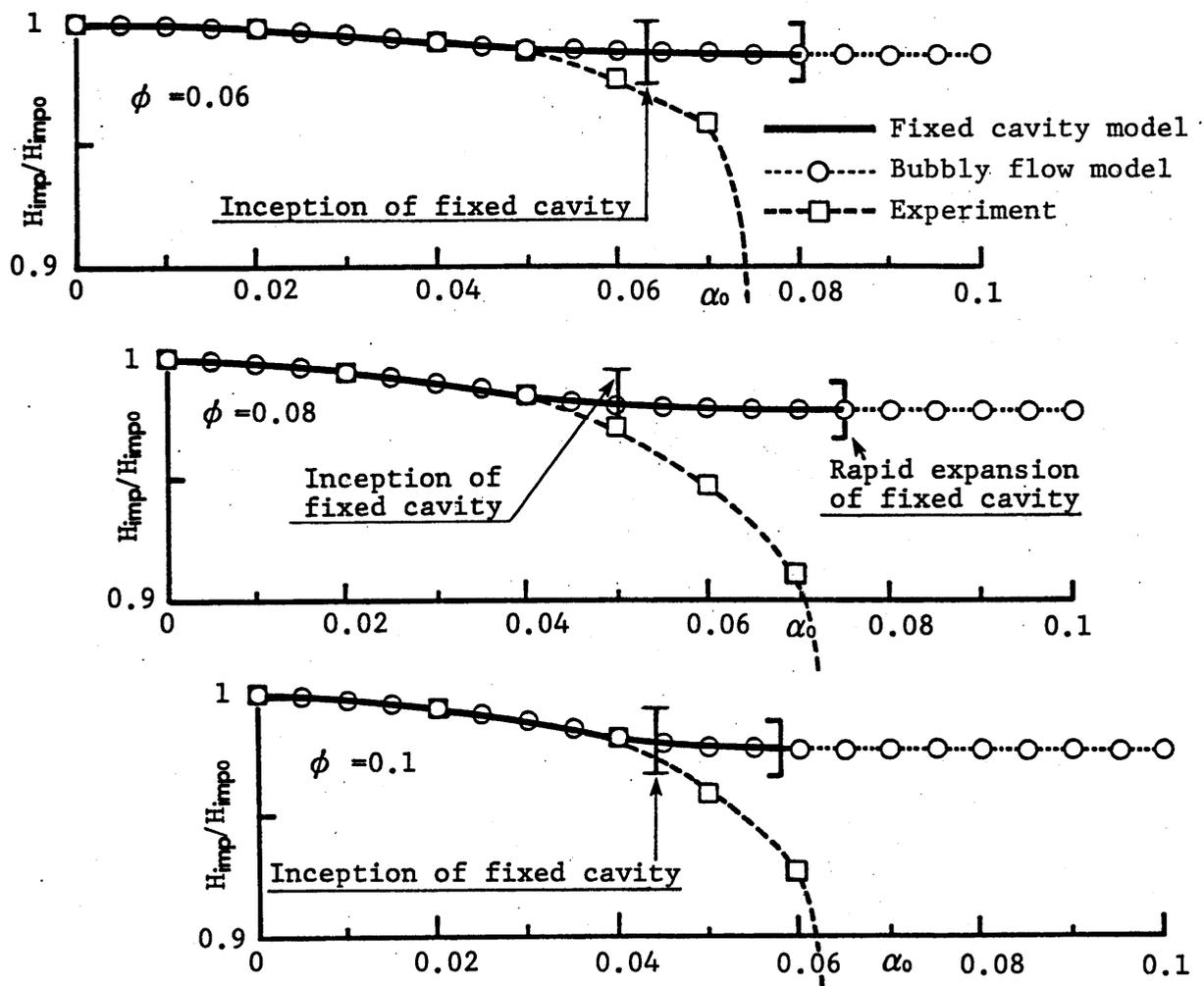


図6-11 α_0 に対する羽根車ヘッドの変化

第7章 結 論

自由曲線で境界形状が与えられる領域に対する三角形一次要素を用いた有限要素解析において、第2種境界条件に基づく右辺ベクトルの計算方法を検討し、以下の事柄を明らかにした。

(1) 右辺ベクトルの変化が解に及ぼす影響は式(2-22)で与えられる。この影響は当該節点で最も大きく現れるが、節点間距離の減少とともに低下する。また、 ϕ の変化方向に対して直角方向に長い辺をもつ要素ほどその影響が大になる。

(2) 曲線境界に対する右辺ベクトルを式(2-15)、式(2-16)で表す場合、両者の差は曲線の最大変位量の増大とともに大になるが、最大変位の弦方向の位置には依存しない。両者の差は第2種境界条件が線形分布の場合には小さいが、並進移動面や回転面に作用する場合には著しく大きい。

(3) 第2種境界条件が並進移動面上に作用する場合、式(2-15)の代わりに式(2-16)を用いて右辺ベクトルを求めることにより、計算精度が向上し、第2種境界条件が作用する曲線に沿う節点数を低減できる。低減率は高精度の解を要求するほど大きい。収束解は、 $y_{\max}/L_s \leq 0.016$ となるように節点数をとるときに得られた。

(4) 第2種境界条件が回転面に作用する場合の流れ解析においては、式(2-16)を用いることにより羽根面に沿う節点数を12%程度低減できる。収束解は、 $y_{\max}/L_s \leq 0.012$ となるように節点数をとるときに得られた。

(5) 式(2-16)を用いる方法は二次要素を用いる場合とほぼ同量の記憶容量を必要とし、ほぼ同じ精度が得られるが、節点数が過少なときの誤差は相当に小さい。

また、三角形一次要素を用いた有限要素法により羽根車内の流れを数値解析するとともにKutta条件の扱いを吟味し、以下の事柄を明らかにした。

(1) 羽根後縁でKuttaの条件を実現するには、後縁の圧力側および負圧側の近傍要素における圧力を一致させるように循環 Γ_2 を定めればよい。得られる Γ_2 は、WiesnerやStodolaのすべり係数より与えられる値にほぼ等しい。

(2) 後縁点を羽根車外周上のカンパ線上もしくは羽根負圧側よりに置く場合には、後縁点とその一つ上流の節点間の半径距離 Δr_2 の変化による影響は軽微である。また、境界形状を折れ線近似する方法を用いると Δr_2 の変化による影響がより大きく現れる。

(3) 羽根後縁部に小さい剝離領域を仮定し、羽根車下流で角運動量保存則が満足される周方向位置に後縁点を置くことにより、後縁の羽根厚みによらず、羽根面上の圧力分布が実験結果とかなり良く一致する結果が得られる。

以上の結論から、羽根車内单相流の有限要素解析の手法が、Kutta条件の取扱方法も含めて明らかにされた。つぎに、羽根車内二相流を気泡流モデルに基づ

いて理論的に考察し、流動状態を求める三次元数値解析法を示すとともに、これを低比速度の半径流ポンプに適用して、以下の事柄を明らかにした。

(1) 羽根車の流路の代表長さに比べ微細な気泡が均質に分散した気泡流は、与えられたボイド率分布をもつポテンシャル場として準調和方程式で表すことができる。

(2) ボイド率は羽根車入口部で著しく高く、かつ不均一である。その最大値は入口ボイド率の4倍以上に達する。

(3) 半径流形羽根車内の圧力上昇量は、水単相流時には軸方向にほぼ一定であるが、二相流時にはボイド率が高いシュラウド側で低下し、軸方向に不均一となる。この傾向は羽根車出口においてとくに顕著に現れる。

(4) ボイド率および圧力分布の解析結果が測定値とかなり良く一致することから、本数値解析法により、任意形状をもつ羽根車内の気泡流を三次元解析できる。

気泡流モデルにより数値解析した半径流形羽根車内の二相流の速度、圧力およびボイド率分布に基づいて、入口ボイド率に対する羽根面負荷、羽根車ヘッド、損失ヘッド比の変化などを求め、以下の事柄を明らかにした。

(1) ポンプ入口ボイド率 α_0 が小さく羽根車内の流れが気泡流状態にある場合には、計算より得られた速度やボイド率を用いて、二相流時の羽根車ヘッドを求めることができる。

(2) 気液間の運動量の交換量に相当するヘッドが、気泡流領域においては実測値より求めた全損失ヘッドの増加量とほぼ等しいことから、この値に基づきポンプの損失ヘッド比や損失圧力倍数を求めることができる。

(3) 羽根車ヘッド、気液間の運動量交換による損失、損失ヘッド比に及ぼす気泡の初期直径の影響は極めて少ない。

(4) 高ボイド率領域($\alpha \geq 0.35$)においてチャーン流に対する気泡の抵抗係数を用いると、羽根車ヘッドの低下量が大になるが、実測値ほどの低下は生じない。

