# Apostol-Vu 型多重ゼータ関数と Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数の一般化

岡本卓也 (名大多元)

7 月 17 日

**abstract**

多重ゼータ関数にはいろいろな型（和の取り方などが異なる）があり，それぞれについて特異点や帰納的構造などが異なっている．そのために多重ゼータ関数には統一的理論が存在しない．それを解決するためにも複素パラメーターを付けることによって，より一般的な多重ゼータ関数を考える事が大切になってくる．例えば，松本耕二氏［1］は複素パラメーターを付け，Barnes 型と Euler-Zagier 型を一般化した多重ゼータ関数に Mellin-Barnes 積分を用いることにより解析接続，特異点，上からの評価や漸近展開を求めている．また，Barnes 型，Euler-Zagier 型の Mellin-Barnes の積分表示に基づく帰納的構造も与えられている．

ここでは特に Mordell-Tornheim 型と Apostol-Vu 型に注目しそれらの一般化を考えることにより，それらの関係やそれ自身の帰納的構造を明らかにする事と多重ゼータ関数を類別する事がこの研究の目的である．

発表の場を与えてくださった塩見大輔さんにこの場を借りて感謝の気持ちを伝えたいと思います.

# 1 Mordell-Tornheim 型と Apostol-Vu 型の多重ゼータ関数

この章では Mordell-Tornheim 型と Apostol-Vu 型の多重ゼータ関数を定義し，それぞれの性質について述べる．詳しくは松本氏 [2] を参照．まず，Mordell-Tornheim 型の多重ゼータ関数を定義する．

**Definition 1.1** *(Mordell-Tornheim 型)*
$r$ を正の整数，, $s_1, \ldots, s_r, s_{r+1}$ を複素変数とする．このとき, *Mordell-Tornheim* 型の多重ゼータ関数を

$$\zeta_{MT,r}(s_1, \ldots, s_r; s_{r+1}) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=1}^{\infty} m_1^{-s_1} m_2^{-s_2} \cdots m_r^{-s_r} (m_1 + m_2 + \cdots + m_r)^{-s_{r+1}} \quad (1.1)$$

と定義する．

次に，Apostol-Vu 型の多重ゼータ関数を定義する．

**Definition 1.2** *(Apostol-Vu 型)*
$r$ を正の整数, $s_1, \ldots, s_r, s_{r+1}$ を複素変数とする．このとき, *Apostol-Vu* 型の多重ゼータ関数を

$$\zeta_{AV,r}(s_1, \ldots, s_r; s_{r+1}) = \sum \cdots \sum_{1 \le m_1 < \cdots < m_r < \infty} m_1^{-s_1} m_2^{-s_2} \cdots m_r^{-s_r} (m_1 + m_2 + \cdots + m_r)^{-s_{r+1}} \quad (1.2)$$

と定義する．

(1.1) と (1.2) の級数は $\Re s_i > 1 \ (1 \le i \le r)$，$\Re s_{r+1} > 0$ で絶対収束する．また，Apostol-Vu 型の一般化を考える時は (1.2) の形を変形した

$$\begin{aligned}\zeta_{AV,r}(s_1, \ldots, s_r; s_{r+1}) &= \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=1}^{\infty} m_1^{-s_1} (m_1 + m_2)^{-s_2} \cdots (m_1 + \cdots + m_r)^{-s_r} \\ &\qquad \times (r m_1 + (r-1) m_2 + \cdots + m_r)^{-s_{r+1}}\end{aligned}$$

を用いることに注意する．

また，Mordell-Tornheim 型の解析接続と possible singularities に関する命題として次を与える．

**Proposition 1.3**

*(1.1)* の級数は全 $\mathbb{C}^{r+1}$ 空間に有理型に解析接続される．また，*possible singularities* は次の等式により定義される $\mathbb{C}^{r+1}$ 空間の部分空間にのみ存在する．

$s_j + s_{r+1} = 1 - \ell \quad (1 \leq j \leq r,\ \ell \in \mathbb{N}_0),$

$s_{j_1} + s_{j_2} + s_{r+1} = 2 - \ell \quad (1 \leq j_1 < j_2 \leq r,\ \ell \in \mathbb{N}_0),$

