

実2次体の L -関数と二重ゼータ関数

松本 耕二 (名古屋大学)

2008年7月19日

ゼータ関数, L -関数やその平均値の挙動を研究する場合, もし何らかの意味での漸近展開が求まったとしたら, その挙動は非常に詳しく理解できたことになる. 本稿では, 漸近展開が実際に求められているいくつかの場合について解説する.

1 L -関数の漸近展開

Dirichlet の L -関数 $L(s, \chi)$ に対して, 次のことが知られている.

Theorem 1.1. (*Heath-Brown*, [HB])

$$\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \left| L\left(\frac{1}{2}, \chi\right) \right|^2 = \frac{1}{q} \sum_{k|q} \mu\left(\frac{q}{k}\right) T(k). \quad (1)$$

ただし,

$$T(k) = k \left(\log\left(\frac{k}{8\pi}\right) + \gamma \right) + 2\zeta\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^{\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{2N-1} c_n k^{-\frac{n}{2}} + O(k^{-N}) \quad (N \in \mathbb{N})$$

であり, γ は Euler 定数, c_n はある種の積分で表示される *explicit* な定数である.

上の定理において, 特に, 素数 $q = p$ の場合は,

$$(1) \text{ の右辺} = \frac{1}{p} \{-T(1) + T(p)\}$$

となる. $T(1)$ は closed form に書けることが分かるので, これは (1) の p に関する漸近展開を与える. Motohashi ([Mot85]) は, この問題を Atkinson の方法で考えることにより,

$$\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \left| L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \right|^2 \quad (2)$$

の漸近的挙動が調べられることを指摘した。(ただし、彼は漸近展開までは与えていない。) さらに、Motohashi の方針を深化させることによって M. Katsurada-K. Matsumoto ([KM 91], [KM 94]) は、任意の複素数 $s \in \mathbb{C}$ において

$$\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} |L(s, \chi)|^2 \quad (3)$$

の漸近展開を与えた。ただし、 $s \neq 1$ においては、 $\chi = \chi_0$ を除く和とする。特に、素数 $q = p$ の場合を考えると、 $s = \sigma + it (\neq 1)$ の場合は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi(p)} \sum_{\chi \bmod p} |L(\sigma + it, \chi)|^2 &= \zeta(2\sigma) + 2\Gamma(2\sigma - 1)\zeta(2\sigma - 1)\operatorname{Re}\left(\frac{\Gamma(1 - \sigma + it)}{\Gamma(\sigma + it)}\right)p^{1-2\sigma} \\ &\quad - |\zeta(\sigma + it)|^2 p^{-2\sigma} + 2p^{-2\sigma}T(p) \end{aligned}$$

かつ、

$$\begin{aligned} T(p) &= \operatorname{Re}\left(\sum_{n=0}^{N-1} \binom{-\sigma + it}{n} \zeta(\sigma - n + it)\zeta(\sigma + n - it)p^{\sigma + it - n}\right) \\ &\quad + O(p^{\sigma - N}) \quad (N \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

ここで Heath-Brown においては不明瞭であった c_n の正体も明らかにされた。また、 $s = 1$ においては、

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\chi \bmod p \\ \chi \neq \chi_0}} |L(1, \chi)|^2 &= \zeta(2)p - (\log(p))^2 + (\gamma_0 - 2\gamma_1 - 3\zeta(2)) - (\gamma_0^2 - 2\gamma_1 - 2\zeta(2))p^{-1} \\ &\quad + 2\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left\{\sum_{n=1}^{N-1} (-1)^n \zeta(1 - n)\zeta(1 + n)p^n\right\} + O(p^{-N}) \quad (N \geq 1) \end{aligned}$$

となる。ただし、 γ_0, γ_1 はゼータ関数の $s = 1$ でのローラン展開の係数

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma_0 + \gamma_1(s-1) + \dots$$

である。この $s = 1$ の場合は、Paley, Selberg による

$$\sum_{\substack{\chi \bmod p \\ \chi \neq \chi_0}} |L(1, \chi)|^2 = \zeta(2)p + O((\log p)^2)$$