(5) 気泡群中の気泡に対する抵抗係数の代わりに単一気泡に対する抵抗係数を用いると、入口ボイド率が高い場合($\alpha_0 \geq 0.07$)においてのみ運動量交換によるヘッドがわずかに小さくなる。

羽根車内二相流に対する空洞を伴う気泡流モデルによる三次元数値解析法を示し、これを低比速度の半径流ポンプに適用して、以下の事柄を明らかにした。

(1) ポンプ吐出量 ϕ ($0.06 \leq \phi \leq 0.1$)に応じたある入口ボイド率 α_0 で、羽根車入口直後のシュラウド面上に空洞が発生し、 α_0 の増加に対して空洞体積は直線的に増大する。さらに α_0 を増すと、空洞は羽根車入口部において急拡大し、羽根間流路を覆うようになる。

(2) 空洞体積急拡大時の α_0 にほぼ等しい α_0 において、実験によれば、空気が羽根車流路を閉塞し、ポンプ性能が急低下する。この性能急低下限界を本モデルによりシミュレートすることができる。

(3) 空洞発生時には、空洞上流端から半径方向の圧力上昇量が低下し、 α_0 の増加による空洞領域の拡大とともにシュラウド面上の圧力上昇量が低下する。

(4) 空洞を伴う気泡流モデルにより求めた羽根車ヘッドは、空洞をもたない気泡流モデルによる結果とほとんど変わらない。

謝 辞

本研究は、昭和62年4月から平成4年3月にわたり、名古屋大学工学部機械学科第3講座において、名古屋大学菊山功嗣教授のご指導のもとに行われたものであります。本論文を結ぶにあたり、長年にわたり終始懇篤なご指導とご鞭撻を賜った菊山功嗣教授に対し、ここに謹んで感謝の意を表す次第であります。

また、本研究に対する種々の有益なご教示、ご助言および本論文をまとめるに際し注意深いご検討をいただいた名古屋大学中村育雄教授ならびに藤田秀臣教授に対し、心より感謝の意を表します。

本論文は、名古屋大学峯村吉泰教授との共同研究として、日本機械学会論文集などに公表した研究論文を中心としてまとめたものであります。研究遂行にあたり、多くのご指導、ご助言を賜った峯村吉泰教授に深く謝意を表します。

名古屋大学教養部図学科の皆様からは、横澤肇助教授、渡邊崇助教授をはじめ多くの方々に多大なご援助をいただきました。厚くお礼申し上げます。

最後に、本論文をまとめるにあたり、ご支援、ご協力をいただいた方々に厚くお礼申し上げます。

平成4年4月

文 献

- (1) Anand, A. K. and Lakshminarayana, B., "Three-Dimensional Turbulent Boundary Layer in a Rotating Helical Channel", Trans. ASME, J. Fluid Eng., **97-2**(1975), 197.
- (2) Katsanis, T. and McNally, W. D., "Revised Fortran Program for Calculating Velocities and Streamlines on the Hub-Shroud Midchannel Stream Surface of an Axial, Radial or Mixed-Flow Turbomachine or Annular Duct, I -User's Manual", NASA TN D-8430, (1977).
- (3) Hirsch, C. and Warzee, G., "A Finite Element Method for Through-flow Calculation in Turbomachines", Trans. ASME, J. Fluid Eng., **98**(1976), 403.
- (4) Adler, D. and Krimerman, Y., "The Numerical Calculation of the Meridional Flow Field in Turbomachines Using the Finite Element Method", Israel J. Technology, **12-3/4**(1974), 268.
- (5) Katsanis, T., "Computer Program for Calculating Velocities and Streamlines on a Blade-to-Blade Stream Surface of a Turbomachine", NASA TN D-4525, (1968).
- (6) Katsanis, T. and McNally, W. D., "Fortran Program for Calculating Velocities in a Magnified Region on a Blade-to-Blade Stream Surface of a Turbomachine", NASA TN D-5091, (1969).
- (7) Deshpande, R. B., "A New Algorithm for the Solution of Turbomachinery Flow Problems", Trans. ASME, J. Fluid Eng., **97**(1975), 372.
- (8) 大宮司、"斜流ポンプまたは水車の翼列の特性を求める簡易解法"、機論、**32-242**、B(1966)、1527.
- (9) Adler, D. and Krimerman, Y., "The Numerical Calculation of the Blade-to-Blade Flow Field in Turbo Impellers Using the Finite Element Method", J. Mechanical Engineering Science, **19**(1977), 108.
- (10) Katsanis, T., "Fortran Program for Quasi-Three-Dimensional Calculation of Surface Velocities and Choking Flow for Turbomachine Blade Rows", NASA TN D-6177, (1971).
- (11) 中瀬・妹尾、"ターボ機械の羽根車の流れ(第2報、翼間流れを考慮した回転流面の決定法)"、機論、**38-308**、B(1972)、800.
- (12) Bosman, C. and El-Shaarawi, M. A. I., "Quasi-Three-Dimensional Numerical Solution of Flow in Turbomachines", Trans. ASME, J. Fluid Eng., **99**(1977), 132.
- (13) Novak, R. A. and Hearshey, R. M., "A Nearly Three-Dimensional Interblade Computing System for Turbomachinery", Trans. ASME, J. Fluid Eng., **99**(1977), 154.
- (14) Hirsch, Ch. and Warzee, G., "An Integrated Quasi-3D Finite Ele-

- ment Calculation Program for Turbomachinery Flows", Trans. ASME, J. Engineering for Power, 101(1979), 141.
- (15) Krimerman, Y. and Adler, D., "The Complete Three-Dimensional Calculation of the Compressible Flow Field in Turbo Impellers", J. Mechanical Engineering Science, 20-3(1978), 149.
- (16) 生井・井上、「ターボ送風機と圧縮機」、コロナ社、(1988)、144.
- (17) 谷、「流れ学」、岩波全書、(1967)、233.
- (18) Denton, J. D., "A Time Marching Method for Two- and Three-Dimensional Balde-to-Blade Flows", ARC R & M, No.3775, (1975).
- (19) Rae, W. J., "Calculations of Three-Dimensional Transonic Compressor Flowfields by a Relaxation Method", AIAA Paper, No.77-199, (1977).
- (20) Fruehauf, H. H., "Spatial Supersonic Flow through Annular Cascades", Trans. ASME, J. Engineering for Power, 98-2(1976), 274.
- (21) Martinon, J., "Use of the Characteristic Method for the Prediction of the Three-Dimensional Flow Field in High Transonic Compressors", ASME Paper, No.79-GT-34, (1979).
- (22) Grainger, C. F., "Three Dimensional Supersonic Flow through a Cascade of Twisted Flat Plates", ASME Paper, No.80-FE-3, (1980).
- (23) 長藤、「流体機械内部流れの解析(第1報、理論解析)」、機講論、760-18 (1976-11)、211.
- (24) Nagafuji, T. and Morii, H., "A Flow Study in Francis Turbine Runner", Proc. 10th Symposium of IAHR, (1980), 583.
- (25) 長藤・森井、「フランス水車内部流れの研究(第3報、三次元有限要素法によるランナの流れ解析)」、機論、50-450、B(1984)、398.
- (26) Laskaris, T. E., "Finite-Element Analysis of Three-Dimensional Potential Flow in Turbomachines", AIAA J., 16-7(1978), 717.
- (27) 三宅・ほか3名、「パネル法を用いた軸流動翼の三次元流れ解析」、機論、50-457、B(1984)、2143.
- (28) 三宅・ほか2名、「遠心羽根車内ポテンシャル流れのパネル法による完全三次元解析」、52-484、B(1986)、3993.
- (29) 大宮司、「軸流形ターボ機械の三次元ポテンシャル流れの数値解析」、機論、48-433、B(1982)、1667.
- (30) Daiguji, H., "A Finite Element Method for Analysing the 3-D Flow in Turbomachines", 4th International Symposium on Finite Element Methods in Flow Problems, University of Tokyo Press., (1982), 751.
- (31) 大宮司、「遠心形ターボ機械の三次元ポテンシャル流れの数値解析」、機論、49-437、B(1983)、11.
- (32) 大宮司・高野、「上流と下流の効果を含めた三次元ポテンシャル翼列流れの有限要素解析」、機論、52-481、B(1986)、3139.

