円分関数体の合同ゼータ関数の行列式表示

塩見 大輔 (名古屋大学)

2008 年 5 月 24 日

円分関数体は, 1930 年代後半に, 円分体の関数体での類似として Carlitz によって発見された. 彼のアイデアは, 1970 年代に, Hayes [3] で詳しく考察され, 円分体の基本的な性質が円分関数体でも成り立つことが示された.
円分体の類数公式として, Maillet 行列式や Demyanenko 行列式が知られているが, それらの円分関数体でのアナロジーとして, 1990 年代に Rosen が既約多項式 P に対して, P-円分関数体の類数のマイナスパートを行列式の形で表現した. 一般のケースは, Bae-Kang が論文 [1] において類数のプラスパート, マイナスパート, 両方に行列式表示を与えている.
筆者は, Shiomi [5] において, 円分関数体の合同ゼータ関数のプラスパートに付随する多項式 $P_M^+(X)$ を整数係数多項式を成分にもつ行列式によって表現した. 多項式 $P_M^+(X)$ の $X=1$ での値がちょうど類数になることから, この結果は, Bae-Kang のプラスパートの行列式表示の拡張となることが分かる.
セクション 1,2 においては, 円分関数体の基本的な性質とその合同ゼータ関数について述べる. セクション 3 では, 本講演の目的である $P_M^+(X)$ の行列式公式について説明する. 最後に, 行列式表示の応用として, セクション 4 では多項式 $P_M^+(X)$ の 1 次と 2 次の係数に関する結果を述べる.

1 円分関数体

このセクションでは, まず, 円分関数体を Hayes [3] に従って構成する. そのあと, 円分関数体関わる基本的な性質を紹介する.

$\mathbb{F}_q$ を q 個からなる有限体, 不定元 T を固定し, $k=\mathbb{F}_q(T)$, $R=\mathbb{F}_q[T]$ とおく. さらに, k の代数的閉包 k^{ac} に対して,

$$\mathrm{End}(k^{ac}) = \{f : k^{ac} \to k^{ac} | f : \mathbb{F}_q - liner\} \tag{1}$$

とおくと, $\mathrm{End}(k^{ac})$ は自然に $\mathbb{F}_q$-代数になる.

k^{ac} の自己同型写像 φ, μ を,

$$\begin{aligned} \varphi : k^{ac} &\longrightarrow k^{ac} \qquad (x \mapsto x^q) \\ \mu : k^{ac} &\longrightarrow k^{ac} \qquad (x \mapsto Tx) \end{aligned}$$

とおけば, $\varphi,\ \mu \in \mathrm{End}(k^{ac})$ となる. $M \in R$, $x \in k^{ac}$ に対して,

$$x^M = M(\varphi + \mu)(x) \tag{2}$$

とおく. この作用によって, k^{ac} は R-加群になる.

Example 1.1. $q = 2$ とする.
$M = T$ のときは,

$$\begin{aligned} x^T &= (\varphi + \mu)(x) \\ &= x^2 + Tx. \end{aligned}$$

$M = T^2$ のときは,

$$\begin{aligned} x^{T^2} &= (\varphi + \mu)^2(x) \\ &= (\varphi^2 + \varphi \circ \mu + \mu \circ \varphi + \mu)(x) \\ &= x^4 + (T^2 + T)x^2 + T^2 x. \end{aligned}$$

d 次モニック多項式 M に対して, k^{ac} の M-torsion point の集合を

$$\Lambda_M = \{x \in k^{ac} | x^M = 0\} \tag{3}$$

とおく. Λ_M は q^d 個からなる R-加群である. さらに, Λ_M は R-加群として cyclic である. つまり, 生成元 $\lambda_M \in \Lambda_M$ が存在して, $\Lambda_M = \lambda_M^R$ となる. この λ_M を用いて R-同型写像

$$R/(M) \longrightarrow \Lambda_M \ (A \mod M \mapsto \lambda^A) \tag{4}$$

が導ける. $\Phi(M)$ を $R/(M)$ の可逆元のなす群 $(R/(M))^\times$ の位数とすれば, $\Phi(M)$ は上の同型写像から Λ_M の生成元の個数と等しい. $\Phi(M)$ はオイラー関数のアナロジーであるが, 次の等式も同様に成り立つ.