なる古典的結果以来の歴史をもつ問題であるが、上の漸近展開はこの問題に対するある意味での最終解答を与えている。

上に出てきた Atkinson の方法というのは、Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の二乗平均を考察するために Atkinson ([Atk]) が開発した方法であるが、その出発点は、 $\operatorname{Re}(s_1) > 1, \operatorname{Re}(s_2) > 1$ として

$$\zeta(s_1)\zeta(s_2) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-s_1} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-s_2}$$

を $m = n$, $m > n$, $n > m$ の3つの部分に分けることにある. このうち, $m = n$ の部分は, $\zeta(s_1 + s_2)$ であり, $m < n$ の部分を

$$\zeta_{E,2}(s_1, s_2) = \sum_{m < n} m^{-s_1} n^{-s_2}$$

と書けば, $m > n$ の部分は $\zeta_{E,2}(s_2, s_1)$ となる. この $\zeta_{E,2}(s_1, s_2)$ を Euler の二重和という. Motohashi や Katsurada-Matsumoto の論文では類似の分解を $L(s, \chi)$ に対して考えるので, ある種の一般化された Euler 二重和が出てくる. 上述の漸近展開の結果はこの二重和を contour 積分の方法で処理して得られたものである. そこで, 次節ではこの種の二重和について考察する.

2 二重和の関数

Euler 型の二重和の取り扱い方として, Atkinson ([Atk]) では Poisson Summation formula を用いる方法が用いられ, また上述したように Motohashi, Katsurada-Matsumoto は contour 積分を用いた. 続けて, Katsurada ([Kat97], [Kat98]) は, Mellin-Barnes 積分による表示を使えば, 積分路をシフトして留数を計算するだけで漸近展開が自然に導き出されることを発見した.

一方, 以下で定義される二重和の関数を Barnes の二重ゼータ関数という.

$$\zeta_{B,2}(s, \alpha, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + m + n\omega)^{-s} \quad (4)$$

あるいは

$$\zeta_{B,2}(s, \alpha, (\omega_1, \omega_2)) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + m\omega_1 + n\omega_2)^{-s}. \quad (5)$$

また, 二重ガンマ関数とは

$$\log \frac{\Gamma_2(\alpha, (\omega_1, \omega_2))}{\rho_2(\omega_1, \omega_2)} = \zeta'_{B,2}(0, (\omega_1, \omega_2)) \quad (6)$$

で定義されるものである. ただし,

$$-\log \rho_2(\omega_1, \omega_2) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \{ \zeta'_{B,2}(0, (\omega_1, \omega_2)) + \log \alpha \}. \quad (7)$$

このとき, Shintani の以下の結果がある.

Theorem 2.1. (Shintani, [Sh77]) 実二次体 F とそのある種の量指標 χ に対して, その L -関数の特殊値 $L_F(1, \chi)$ が二重ガンマ関数を用いて表示できる.

また, Barnes の二重ゼータ関数, Euler の二重ゼータ関数の一般化として

$$\zeta_2(s_1, s_2, \alpha, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha + m)^{-s_1} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + m + n\omega)^{-s_2} \quad (8)$$

がある. この関数については, Matsumoto ([Mat 98]) が, 解析接続, 漸近展開を与えた. その手法は, contour 積分であったが, [Mat 03] では Mellin-Barnes 積分を用いる Katsurada のアイデアにもとづく漸近展開の証明が与えられている.

上のゼータ関数は, $s_1 = 0$ のとき, Barnes の二重ゼータ関数であり, $\alpha = 1, \omega = 1$ のとき, Euler の二重ゼータ関数となる. この (8) の漸近展開から, さらに二重ガンマ関数の漸近展開が得られ, それを上述の Shintani の定理と組み合わせると, $L_F(1, \chi)$ の単数に関する漸近展開も得られる ([Mat 98], [Mat 02]).