- (33) Daiguji, H. and Takano, T., "Numerical Method for Analysing Three-Dimensional Potential Flow through Large Stagger Rotating Cascade", Proc. China-Japan Joint Conference on Hydraulic Machinery and Equipment, (1984), 437.
- (34) Hah, C., "A Navier-Stokes Analysis of Three-Dimensional Turbulent Flows Inside Turbine Blade Rows at Design and Off-Design Conditions", Trans. ASME, J. Engineering for Gas Turbine and Power, 106-1(1984), 421.
- (35) McNally, W. D. and Sockol, P. M., "REVIEW-Computational Methods for Internal Flows With Emphasis on Turbomachinery", Trans. ASME, J. Fluid Eng., 107-1(1985), 6.
- (36) 井上、"ターボ機械の三次元流動解析における乱流モデリング"、機論、54-497、B(1988)、3.
- (37) Tanabe, S., et al., "Turbulent Flow Analysis in a Pump Impeller", Proc. Fluid Machinery Flow Forum, ASME, FED-119(1991), 1.
- (38) Stepanoff, A. J., "Centrifugal and Axial Flow Pumps", (1957), 226, John-Wiley & Sons.
- (39) Stepanoff, A. J., "Pumps and Blowers - Two Phase Flow", (1965), 24, John-Wiley & Sons.
- (40) 山根、"渦巻ポンプ羽根車内の水と気泡の流動"、機論、26-162、B(1960)、210.
- (41) Arie, M. and Fukusako, S., "Performance Tests of a Centrifugal Pump", Proc. Japan-U.S. Seminar on Similitude in Fluid Mechanics, (1967).
- (42) Murakami, M., et al., "Flow of Entrained Air in Centrifugal Pumps", Proc. 13th Congress IAHR, 2B(1967), 71.
- (43) Florjancic, D., "Influence of Gas and Air Admission on the Behavior of Single- and Multi-stage Pumps", Sulzer Research Number, (1970), 35.
- (44) Runstadler, P. W., "Review and Analysis of State-of-the-Art of Multiphase Pump Technology", EPRI NP-159, (1976-2).
- (45) 村上・峯村、"ターボ機械における気液二相流"、機論、48-426、B(1982)、179.
- (46) Minemura, K. and Murakami, M., "Developments in the Research of Air-Water Two-Phase Flows in Turbomachinery", JSME International J., Series II, 31-4(1988), 615.
- (47) Kim, J. H., "Perspective on Two-Phase Flow Pump Modeling for Nuclear Reactor Safety Analysis", Proc. Cavitation and Multiphase Flow Forum, ASME, (1983), 29.
- (48) Kim, J. H., et al., "On Centrifugal Pump Head Degradation in Two-

- Phase Flow", ASME, FED-26(1985), 9.
- (49) Olson, D. J., "Experimental Data Report for Single and Two-Phase Steady State Tests of the 1/2 LOOP MOD-1 Semiscale System Pump", ANCR-1150, (1974), Aerojet Nuclear Company.
- (50) Olson, D. J., "Single and Two-Phase Performance Characteristics of the MOD-1 Semiscale Pump Under Steady State and Transient Fluid Conditions", ANCR-1165, (1974), Aerojet Nuclear Company.
- (51) Katsma, K. R., et al., "RELAP4/MOD5 - A Computer Program for Transient Thermal-Hydraulic Analysis of Nuclear Reactors and Related System - User's Manual", ANCR-NUREG-1335, (1976-9), Aerojet Nuclear Company.
- (52) Ransom, V. H., "RELAP5/MOD1 Code Manual, Vol.1: System Models and Numerical Methods", NUREG/CR-1826, EGG-2070, EG&G.
- (53) McFadden, J. H., et al., "RETRAN-02 - A Program for Transient Thermal-Hydraulic Analysis of Complex Fluid Flow Systems", EPRI NP-1850, Vol.1, (1981-5).
- (54) Liles, D. R., et al., "TRAC-PD2, An Advanced Best-Estimate Computer Program for Pressurized Water Reactor Loss-of-Coolant Accident Analysis", NUREG/CR-2054, LA-8709-MS, (1981-4), Los Alamos Scientific Laboratory.
- (55) Nilsson, K. A., "LWR Recirculation Pump Performance Under Two-Phase Flow Conditions", Proc. Cavitation and Polyphase Flow Forum, ASME, (1977), 39.
- (56) Winks, R. W. and Parks, C. E., "One-Third-Scale Air-Water Pump Program, Test Program and Pump Performance", EPRI NP-135, (1977-7).
- (57) Cudlin, J. J. and Parks, C. E., "1/3-Scale Air-Water Pump Program, Analytical Pump Performance Model", EPRI NP-160, Vol. 1, (1977-10).
- (58) Jones, R. C., et al., "One-Third-Scale Air-Water Pump Program - LOCA and Pump Overspeed Analyses", EPRI NP-474, (1977-10).
- (59) Treventi, P. A., et al., "One-Third Scale Air-Water Pump Program (Alternate Analytical Pump Performance Model)", EPRI NP-385, Vol. 1, (1977-12).
- (60) Kennedy, W. G., et al., "Pump Two-Phase Performance Program", EPRI NP-1556, Vol. 1-8, (1980-9).
- (61) Kennedy, W. G., et al., "Two-Phase Flow Behavior of Axial Pumps", Proc. International Meeting on Thermal Nuclear Reactor Safety, (1982).
- (62) Kamath, P. S. and Swift, W. L., "Two-Phase Performance of Scale

- Models of a Primary Coolant Pump", EPRI NP-2578, (1982-9).
- (63) Runstadler, P. W. and Dolan, F. X., "1/20-Scale Model Pump Test Program-Preliminary Test Plan", EPRI NP-292, (1977-2).
- (64) Runstadler, P. W. and Dolan, F. X., "Two-Phase Flow Pump Data for a Scale Model NSSS Pump", Proc. Polyphase Flow in Turbomachinery, ASME, (1978), 65.
- (65) Patel, B. R. and Runstadler, P. W., "Investigation into the Two-Phase Flow Behavior of Centrifugal Pumps", Proc. Polyphase Flow in Turbomachinery, ASME, (1978), 79.
- (66) Rothe, P. H. et al., "Pump Surge due to Two-Phase Flow", Proc. Polyphase Flow in Turbomachinery, ASME, (1978), 121.
- (67) Wilson, D. G., et al., "Analytical Models and Experimental Studies of Centrifugal-Pump Performance in Two-Phase Flow", EPRI NP-677, (1979-5).
- (68) Mikielwicz, J. et al., "A Method for Correlating the Characteristics of Centrifugal Pumps in Two-Phase Flow", Trans. ASME, J. Fluid Eng., 100-4(1978), 395.
- (69) Manzano-Ruiz, J. J. and Wilson, D. G., "Experimental Study of Two-Phase, Two-Component Flow in Centrifugal Pumps", Nuclear Science and Engineering, 88(1984), 275.
- (70) Rohatgi, U. S., "Pump Model for Two-Phase Transient Flow", Proc. Polyphase Flow in Turbomachinery, ASME, (1978), 101.
- (71) Hunter, J. A. and Harris, P. A., "Performance of Small Nuclear Reactor Primary Coolant Pumps Under Blowdown Conditions", Proc. Polyphase Flow in Turbomachinery, ASME, (1978), 157.
- (72) Chen, T. H. and Quapp, W. J., "Centrifugal Pump Performance Under Simulated Two-Phase Flow Conditions", Proc. Polyphase Flow and Transport Technology, ASME, (1980), 175.
- (73) Sozzi, G. L. and Burnette, G. W., "Two-Phase Pump Performance During Steady-State Operation and During a Simulated LOCA Blowdown", NEDE-13239, Class 1, (1971), General Electric Company.
- (74) Currie, T. and Younger-Lewis, D., "B-W Pump Performance for Two-Phase (Air-Water) Forward Flow Operation", Davis Engineering Report, No. C81-52, (1981-11), Canada.
- (75) Chan, A. M. C., et al., "An Experimental Study of Centrifugal Pump Performance under Steam-Water Two-Phase Flow Conditions at Elevated Pressures", Proc. Cavitation and Multiphase Flow Forum, ASME, (1991), 111.
- (76) Heidrick, T. R., et al., "Centrifugal Pump Behavior in Steady and Transient Steam-Water Flows", Proc. Polyphase Flow in Turboma-