$\cdots$

$s_{j_1} + \cdots + s_{j_{r-1}} + s_{r+1} = r - 1 - \ell \quad (1 \leq j_1 < \cdots < j_{r-1} \leq r,\ \ell \in \mathbb{N}_0),$

$s_1 + \cdots + s_r + s_{r+1} = r.$

ただし，$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup 0$ とする．

(proof)

[2] の 3 章を参照．　■

Apostol-Vu 型の解析接続と possible singularities に関する命題として次を与える．

**Proposition 1.4**

*(1.2)* の級数は全 $\mathbb{C}^{r+1}$ 空間に有理型に解析接続される．また，*possible singularities* は次の等式により定義される $\mathbb{C}^{r+1}$ 空間の部分空間にのみ存在する．

$s_i + \cdots + s_{r+1} = r + 1 - i - \ell \quad (1 \leq i \leq r,\ \ell \in \mathbb{N}_0),$

(proof)

[2] の 3 章を参照．　■

この Proposition 1 と 2 は Mellin-Barnes 積分を用いることにより示されている．この Mellin-Barnes 積分の説明を次に挙げる．

**Theorem 1.5**

$s, \lambda$ を複素変数とし，$\Re s > 0,\ |\arg \lambda| < \pi$ で $\lambda \neq 0$ とする．このとき，

$$\Gamma(s)(1+\lambda)^{-s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \Gamma(s+z)\Gamma(-z)\lambda^z dz$$

が成り立つ．ただし，$-\Re s < c < 0$ で積分路は垂直直線 $\Re z = c$ とする．

(proof)

[5](Section14.51, p.289, Corollary) を参照. ■

この Mellin-Barnes 積分を多重ゼータに用いる方法として次の例をあげる.

**Example 1.6**

$$\zeta_{MT,2}(s_1,s_2;s_3)=\sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=1}^{\infty}m_1^{-s_1}m_2^{-s_2}(m_1+m_2)^{-s_3}$$

に *Mellin-Barnes* 積分を用いる．ただし，$\Re s_i>1\ (1\leq i\leq 2)$，$\Re s_3>0$ として考える．

$s=s_3,\ \lambda=\dfrac{m_2}{m_1}$ とすると *Mellin-Barnes* 積分の仮定を満たす．よって，

$$(1+\frac{m_2}{m_1})^{-s_3}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{\Gamma(s_3+z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s_3)}(\frac{m_2}{m_1})^z dz$$

が成り立つ．これをもとの $\zeta_{MT,2}(s_1,s_2;s_3)$ に代入すると，

$$\zeta_{MT,2}(s_1,s_2;s_3)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{\Gamma(s_3+z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s_3)}\zeta(s_1+s_3+z)\zeta(s_2-z)dz$$

を得る．よって *2* 重の *Mordell-Tornheim* 型は *Riemann* ゼータ関数に帰着出来る．このことにより解析接続や特異点の解明が可能になる．詳細は *[3]* の *5* 章を参照.

# 2 Apostol-Vu 型の一般化と結果

**Definition 2.1** *(Apostol-Vu 型の一般化)*
$r$ を正の整数とし，$s_1,\ldots,s_{r+1}$ を複素変数，$\alpha_1,\ldots,\alpha_{r+1}$，$w_1,\ldots,w_r$ を複素パラメーターとする．このとき，*Apostol-Vu* 型の一般化を

$$\begin{aligned}&\tilde{\zeta}_{AV,r}((s_1,\ldots,s_r;s_{r+1});(\alpha_1,\ldots,\alpha_r;\alpha_{r+1}),(w_1,\ldots,w_r))\\&\quad=\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=0}^{\infty}(\alpha_1+m_1w_1)^{-s_1}\times\cdots\times(\alpha_r+m_1w_1+\cdots+m_rw_r)^{-s_r}\\&\qquad\times(\alpha_{r+1}+rm_1w_1+(r-1)m_2w_2+\cdots+m_rw_r)^{-s_{r+1}}\end{aligned}\tag{2.1}$$

と定義する．

ここで,

$$w_i = 1 \quad (1 \le i \le r),\ \alpha_i = i \quad (1 \le i \le r),\ \alpha_{r+1} = r(r+1)/2$$