3 少数部分の分布問題

無理数 $\alpha \in \mathbb{R}$ を固定し,

$$\{\alpha n\} := \alpha n - [\alpha n] \quad (9)$$

とおく. ただし, $[\]$ はガウス記号である. このとき, Hardy-Littlewood は,

$$\sum_{n \leq X} \left(\{\alpha n\} - \frac{1}{2} \right) = o(X) \quad (10)$$

という評価を与えた. 上の評価は一般的には best-possible である. ただ, α が実の 2 次無理数である場合には, Lerch, Hardy-Littlewood, Ostrowski によって,

$$\sum_{n \leq X} \left(\{\alpha n\} - \frac{1}{2} \right) = O(\log X) \quad (11)$$

というはるかに強い評価が与えられている.

現状では, (11) をさらに改良することは困難と考えられているので次善の策として, 上の和の Riese 平均を考えてみる. まず, D を square-free な正の整数で,

$$D \equiv 2 \text{ または } 3 \pmod{4}$$

を満すものとし, ε_D を $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の基本単数とする. $\alpha = \sqrt{D}$ とし,

$$Z_\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\{\alpha n\} - \frac{1}{2} \right) n^{-s} \quad (12)$$

$$= \frac{G_1(\alpha)}{s} + G_2(\alpha) + G_3(\alpha)s + \cdots \quad (13)$$

とおく. このとき, 次の結果が知られている.

Theorem 3.1. (Hecke, [Hec])

$$\sum_{n \leq X} \left(\{\alpha n\} - \frac{1}{2} \right) \left(\log \left(\frac{X}{n} \right) \right)^2 = \frac{1}{6} G_1(\alpha) (\log X)^3 + \frac{1}{2} G_2(\alpha) (\log X)^2 + G_3(\alpha) (\log X) + \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m X^{\frac{2\pi i m}{\log \varepsilon_D}} + O(X^{-1+\delta}). \quad (14)$$

ただし, δ は任意に小さい定数, c_m も定数である.

上の定理は, Fujii によって以下のように改良された.

Theorem 3.2. (Fujii, [Fuj 88], [Fuj 89])

1. (14) に関して

$$O(X^{-1+\delta}) \rightarrow O(X^{-\frac{4}{3}+\delta}) \quad (15)$$

2.

$$\sum_{n \leq X} \left(\{\alpha n\} - \frac{1}{2} \right) \log \left(\frac{X}{n} \right) = \frac{1}{2} G_1(\alpha) (\log X)^2 + G_2(\alpha) \log X + \sum_{m \in \mathbb{Z}} c'_m X^{\frac{2\pi i m}{\log \varepsilon_D}} + O(X^{-\frac{1}{3}+\delta}). \quad (16)$$

これら, (14), (16) 式の右辺は, X についてかなり詳しい挙動まで明らかになっていると言えるだろう. そこで残された問題は α についての挙動である. 特に, $G_1(\alpha), G_2(\alpha)$ などが α についてどのような関数であるかを知りたい.

基本単数のノルムは $N(\varepsilon_D) = \pm 1$ であるが, $N(\varepsilon_D) = -1$ のケースでは,

$$G_1(\alpha) = 0, \quad G_2(\alpha) = -\frac{\sqrt{D}}{12} + \frac{1}{8} \quad (17)$$

という表示が知られているが, $N(\varepsilon_D) = 1$ のケースにおいては, 表示するのが難しい. まず, 以下のようなゼータ関数を考える.

$$\zeta(s, v_1) = \sum_{(\mu)} \frac{\text{sgn}(\mu\mu')}{|N(\mu)|^s}, \quad (18)$$

ただし, 和は F の単項イデアルをとるものとし, μ' は μ の共役. このとき, Hecke によって次の等式が示されている.

$$G_1(\alpha) = \frac{\zeta(1, v_1) \sqrt{D}}{\pi^2 \log \varepsilon_D}. \quad (19)$$

$$G_2(\alpha) = \frac{\zeta(1, v_1)\sqrt{D}}{\pi^2 \log \varepsilon_D}(\gamma + \log(2\pi)) + \frac{\zeta'(1, v_1)\sqrt{D}}{\pi^2 \log \varepsilon_D} - \frac{\sqrt{D}}{12} + \frac{1}{8}. \quad (20)$$