- chinery, ASME, (1978), 139.
- (77) Kosmowski, I., "Problems when Conveying Liquid-Gas Mixtures and Conclusions for the Construction of Centrifugal Pumps", Oper. Probl. Pump Stations Power Plants, 1(1983), 21.1.
- (78) Kosmowski, I., "Einflüsse des Gehäuses von Turbopumpen auf die Foerderung Gasbeladener Fluessigkeiten, Energietechnik, 34-4(1984), 141.
- (79) Kosmowski, I., "Auslegung von Kreiselpumpen für die Foerderung von Fluessigkeits-Gas-Gemischen", Maschinenbautechnik, 38-10(1989), 445.
- (80) Grison, P. and Lauro, J. F., "Experimental and Theoretical Investigations about Two-Phase Critical Flow through a Pump", Proc. Polyphase Flow in Turbomachinery, ASME, (1978), 197.
- (81) Bonnin, J., "Similarity in Two-Phase Flows through Turbomachinery, with Mass, Heat and Momentum Transfer", Proc. Polyphase Flow in Turbomachinery, ASME, (1978), 55.
- (82) Kastner, W. and Seeberger, G. J., "Pump Behavior and Its Impact on a Loss-of-Coolant Accident in a Pressurized Water Reactor", Nuclear Technology, 60(1983), 268.
- (83) 村上・峯村、"空気吸入による渦巻ポンプの性能変化と流動状態(第1報、性能変化と流動状態の関係)"、機論、39-328、B(1973)、3715.
- (84) 村上・峯村、"空気吸入による渦巻ポンプの性能変化と流動状態(第2報、羽根枚数の影響)"、機論、40-330、B(1974)、459.
- (85) 村上・峯村、"開放形渦巻ポンプの空気吸入による性能変化とすきまの関係"、機論、42-354、B(1976)、489.
- (86) 村上・峯村、"渦巻ポンプの吸込圧力と吸入空気の関係"、ターボ機械、3-2(1975)、594.
- (87) 村上・ほか2名、"空気吸入による軸流ポンプの性能変化(ポンプ軸が水平の場合)"、機論、44-380、B(1978)、1292.
- (88) 峯村・ほか3名、"斜流ポンプの気液二相流時の性能"、機論、52-478、B(1986)、2404.
- (89) 村上・ほか2名、"キャビテーション発生時のポンプ性能に及ぼす吸入空気の影響"、機論、46-401、B(1980)、9.
- (90) 金子・ほか2名、"立て形遠心ポンプの二相流性能(第1報、空気/水二相流時の定常性能)"、機論、48-433、B(1982)、1733.
- (91) 湊・富永、"遠心ポンプのヘッドおよびトルクの二相流定常特性実験"、日本原子力学会誌、30-3(1988)、247.
- (92) 村上・ほか2名、"気液二相流時の羽根車内圧力分布"、機論、49-438、B(1983)、406.
- (93) 峯村・ほか2名、"気液二相流時におけるポンプ特性および気泡の寸法"、機

- 論、51-462、B(1985)、513.
- (94) 峯村・ほか2名、"気液二相流時における渦巻ポンプ内の流速分布とボイド率分布"、ターボ機械、15-8(1987)、477.
- (95) 世古口・ほか2名、"点電極ボイド率測定法による気水二相遠心ポンプに関する研究(第1報、インペラ内ボイド率分布の測定)"、機論、49-445、B(1983)、1859.
- (96) 大庭・ほか2名、"立軸上向き流れ軸流ポンプの空気吸入による性能変化"、ターボ機械、16-4(1988)、195.
- (97) 金子・大橋、"立て形遠心ポンプの二相流性能(第2報、空気/水二相流時の不安定現象)"、機論、49-441、B(1983)、985.
- (98) Narabayashi, T., ほか4名, "Centrifugal Pump Behavior in Steady and Transient Two-Phase Flow", J. Nuclear Science and Technology, 23-2(1986), 136.
- (99) 藤江、"二相流が流れる場合の渦巻ポンプの性能の検討(第1報、水力トルクの予測)"、機論、49-448、B(1983)、2725.
- (100) 藤江、"二相流が流れる場合の渦巻ポンプの性能の検討(第2報、揚程の予測)"、機論、51-471、B(1985)、3754.
- (101) Fujie, H. and Yamanouchi, A., "A Study on Applicability of Similarity Rule to Performances of Centrifugal Pumps Driven in Two-Phase Flow", Nuclear Engineering and Design, 85(1985), 345.
- (102) 峯村、内山、石川、"半径流形回転流路内における気泡流の流動特性"、機論、57-542、B(1991)、3317.
- (103) Lea, J. F. and Bearden, J. L., "Effects of Gaseous Fluids on Submersible Pump Performance", J. Petroleum Technology, 34(1982), 2922.
- (104) Donno, S. D., et al., "The S.B.S. Project-Development of a Subsea Booster System for the Exploitation of Deep Water Oil Fields", Proc. 5th Deep Offshore Technology, (1985), 357.
- (105) 古川・ほか3名、"遠心ポンプ羽根車のタンデム翼化と気液混相時の揚水性能に関する基礎研究"、機論、55-512、B(1989)、1142.
- (106) 古川・ほか3名、"遠心ポンプの気液二相流性能改善に関する二、三の実験的試み"、九州大学工学集報、63-5(1990)、535.
- (107) 前川・ほか4名、"自吸作用渦巻ポンプの性能に関する研究(気液二相流時における性能)"、ターボ機械、15-6(1987)、337.
- (108) 青野、"IL型渦巻ポンプ 空引き連続運転、気泡混入運転を可能にした「ガラ、ポン」"、産業機械、452(1988)、40.
- (109) Taffe, P., "Five Year Mission to Develop Multiphase Pump", Processing, (1989-6), 27.
- (110) Butcher, C., "Multiphase Pumping", Chemical Engineer, 455(1988), 87.

- (111) Pulpitel, L. and Sob, F., "Stability and Resonance Problems in a Hydraulic System with a Pump Turbine", Proc. 5th International Conference on Pressure Surges, (1986), 202.
- (112) 後藤、"ポンプ系における流体異常現象"、エハラ時報、133(1986)、3.
- (113) 鈴木・ほか3名、"ポンプの故障モードと振動解(第3報、軸受メタル焼損・空気浸入・キャビテーション)"、ターボ機械、17-9(1989)、597.
- (114) Brada, K., et al., "Startup of Propeller Pump with a Partially Submerged Rotor", Proc. 7th Conference on Fluid Machinery, 1(1983), 78.
- (115) 小西・ほか4名、"全水位全速運転ポンプ(第1報)"、ターボ機械、19-6(1991)、321.
- (116) 小西・ほか4名、"全水位全速運転ポンプ(第2報)"、ターボ機械、19-8(1991)、453.
- (117) Maehara, T., "Standby Operation of Mixed Flow Drainage Pump", Proc. Fluid Machinery Forum, ASME, FED-119(1991), 43.
- (118) 森岡、"混相流の力学モデル"、「混相流のモデリングとシミュレーション」、(1986)、5、日本混相流学会.
- (119) 片岡、"気液二相流のモデリング-基礎方程式と構成方程式-"、文献(1)の47ページ.
- (120) 片岡、"気液二相流の基礎方程式と構成方程式"、「混相流レクチャーシリーズ『基礎から最前線まで-気液二相流の数値シミュレーション-』」、(1989)、1、日本混相流学会.
- (121) 峯村・村上、"渦巻ポンプ内における気泡の流れの計算"、機論、45-400、B(1979)、1834.
- (122) 峯村、菊山、村上、内山、"渦巻ポンプ羽根車内のキャビテーション気泡の挙動"、機論、53-491、B(1987)、1878.
- (123) Minemura, K., Kikuyama, K., Murakami, M., Uchiyama, T., Sawada, S., "Theoretical Analysis of Cavitation Bubble Behavior in a Radial-flow Impeller", Proc. International Symposium on Cavitation, Sendai, (1986), 281.
- (124) Minemura, K., Kikuyama, K., Murakami, M., Uchiyama, T., "Flow of Cavitation Bubbles in a Centrifugal Pump Impeller", JSME International J., Series II, 31-1(1988), 30.
- (125) 峯村・那波、"斜流ポンプ内における混入空気および固体粒子の流れ"、機論、54-502、B(1983)、1378.
- (126) 峯村、内山、那波、勝田、"完全三次元解法によるスクリュウ式遠心ポンプ内の流れと混入粒子の流れ解析"、機論、55-520、B(1989)、3636.
- (127) 村上・ほか2名、"軸流ポンプ羽根車内の気泡の流れ"、機論、47-417、B(1981)、754.
- (128) 峯村、菊山、村上、内山、"半径流ポンプ内の固体粒子の流れ(第2報、完