Proposition 1.1.

$$\Phi(M) = q^{\deg M} \cdot \prod_{\substack{P|M \\ P:irreducible}} \left(1 - \frac{1}{q^{\deg P}}\right) \tag{5}$$

Proof. 容易 □

k に Λ_M を添加した体を k_M とかき, M-円分関数体という. このとき, k_M/k はガロア拡大である. $A \mod M \in (R/(M))^\times$ に対して,

$$\sigma_{A \mod M}(\lambda_M) = \lambda_M^{A \mod M} \tag{6}$$

となる $\sigma_{A \mod M} \in \mathrm{Gal}(k_M/k)$ が一意的に定まる. この対応によって,

$$(R/M)^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(k_M/k) \quad (A \bmod M \mapsto \sigma_{A \bmod M}) \tag{7}$$

は同型写像となる. よって, $[k_M : k] = \Phi(M)$, $k_M = k(\lambda_M)$ となる.
λ_M の最小多項式を求める方法として, 次のようなものがある. メビウス関数のアナロジーとしてモニック多項式 M に対して,

$$\mu(M) = \begin{cases} 1 & \text{if } M = 1 \\ 0 & \text{if M :not square-free} \\ (-1)^s & \text{if } M = P_1 P_2 \cdots P_s \ \ (\ P_i\text{: monic irreducible }) \end{cases} \tag{8}$$

とおく. このとき, 次のことが成り立つ.

Proposition 1.2. *$F_M(X)$ を λ_M の最小多項式とすると*

$$F_M(X) = \prod_{\substack{N|M \\ N:monic}} (X^{\frac{M}{N}})^{\mu(N)} \tag{9}$$

となる.

Proof. 証明は円分体の場合とほぼ同様. □

Example 1.2. Example1.1 の条件において Proposition から λ_{T^2} は

$$\begin{aligned} F_{T^2}(X) &= X^{T^2}/X^T \\ &= X^2 + TX + T \end{aligned}$$

の根である.

特別な M に関しては次のことが成り立つ.

Proposition 1.3. *d 次モニック既約多項式 P と自然数 n に対して, $M = P^n$ とおく. g_M を k_M の種数とすれば, 次のことが成り立つ.*

1. *k_M/k は P で完全分岐する.*

2. *$2g_M - 2 = (dqn - dn - q) \cdot \frac{\Phi(M)}{(q-1)} - dq^{d(n-1)}$*

Example 1.3. $q = 2$, $M = T^n$ とする．このとき，$\Phi(M) = 2^n - 2^{n-1}$ より Proposition1.3 から

$$2g_M = (n-3)2^{n-1} + 2$$

となる．

$\mathrm{Gal}(k_M/k)$ と $(R/(M))^\times$ を同一視する．$\mathbb{F}_q^\times\left(\subseteq (R/(M))^\times\right)$ に対応する k_M/k の部分体を k_M^+ とかき，k_M の "最大実部分体" という．このとき，$[k_M : k] = \frac{\Phi(M)}{q-1}$ である．また，M が一次多項式のときは $k_M^+ = k$ であり，$q = 2$ のときは $k_M^+ = k_M$ である．k_M^+ を最大実部分体と呼ぶのは以下の事実が成り立つからである．

Proposition 1.4. P_∞ を k の無限素点とする．ただし，k の無限素点とは対応する指数付置 v_{P_∞} が $v_{P_\infty}(T) < 0$ を満すものである．このとき，k_M^+ は P_∞ の k_M/k における分解体である．つまり，