とすると,

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}_{AV,r}((s_1,\ldots,s_r;s_{r+1});(1,\ldots,r;\frac{r(r-1)}{2}),(1,\ldots,1))\\ = \zeta_{AV,r}(s_1,\ldots,s_r;s_{r+1})\end{aligned}$$

が成り立ち, また, $s_{r+1}=0$ とすると,

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}_{AV,r}((s_1,\ldots,s_r;0);(\alpha_1,\ldots,\alpha_r;\alpha_{r+1}),(w_1,\ldots,w_r))\\ = \zeta_{EZ-B,r}((s_1,\ldots,s_r);(\alpha_1,\ldots,\alpha_r),(w_1,\ldots,w_r))\end{aligned}$$

が成り立つことに注意する．(2 つ目の等式の右辺は [1] で定義されたもの.)

また，次の記号を導入する．

$s_j \in \mathbb{C}\ (1 \le j \le r+1)$ に対して，$\Re s_j = \sigma_j, \Im s_j = t_j$ とする．

また，$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\rho(\alpha,\beta) = \max\{|\arg\alpha|, |\arg\beta|\}$$

と定義する．

次に，$\ell$ を $\mathbb{C}$ 上の原点を通る固定された直線とし，$H(\ell)$ を $\ell$ により分けられた半平面の 1 つとする．また，$\theta$ を $\ell$ に直交し $H(\ell)$ に含まれるベクトルの偏角とする．よって，$H(\ell)$ は次のように表される．

$$H(\ell) = \{w \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \mid \theta - \pi/2 < \arg w < \theta + \pi/2\}.$$

ここで

$$w_j \in H(\ell) \quad (1 \le j \le r) \tag{2.2}$$

と仮定し，(2.1) の級数の絶対収束領域についての命題を与える．

**Theorem 2.2**
*(2.2)* が成り立つとする．このとき，級数 *(2.1)* は領域

$$A_r = \{(s_1, \ldots, s_r, s_{r+1}) \in \mathbb{C}^{r+1} \mid \Re(s_{r-k+1} + \cdots + s_{r+1}) > k(0 \leq k \leq r)\}$$

で広義一様絶対収束する．

(proof)

[3] の $Thm\ 3$ とほぼ同じ． ■

また，次のことを仮定する．

$$\alpha_j \in H(\ell) \quad (1 \leq j \leq r+1), \tag{2.3}$$

$$\alpha_{j+1} - \alpha_j \in H(\ell) \quad (1 \leq j \leq r). \tag{2.4}$$

ここで次のことに注意する．(2.2), (2.3) により任意の $j$ $(1 \leq j \leq r)$ に対して，

$$\begin{aligned} &\alpha_j + m_1 w_1 + \cdots + m_j w_j \in H(\ell), \\ &\alpha_{r+1} + r m_1 w_1 + (r-1) m_2 w_2 + \cdots + m_r w_r \in H(\ell) \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned} &(\alpha_j + m_1 w_1 + \cdots + m_j w_j)^{-s_j} = \exp(-s_j \log(\alpha_j + m_1 w_1 + \cdots + m_j w_j)), \\ &(\alpha_{r+1} + r m_1 w_1 + (r-1) m_2 w_2 + \cdots + m_r w_r)^{-s_{r+1}} \\ &\qquad\qquad = \exp(-s_{r+1} \log(\alpha_{r+1} + r m_1 w_1 + \cdots + m_r w_r)) \end{aligned}$$

と考え，対数の分枝を

$$\begin{aligned} &\theta - \pi/2 < \arg(\alpha_j + m_1 w_1 + \cdots + m_j w_j) < \theta + \pi/2, \\ &\theta - \pi/2 < \arg(\alpha_{r+1} + r m_1 w_1 + (r-1) m_2 w_2 + \cdots + m_r w_r) < \theta + \pi/2 \end{aligned}$$

で考える．

以上の準備のもとで級数 (2.1) の解析接続と特異点に関する定理を与える．

**Theorem 2.3**

$r$ を正の整数とする.

もし, $r \geq 2$ ならば, *(2.2), (2.3), (2.4),*

$$\rho(\alpha_i - \alpha_{i-1}, w_i) < \frac{\pi}{2} \quad (1 \leq i \leq r), \tag{2.5}$$

$$\alpha_{r+1} - \alpha_r - \cdots - \alpha_1 = 0 \tag{2.6}$$

を仮定する.