- 全三次元流れ場における運動)」、機論、53-490、B(1987)、1677.
- (129) Minemura, K. and Uchiyama, T., "Calculation of the Three-Dimensional Behavior of Spherical Solid Particles Entrained in a Radial-Flow Impeller Pump", Proc. Institution of Mechanical Engineers, Part C, 204(1990), 159.
- (130) 峯村・内山、"軸対称物体まわりの気泡の流れに及ぼす履歴効果"、機論、54-502、B(1988)、1325.
- (131) Isay, W. H. and Roestel, Th., "Berechnung der Druckverteilung an Flügelprofilen in Gashaltiger Wasserströmung", Z. AMM, 54(1974), 571.
- (132) Shida, Y., ほか2名、"New Computational Method for a Flow of Bubbly Liquid", Proc. Cavitation and Multiphase Flow Forum, ASME, (1986), 46.
- (133) 西山(哲)、"空気を含む高速水流における直線軸空洞翼列の特性解析"、機論、44-381、B(1978)、1571.
- (134) 西山(哲)・東野、"亜音速液流におけるスーパキャビテーション翼列の特性解析(第2報、空気を含む場合)"、機論、44-386、B(1978)、3471.
- (135) 西山(哲)・西山(秀)、"流量変動時における部分空洞翼列の動的伝達特性(特に、空気を含む水流の圧縮性効果)"、機論、47-418、B(1981)、924.
- (136) 松本・ほか2名、"二相流中における翼列性能(第1報、モデル化と数値計算)"、機論、53-495、B(1987)、3210.
- (137) Noordzij, L. and Wijngaarden, L. V., "Relaxation effects, caused by relative motion, on shock waves in gas-bubble/liquid mixtures", J. Fluid Mech., 66-1(1974), 115.
- (138) Zakem, S., "Analysis of Gas Accumulation and Slip Velocity in a Rotating Impeller", Proc. Cavitation and Polyphase Flow Forum, ASME, (1980), 32.
- (139) Zakem, S., "Determination of Gas Accumulation and Two-Phase Slip Velocity Ratio in a Rotating Impeller", Proc. Polyphase Flow and Transport Technology, ASME, (1980), 167.
- (140) Hench, J. E. and Johnston, J. P., "Two-Dimensional Diffuser Performance with Subsonic, Two-Phase, Air-Water Flow", Trans. ASME, J. Basic Eng., 94-1(1972), 105.
- (141) Furuya, O., "On Performance of Two-Phase Flow Pumps", Proc. Cavitation and Multiphase Flow Forum, ASME, (1984), 34.
- (142) Furuya, O., "An Analytical Model for Prediction of Two-Phase (Noncondensable) Flow Pump Performance", Trans. ASME, J. Fluid Eng., 107-1(1985), 139.
- (143) 西山(秀)・ほか2名、"気泡を含む水流における遠心羽根車内の流れ解析(特異点法による反復解法)"、機論、55-519、B(1989)、3427.

- (144) Minato, A., ほか2名, "Estimation of Centrifugal Pump Head in Steam-Water Two-Phase Flow", J. Nuclear Science and Technology, 22-5(1985), 379.
- (145) 湊, "遠心ポンプのヘッドとトルク二相流特性の解析", 日本原子力学会誌, 30-7(1988), 633.
- (146) Sami, S. M., ほか2名, "A Digital Computer Model for Predicting Reactor Coolant Pump Behavior", Nuclear Technology, 79(1987), 260.
- (147) Sami, S. M. and Tran, C., "Mechanistic Model for Predicting Two-Phase Behavior in CANDU Reactor Pumps", Trans. American Nuclear Society, 54(1987), 218.
- (148) 峯村・内山, "自由曲線形状境界に第2種境界条件が作用する領域に対する線形一次有限要素解析(第1報、曲線形状を考慮した節点数低減法)", 機論, 56-531, B(1990), 3343.
- (149) 川股, 「シェル構造解析」, (1974), 84, 培風館.
- (150) Zienkiewicz, O. C., "The Finite Element Method in Engineering Science", (1971), 296, McGraw-Hill, London.
- (151) Bathe, K. J. and Wilson, E. L., "Numerical Methods in Finite Element Analysis", (1976), Chap. 5, Prentice-Hall, New Jersey.
- (152) Rogers, D. F. and Adams, J. A., "Mathematical Elements for Computer Graphics", (1976), Chap. 5, McGraw-Hill, London.
- (153) Wendroff, B., "Theoretical Numerical Analysis", (1966), Chap. 4, Academic Press, New York.
- (154) 内山・峯村, "自由曲線形状境界に第2種境界条件が作用する領域に対する線形一次有限要素解析(第2報、二次元翼列流れへの適用)", 機論, 56-531, B(1990), 3351.
- (155) Minemura, K. and Uchiyama, T., "Simplex Finite Element Analysis for Cascade Flows Satisfying the Kutta Condition", Proc. Fluid Machinery Forum, ASME, FED-119(1991), 65.
- (156) 古川・ほか3名, "三次元境界層の流れモデルと組合わせた羽根面上特異点解法による遠心ポンプ二次元羽根車内の流れ解析", 機論, 53-494, B(1987), 3038.
- (157) Pfleiderer, C., "Die Kreiselpumpen", 5-Aufl., (1961), 225, Springer-Verlag.
- (158) 峯村・内山, "渦巻ポンプ羽根車内の気液二相流に対する気泡流モデルによる三次元数値解析(第1報、ボイド率および圧力分布)", 機論, 55-516, B(1989), 2364.
- (159) Minemura, K. and Uchiyama, T., "Three-Dimensional Calculation of Air-Water Two-Phase Flow in a Centrifugal Pump Impeller (1st Report, Distributions of Pressure and Void Fraction)",

- submitted to Trans. ASME, J. Fluid Eng., (1992).
- (160) Richardson, J. F. and Meikle, R. A., "Sedimentation and Fluidisation - Part IV; Drag Force on Individual Particles in an Assemblage", Trans. Inst. Chem. Engrs., **39**(1961), 357.
- (161) 内山・峯村、"離散点で与えられた1階偏導関数値に対する数値積分法(差分近似式またはFEM形状関数を用いた最小二乗解法)"、機論、B(1992)、掲載予定(印刷中)。
- (162) 峯村・内山、"渦巻ポンプ羽根車内の気液二相流に対する気泡流モデルによる三次元数値解析(第2報、ポンプ性能変化)"、機論、**55-516**、B(1989)、2374。
- (163) Minemura, K. and Uchiyama, T., "Three-Dimensional Calculation of Air-Water Two-Phase Flow in a Centrifugal Pump Impeller (2nd Report, Prediction of Pump Performance)", submitted to Trans. ASME, J. Fluid Eng., (1992).
- (164) 峯村・内山、"空洞を伴う気泡流モデルによる渦巻ポンプ羽根車内の気液二相流に対する三次元数値解析"、機論、B(1992)、掲載予定(印刷中)。
- (165) Minemura, K. and Uchiyama, T., "Calculation of Two-Phase Flow Pump Performance by a Bubbly Flow Model with Fixed Cavity", Proc. Cavitation and Multiphase Flow Forum, ASME, FED-109(1991), 131.
- (166) 西山・植木、"特異点法による前縁キャビテーションを伴う遠心羽根車の特性解析"、機論、**49-441**、B(1983)、931。
- (167) 西山(秀)、"前縁キャビテーションを伴う遠心羽根車の内部および出口流れ解析(羽根数および羽根角の影響)"、機論、**54-503**、B(1988)、1703。
- (168) 今井・ほか2名、"特異点法を用いた遠心羽根車内におけるキャビテーション流れの非線形解析"、機論、**56-522**、B(1990)、454。

付録 A 離散点で与えられた1階偏導関数値に対する数値積分法 (FEM形状関数または差分近似式を用いた最小二乗解法)

数値解析や計測により得られた物理量に対する偏導関数値を求める場合、差分近似^(A-1)や区分的多項式近似^(A-2)などに基づく精度の高い数値微分法が利用できる。

一方、多くの設計問題に見られるような逆問題解析では、 n 次元空間($n \geq 1$)における離散点で与えられた1階偏導関数値に対する数値積分法が必要となる場合がある。例えば、与えられた速度勾配を満たす速度場、所望の圧力勾配を実現する圧力場、あるいは与えられた熱流束分布を実現する温度場などを求めたい場合である。しかし、数値解析的に有用な手法は、一次元問題に対する解法を除き、これまで与えられていないのが実状のようである。

ここでは、上述の例のように、離散点で与えられた1階偏導関数値に対してその解析領域でこれを数値積分するために、差分近似式あるいは有限要素法の形状関数に基づいて偏導関数近似式を導出し、優決定系に属するこの式を最小二乗法により数値解析する方法を提案する。また、一例として、本方法を二次元問題に適用した結果についても述べ、その有用性や誤差特性なども示す。

A. 1 解析方法

A. 1. 1 問題の定式化

n 次元ユークリッド空間($1 \leq n < \infty$)の領域 D において、連続かつ2階微分可能な関数 ϕ が定義されるものとする。すなわち、

$$\phi = \phi(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n); \mathbf{x} \in D) \quad (A-1)$$

いま、図A-1に示すように、領域 D に属する離散点 \mathbf{x} において関数 ϕ の1階偏導関数値 f が与えられ、かつ D の境界 C の一部分 C_1 上の離散点において ϕ の関数値 g が既知であるものとする。すなわち、

$$\nabla \phi = f \quad (f = f(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in D) \quad (A-2)$$

$$\phi = g \quad (g = g(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in C_1) \quad (A-3)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \nabla &= (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \dots, \partial/\partial x_n) \\ f &= (f_1, f_2, \dots, f_n) \end{aligned} \quad (A-4)$$

ここでは、式(A-2)、(A-3)に対し、これを満足する関数 ϕ を求めるための方法、つまり領域 D の離散点で与えられた $\nabla \phi$ に対する数値積分法を述べる。