1. k_M^+/k は P で完全分解する．
2. P_∞ 上にある k_M^+ の任意の素点は，k_M/k_M^+ で完全分岐する．

Remark 1.1. 上の Proposition から k を P_∞ で完備化した体を k_∞ とおく．このとき，$k_M^+ = k_\infty \bigcap k_M$ となる．これは，n-分体 $\mathbb{Q}_n$ の最大実部分体が $\mathbb{Q}_n \bigcap \mathbb{R}$ であることの類似と見なせる．

Dirichlet 指標と円分関数体との間の関係について述べる．この内容も円分体のアナロジーである．詳しくは，Washinton [6] を参照のこと．モニック多項式 $M \in R$ に対して，X_M を $(R/(M))^\times$ の原始的指標からなる群とする．$\chi \in X_M$ が，$\chi|_{\mathbb{F}_q} = 1$ を満すとき real と呼ぶ．X_M の元で real のものからなる群を X_M^+ とおく．このとき，

$$\mathbb{D} = \bigcup_{M:monic} X_M \tag{10}$$

とおく．一方，

$$\tilde{k} := \bigcup_{M:monic} k_M \tag{11}$$

とおけば，次の一対一対応がある．

$$\{\mathbb{D}\text{ の有限部分群 }\} \leftrightarrow \{\tilde{k}/k\text{ の }k\text{ 上有限次拡大体 }\}. \tag{12}$$

特に，X_M, X_M^+ に対応する k の拡大体は，k_M, k_M^+ である．

Theorem 1.1. X を $\mathbb{D}$ の有限部分群とし, K を対応する部分体とする. 任意のモニック既約多項式 $P \in R$ に対して,

$$Y := \{\chi \in X \mid \chi(P) \neq 0\}, \ \ Z := \{\chi \in X \mid \chi(P) = 1\}$$

とおく. このとき,

$$\begin{aligned} X/Y &\simeq \ K/k \text{ の } P \text{ における惰性群 }, \\ Y/Z &\simeq \ \text{位数 } f_P \text{ の巡回群}, \\ X/Z &\simeq \ K/k \text{ の } P \text{ における分解群} \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, f_P は P の K/k における相対次数とする.

2 k_M^+ の合同ゼータ関数

　このセクションでは, まず, 合同ゼータ関数, L-関数の基本的事項について紹介する. そのあと, 合同ゼータ関数の行列式公式を示すときに使う合同ゼータ関数の L-関数分解について述べる. 詳しくは, Galvovich-Rosen [2], 堀田 [4], Washington [6] を参照のこと.

　K を k 上の有限次分離拡大体とし, 合同ゼータ関数 $\zeta(s, K)$ を

$$\zeta(s, K) = \prod_{\mathcal{P}:prime} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{N}\mathcal{P}^s}\right)^{-1} \tag{13}$$

とおく. ただし, $\mathcal{N}\mathcal{P}$ は $\mathcal{P}$ の剰余類体の元の個数である.

Example 2.1. $K = k$ のとき,

$$\begin{aligned} \zeta(s, K) &= \prod_P \left(1 - \frac{1}{N(P)^s}\right)^{-1} \times \left(1 - \frac{1}{N(P_\infty\Big)^s}\right)^{-1} \\ &= \left(\sum_I \frac{1}{N(I)^s}\right) \times \left(\frac{1}{1 - q^{-s}}\right) \\ &= \frac{1}{(1 - q^{1-s})(1 - q^{-s})}. \end{aligned}$$

ただし、P はモニックな既約多項式, I はモニック多項式を全体を渡る.

　一般的には次のことが成り立つ.

Theorem 2.1. g を K の種数, h を K の類数とする. このとき, $2g$ 次の整数係数多項式 $P(X)$ が存在して, 次のことが成り立つ.