また, $r = 1$ ならば, *(2.2), (2.3), (2.5),*

$$\alpha_2 - \alpha_1 = 0 \tag{2.7}$$

を仮定する. このとき, 次のことが成り立つ：

*(1)* 級数 *(2.1)* は $s_1, \ldots, s_r, s_{r+1}$ の関数として, 全 $\mathbb{C}^{r+1}$ 空間に有理型で解析接続される.

*(2)* $\tilde{\zeta}_{AV,r}$ は次の等式により定義される $\mathbb{C}^{r+1}$ 空間の部分集合にのみ存在する *possible singularities* を除いて正則である.

$$\begin{aligned}&Sing(r)\\&= \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{i=1}^{r} \{(s_1, \ldots, s_r, s_{r+1}) \in \mathbb{C}^{r+1} \mid s_i + \cdots + s_{r+1} = r + 1 - i - n\}.\end{aligned}$$

*(3)* $s_1, \ldots, s_{r-1}$ を固定し, $\sigma', \sigma'', \lambda', \lambda''$ を $\sigma' < \sigma''$, $\lambda' < \lambda''$ を満たす *4* つの実数とする. そして, $\eta$ を小さい正の数とし, $Sing(r)$ を上の *possible singularities* の集合とする. このとき,

$$\sigma' \leq \sigma_{r+1} \leq \sigma'', \lambda' \leq \sigma_r \leq \lambda'', d((s_1, \ldots, s_r, s_{r+1}), Sing(r)) \geq \eta$$

を満たす任意の $s_{r+1}$, $s_r$ に対して,

$$\begin{aligned}&\tilde{\zeta}_{AV,r}((s_1, \ldots, s_r; s_{r+1}); (\alpha_1, \ldots, \alpha_r; \alpha_{r+1}), (w_1, \ldots, w_r))\\&\quad = O\Big(\sum_{j=1}^{r} (|t_{r+1}| + 1)^{f(j,r,\sigma_1,\ldots,\sigma_{r+1})} \exp(|t_{r+1}|\rho(\alpha_j - \alpha_{j-1}, w_j))\\&\qquad \times \sum_{i=1}^{r} (|t_r| + 1)^{g(i,r,\sigma_1,\ldots,\sigma_{r+1})} \exp(|t_r|\rho(\alpha_i - \alpha_{i-1}, w_i))\Big)\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，$O$ 定数は

$$\alpha_j-\alpha_{j-1}\ \ (1\le j\le r), w_j\ \ (1\le j\le r), r,$$
$$\sigma_1,\ldots,\sigma_{r-1}, t_1,\ldots,t_{r-1},\sigma',\sigma'',\eta,\epsilon,\lambda',\lambda''.$$

にのみ依るものとする．そして，

$$f(j,r,\sigma_1,\ldots,\sigma_{r+1}),\ \ g(i,r,\sigma_1,\ldots,\sigma_{r+1})$$

は正確に書き下ろすことが出来る量である．

(proof)

ここでは $\tilde{\zeta}_{AV,r}$ の $r$ に関しての帰納的構造の作り方のみを述べることにする．また，この証明は [1] とほぼ同様であるが，$\tilde{\zeta}_{AV,r}$ の $t_r, t_{r+1}$ に関しての上からの評価でそのままではいかないところがある．そこは [1] の Lemma 4 を拡張することにより解決する．

$r$ に関する帰納法で示す．$r=1$ のときは Hurwitz ゼータ関数の事実より明らか．よって，$r-1$ のときまで成り立つとして $r$ のときも正しいことを示す．ここで $\tilde{\zeta}_{AV,r}$ の $r$ に関しての帰納的構造も見つけたいので級数 (2.1) に対して，次のように Mellin-Barnes 積分を用いる．

まず，$\Re s_i>1\ \ (1\le i\le r), \Re s_{r+1}>0$ とする．

$$s=s_{r+1},$$
$$\lambda=\frac{\alpha_{r+1}-\alpha_r+(r-1)m_1w_1+(r-2)m_2w_2+\cdots+m_{r-1}w_{r-1}}{\alpha_r+m_1w_1+m_2w_2+\cdots+m_rw_r}$$