A. 1. 2 差分近似式による方法

領域 D 内に γ 個の離散点が格子状に等間隔(間隔 h)に配置されているものとする。任意の格子点 k (位置ベクトル \mathbf{x}_k)における ϕ の偏導関数値は近似的に差分商で与えられるから、点 k に関して、 ϕ をテイラー級数に展開し、1階偏導関数に対する前進差分近似式を導けば次式を得る。

$$\partial \phi(\mathbf{x}_k) / \partial x_j = [\phi(\mathbf{x}_k + \mathbf{h}_j) - \phi(\mathbf{x}_k)] / h \quad (j=1, 2, \dots, n, \mathbf{x}_k \in D) \quad (A-5)$$

ここで、 \mathbf{h}_j は第j成分のみがhで他の成分が零である、n次元のベクトルである。また、中心差分近似式は次式のようになる。

$$\partial \phi(\mathbf{x}_k) / \partial x_j = [\phi(\mathbf{x}_k + \mathbf{h}_j) - \phi(\mathbf{x}_k - \mathbf{h}_j)] / 2h \quad (j=1, 2, \dots, n, \mathbf{x}_k \in D) \quad (A-6)$$

ただし、式(A-5)および(A-6)の打ち切り誤差は、 $O(h)$ および $O(h^2)$ である。

各離散点において、n個の1階偏導関数の値を式(A-5)あるいは(A-6)により近似し、これらを式(A-2)で与えられる既知偏導関数値fと等置した式を求め、全離散点に対して併記した行列式をつくれれば、つぎの偏導関数近似式が得られる。

$$K \phi = f \quad (A-7)$$

ただし、

K : 離散点間距離hを成分とするn γ 行 γ 列の行列

ϕ : 離散点の ϕ を成分とする γ 次元のベクトル

f : 離散点のfを成分とするn γ 次元のベクトル

A. 1. 3 FEM形状関数による方法

有限要素法では、解析領域を任意形状の要素に分割し、離散点として節点を要素辺上(必要な場合にはさらに要素内)にとり、節点関数値をもとに要素内の任意の点における未知関数値を近似する。この有限要素近似の手法を用いた場合について述べる。

領域Dを任意形状からなる β 個の有限要素 D^e に分割し、各 D^e に α 個の異なる節点を配置し、Dには γ 個の節点がある場合を考える。

各要素において、節点における関数値 ϕ_i ($i=1 \sim \alpha$)と、 α 個の一次独立な形状関数 N_i ($i=1 \sim \alpha$)の一次結合により、任意の点の ϕ は次式のように近似される。

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\alpha} N_i(\mathbf{x}) \phi_i \quad (\mathbf{x} \in D^e) \quad (A-8)$$

ただし、 N_i は各要素において定義される節点座標値の関数であるが、つぎの補間条件を満たさねばならない。

$$N_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij} \quad (i=1, 2, \dots, \alpha, j=1, 2, \dots, \alpha, \mathbf{x}_j \in D^e) \quad (A-9)$$

ここで、 \mathbf{x}_j は D^e 内の節点jの位置ベクトル、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。

式(A-8)は、節点関数値 ϕ を用いた近似式であり、ラグランジュの補間多項式(A-3)に相当する。この補間法は、節点における偏導関数値を考慮していないことから、隣接要素間の境界上では ϕ の連続性のみを要求することになる。

D^e 内の任意の点における1階偏導関数 $\nabla \phi$ の近似式は、式(A-8)を偏微分することにより得られる。すなわち、

$$\begin{aligned} \nabla \phi(\mathbf{x}) &= \nabla \left[\sum_{i=1}^{\alpha} N_i(\mathbf{x}) \phi_i \right] \\ &= \sum_{i=1}^{\alpha} [\nabla N_i(\mathbf{x})] \phi_i \quad (\mathbf{x} \in D^e) \end{aligned} \quad (A-10)$$

ある要素において、1つの節点k(位置ベクトル \mathbf{x}_k)に対する1階偏導関数の値はn次元空間に対応してn個あるが、これらを式(A-10)により近似し、式(A-2)で与

えられる既知偏導関数 f と等しくおけば、この要素の α 個の節点における関数値 ϕ を未知数とする、 n 個の方程式が得られる。すなわち、

$$\sum_{i=1}^{\alpha} [(\partial N_i(\mathbf{x}_k)/\partial x_j) \phi_i] = f_j(\mathbf{x}_k) \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (A-11)$$

この要素の全節点(位置ベクトル \mathbf{x}_k , $k=1 \sim \alpha$)に対して式(A-11)の連立方程式を求めれば、 α 個の未知関数値 ϕ からなる $n\alpha$ 個の方程式が得られる。すなわち、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\alpha} (\partial N_i(\mathbf{x}_1)/\partial x_j) \phi_i &= f_j(\mathbf{x}_1) \quad (j=1, 2, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^{\alpha} (\partial N_i(\mathbf{x}_2)/\partial x_j) \phi_i &= f_j(\mathbf{x}_2) \quad (j=1, 2, \dots, n) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (A-12)$$

$$\sum_{i=1}^{\alpha} (\partial N_i(\mathbf{x}_\alpha)/\partial x_j) \phi_i = f_j(\mathbf{x}_\alpha) \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

式(A-12)は、次式のように行列形式で表すことができる。

$$K^\circ \phi^\circ = f^\circ \quad (A-13)$$

ただし、 K° は形状関数 N_i の1階偏導関数を成分とする $n\alpha$ 行 α 列の行列、 ϕ° は節点の未知関数値 ϕ を成分とする α 次元のベクトル、 f° は節点の既知偏導関数値 f を成分とする $n\alpha$ 次元のベクトルである。

領域 D における β 個の全要素に対して式(A-12)の関係を求め、併記すると、偏導関数近似式が得られる。すなわち、

$$K \phi = f \quad (A-14)$$

ただし、

K : 行列 K° を全要素に対して組み立てることにより得られる
 $n\alpha$ 行 γ 列の行列

ϕ : 全節点の ϕ を成分とする γ 次元のベクトル

f : 全節点の f を成分とする $n\alpha$ 次元のベクトル

なお、要素間の境界上に節点が存在し、複数の要素に共有される節点がある場合にも、各要素毎に偏導関数を式(A-11)により近似するため、 $\alpha\beta \geq \gamma$ なる関係が成り立つ。

A. 1. 4 偏導関数近似式の解法

未知関数値 ϕ は、偏導関数近似式(式(A-7)あるいは式(A-14))を解くことにより求められる。しかし、これらの式は、方程式の数 m (式(A-7)の場合 $m=n\gamma$ 、式(A-14)の場合 $m=n\alpha\beta$) が未知数の数 γ に等しいか大きい優決定系に属する。このため、解 ϕ は一般的には存在しない^(A-4)ので、最小二乗法^(A-5)により近似解 ϕ を求める。

偏導関数近似式に対するユークリッドノルムをとると、次式のようになる。

$$R = \|K\phi - f\|^2$$

$$= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^{\gamma} K_{ji} \phi_i - f_j \right)^2 \quad (\text{A-15})$$

ただし、 K_{ji} は行列 K の第 j 行 i 列成分、 ϕ_i はベクトル ϕ の第 i 次元成分、 f_j はベクトル f の第 j 次元成分を表すものとする。

最小二乗法によれば、 R を最小化する ϕ が偏導関数近似式の最良近似を与える。この最小化の条件は次式により表される。

$$\partial R / \partial \phi_k = 0 \quad (k=1 \sim \gamma) \quad (\text{A-16})$$

式(A-16)に式(A-15)を代入して整理すれば、最小二乗法の正規方程式である、 γ 元一次連立方程式が得られる。すなわち、

$$\sum_{i=1}^{\gamma} \left(\sum_{j=1}^m K_{jk} K_{ji} \right) \phi_i = \sum_{j=1}^m K_{jk} f_j \quad (k=1 \sim \gamma) \quad (\text{A-17})$$

境界条件(式(A-3))を式(A-17)に代入し、得られた式を解くことにより、式(A-2)、(A-3)で与えられる関数 ϕ が求められる。ここで、式(A-17)を行列表現すれば左辺行列が対称帯行列となることから、Bunch・Kaufmanの方法^(A-6)などにより、少ない記憶容量で高精度に数値解析できる。

A. 2 解析結果

A. 2. 1 数値解析例

ここでは、本解法の適用性を示すため、二次元領域における既知の二変数関数を例にとり、前述の解法により数値積分した結果を厳密解と比較し、誤差特性や計算に要した時間などについて述べることにする。

平面領域 D の関数 ϕ に対して、 D において1階偏導関数値、境界 C の一部 C_1 において関数値が次式のように与えられているものとする。

$$\begin{aligned} \partial \phi(x, y) / \partial x &= a \pi \cdot \cos(\pi x) \cdot \sin(\pi y) \\ \partial \phi(x, y) / \partial y &= a \pi \cdot \sin(\pi x) \cdot \cos(\pi y) \quad ((x, y) \in D) \end{aligned} \quad (\text{A-18})$$

$$\phi(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in C_1) \quad (\text{A-19})$$