1. $\zeta(s,K)=\frac{P(q^{-s})}{(1-q^{1-s})(1-q^{-s})}$.

2. $P(0)=1$, $P(1)=h$.

3. $q^gX^{2g}P(\frac{1}{qX})=P(X)$.

4. $P(X)$ の根は $|q|^{-\frac{1}{2}}$ 上にある.

次のセクションで k_M^+ に付随する多項式 $P_M^+(X)$ の行列式表示を与える. その証明において, k_M^+ の合同ゼータ関数を L 関数の積で表現する必要があるので, そのことについて述べる.

$$\zeta(s,\mathcal{O}_M^+)=\prod_{\mathcal{P}:finite}\left(1-\frac{1}{\mathcal{N}\mathcal{P}^s}\right)^{-1} \tag{14}$$

とおく. P_∞ は k_M^+/k で完全分解することから,

$$\zeta(s,K_M^+)=\zeta(s,\mathcal{O}_M^+)\cdot(1-q^{-s})^{\frac{-\Phi(M)}{q-1}} \tag{15}$$

このとき, $\chi\in\mathbb{D}$ に対して L-関数を

$$L(s,\chi)=\prod_{\substack{P:monic\\ irreducible}}\left(1-\frac{\chi(P)}{N(P)^s}\right)^{-1} \tag{16}$$

とおく. このとき, Theorem 1.1 を用いて次のことが示せる.

Proposition 2.1.

$$\zeta(s,\mathcal{O}_M^+)=\prod_{\chi\in X_M^+}L(s,\chi) \tag{17}$$

上の結果は, アーベル体のデデキントゼータ関数が L-関数の積で表現できることの関数体でのアナロジーとみなせる. (cf. Washington [6])

3 $P_M^+(X)$ の行列式公式

モニック多項式 M に対して, k_M^+ の合同ゼータ関数に付随する多項式を $P_M^+(X)$ とする. このセクションの目的は, $P_M^+(X)$ の行列式表示を与えることである. そのために, いくつかの記号の準備から始める. $\alpha\in(R/(M))^\times$ に対して, r_α を

$$r_\alpha\equiv\alpha \mod M,\ \ \deg r_\alpha<d,$$

を満すようにとる. このとき, Deg を

$$\mathrm{Deg}(\alpha)=\deg r_\alpha.$$

によって定義する．$\mathcal{R}_M = (R/(M))^\times/\mathbb{F}_q^\times$ とすると，Deg は $\mathcal{R}_M$ 上の関数となる．$N = \Phi(M)/(q-1) - 1$ とし，

$$\mathcal{R}_M = \{1, \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_N\}$$

と表す．このとき，

$$\begin{aligned} d_i &= \mathrm{Deg}(\alpha_i) \ \ (i = 1, 2, \cdots, N), \\ d_{ij} &= \mathrm{Deg}(\alpha_i \alpha_j^{-1}) \ \ (i, j = 1, 2, \cdots, N). \end{aligned}$$

とおく．次の行列

$$D_M^+(X) := \left(\frac{X^{d_{ij}} - X^{d_i}}{1 - X} \right)_{i,j=1,2,\cdots N} \tag{18}$$

によって，$P_M^+(X)$ に行列式表示を与える．また，$P_M^+(X)$ と $\det D_M^+(X)$ のズレを修正するために

$$J_M^+(X) := \prod_{\substack{\chi \in X_M^+ \\ \chi \neq 1}} \prod_{Q|M} (1 - \chi(Q) X^{\deg Q}) \tag{19}$$

によって定義される多項式を考える．この $J_M^+(X)$ に関しては，次のような形で表現することができる．

Proposition 3.1.

$$J_M^+(X) = \prod_{Q|M} \frac{(1 - X^{f_Q \deg Q})^{g_Q}}{1 - X^{\deg Q}} \tag{20}$$