とすると，仮定 (2.2), (2.3), (2.4), $\Re s_{r+1}>0$ より, これらは Mellin-Barnes 積分の仮定を満たす．よって，これに Mellin-Barnes 積分を用いると

$$\Big(1+\frac{\alpha_{r+1}-\alpha_r+(r-1)m_1w_1+(r-2)m_2w_2+\cdots+m_{r-1}w_{r-1}}{\alpha_r+m_1w_1+m_2w_2+\cdots+m_rw_r}\Big)^{-s_{r+1}}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{\Gamma(s_{r+1}+z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s_{r+1})}$$

$$\times\Big(\frac{\alpha_{r+1}-\alpha_r+(r-1)m_1w_1+(r-2)m_2w_2+\cdots+m_{r-1}w_{r-1}}{\alpha_r+m_1w_1+m_2w_2+\cdots+m_rw_r}\Big)^z dz$$

となる．そして，$c$ を次のように取ってくる．

$$\max_{0\le i\le r}\{i-\Re(s_{r+1}+s_r+\cdots+s_{r+1-i})\}<c<0.$$

(このように $c$ を取ってくる理由は後にもう一度，Mellin-Barnes 積分を用いる時や積分路をシフトして解析接続や possible singularities を探すのに都合がいいからである．)

そして，これを $\tilde{\zeta}_{AV,r}$ に代入すると

$$\begin{aligned}
&\tilde{\zeta}_{AV,r}((s_1,\ldots,s_r;s_{r+1});(\alpha_1,\ldots,\alpha_r;\alpha_{r+1}),(w_1,\ldots,w_r))\\
&\quad=\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{\Gamma(s_{r+1}+z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s_{r+1})}\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=0}^{\infty}(\alpha_1+m_1w_1)^{-s_1}\\
&\quad\times(\alpha_2+m_1w_1+m_2w_2)^{-s_2}\cdots(\alpha_r+m_1w_1+\cdots+m_rw_r)^{-s_r-s_{r+1}-z}\\
&\quad\times(\alpha_{r+1}-\alpha_r+(r-1)m_1w_1+(r-2)m_2w_2+\cdots+m_{r-1}w_{r-1})^{z}dz
\end{aligned}\tag{2.8}$$

が得られる．
($\Sigma$ を $\int$ と交換できるのはスターリングの公式により $\Gamma$ に exp が現れ $\Im z$ が大きくなるにつれて急減少するため．)

ここで，(2.8) の被積分関数の級数の部分を

$$\begin{aligned}
&\tilde{\zeta}^{*}_{AV,r}((s_1,\ldots,s_{r-1},-z;s_r+s_{r+1}+z);(\alpha_1,\ldots,\alpha_{r-1},\alpha_{r+1}-\alpha_r;\alpha_r),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad(w_1,\ldots,w_r))\\
&\quad=\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_r=0}^{\infty}(\alpha_1+m_1w_1)^{-s_1}(\alpha_2+m_1w_1+m_2w_2)^{-s_2}\times\cdots\\
&\qquad\times(\alpha_{r-1}+m_1w_1+\cdots+m_{r-1}w_{r-1})^{-s_{r-1}}\\
&\qquad\times(\alpha_r+m_1w_1+\cdots+m_rw_r)^{-s_r-s_{r+1}-z}\\
&\qquad\times(\alpha_{r+1}-\alpha_r+(r-1)m_1w_1+(r-2)m_2w_2+\cdots+m_{r-1}w_{r-1})^{z}
\end{aligned}$$

とおいて，これに対しても次のように Mellin-Barnes 積分を用いる．

$$s=s_r+s_{r+1}+z,$$

$$\lambda=\frac{\alpha_r-\alpha_{r-1}+m_rw_r}{\alpha_{r-1}+m_1w_1+\cdots+m_{r-1}w_{r-1}}$$

とすると，$c$ の条件と (2.2), (2.3), (2.4) より Mellin-Barnes 積分の仮定を満たす．よって，これに Mellin-Barnes 積分を用いると

$$\left(1+\frac{\alpha_r-\alpha_{r-1}+m_rw_r}{\alpha_{r-1}+m_1w_1+m_2w_2+\cdots+m_{r-1}w_{r-1}}\right)^{-s_r-s_{r+1}-z}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{(c')}\frac{\Gamma(s_r+s_{r+1}+z+z')\Gamma(-z')}{\Gamma(s_r+s_{r+1}+z)} \times\left(\frac{\alpha_r-\alpha_{r-1}+m_rw_r}{\alpha_{r-1}+m_1w_1+m_2w_2+\cdots+m_{r-1}w_{r-1}}\right)^{z'}dz'$$