ただし、

$$\begin{aligned} D &= \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} \\ C_1 &= \{x=0, y=0\} \end{aligned} \quad (\text{A-20})$$

求める ϕ の厳密解 ϕ_{ex} は、図A-2に示すように、次式で表される。

$$\phi_{ex} = a \cdot \sin(\pi x) \cdot \sin(\pi y) \quad ((x, y) \in D) \quad (\text{A-21})$$

A. 2. 2 差分近似式を用いた場合

領域 D は正方形であるから、この各辺を $(M-1)$ 等分して、 $(M-1)^2$ 個の正方形格子からなる格子点を離散点とする。前進および中心差分近似に対する格子点配置、格子点数 γ を表A-1に示す。偏導関数近似式(式(A-7))を差分近似式(式(A-5)あるいは(A-6))から構成し、この式から導かれる式(A-17)を数値解析して格子点における数値解 ϕ_{nu} を求め、厳密解 ϕ_{ex} (式(A-21))に対する相対誤差 ε ($= |\phi_{nu} - \phi_{ex}| / a$)をとれば、 ε の分布は図A-3のようになる。ただし、 $M=25$ に対す

る ε の値が等しい等値線を示してある。

前進差分近似式(式(A-5))による結果は図A-3(a)である。 ε は、積分の始点[座標値(0, 0)]から終点(1, 1)に向けて単調増加し、終点において最大値 ε_{\max} (=0.1358)をとる。中央差分近似式(式(A-6))による結果は図A-3(b)であり、 ε は領域中央[座標値(0.5, 0.5)]で最大値 ε_{\max} (=0.0029)をとる。

1つの境界線上の離散点数Mを増したとき、すなわち格子点間距離hを減じたときの、hと最大誤差 ε_{\max} の関係を両対数表示すると、図A-4のようになる。式(A-5)による結果は細い破線で、式(A-6)による結果は太い破線で示してあり、 ε_{\max} はhの減少に対し線形、すなわちhのべき乗に比例して減ずることがわかる。式(A-5)に対する ε_{\max} は傾き1の直線で表され、式(A-5)の近似精度 $O(h)$ に対応していることが知れる。また、式(A-6)に対する ε_{\max} は、式(A-6)の近似誤差 $O(h^2)$ に対応して、傾き2の直線で表される。式(A-6)を用いた方が ε_{\max} はかなり小さく、 $h \leq 0.071$ では $\varepsilon_{\max} < 0.01$ が得られる。

A. 2. 3 形状関数を用いた場合

ここでは、領域Dを一様な三角形要素に分割し、一次要素および二次要素に対する形状関数を式(A-8)に用いた場合の結果について述べる。比較のため、A. 2. 2節で用いた $(M-1)^2$ 個の正方形格子を二分割した直角二等辺三角形を要素とする(図A-2)。この場合の節点配置、1つの要素の節点数 α 、要素数 β 、全節点数 γ を表A-1に示してある。

一次要素に対する形状関数^(A-7)を用いて偏導関数近似式(式(A-14))を組み立て、この式から導かれる式(A-17)を数値解析して各節点における相対誤差 ε を求め、 $M=25$ に対する ε の分布を示すと図A-3(c)のようになる。分布は $x=0.5$ および $y=0.5$ に関して対称となる。領域境界線に直角方向の ϕ の変化が、とくに、各境界線の中央部で大きいので、ここに最大誤差 ε_{\max} (=0.0171)が存在する。領域中央部の誤差も大きい、 ε_{\max} の約6割である。

節点間距離hに対する ε_{\max} の変化を図A-4に細い実線で併記してある。hが同一の場合、 ε_{\max} の値は中央差分近似式による結果よりも大きい、前進差分近似式による結果よりもかなり小さく、 $h \leq 0.029$ の条件に対して $\varepsilon_{\max} < 0.01$ が得られる。また、1つの一次要素において1階偏導関数を近似する場合の近似精度は $O(h)$ である^(A-8)が、得られた直線の傾きは1.75であり、かなり精度がよい。これは、各節点の偏導関数値を、その節点を共有する全要素の形状関数から近似していることによるものであろう。

二次要素に対する形状関数^(A-7)を用いて偏導関数近似式(式(A-14))を組み立て数値解析し、得られた ε の分布を示すと図A-3(d)のようになる。分布は、図A-3(c)と同様、 $x=0.5$ および $y=0.5$ に関して対称となる。領域中央部で最大値 ε_{\max} (=0.0028)を生ずるが、各境界の中点近傍における値もこれとほぼ同じである。

節点間距離hに対する ε_{\max} の変化を図A-4に太い実線で示してあるが、 ε_{\max} の値は、 $h < 0.04$ では中央差分近似の場合とほぼ同一結果が得られ、 $h \geq 0.04$ では

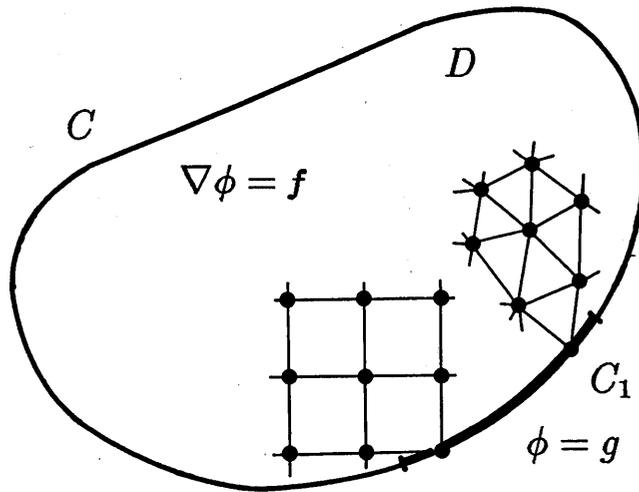
上述のいずれの結果よりも小さい値が得られる。また、得られた直線の傾きは、二次要素による1階偏導関数の近似精度 $O(h^2)$ ^(A-8)に対応して、ほぼ2である。

差分近似式を用いる場合に比べ、形状関数を用いる方法の利点は、離散点が正方形格子状に並んでいなくともよいという、自由度の高さにある。すなわち、有限要素解析の場合、解析領域を任意形状の要素に分割し、関数値の急峻な変化が予測される領域の要素分割を細分化するが、このような離散点配置に対しても等しく適用できる点が長所である。前述の解析例の場合も、適切に細分割した要素節点上で与えられた偏導関数値に対しては、より高い精度で結果が得られることは言うまでもない。

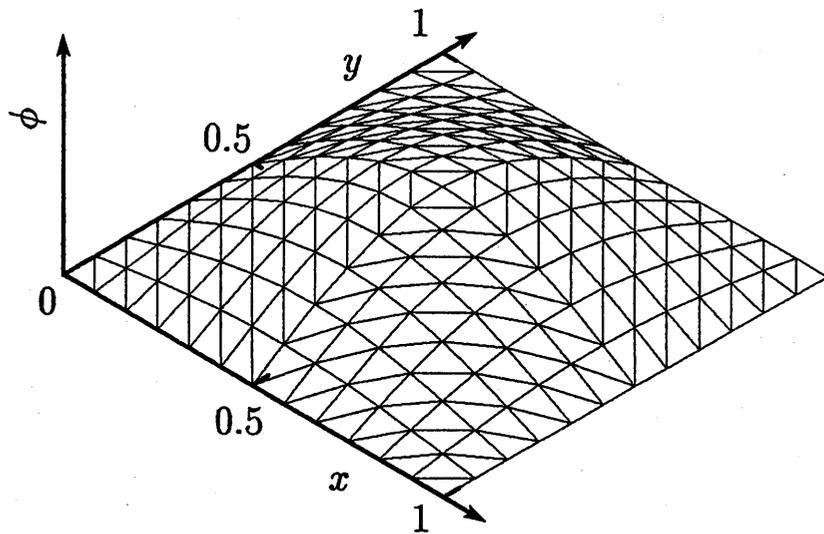
表A-1には、同一の離散点数(M=25)に対する計算時間(CPU時間)を比較してある。精度が高い三角形二次要素による計算時間は中央差分による場合とほぼ同じであるが、三角形一次要素の計算時間は精度のわりにはかなり短いことが知れる。なお、計算は倍精度、使用計算機は名古屋大学大型計算機センターのFACOM M-780/20である。

文献

- (A-1) 一松、数値解析、(1990)、90、朝倉書店。
- (A-2) 佐藤・二宮、不規則分布二変数関数データに対する C^k 級補間法、情報処理学会論文誌、22-6(1981)、581。
- (A-3) 森、数値解析法、(1989)、19、朝倉書店。
- (A-4) 小柳、最小二乗法の新しいアルゴリズム、情報処理、23-2(1982)、99。
- (A-5) 文献(A-3)の181ページ。
- (A-6) Bunch, J. R. and Kaufman, L., Some Stable Methods for Calculating Inertia and Solving Symmetric Linear Systems, Mathematics of Computation, 31-137(1977), 163。
- (A-7) 川原、有限要素法流体解析、(1985)、80、日科技連。
- (A-8) 菊地・岡部、有限要素システム入門、(1986)、167、日科技連。