ただし，Q は M を割るモニック既約多項式を渡り，f_Q, g_Q は，ぞれぞれ Q の k_M^+/k における相対次数，Q 上にある k_M^+ の素点の個数である．

Proof. Q を一つ固定する．

$$Y_Q^+ := \{\, \chi \in X_M^+ \mid \chi(Q) \neq 0 \,\}, \ \ Z_Q^+ := \{\, \chi \in X_M^+ \mid \chi(Q) = 1 \,\}.$$

とおくと，Theorem1.1 から

$$\begin{aligned} \prod_{\chi \in X_M^+} (1 - \chi(Q) X^{\deg Q}) &= \prod_{\chi \in Y_Q^+} \left(1 - \chi(Q) X^{\deg Q}\right) \\ &= \prod_{\chi \in Y_Q^+/Z_Q^+} \prod_{\psi \in Z_Q^+} \left(1 - \chi\psi(Q) X^{\deg Q}\right) \\ &= \Bigg(\prod_{\chi \in Y_Q^+/Z_Q^+} \left(1 - \chi(Q) X^{\deg Q}\right) \Bigg)^{g_Q} \end{aligned}$$

が成り立つ. Y_Q^+/Z_Q^+ は f_Q 次の巡回群であることから,

$$\prod_{\chi \in Y_Q^+/Z_Q^+} \left(1 - \chi(Q) X^{\deg Q}\right) = \left(1 - X^{f_Q \deg Q}\right).$$

したがって,

$$\prod_{\chi \in X_M^+} \left(1 - \chi(Q) X^{\deg Q}\right) = \left(1 - X^{f_Q \deg Q}\right)^{g_Q}.$$

となる. この等式によって Proposition を得る. □

上の Proposition から $J_M^+(X)$ は整数係数の多項式である. もし,P が既約多項式, $M = P^n$ の場合は, k_M^+/k で P が完全分岐していることから, $J_M^+(X) = 1$ となる. 次の定理が主結果である.

Theorem 3.1. *M を次数が 2 以上のモニック多項式とする. このとき,*

$$\det D_M^+(X) = P_M^+(X) J_M^+(X) \tag{21}$$

が成り立つ.

Proof. $\chi \in X_M^+$ に対して, f_χ を conductor とする. このとき, $\tilde{\chi}$ を,

$$\tilde{\chi} = \chi \circ \pi_\chi$$

によって定義する. ただし, $\pi_\chi : (R/(M))^\times \to (R/(f_\chi))^\times$ は自然な写像である. このとき,

$$L(s, \tilde{\chi}) = L(s, \chi) \cdot \prod_{Q|M} \left(1 - \chi(Q) q^{-s \deg Q}\right).$$

が成立する. よって,

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{\chi \in X_M^+ \\ \chi \neq 1}} L(s, \tilde{\chi}) &= \left(\prod_{\substack{\chi \in X_M^+ \\ \chi \neq 1}} L(s, \chi) \right) \cdot J_M^+(q^{-s}) \\ &= \zeta(s, \mathcal{O}_M^+)(1 - q^{1-s}) J_M^+(q^{-s}) \end{aligned}$$

となることが分かる. また, $\chi \neq 1$ に関して, 簡単な計算から

$$L(s, \tilde{\chi}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_M} \tilde{\chi}(\alpha) q^{-\mathrm{Deg}(\alpha) s}$$

となる. X_M^+ が X_M の real な指標全体であることから, χ が X_M^+ 全体を渡るとき, $\tilde{\chi}$ は $\mathcal{R}_M$ の指標全体を渡る. よって, Frobenius の行列式公式から

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{\chi \in X_M^+ \\ \chi \neq 1}} L(s, \tilde{\chi}) &= \prod_{\substack{\chi \in X_M^+ \\ \chi \neq 1}} \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_M} \tilde{\chi}(\alpha) q^{-\mathrm{Deg}(\alpha) s} \\ &= \det(q^{-s d_{ij}} - q^{-s d_i})_{i,j=1,2,\cdots N} \end{aligned}$$