上の等式に現れる $\zeta(1, v_1)$, $\zeta'(1, v_1)$ は二重ガンマ関数による表示が知られている。このことは, Fujii によって与えられている。Fujii は一般の実 2 次体の場合に成り立つ表示を与えているが, 少々複雑なので以下では $D = 4n^2 + 8n + 3$ のケースを考える。 $\varepsilon_n = \varepsilon_D$ とおくと,

$$\zeta(1, v_1) = \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{4n+1}{\sqrt{D}}, \quad (21)$$

$$\zeta'(1, v_1) = \frac{2\pi^2}{\sqrt{D}} \cdot \left\{ \frac{4n+1}{12} \left(\gamma + \log(2\pi) - \log\left(\varepsilon_n - \frac{1}{\varepsilon_n}\right) \right) \right. \quad (22)$$

$$\left. - \frac{\log \varepsilon_n}{24} \left(\frac{\sqrt{D}}{2n+1} + 8n+5 \right) - X(n) \right\}. \quad (23)$$

ただし,

$$X(n) = \log\left(\frac{\Gamma_2(\varepsilon_n^2, (\varepsilon_n, \varepsilon_n^2 - \varepsilon_n))\rho_2(\varepsilon_n - 1, \varepsilon_n)}{\Gamma_2(2\varepsilon_n - 1, (\varepsilon_n - 1, \varepsilon_n))\rho_2(\varepsilon_n, \varepsilon_n^2 - \varepsilon_n)}\right). \quad (24)$$

そこで問題は, $\log \Gamma_2$ と $\log \rho_2$ の挙動の研究に帰着された。特に, $\log \Gamma_2$ の挙動が問題であるが, 実は,

$$\log \Gamma_2(\varepsilon_n^2, (\varepsilon_n, \varepsilon_n^2 - \varepsilon_n)) = -\log \varepsilon_n - \frac{1}{2} \log(\varepsilon_n - 1) + \log(2\pi) \quad (25)$$

である。一方の $\log \Gamma_2(2\varepsilon_n - 1, (\varepsilon_n - 1, \varepsilon_n))$ についてはこういう簡単な表示はできないので, Mellin-Barnes 積分の方法を用いて漸近展開を計算する。

まず, $\zeta_2(s; 2\varepsilon_n - 1, (\varepsilon_n - 1, \varepsilon_n))$ を Euler 二重和を被積分関数に含む Mellin-Barnes 型積分で表示し, Euler 二重和の特異点の位置に注意しながら, 積分路を左へシフトすることによって漸近展開を導き出す。これをまとめると, $X(n)$ に関する次のような漸近展開を得る。

Theorem 3.3. (*Matsumoto, [Mat 02]*) 上の状況において, $\xi_n = \varepsilon_n - 1$ とおく。このとき,

$$\begin{aligned} X(n) &= -\frac{1}{12}\xi_n \log \xi_n - \frac{1}{12}\xi_n \log(1 + \xi_n) + \left(\frac{1}{12} - \zeta'(-1)\right)\xi_n \\ &+ \frac{1}{6} \log \xi_n - \frac{1}{4} \log(1 + \xi_n) + \frac{1}{4} \log 2\pi - \zeta'_{E,2}(0, 0) \\ &- \frac{1}{12}\xi_n^{-1} \log \xi_n - \frac{1}{12}\xi_n^{-1} \log(1 + \xi_n) + \left(\frac{\gamma}{12} + c_0(1)\right)\xi_n^{-1} \\ &+ \sum_{k=2}^{N-1} \frac{(-1)^k}{k} \left\{ \zeta(-k)\zeta(k) - c_0(k) - \frac{k}{12} \left(1 + 2 + \cdots + \frac{1}{k-1} - \log \xi_n\right) \right\} \xi_n^{-k} \\ &+ O(\xi_n^{-N} \log \xi_n) \quad (N \geq 2). \end{aligned} \quad (26)$$

ただし, $c_0(k)$ は $\zeta_{E,2}(-k, s+k)$ の $s=0$ でのローラン展開の定数項.