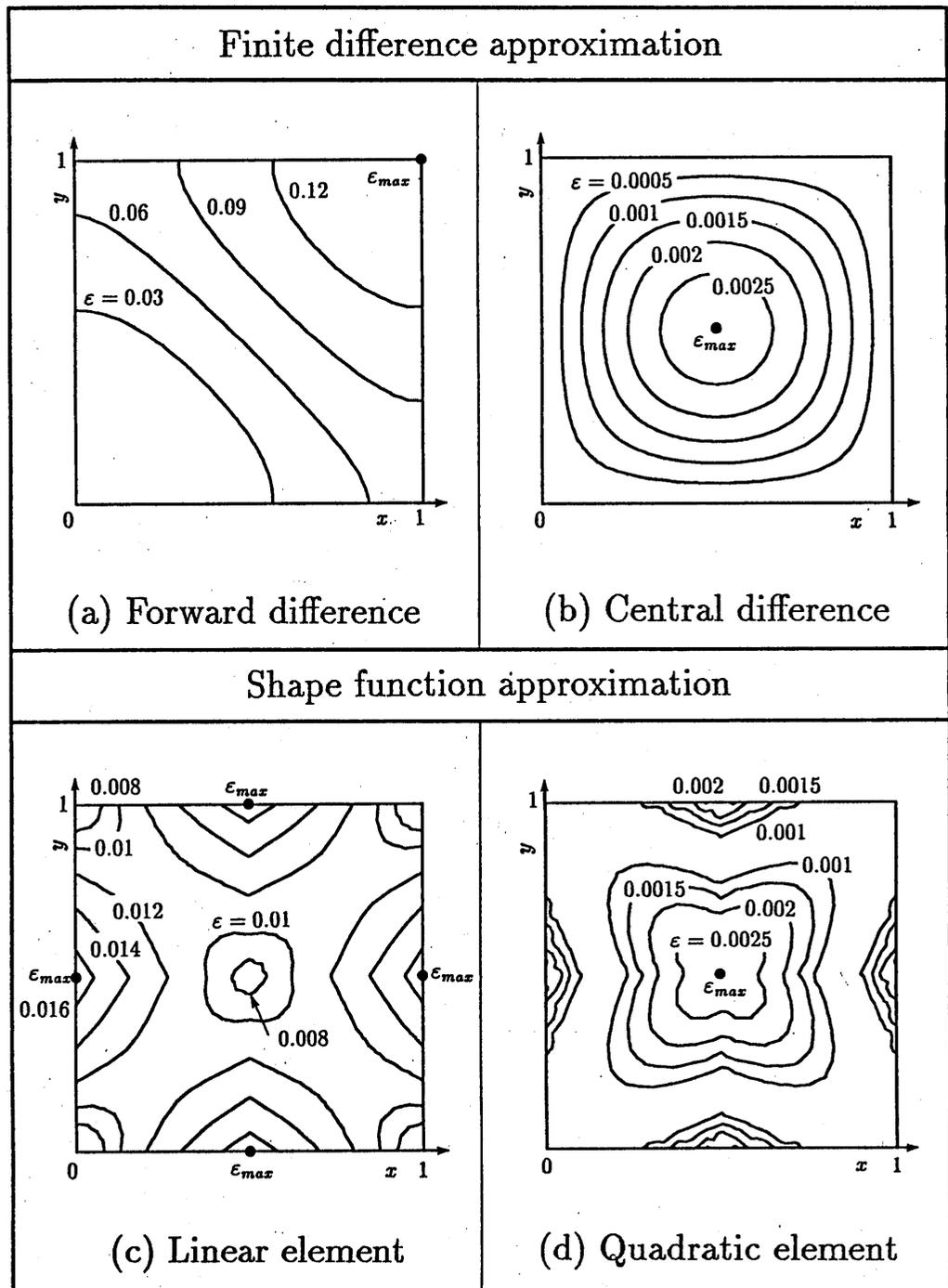


図A-1 問題の定式化

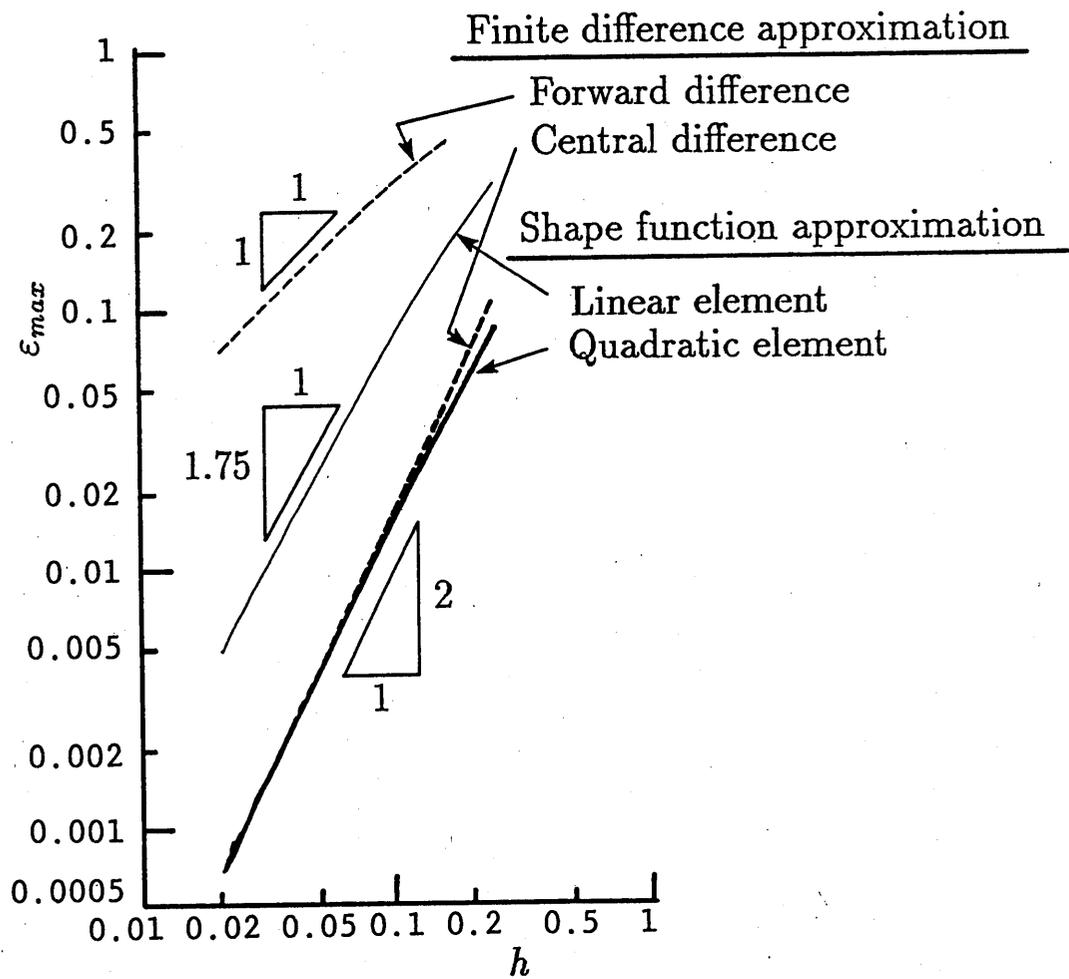


$$\phi = a \cdot \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

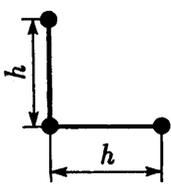
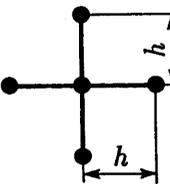
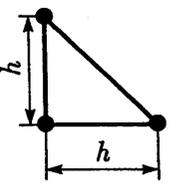
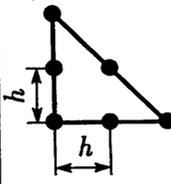
図A-2 二変数関数 $\phi(x, y)$



图A-3 相对误差分布 (M=25)



図A-4 離散点間距離に対する相対誤差の変化

	Finite difference approximation		Shape function approximation	
	Forward difference	Central difference	Linear element	Quadratic element
Arrangement of discrete points				
h	$1/(M-1)$	$1/(M-1)$	$1/(M-1)$	$1/(M-1)$
α	—	—	3	6
β	—	—	$2(M-1)^2$	$(M-1)^2/2$
γ	M^2	M^2	M^2	M^2
$\epsilon_{max} (M=25)$	0.1358	0.0029	0.0171	0.0028
CPU time ($M=25$) [ms]	235	298	135	305

表A-1 差分近似と形状関数を用いたときの離散点配置
(二次元領域の均一分割の場合)