となる．よって, Proposition 2.1 から

$$\det\left(\frac{q^{-sd_{ij}}-q^{-sd_i}}{1-q^{-s}}\right)_{i,j} = P_M^+(q^{-s})J_M^+(q^{-s})$$

となる．したがって, $X=q^{-s}$ とおけば結論を得る．

$\square$

証明の核となるアイデアは, 合同ゼータ関数を L 関数の積で表示し, そこから Frobenius 行列式公式を用いて行列式にもっていくことである．この証明のプロセスは円分体の類数, デデキントゼータ関数の負の整数点での特殊値の行列式表示の場合と同じである．上の結果は, 円分関数体の類数の行列式表示 (cf. Bae-Kang [1]) を合同ゼータ関数の整数点での特殊値に一般化しようと試みたときに自然に得られたものである．

Example 3.1. $q=2,\ M=T^3\in R$ とする．このとき,

$$\mathcal{R}_M=\{1,\ \alpha_1=T+1,\ \alpha_2=T^2+1,\ \alpha_3=T^2+T+1\}.$$

とおく．M が既約多項式の巾なので $P_M^+(X)=\det D_M^+(X)$ が成り立つ．よって,

$$\begin{aligned}
P_M^+(X) &= \det D_M^+(X)\\
&= \begin{vmatrix} 1 & -X & -X\\ X & 1+X & 0\\ 0 & X & 1+X \end{vmatrix}\\
&= 1+2X+2X^2.
\end{aligned}$$

Corollary 3.1. *M を 2 次以上のモニック多項式とする．このとき,*

1. *$D_M^+(0)=I_N$*
2. *M が 2 次多項式のとき, $D_M^+(X)=I_N$*

が成り立つ．

特に, Corollary 3.1 の 2 の結果から,M が 2 次多項式のとき, 常に $P_M^+(X)=1$ となる．

Corollary 3.2. *h_M^+ を k_M^+ の類数とし, W_M^+ を*

$$W_M^+=\begin{cases}\prod_{Q|M} f_Q & \textit{if}\ g_Q\ \text{がすべて}\ 1\\ 0 & \textit{if}\ \text{それ以外のとき}\end{cases} \tag{22}$$

と定義する. このとき,

$$\det(d_i-d_{ij})_{i,j=1,\cdots,N}=W_M^+\cdot h_M^+ \tag{23}$$

となる．

Proof. Propositon から $J_M^+(1) = W_M^+$ が分かる．あとは, Theorem 3.1 の両辺に X=1 を代入すれば結果を得る．

$\square$

注意として, $W_M^+ = 0$ になる可能性がある．この場合, 上の等式からでは類数を計算することができない．

4 $\det D_M^+(X)$ の低次の項の係数の計算

このセクションでは, $\det D_M^+(X)$ の一次, 二次の項の係数を行列式の微分を用いて計算する．M を d 次のモニック多項式とする．$D_M^+(0) = 1$ より,

$$\det D_M^+(X) = 1 + a_1 X + a_2 X + \cdots \tag{24}$$

と表せる．ただし, a_i $(i = 1, 2, \cdots)$ は整数である．また, $0 \leq i < d$ に対して,

$$s_i = |\{\alpha \in \mathcal{R}_M \mid \deg \alpha = i\}|,$$
$$t_i = |\{\alpha \in \mathcal{R}_M \mid \deg \alpha \leq i\}|.$$

とおく．このとき, 次のことが成り立つ．

Proposition 4.1. 次数が 3 以上のモニック多項式 M とすると,

$$(1)\ a_1 \quad = \quad \frac{\Phi(M)}{q-1} - t_1, \tag{25}$$

$$(2)\ a_2 \quad = \quad \frac{1}{2}\left\{\frac{\Phi(M)}{q-1} - 2t_2 + \left(\frac{\Phi(M)}{q-1} - t_1\right)^2 + t_1^2\right\} \tag{26}$$