となる．また，$c'$ は次のように取ってくる．

$$-\Re(s_r+s_{r+1}+z)<c'<-1.$$

よって，

$$\begin{aligned}&\tilde{\zeta}^{*}_{AV,r}((s_1,\ldots,s_{r-1},-z;s_r+s_{r+1}+z);(\alpha_1,\ldots,\alpha_{r-1},\alpha_{r+1}-\alpha_r;\alpha_r),\\&\qquad(w_1,\ldots,w_r))\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{(c')}\frac{\Gamma(s_r+s_{r+1}+z+z')\Gamma(-z')}{\Gamma(s_r+s_{r+1}+z)}\zeta(-z',\frac{\alpha_r-\alpha_{r-1}}{w_r})w_r^{z'}\\&\times\tilde{\zeta}_{AV,r-1}((s_1,\ldots,s_{r-2},s_{r-1}+s_r+s_{r+1}+z+z';-z);\\&\qquad(\alpha_1,\ldots,\alpha_{r-1};\alpha_{r+1}-\alpha_r),(w_1,\ldots,w_{r-1}))dz'\end{aligned}$$

となる．

この $\tilde{\zeta}^{*}_{AV,r}$ を $\tilde{\zeta}_{AV,r}$ に代入すると，$\tilde{\zeta}_{AV,r}$ の $r$ に関しての帰納的構造を得る．この後は積分路をシフトさせて解析接続や特異点のある位置を解明していく．

ただ，積分路を $\Re z'=c'$ から $\Re z'=N-\varepsilon$ ($N\in\mathbb{N}$, $\epsilon$ は $N-\varepsilon$ が整数にならない小さい正の数) にシフト出来るのは積分路を $Ti$, $-Ti$ で切って長方形の積分路をつくって $T\to\infty$ に持っていくと，$c'+Ti\to N-\epsilon+Ti$ と $N-\epsilon-Ti\to c'-Ti$ の積分が 0 になるからである．

ここで積分が 0 になるのはスターリングの公式で $\exp(-\frac{\pi}{2}|\Im z'|)$ が 2 つ出てきて，また, Theorem 2.3 の (3) と仮定 (2.5), (2.6) より $\tilde{\zeta}^{*}_{AV,r-1}$ のオーダーは $\exp(\pi|\Im z'|)$ より小さいためである． ■

Theorem 2.3 の証明より次のことがわかる．

$$\tilde{\zeta}_{AV,r} \to \tilde{\zeta}^{*}_{AV,r} \to \tilde{\zeta}_{AV,r-1}.$$

という Mellin-Barnes 積分を用いた帰納的構造を得る．ただし，$\zeta_1 \to \zeta_2$ は $\zeta_1$ が $\zeta_2$ を含む Mellin − Barnes 積分として表せるということ．このことから, 次の定理を得る.

**Theorem 2.4**
多重ゼータ関数 $\tilde{\zeta}_{AV,r}$ の族は次の帰納的構造を持つ；

$$\tilde{\zeta}_{AV,r} \to \tilde{\zeta}_{AV,r-1} \to \cdots \to \tilde{\zeta}_{AV,2} \to \tilde{\zeta}_{AV,1}.$$

特に, *Apostol-Vu* 型多重ゼータ関数の族は

$$\zeta_{AV,r} \to \zeta_{AV,r-1} \to \cdots \to \zeta_{AV,2} \to \zeta.$$

という *Apostol-Vu* 型多重ゼータ関数のみを用いた帰納的構造を持つ.

