Kohnen-Ono の結果について

高井 勇輝 (名古屋大学 D2)

2008 年 7 月 26 日

1974 年, Hartung[1] により与えられた奇素数 ℓ で類数が割れないような虚二次体が無限個あることが示された。その後, 1990 年に Horie[2] により Hecke 作用素の trace formula を使って同様の定理を示した. しかしそれまで, 無限個と言ってもどのくらい存在しているか？については議論できなかった. 1999 年, Kohnen と Ono は重さ半整数の保型形式を使うことで下からの評価を与えた [3]. 今回は Kohnen-Ono の結果の解説とその問題の拡張に対する考察を述べる.

1 Kohnen-Ono の結果

Kohnen-Ono の結果を解説する.

Theorem(Kohnen-Ono(1999)[3]) . ℓ を 3 より大きい素数, $\varepsilon > 0$, $X > 0$ を十分大きいとする. そのとき

$$\#\{-X > D > 0 \mid D < 0 : \text{fund.disc.}, h(D) \not\equiv 0 \pmod{\ell}\} \\ \geq \left(\frac{2(\ell-2)}{\sqrt{3}(\ell-1)} - \varepsilon\right)\frac{\sqrt{X}}{\log X}.$$

証明.

$$\theta(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2} \quad (q = e^{2\pi i z}),$$
$$\theta(z)^3 = \sum_{n=0}^{\infty} r(n)q^n = 1 + 6q + 12q^2 + \dots \in M_{\frac{3}{2}}(\Gamma_0(4)),$$
$$r(n) = \#\{(a,b,c) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid a^2+b^2+c^2 = n\}$$

を考える. このとき Gauss の二次形式論から次のことが知られている.

$$r(n) = \begin{cases} 12H(4n) & \text{if } n \equiv 1,2 \pmod{4}, \\ 24H(n) & \text{if } n \equiv 3 \pmod{8}, \\ r(\frac{n}{4}) & \text{if } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ 0 & \text{if } n \equiv 7 \pmod{8}. \end{cases}$$

ここで $H(N)$ は Hurwitz-Kronecker 類数である. 即ち $-N = Df^2$ (D は fund. disc.) の時

$$H(N) = \frac{h(D)}{w(D)} \sum_{d|f} \mu(d) \left(\frac{D}{d}\right) \sigma_1(\frac{f}{d})$$

である. ここで $h(D)$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の類数, $w(D)$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の単数の個数の半分, μ はメビウス関数, $\sigma(n)$ は n の約数の和.

ここで重要な定理を紹介する.

Theorem(Sturm(1984)[8]) . $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $g = \sum a(n)q^n \in M_k(\Gamma_0(N), \chi)$ で各 $a(n)$ は整数とする. このとき

$$0 \leq n \leq \frac{k}{12}[\Gamma_0(1) : \Gamma_0(N)] =: \kappa(N)$$

となる全ての整数 n に対して $a(n) \equiv 0 \pmod{\ell}$ ならば, 全ての非負整数 n に対して $a(n) \equiv 0 \pmod{\ell}$.

この定理を使って類数が ℓ で割れない二次体の存在を言いたい. その為に二つの作用素を導入する. p を 3 より大きい素数とする.

$$\begin{aligned}
(U_p\theta^3)(z) &:= \sum_{n=o}^{\infty} r(n)q^{pn} \quad \in M_{\frac{3}{2}}(\Gamma_0(4p), \left(\frac{-4}{\cdot}\right)), \\
(V_p\theta^3)(z) &:= \sum_{n=o}^{\infty} r(pn)q^{n} \quad \in M_{\frac{3}{2}}(\Gamma_0(4p), \left(\frac{-4}{\cdot}\right)).
\end{aligned}$$

これらを使って

$$(V_p\theta^3)(z) - (U_p\theta^3)(z) =: \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n.$$

すると,

$$a(p) = r(p^2) - r(1) = 6\left(p - \left(\frac{-4}{p}\right)\right)$$

となるので

$$a(p) \not\equiv 0 \pmod{\ell} \Longleftrightarrow p \not\equiv \left(\frac{-4}{p}\right) \pmod{\ell}$$

である. $\kappa(4p) = \frac{3}{4}(p+1) < p$ であることとから Sturm の定理より次のことが言えた.