この節の内容は, [Mat 02b] においても解説されているが, その末尾に今後に残された問題についての短いコメントがある. そこに挙げられた問題のうち, $\zeta'_{E,2}(0,0)$, $c_0(k)$ の具体的な値を決定することは Sasaki [Sas] によって解決された. しかし, 他の問題は依然として残されているので再録しておく.

1. (14) や (16) の誤差項が α についてどのように依存しているかを明らかにすること.
2. Fujii [Fuj 88] の結果を用いて, 定理 3.3 を任意の実二次無理数 α の場合に拡張すること.
3. より高次の代数体への一般化.

この3については, 総実代数体の Hecke の L -関数の $s=1$ での表示に現れる多重ガンマ関数の漸近展開は [Mat 05] で与えられているので, その結果を利用できる可能性があることを指摘しておく.

参考文献

- [Atk] F.V. Atkinson; The mean-value of the Riemann zeta function. Acta Math. **81** (1949) 355-376.
- [Fuj 88] A. Fujii; Some problems of Diophantine approximation and a Kronecker limit formula, in “Investigations in Number Theory” , T. Kubota(ed.), Adv. Stud. Pure Math. **13**, Kinokuniya, 1988, pp.215-236.
- [Fuj 89] A. Fujii; Diophantine approximation, Kronecker’s limit formula and the Riemann hypothesis, in “Theorie des Nombres/Number Theory”, J-M. de Koninck and C. Levesque(eds.), Walter de Gruyter, 1989, pp.240-250.
- [HB] D. R. Heath-Brown; An asymptotic series for the mean value of Dirichlet L -functions, Comment. Math. Helv. **56** (1981) 148-161.
- [Hec] E. Hecke; Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. Eins, Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ. **1** (1921) 54-76.
- [Kat 97] M. Katsurada; An application of Mellin-Barnes’ type integrals to the mean squares of Lerch zeta-functions, Collect. Math. **48** (1997) 137-153.
- [Kat 98] M. Katsurada; An application of Mellin-Barnes type of integrals to the mean square of L -functions, Liet. Mat. Rink. **38** (1998) 98-112.

- [KM 91] M. Katsurada and K. Matsumoto; Asymptotic expansions of the mean values of Dirichlet L -functions, *Math. Z.* **208** (1991) 23-39.
- [KM 94] M. Katsurada and K. Matsumoto; The mean values of Dirichlet L -functions at integer points and class numbers of cyclotomic fields, *Nagoya Math. J.* **134** (1994) 151-172.
- [Mat 98] K. Matsumoto; Asymptotic series for double zeta, double gamma, and Hecke L -functions, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **123** (1998) 385-405; Corrigendum and addendum, *ibid.* **132** (2002) 377-384.
- [Mat 02] K. Matsumoto; Asymptotic expansions of double gamma-functions and related remarks, in “Analytic Number Theory”, C. Jia and K. Matsumoto(eds.), Kluwer, 2002, pp.243-268.
- [Mat 02b] 松本 耕二; 二重ガンマ関数とある種の実二次体, *数理解析研究所講究録* **1274** (2002) 1-11.
- [Mat 03] K. Matsumoto; Asymptotic expansions of double zeta-functions of Barnes, of Shintani, and Eisenstein series, *Nagoya Math. J.* **172** (2003) 59-102.
- [Mat 05] K. Matsumoto; The analytic continuation and the asymptotic behaviour of certain multiple zeta-functions III, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **54** (2005) 163-186.
- [Mot 85] Y. Motohashi; A note on the mean value of the zeta and L -functions I, *Proc. Japan Acad.* **61A** (1988) 222-224.
- [Sas] Y. Sasaki; The first derivative multiple zeta values at non-positive integers, preprint.
- [Sh 77] T. Shintani; On a Kronecker limit formula for real quadratic fields, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **24** (1977) 167-199.

Kohji Matsumoto
Graduate School of Mathematics
Nagoya University
Chikusa-ku, Nagoya 464-8602
Japan
Mail: kohjimat@math.nagoya-u.ac.jp