Sturm の定理について

高井 勇輝 (名古屋大学 D2)

2008 年 10 月 18 日

前回, Kohnen-Ono の結果を紹介し, その証明に Sturm の定理が用いられていることを話した. Kohnen-Ono の結果を総実代数体上の虚二次拡大に対して成り立つよう拡張するには, まず Sturm の定理を Hilbert modular form に対して成り立つよう拡張する必要がある.

今回は Sturm の定理の拡張をモチベーションにし, その Sturm による証明 [4] と Doi-Ohta による別証明 [1] を紹介する.

1 Sturm の定理の紹介

Sturm の定理を再度, 紹介する.

N, k を正整数, Γ を level N の合同部分群, $f(z) \in M_{\frac{k}{2}}(\Gamma)$ ($z \in H$: 上半平面) とする. $f(z)$ のカスプ $i\infty$ での q-展開を

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n, \ (q = e^{2\pi i z})$$

とする. さらに $f(z)$ は整数係数であると仮定する. 即ち, 任意の正整数 n に対し $a_n \in \mathbb{Z}$ であると仮定する. このとき Sturm の定理とは次のようなものである.

Theorem(Sturm(1984)[4]) . ℓ を素数とする. このとき,

$$n \leq \frac{k}{2}\frac{[\Gamma(1):\Gamma]}{12}$$

を満たす全ての n に対して $a_n \equiv 0 \mod \ell$ が成り立つと仮定すると, 全ての非負整数 n に対して $a_n \equiv 0 \mod \ell$ が成り立つ. ■

この定理を Hilbert modular form に対して拡張したい, ということが当面の目標である.

一つ記号を導入する. 上の f, ℓ に対して

$$\mathrm{ord}_\ell(f) := \min\{n \in \mathbb{Z} \mid a_n \not\equiv 0 \mod \ell\}$$

とおく. $f, g \in M_{\frac{k}{2}}(\Gamma)$ に対して

$$\mathrm{ord}_\ell(fg) = \mathrm{ord}_\ell(f) + \mathrm{ord}_\ell(g)$$

が成り立つことは簡単にチェックできる. また任意の非負整数 n に対し $a_n \equiv 0 \mod \ell$ の時, $\mathrm{ord}_\ell(f) = \infty$ と約束する.

2 Sturm による証明

Sturm 自身による証明を解説する. 簡単のため, $N = 1$, $k \in 2\mathbb{Z}$ の時のみ触れる. 即ち, $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ で 重さが整数の保型形式の場合のみ話す. 一般の場合は Murty の解説 [3] を参照.

まず特殊な関数を二つ紹介する.

$$\begin{aligned} \Delta(z) &:= q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{11} = \frac{E_4(z)^3 - E_6(z^2)}{1728} \in \mathbb{Z}[[q]], \\ j(z) &:= \frac{E_4(z)^3}{\Delta(z)} = 1728 + \frac{E_6(z)^2}{\Delta(z)}. \end{aligned}$$

ここで E_4, E_6 は正規化された Eisenstein 級数である. $\Delta(z)$ は 重さが 12 の Γ に関するカスプ形式で, 上半平面上で non-vanishing であり, $\Delta(z)^{-1} \in q^{-1}\mathbb{Z}[[q]]$ は $i\infty$ で一位の極を持つ.

$j(z)$ は整数係数であり, 重さが 0 の保型形式で $i\infty$ で一位の極を持つ.

ここで一つ補題を紹介する. 証明は発表で紹介したので略す.

補題 1. $\Phi \in M_{12k}(\Gamma)$ が

$$\mathrm{ord}_\ell(\Phi) > k$$

を満たすならば

$$\frac{\Phi}{\Delta^k} \in \ell\mathbb{Z}[j].$$

■

この補題を $f^{12} \in M_{12k}(\Gamma)$ に対して適用すると,

$$\frac{f^{12}}{\Delta^k} = H(j)$$

となる $\ell\mathbb{Z}$ 係数の多項式 $H(x)$ の存在が言える. このことから $\mathrm{ord}_\ell(f^{12}) = \infty$ が言えて, よって $\mathrm{ord}_\ell(f) = \infty$ が示される.

この方法を見る限り, j や Δ のようなある意味で良い関数の存在がキーになっていて応用を考える際, 難しく思える.

3 Doi-Ohta による方法

Doi-Ohta による幾何的手法を用いた定理の証明について見ていくことにする.

3.1 準備

準備すべき事項についていくつか述べる.

3.1.1 moduli としての modular curve

以降, Γ として $\Gamma_1(N)$ $(N \geq 5)$ のみを考える.