補題 1. ℓ を 3 より大きい素数, p を 3 より大きい素数で $p \not\equiv \left(\frac{-4}{p}\right) \pmod{\ell}$ を満たすとする．このとき $1 \leq n_p < p$ で $D = -pn_p$ or $-4pn_p$ とすると $h(D) \not\equiv 0 \pmod{\ell}$ となる square-free な n_p が存在する．

補題の仮定を満たす素数は無限個あることに注意 (Dirichlet の算術級数定理より).

p_1, p_2 を補題の仮定を満たす素数 $(p_1 < p_2)$ とする．このとき $\mathbb{Q}(\sqrt{D_1})$ と $\mathbb{Q}(\sqrt{D_2})$ は異なる体である．実際, 同じ体と仮定すると $D_1a^2 = D_2b^2$ となる $a, b \in \mathbb{Z}$ が取れることから $p_2 | n_{p_1}$. 特に $p_2 < n_{p_1}$ である．すると $p_2 < n_{p_1} < p_1$ より $p_1 < p_2$ に矛盾する．

以上のことから, 類数が ℓ で割れない無限個の虚二次体の存在が言えた．評価も $D_i > -3p_i(p_i + 1)$ であることを使って与えられる． ■

2 問題の拡張

Kohnen-Ono の結果を踏まえて, 次のような問題を考えている．

問題． F を総実代数体, ℓ を 3 より大きい素数 (+ 必要あらば仮定) とする．このとき,

A. F の虚二次拡大 K/F で $h(K)/h(F) \not\equiv 0 \pmod{\ell}$ となる K が無限個存在するか？

B. 無限個存在するのであればどのくらいあるか？

この問題のうち A は 1991 年に Naito[4] によって $\ell \nmid \zeta_F(-1)$ という仮定の下で Hecke 作用素の trace formula を使って示されている．これは Horie による $F = \mathbb{Q}$ の場合の方法の一般化にあたる．

これを Kohnen-Ono の方法で試みるにあたり大きく分けて 2 つの問題が生じる．

① θ^3 に相当するものの構成.

② Sturm の定理の一般化.

① に関しては Shimura[7] による Gauss の 二次形式論の一般化と, これもまた Shimura[6] による θ 関数の変換公式を組み合わせて構成できそうである．特に, そこで得られる関数は weight が 3/2 の有理数係数 Hilbert modular form になる．

② については Sturm の定理を Hilbert modular form に通用するように拡張したいのだが Sturm 自身の証明 [8] ではあまりうまく拡張できそうにない．そこで Doi-Ohta による同様の結果を得た方法を拡張できないかと考えている ([9] を参照)．これは代数幾何的な手法を用いる．

2.1 ① について

F を標数が 2 でない総実代数体, $\mathcal{O}_F$ を F の整数環とする. (V, φ) を F 上 3 次元ベクトル空間とその上の二次形式とする. 特に V の直交基底を固定したとき φ は単位行列により定義されるものとする. SO^φ を φ の直交群, $SO^\varphi_{\mathbb{A}}$ をその adele 化したものとする. 即ち

$$SO^\varphi := \{\alpha \in GL(V) \mid \varphi[x\alpha] = \varphi[x] \text{ for all } x \in V\},$$
$$SO^\varphi_{\mathbb{A}} := \{\alpha \in GL(V_{\mathbb{A}}) \mid \varphi[x\alpha] = \varphi[x] \text{ for all } x \in V_{\mathbb{A}}\}.$$

ここで $V_{\mathbb{A}} = V \otimes_F \mathbb{A}_F$. $\mathbf{a}, \mathbf{h}, \mathbf{v}$ を各々F の無限素点全体のなす集合, 有限素点全体のなす集合, 素点全体のなす集合とする. $L \subset V$ が (V の) $\mathcal{O}_F$-lattice であるとは有限生成 $\mathcal{O}_F$-加群で $L \otimes_{\mathcal{O}_F} F = V$ となるものとする. L を $\mathcal{O}_F$-lattice とする. $v \in \mathbf{h}$ に対して L_v を L の V_v における (V_v の位相についての) 閉包とする. ここで $V_v = V \otimes_F F_v$. 次のような事実が知られている.

補題 2. $L, M \subset V$ を $\mathcal{O}_F$-lattice とする. このとき全ての $v \in \mathbf{h}$ に対して $L_v = M_v$ であるなら $L = M$ である.