# 3 Mordell-Tornheim 型の一般化と結果

**Definition 3.1** *(Mordell-Tornheim 型の一般化)*
$r$ を正の整数, $s_1, \ldots, s_{r+1}$ を複素変数, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+1}$, $w_1, \ldots, w_r$ を複素パラメータとする．このとき，一般化した *Mordell-Tornheim* 型多重ゼータ関数を

$$\begin{aligned} &\tilde{\zeta}_{MT,r}((s_1, \ldots, s_r; s_{r+1}); (\alpha_1, \ldots, \alpha_r; \alpha_{r+1}), (w_1, \ldots, w_r)) \\ &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=0}^{\infty} (\alpha_1 + m_1 w_1)^{-s_1} (\alpha_2 + m_2 w_2)^{-s_2} \times \cdots \times (\alpha_r + m_r w_r)^{-s_r} \\ &\qquad \times (\alpha_{r+1} + m_1 w_1 + m_2 w_2 + \cdots + m_r w_r)^{-s_{r+1}} \end{aligned} \tag{3.1}$$

と定義する.

以下，2 章と同じ記号を用いる.

ここで，

$$w_i = 1 \quad (1 \leq i \leq r),\ \alpha_i = 1 \quad (1 \leq i \leq r),\ \alpha_{r+1} = r$$

とすると，

$$\tilde{\zeta}_{MT,r}((s_1, \ldots, s_r; s_{r+1}); (1, \ldots,\ 1\ ;\ r),(1, \ldots, 1)) \\ = \zeta_{MT,r}(s_1, \ldots, s_r; s_{r+1})$$

となることに注意する．

また，Theorem 2.2, 2.3 とほぼ同じことが Mordell-Tornheim 型についても成り立つ．

**Theorem 3.2**

*(2.2)* が成り立つとする．このとき，級数 *(3.1)* は領域

$$A_r = \{(s_1, \ldots, s_r, s_{r+1}) \in \mathbb{C}^{r+1} \mid \Re s_k > 1\ (1 \leq k \leq r),\ \Re s_{r+1} > 0\ \}$$

で広義一様絶対収束する．

(proof)

[3] の $Thm$ 3 を用いて，パラメータがすべて正と仮定し，後は級数の最後の因子を評価すればよい． ■

**Theorem 3.3**

$r$ を正の整数とする．そして，$r \geq 2$ ならば，

$$(2.2), (2.3), (2.4), (2.5), (2.6)$$

を仮定する．また，$r = 1$ ならば，

$$(2.2), (2.3), (2.5), (2.7)$$

を仮定する．このとき，次のことが成り立つ：

*(1)* 級数 *(3.1)* は $s_1, \ldots, s_r, s_{r+1}$ の関数として，全 $\mathbb{C}^{r+1}$ 空間に有理型で解析接続される．

*(2)* 関数 $\tilde{\zeta}_{MT,r}$ は次の等式の一つにより定義される $\mathbb{C}^{r+1}$ 空間の部分集合 $Sing(r)$ にのみ存在する *possible singularities* を除いて正則である．

$$
\begin{aligned}
&s_j + s_{r+1} = 1 - \ell \quad (1 \le j \le r,\ \ell \in \mathbb{N}_0),\\
&s_{j_1} + s_{j_2} + s_{r+1} = 2 - \ell \quad (1 \le j_1 < j_2 \le r,\ \ell \in \mathbb{N}_0),\\
&\qquad\qquad \cdots\\
&s_{j_1} + \cdots + s_{j_{r-1}} + s_{r+1} = r - 1 - \ell \quad (1 \le j_1 < \cdots < j_{r-1} \le r,\ \ell \in \mathbb{N}_0),\\
&s_1 + \cdots + s_r + s_{r+1} = r.
\end{aligned}
$$

*(3)* $s_1, \ldots, s_r$ を固定し，$\sigma', \sigma''$ を $\sigma' < \sigma''$ を満たす *2* つの実数とする．そして，$\eta$ を小さい正の数とし，$Sing(r)$ を上の集合とする．このとき，

$$\sigma' \le \sigma_{r+1} \le \sigma'', d((s_1, \ldots, s_r, s_{r+1}), Sing(r)) \ge \eta$$