S をスキームとする. S 上の楕円曲線 E/S とは, S 上固有スムーズな代数曲線で zero section $0 : S \to E$ を持ち, 全ての幾何的ファイバー $E_{\bar{s}}$ が種数 1 で連結であるものとする.

E/S の $\Gamma_1(N)$ 構造とは, E の点 $P : S \to E[N]$ で位数がちょうど N のを与えることとする.

S 上の楕円曲線とその $\Gamma_1(N)$ 構造の二つの対 $(E, P)_{/S}$ と $(E', P')_{/S}$ が同型であることを, S 上の楕円曲線の同型射 $f : E \to E'$ で $f(P) = P'$ となるものが存在することと定義する.

次のような関手 $\mathcal{M}_1(N) : \mathbf{Sch}_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} \to \mathbf{Sets}$ を考える：

$$\mathcal{M}_1(N) : S \to \{(E, P)_{/S} \text{の同型類}\}.$$

この関手は $N \geq 4$ のとき fine moduli である. 表現する多様体は $\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$ 上スムーズな曲線で $Y_1(N)$ と書く. また, 楕円曲線を広義楕円曲線 (generalize elliptic curve) に置き換えた関手を考えると, この関手は $N \geq 5$ のとき fine moduli で表現する曲線を $X_1(N)$ と書く. これが $N \geq 5$ と仮定する理由である. この $X_1(N)$ は $\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$ 上固有スムーズな曲線で, $Y_1(N)$ を開部分スキームとして含み, $Y_1(N)$ のコンパクト化となる. $Y_1(N), X_1(N)$ を modular curve と呼ぶ.

$X_1(N)_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]}$ のカスプを

$$\{cusp\} := X_1(N)_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} \setminus Y_1(N)_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]}$$

と定義する.

3.1.2 幾何的な modular form の定義

R を $\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$-代数, $k \in \mathbb{Z}$, $N \geq 5$ とする.

定義 1. f が 重さ k, レベル $\Gamma_1(N)$ の R 上の modular form であるとは,
任意の R-代数 A に対して, A 上の楕円曲線 E/A とその $\Gamma_1(N)$ 構造 P と E/A の

non-vanishing differential form ω の三つ組 $(E, P, \omega)_{/A}$ から値 $f(E, P, \omega) \in A$ を対応させるルールで次を満たすこととする：

(1) 値は三つ組の同型類上で決まる.

(2) base change map $B/A \to B'/A$ と可換.

(3) 任意の $\alpha \in A^{\times}$ に対して

$$f(E, P, \alpha^{-1}\omega) = \alpha^k f(E, P, \omega).$$

■

元々の定義は次のようなものである.
$N \geq 4$ のとき $Y_1(N)/R := Y_1(N) \times_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} Spec(R)$ は fine moduli であることから, universal curve $\underline{E}^U/Y_1(N) := (E^{univ}, P^{univ})_{/Y_1(N)}$ が存在する. このとき, f は $\underline{E}^U/Y_1(N)$ の relative cotangent sheaf $(t^*_{\underline{E}^U/Y_1(N)})^{\otimes k}$ の global section として定義する. 上の定義 1 は, この section としての定義を扱い易くしたものである.

3.1.3 q-展開

R を $\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$-代数とする. R 上の幾何的 modular form f のカスプ $\sigma \in X_1(N)/R$ での q-展開は Tate curve と呼ばれる $R((q)) = R[[q]][q^{-1}]$ 上の楕円曲線における値として定義する：

$$f(Tate(q)_\sigma, P_\sigma, \omega_\sigma) \in R((q)).$$

f が任意のカスプに対して $R[[q]]$ に値をとるとき正則であるといい, R 上の重さ k でレベル $\Gamma_1(N)$ の正則 modular form 全体のなす空間を $M(R, k, N)$ と書く.

ここで $X_1(N)$ 上の層 $\underline{\omega}$ を $Y_1(N)$ 上で $t^*_{\underline{E}^{univ}/Y_1(N)}$ であり, かつ正則な modular form のなす層と定義する：

$$H^0(X_1(N)/R, \underline{\omega}^{\otimes k}) := M(R, k, N)$$

カスプでの値は Tate curve の評価から与える.