$\mathcal{O}_F$-lattice L, $\alpha = (\alpha_v)_{v \in \mathbf{v}} \in SO^\varphi_{\mathbb{A}}$ に対し $L\alpha$ を $v \in \mathbf{h}$ に対して $(L\alpha)_v = L_v\alpha_v$ であるものと定義する. この $L\alpha$ は補題 2 より一意に決まる. $\mu(L)$ を $\varphi[x]$ $(x \in L)$ が生成する F のイデアルとする. 即ち $\mu(L) := \{\sum_i a_i\varphi[x_i] \in F \mid a_i \in \mathcal{O}_F\ ,\ x_i \in L\}$ とする. $\mathcal{O}_F$-lattice $L \subset V$ が (V の) $\mathcal{O}_F$-maximal lattice であるとは, $\mu(L) \subset \mathcal{O}_F$ であって L' を $L' \supset L$ となる $\mathcal{O}_F$-lattice で $\mu(L') \subset \mathcal{O}_F$ とすると $L' = L$ となるものとする.

$\mathcal{O}_F$-maximal lattice L に対して

$$\{L\alpha \mid \alpha \in SO^\varphi_{\mathbb{A}}\} = \bigcup_{i \in I} \{L_i\alpha \mid \alpha \in SO^\varphi\}$$

となる $\{L_i\}_{i \in I}$ をとる. $\#I$ が有限であることは良く知られている事実である. このとき集合 $\{L_i\}$ は V の全ての $\mathcal{O}_F$-maximal lattice のなす集合に一致することも知られている.

$q \in \mathcal{O}_F$ を総正な数, $\mathfrak{b}$ を F の分数イデアル, $K = F(\sqrt{-q})$ とする. $x \in V$ に対して $\varphi(x, L) := \{\varphi(x, y) \mid y \in L\}$ とおくと $\varphi(x, L)$ は F のイデアルである. ここで $\varphi(x, y)$ は φ に対応する対称双一次形式とする.

$$L[q, \mathfrak{b}] := \{x \in V \mid \varphi[x] = q, \varphi(x, L) = \mathfrak{b}\},$$
$$\Gamma(L) := \{\gamma \in SO^\varphi \mid L\gamma = L\}$$

とおくと, 次の事実が成り立つ.

定理 1. ([7] Thm.11.6., Thm.12.3.) $h(K), h(F)$ は各々K, F の類数, B を (V, φ) の even Clifford 代数として得られる F 上の四元数環とし $\mathfrak{e}$ を B で分岐する F の素イデアルの積とする. $\mathfrak{d}$ を K/F の相対共役差積とする. イデアル $\mathfrak{c}$ を $v|\mathfrak{e}$ に対して $\mathfrak{c}_v = \mathcal{O}_{F_v}$, $v \nmid \mathfrak{e}$ に対して $\mathfrak{c}_v^2(N_{K/F}\mathfrak{d})_v = q\mathfrak{b}_v^{-2}$ となるものとする. U, U' は

$$\begin{aligned} U &:= \{x \in \mathcal{O}_K \mid xx^\rho = 1\}, \\ U' &:= \{x \in U \mid x - 1 \in \mathfrak{d}_v\mathfrak{c}_v \text{ for } v \nmid \mathfrak{e}\} \end{aligned}$$

とし, μ は $\mathfrak{e}$ を割ってかつ K で分岐する素イデアルの個数, ν は K で分岐する $v \in \mathfrak{a}$ の個数, $[K/F, \mathfrak{p}]$ を $\mathfrak{p}$ が K で完全分解, 分解しない, 分岐するに従って各々値 1, -1, 0 をとるものとする. このとき,

$$\sum_{i \in I} \#\{L_i[q, \mathfrak{b}]/\Gamma(L_i)\} = \frac{h(K)}{h(F)} \frac{[\mathcal{O}_F^\times : N_{K/F}(\mathcal{O}_K^\times)]}{[U : U']} 2^{1-\mu-\nu} N_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{c}) \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{c}} (1 - [K/F, \mathfrak{p}] N_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{-1})$$

が成り立つ. ここで積は $\mathfrak{c}$ を割る全ての素イデアルを走る.

左辺は整数であること, また K/F が CM 拡大のとき $h(K)/h(F)$ は整数になるという事実から右辺が素数 ℓ で割れなくてかつ $[U : U']$ が ℓ で割れなければ $h(K)/h(F)$ は ℓ で割れないことを注意しておく.