が成り立つ．

注意として, 次数が $1, 2$ の場合は $P_M^+(X) = 1$ である．この Proposition を証明するために以下の Lemma が必要である．証明は, 線形代数の練習問題なので省略する．

Lemma 4.1. $F(X) = (f_{ij}(X))_{i,j}$ を X に変数をもつ行列．$F(X)$ が $X = X_0$ で 2 階微分可能であって, かつ正則であるとき以下のことが成り立つ．

$$\begin{aligned}
(1)\ \left.\frac{d\ \det F(X)}{dX}\right|_{X=X_0} &= \det F\ (X_0) \cdot \mathrm{Tr}\Big(F(X_0)^{-1}\frac{dF}{dX}(X_0)\Big), \\
(2)\ \left.\frac{d^2 \det F(X)}{dX^2}\right|_{X=X_0} &= \det F(X_0) \cdot \Big\{\ \mathrm{Tr}\Big(F(X_0)^{-1}\frac{d^2F}{dX^2}(X_0)\Big) - \\
&\quad \mathrm{Tr}\Big(F(X_0)^{-1}\frac{dF}{\partial X}(X_0)F(X_0)^{-1}\frac{dF}{\partial X}(X_0)\Big) + \\
&\quad \mathrm{Tr}\Big(F(X_0)^{-1}\frac{dF}{dX}(X_0)\Big)^2\ \Big\}.
\end{aligned}$$

上の Lemma を用いて Proposition 4.1 を証明する.

Proof. まず, $D_M^+(0)=I_N$ に注意する. また,

$$D_M^+(0)^{-1}=I_N,\quad \frac{dD_M^+}{dX}(0)=(c_{ij})_{i,j=1,2,\cdots,N}$$

ただし,

$$c_{ij}=\begin{cases} 0 & \text{if } i=j,\ d_i=1 \\ 1 & \text{if } i=j,\ d_i\neq 1 \\ 1 & \text{if } d_{ij}=1,\ d_i>1 \\ -1 & \text{if } d_{ij}>1,\ d_i=1 \\ 0 & \text{otherwise .} \end{cases} \tag{27}$$

Lemma より,

$$a_1=\mathrm{Tr}((c_{ij})_{i,j})=\frac{\Phi(M)}{q-1}-t_1,$$

さらに,

$$\begin{aligned} 2a_2 &= \mathrm{Tr}\Big(\frac{d^2D_M^+}{dX^2}(0)\Big)-\mathrm{Tr}\Big(\Big(\frac{dD_M^+}{\partial X}(0)\Big)^2\Big)+ \\ &\quad \mathrm{Tr}\Big(\frac{dD_M^+}{dX}(0)\Big)^2. \end{aligned}$$

単純な計算によって,

$$\mathrm{Tr}\Big(\frac{d^2D_M^+}{dX^2}(0)\Big)=2\Big(\frac{\Phi(M)}{q-1}-t_2\Big),$$
$$\mathrm{Tr}\Big(\frac{dD_M^+}{dX}(0)\Big)^2=\Big(\frac{\Phi(M)}{q-1}-t_1\Big)^2.$$

残りの項の計算は, 少し工夫が必要である. まず次のように分解する.