このとき次のような定理が知られている.

q-展開原理 **(q-expantion principle)** **.** 複素 modular form $f \in M_k(\Gamma_1(N))$ の $i\infty$ での展開を

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \ , \ (q = e^{\frac{2\pi i z}{N}})$$

とする．このとき, f が $R \subset \mathbb{C}$ 上定義された form であることと任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $a_n \in R$ であることは必要十分である．またこのとき

$$f(Tate(q)_\infty, P_\infty, \omega_\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \in R[[q]]$$

である． ■

また, 次の定理も重要なので紹介しておく．

基底変換定理 (base change theorem)． $\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$-代数 R とする．このとき次のような等式が成り立つ：

$$H^0(X_1(N)/\mathbb{Z}[\frac{1}{N}], \underline{\omega}^{\otimes k}) \otimes_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} R = H^0(X_1(N)/R, \underline{\omega}^{\otimes k}).$$

■

3.2 証明

重さ k は偶数の時に限って述べる．$N \geq 5$ とする．

複素 modular form $f \in M_k(\Gamma_1(N)) \cap \mathbb{Z}[\frac{1}{N}][[q]]$ のカスプ $i\infty$ における展開を $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ とする．

このとき q-展開定理より, f は $\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$ 上定義された重さ k でレベル $\Gamma_1(N)$ の正則幾何的 modular form であり, 無限遠に対応する Tate curve での値が

$$f(Tate(q)_\infty, P_\infty, \omega_\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \in \mathbb{Z}[\frac{1}{N}][[q]]$$

である．

素数 ℓ が $\ell \nmid N$ のとき $\mathbb{F}_\ell$ は $\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$-代数である．基底変換定理を $R = \mathbb{F}_\ell$ として適用することから次のような図式が成り立つ：

$$\begin{array}{ccc} H^0(X_1(N)/\mathbb{Z}[\frac{1}{N}], \underline{\omega}^{\otimes k}) \otimes_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} \mathbb{F}_\ell & = & H^0(X_1(N)/\mathbb{F}_\ell, \underline{\omega}^{\otimes k}) \\ \downarrow{\scriptstyle q-expantion} & & \downarrow{\scriptstyle q-expantion} \\ \mathbb{F}_\ell[[q]] & = & \mathbb{F}_\ell[[q]]\ . \end{array}$$

これにより, f はちゃんと $\mathbb{F}_\ell$ 上定義された form であることが保証され, また $X_1(N)/\mathbb{F}_\ell$ のカスプ ∞ における q-展開が

$$f(Tate(q) \times_{Spec\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]((q))} Spec\mathbb{F}_\ell((q)), P, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \bmod \ell) q^n \in \mathbb{F}_\ell[[q]]$$

になる.

層の理論から

$$\begin{aligned}\deg(\underline{\omega}^{\otimes k}) &= \deg(\mathrm{div}(f)) \\ &= \sum_{P \in X_1(N)/\overline{\mathbb{F}}_\ell} \mathrm{ord}_P(f) \geq \mathrm{ord}_\infty(f)\end{aligned}$$

が成り立つ. また, 小平-Spencer 同型

$$\underline{\omega}^{\otimes 2} \simeq \Omega^1_{X_1(N)/\mathbb{F}_\ell}(\{cusp\})$$

により

$$\begin{aligned}\deg(\underline{\omega}^{\otimes k}) &= \frac{k}{2}\deg(\underline{\omega}^{\otimes 2}) \\ &= \frac{k}{2}\deg(\Omega^1_{X_1(N)/\mathbb{F}_\ell}(\{cusp\})) \\ &= \frac{k}{2}(2g-2+\#\{cusp\})\end{aligned}$$

となる. ここで g は $X_1(N)/\mathbb{F}_\ell$ の種数である. よって f が $f \not\equiv 0 \mod \ell$ であれば

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}_\infty(f) &\leq \frac{k}{2}(2g-2+\#\{cusp\}) \\ &= k\frac{N^2}{24}\prod_{p|N}(1-\frac{1}{p^2}) \\ &= k\frac{[\Gamma(1):\Gamma_1(N)]}{12}\end{aligned}$$

となることが言える. これは Sturm の定理の対偶である.

以上が Doi-Ohta による証明である. この方法なら曲線をより高次元な多様体に置き換えることで拡張することが見込める.

参考文献

[1] K. Doi , M. Ohta, On some congruence between cusp forms on $\Gamma_0(N)$, *Springer Lect. Notes in Math.* **601**(1977), 91-105.

[2] E. Z. Goren, Lecture on Hilbert Modular Varieties and Modular Forms, *CRM Monograph Series* **14** American Matheamtical Society (2002).

[3] M. R. Murty, Congruences between Modular forms, *London Math. Soc. Lec. Notes* **247**(1997), 309-320.

[4] J. Sturm, On the congruence of modular forms, *Springer Lect. Notes in Math.* **1240**(1984), 275-280.

[5] 斎藤 毅, Fermat 予想 1, 2, 岩波講座 現代数学の展開 **11, 12** (2000, 2008).

Yuuki Takai
Graduate School of Mathematics
Nagoya University
Chikusa-ku, Nagoya 464-8602
Japan
Mail: m05026c@math.nagoya-u.ac.jp