ここで

問 1.

$$\#\{L_i[q, \mathfrak{b}]/\Gamma(L_i)\} = \#L_i[q, \mathfrak{b}]/\#\Gamma(L_i)$$

であるか？

は一般には示せていないが $F = \mathbb{Q}, \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ のときは正しいことが確認できている. $F = \mathbb{Q}$ の場合は [7] §.12.7. にある. $F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の時は具体的に計算して確認した. これを踏まえて次のような関数を考える. $\{L_i\}_{i \in I}$ を上記のものとする.

$$\Theta_{L_i}(z) := \sum_{x \in L_i} e^{\pi i \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\varphi[x]z)} = \sum_{\xi \in \mathcal{O}_F, \xi \gg 0 \text{ or } \xi = 0} a(\xi) e^{\pi i \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\xi z)},$$
$$a(\xi) = \sum_{\mathfrak{b}} \#L_i[\xi, \mathfrak{b}].$$

このとき Θ_{L_i} は重さ $\frac{3}{2}$ の Hilbert modular form である. これらの平均をとる.

$$\Theta(z) := \sum_{i \in I} \frac{1}{\#\Gamma(L_i)} \Theta_{L_i}(z) = \sum_{\xi \in \mathcal{O}_F, \xi \gg 0 \text{ or } \xi = 0} b(\xi) e^{\pi i \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\xi z)},$$
$$b(\xi) = \sum_{\mathfrak{b}} \sum_{i \in I} \#L_i[\xi, \mathfrak{b}]/\#\Gamma(L_i).$$

これもまた重さ $\frac{3}{2}$ の Hilbert modular form である. 定理 1 から, 問 1 が正しければこの Θ の係数に相対類数が出現し, Kohnen-Ono における θ^3 の拡張の一つの候補になる.

2.2 ② について

Strum の定理の一般化についての考察. 総実代数体の Hilbert modular form に対して標数 $\ell > 0$ の体上で行うのが目標なのだが, 今は実二次体の Hilbert modular form についての Sturm の定理の一般化について $\mathbb{C}$ 上で議論する. いずれにしてもロジックは同じである. ここで述べることは主に [10] を参考にした.

F を総実代数体, $n := [F : \mathbb{Q}]$ とする. H を複素上半平面, $\Gamma \in SL_2(\mathcal{O}_F)$ を合同部分群とする. このとき $\Gamma\backslash H^n$ はカスプに穴の開いている多様体である. $X_\Gamma := \Gamma\backslash(H^n \cup \mathbb{P}^1(F))$ とおくと, X_Γ は complex compact projective singular variety であることが知られている. X_Γ は $\Gamma\backslash H^n$ の minimal compact 化と呼ばれている. Y_Γ を X_Γ の特異点を解消した多様体とする (troidal compact 化と呼ばれている). X_Γ, Y_Γ は Hilbert modular variety と呼ばれている.

簡単のために F を実二次体とする. この時 X_Γ においてカスプだった点は Y_Γ において曲線に置き換わる. この曲線を cusp resolution curve と呼ぶことにする. Y_Γ の因子 D を全ての cusp resolution curve の和 $D = \sum S$ とおく.

$k = (k, k) \in \mathbb{Z}^2$ $(k \in \mathbb{Z}_{>0})$ とする. $M_k(\Gamma)$(resp. $S_k(\Gamma)$) を weight k の Γ に関する正則 Hilbert modular form (resp. cusp form) のなすベクトル空間とする. Y_Γ 上の層 $L := \Omega(\log D)$ を開集合 $U \subset Y_\Gamma$ における section が $U \cap (Y - D)$ 上正則でかつ D で高々1 位の極を持つ 2-form であるものとする. すると, $f \in M_{2k}(\Gamma)$ に対して $f(dz_1 \wedge dz_2)^{\otimes k} \in H^0(Y_\Gamma, L^{\otimes k})$ を対応させることで $M_{2k}(\Gamma) \simeq H^0(Y_\Gamma, L^{\otimes k})$ となる. 同様の対応で $S_{2k}(\Gamma) \simeq H^0(Y_\Gamma, L^{\otimes k-1} \otimes \Omega^n_{Y_\Gamma})$ も成り立つ. このとき ω_1, $\omega_2 \in H^0(Y_\Gamma, L^{\otimes k})$ は lineary equivarent である.

今は cusp form に対して述べる. $f \in S_k(\Gamma)$ を $f \not\equiv 0$ と仮定する. cusp resolution curve S_0 を一つ固定して f の S_0 における零点の order $n_{S_0} = \mathrm{ord}_{S_0}(f)$ に注目する. (S_0 での零点の order を考えることは q-展開の order を考えることと同じである.)
$\omega := f(dz_1 \wedge dz_2)^{\otimes k}$ とおくと, その因子 $\mathrm{div}(\omega) =: \sum n_U U$ は effective である (cusp form でないと effective とは限らない). 和は Y_Γ の超曲面全体を走る.