を満たす任意の $s_{r+1}$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\zeta}_{MT,r}((s_1, \ldots, s_r; s_{r+1}); (\alpha_1, \ldots, \alpha_r; \alpha_{r+1}), (w_1, \ldots, w_r))\\
&\qquad = O\Big(\sum_{j=1}^{r} (|t_{r+1}| + 1)^{f(j,r,\sigma_1,\ldots,\sigma_{r+1})} \exp(|t_{r+1}|\rho(\alpha_j, w_j))\Big)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ただし，$O$ 定数は

$$
\begin{aligned}
&\alpha_j - \alpha_{j-1}\ (1 \le j \le r), w_j\ (1 \le j \le r), r,\\
&\sigma_1, \ldots, \sigma_r, t_1, \ldots, t_r, \sigma', \sigma'', \eta, \epsilon.
\end{aligned}
$$

にのみ依るものとする．そして，

$$f(j, r, \sigma_1, \ldots, \sigma_{r+1})$$

は正確に書き下ろすことが出来る量である．

(proof)
[1], [2] を参照． ■

## 4 Theorem 2.3 と Theorem 3.3 の問題点

まず，Theorem 3.3 で仮定 (2.4) があると，Definition 3.1 は Mordell-Tornheim 型の一般化とはなっていない．つまり，Theorem 2.3 と Theorem 3.3 の仮定をどこまで無くすことが出来るかが問題になってくる．ここで，仮定 (2.5) は [1] の定理 1 と同様にして無くすことが出来る．そして，次の問題は

＜仮定 (2.3)，(2.4) も無くすことが出来るだろうか.＞

ということである．

ここで，[4] を参照すると，Theorem 2.3 と Theorem 3.3 は両方とも次のようになる．

(1) $\alpha_{r+1} - \alpha_r - \cdots - \alpha_1 = 0$ のときは仮定 (2.2) のみでよい．

(2) $\alpha_{r+1} - \alpha_r - \cdots - \alpha_1 \neq 0$ のときは仮定 (2.2), (2.3), (2.4) が必要である．

(1), (2) のようなことが起こる理由としては $w_r$ が級数の中の 2 つの積に現れてしまい [4] と同様の方法が使えなくなるからである．この解決策は考え中である．

以上のことよりこの章のはじめに言っていた,「Theorem 3.3 で仮定 (2.4) があると Definition 3.1 は Mordell-Tornheim 型の一般化とはなっていない.」ということは (1) により解決することにも注意する．

## 5 Mordell-Tornheim 型と Apostol-Vu 型の関係と問題点

最後に Mordell-Tornheim 型と Apostol-Vu 型の関係と問題点について述べる．$r$ 重の Apostol-Vu 型の多重ゼータ関数を $r$ 重の Mordell-Tornheim 型の多重ゼータ関数を含む Mellin-Barnes 積分で表示することは出来る．ただ，その表示のために $r$ 重の Apostol-Vu 型の多重ゼータ関数に $2r-2$ 回，Mellin-Barnes 積分を用いる必要がある．そのために $\Gamma$ 関数が $6r-6$ 回現われてしまい，良い表示にはなっていないと思われる．よって，ここでは結果は省略し，そのようなことも出来るということを言及するのみとする．また，より簡潔な表示の仕方も考え中である．

# 参考文献


[1] K. Matsumoto, *The analytic continuation and the asymptotic behaviour of certain multiple zeta-functions* I, J. Number Theory, **101** (2003), 223-243.

[2] K. Matsumoto, *On Mordell-Tornheim and other multiple zeta-functions*, In: Proc. Session in Analytic Number Theory and Diophantine Equations, (eds. D. R. Heath-Brown and B. Z. Moroz), Bonner Math. Schriften, **360**, Bonn, 2003, n.25, 17pp.

[3] K. Matsumoto, *On the analytic continuation of various multiple zeta-functions*, in: M. A. Bennett et al.(Eds), Number Theory for the Mellennium II, Proc. Millennial Conference on Number Theory, A K Peters, Wellesley, 2002, pp. 417-440.

[4] K. Matsumoto, *The analytic continuation and the asymptotic behaviour of certain multiple zeta-functions* II, in "Analtic and Probabilistic Methods in Number Theory", Proc. 3rd Intern. Conf. in Honour of J. Kubilius (Palanga, Lithuania, 2001), A. Dubickas et al. (eds.), TEV, 2002, pp. 188-194.

[5] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge Univ. Press, 1927.



Takuya Okamoto
Graduate School of Mathematics
Nagoya University
Chikusa-ku, Nagoya 464-8602
Japan
Mail:m07011y@math.nagoya-u.ac.jp