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\Big(\Big(\frac{dD_M^+}{\partial X}(0)\Big)^2\Big) &= \sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N c_{ij}c_{ji} \\ &= \sum_{i=1}^N c_i^2+\sum_{\substack{d_i=1<d_{ij}\\ d_j=1<d_{ji}}}1+\sum_{\substack{d_{ij}=1<d_i\\ d_{ji}=1<d_j}}1 \\ &\quad -\sum_{\substack{d_i=1<d_{ij}\\ d_{ji}=1<d_j}}1-\sum_{\substack{d_j=1<d_{ji}\\ d_{ij}=1<d_i}}1. \end{aligned}$$

各項は以下のように計算される．ここで，M が次数 3 以上という条件を本質的に使っている．

$$\sum_{i=1}^{N} c_i^2 = \frac{\Phi(M)}{q-1} - t_1, \qquad \sum_{\substack{d_i=1<d_{ij} \\ d_j=1<d_{ji}}} 1 = s_1^2 - s_1,$$
$$\sum_{\substack{d_{ij}=1<d_i \\ d_{ji}=1<d_j}} 1 = 0, \qquad \sum_{\substack{d_i=1<d_{ij} \\ d_{ji}=1<d_j}} 1 = \sum_{\substack{d_j=1<d_{ji} \\ d_{ij}=1<d_i}} 1 = s_1^2.$$

よって，

$$\mathrm{Tr}\Big(\Big(\frac{dD_M^+}{dX}(0)\Big)^2 \Big) = \frac{\Phi(M)}{q-1} - t_1^2.$$

となり，他の項と組み合わせることにより

$$a_2 = \frac{1}{2}\Big\{\frac{\Phi(M)}{q-1} - 2t_2 + \Big(\frac{\Phi(M)}{q-1} - t_1\Big)^2 + t_1^2\Big\}.$$

□

Example 4.1. $q = 2$ とし，$M = T^n$ とする．このとき，$k_M = k_M^+$．さらに，

$$\zeta(s, k_M) = \frac{P_M(q^{-s})}{(1-q^{-s})(1-q^{1-s})}$$

となる $P_M(X)$ を考えると，Proposition 4.1 から

$$\begin{aligned} P_M(X) &= \det D_M^+(X) \\ &= 1 + (2^{n-1}-2)X + \frac{2^{n-1}(2^{n-1}-3)}{2}X^2 + \cdots \end{aligned}$$

と表せる．特に，$M = T^3$ の場合は，Proposition 1.3 より $2g_M = 2$ より

$$P_M(X) = 1 + 2X + 2X^2$$

となる．

上の Proposition 4.1 に関して，高次の係数の表示は分かっていない．$q = 2$ として，

$$M_1 = T^2(T+1)^2, \quad M_2 = T(T+1)^3$$

とおく．$t_i(M_1), t_i(M_2)$ を M_1，M_2 によって定まる t_i の値とする．このとき，$\Phi(M_1) = \Phi(M_2)$，任意の i に対して $t_i(M_1) = t_i(M_2)$ であるが，

$$\begin{aligned} D_{M_1}^+(X) &= 1 + 3X + 5X^2 + 5X^3 + 2X^4, \\ D_{M_2}^+(X) &= 1 + 3X + 5X^2 + 5X^3 + 4X^4 + 2X^5 \end{aligned}$$

となる．このことから，一般的には，高次の a_i は $\Phi(M)$ と t_i からだけでは定まらないことが分かる．

参考文献

[1] Bae, Sunghan and Kang, Pyung-Lyun; Class numbers of cyclotomic function fields. Acta Arith. **102** (2002), no. 3, 251–259.

[2] Galovich, Steven and Rosen, Michael; The class number of cyclotomic function fields. J. Number Theory **13** (1981), no. 3, 363–375.

[3] Hayes, D. R.; Explicit class field theory for rational function fields.Trans. Amer. Math. Soc. **189** (1974), 77–91.

[4] 堀田　良之; 可換環と体, 岩波書店 ,2006 年

[5] D.Shiomi; Determinat formula of congruence zeta functions for maximal real cyclotomic functional fields, preprint.

[6] Washington, L.C.; Introduction to Cyclotomic Fields, Springer-Verlag. New York, 1982.

Daisuke Shiomi
Graduate School of Mathematics
Nagoya University
Chikusa-ku, Nagoya 464-8602
Japan
Mail: m05019e@math.nagoya-u.ac.jp