ここで Y_Γ 上の ample な line bundle $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_{Y_\Gamma}(D')$ を一つ選んで固定する. Y_Γ の divisor D_1 に対して D_1 の $\mathcal{L}$ に関する次数 $\deg_{\mathcal{L}}(D_1)$ を $\mathcal{L}$ と D_1 の intersection number $(\mathcal{L}, D_1) := (D', D_1)$ として定義する. また line bundle $E = \mathcal{O}(D_1)$ に対して $\deg_{\mathcal{L}}(E) := \deg_{\mathcal{L}}(D_1)$ とする. $\mathcal{L}$ が ample であることから D_1 が effective かつ $D_1 \neq 0$ なら $\deg_{\mathcal{L}}(D_1) > 0$ である. ([11] Lemma.12.1 を参照.) この性質から

$$\deg_{\mathcal{L}}(\mathrm{div}(\omega)) = \sum n_{S_0}(\mathcal{L}, S_0) \geq n_{S_0}(\mathcal{L}, S_0) \geq \mathrm{ord}_{S_0}(f)$$

であり, また

$$\begin{aligned}\deg_{\mathcal{L}}(\mathrm{div}(\omega)) &= \deg_{\mathcal{L}}(L^{\otimes k-1}\otimes\Omega^2_{Y_\Gamma})\\ &= k\deg_{\mathcal{L}}(K)+(k-1)\deg_{\mathcal{L}}(D)\\ &=: \kappa\end{aligned}$$

となる. ここで K は Y_Γ の canonical divisor で, $L=\mathcal{O}_{Y_\Gamma}(K+D)$, $\Omega^2_{Y_\Gamma}=\mathcal{O}_{Y_\Gamma}(K)$ であることを用いた. 特に次のことが言える.

$$\kappa < \mathrm{ord}_{S_0}(f) \Longrightarrow f\equiv 0.$$

K と D は Γ にのみ依存することから, κ は ample line bundle $\mathcal{L}$ を固定すれば weight と Γ にのみ依る. これは $\mathbb{C}$ 上における実二次体の Hilbert modular form に対する Strum の定理の一般化の一部分を与えるといえる. 実際に $\mathbb{C}$ 上の一般化と呼ぶには $\mathcal{L}$, k, Γ を固定した時に κ を具体的に計算することが必要である.

今後の目標はは標数 $\ell > 0$ の体上で同様のことを示すこと, 具体的に $\mathcal{L}$ を見つけて Γ, k に対して値を計算することである.

参考文献

[1] P. Hartung, Proof of the existence of infinitely many imaginary quadratic fields whose class number is not dibisible by 3,

[2] K. Horie, Trace formulae and imaginary quadractic fields, *Math. Ann.* **288** (1990), 605-612.

[3] W. Kohnen and K. Ono, Indivisibility of class numbers of imaginary quadratic fields and orders of Tate-Shafarevich groups, *Invent. Math.* **135**(1999), 387-398.

[4] H. Naito, Indivisibility of class numbers of totally imaginary quadratic extensions and their Iwasawa invariants, *J. Math. Soc. japan* **43** No. 1 (1991), 185-194.

[5] G. Shimura, On Hilbert modular forms of half-integral weight, *Duke Math. J.* **55**(1987), 765-838.

[6] G. Shimura, On the transformation formulas of theta series, *Amer. J. Math.* **115** No. 5. (1993), 1011-1052.

[7] G. Shimura, *Arithmetic and analytic theories of quadratic forms and Clifford groups*, American Mathematical Society (2004)

[8] J. Sturm, On the congruence of modular forms, *Springer Lect. Notes in Math.* **1240**(1984), 275-280.

[9] M. R. Murty, Congruences between Modular forms, *London Math. Soc. Lec. Notes* **247**(1997), 309-320.

[10] V. D. Geer, *Hilbert Modular Surfaces*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (1980)

[11] W. Fulton, *Intersection Theory 2nd. edu.* , Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (1991)

Yuuki Takai
Graduate School of Mathematics
Nagoya University
Chikusa-ku, Nagoya 464-8602
Japan
Mail: m05026c@math.nagoya-u.ac.jp