1つだけ複素係数を持つ多重 Dirichlet 級数の解析接続

岡本卓也 (名大多元)

11月1日

abstract

本稿ではある特別な形をした多重 Dirichlet 級数に対して Mellin-Barnes の積分公式を用いて解析接続と possible singularities を求める.

発表の場を与えてくださった塩見大輔さんにこの場を借りて感謝の気持ちを伝えたいと思います.

1 Introduction and statement of results

r を固定された正の整数，$s = \sigma + it$ を複素変数とする．このとき，複素係数 $a(n)$ を用いて次のように Dirichlet 級数を定義する．

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s}.$$

このとき，以下のことを仮定する．

(i) $L(s)$ は $\sigma > 1 + \epsilon > 1$ で広義一様絶対収束する，

(ii) $L(s)$ は $\mathbb{C}$ に有理型に解析接続され，$s = 1$ でのみ高々位数 1 の極を持つ.

ここでは次のような上で定義した複素係数 $a(n)$ を持つ多重 Dirichlet 級数を導入する．

$$L_{r,i}((s_1,\ldots,s_r);a)=\sum\cdots\sum_{1\le m_1<\cdots<m_r<\infty} a(m_i)m_1^{-s_1}m_2^{-s_2}\cdots m_r^{-s_r}, \tag{1.1}$$

ただし，$s_k=\sigma_k+it_k$ $(1\le k\le r)$ とする．

Masri [6] は次のような多重 Dirichlet 級数を導入した．

F を代数体，$\mathcal{O}_F$ をその整数環とし，F の整イデアル I に対して $N_{F/\mathbb{Q}}I=|\mathcal{O}_F:I|$ とする．このとき，r は固定された変数，$F_1,\ldots,F_r$ を代数体，$s_1,\ldots,s_r$ を複素変数とするとき多重デデキントゼータ関数を次のように定義する．

$$\sum\cdots\sum_{\substack{1\le N_{F_1/\mathbb{Q}}I_1<\cdots<N_{F_r/\mathbb{Q}}I_r<\infty\\ I_1\subset\mathcal{O}_{F_1},I_2\subset\mathcal{O}_{F_2},\ldots,I_r\subset\mathcal{O}_{F_r}}}(N_{F_1/\mathbb{Q}}I_1)^{-s_1}(N_{F_2/\mathbb{Q}}I_2)^{-s_2}\cdots(N_{F_r/\mathbb{Q}}I_r)^{-s_r}. \tag{1.2}$$

特に $F_k=\mathbb{Q}$ $(1\le k\le r)$ とおくと (1.2) はよく知られた Euler-Zagier の多重和 [11] になる．

$$\sum\cdots\sum_{1\le m_1<\cdots<m_r<\infty} m_1^{-s_1}m_2^{-s_2}\times\cdots\times m_r^{-s_r}. \tag{1.3}$$

また，(1.1) で i $(1\le i\le r)$ を固定し，$F_k=\mathbb{Q}$ $(k\ne i)$,

$$a(m_i)=|\{\{0\}\ne I\subset\mathcal{O}_{F_i}\mid(N_{F_i/\mathbb{Q}}I)=m_i\}|.$$

と見ることにより (1.1) は (1.2) の特別な場合と見なすことができる．

よって，(1.1) と (1.2) は (1.3) の一般化である．$i=1,r$ のときは Masri [6] により Euler-Maclaurin summation を用いて解析接続と possible singularites を求め，$i=1,r$ のときの (1.1) のリーマンゼータ関数やある Dirichlet 級数を用いた関数関係式を示した．また，多重ゼータ関数の解析接続の方法にはいくつかの方法がある．Zhao の方法 [12] は Gel'fand-Shilov の一般関数の理論に基づくものであり，秋山・江上・谷川の方法 [1] は Euler-Maclaurin summation を用いる ([6] で用いられた方法)．そして，松本 [7] は Mellin-Barnes 積分を用いる方法により解析接続を与えた．

ここでは (1.1) の解析接続と possible singularites を求める．そして，今回最も重要なことは二重数学的帰納法と Mellin-Barnes 積分を用いて (1.1) の解析接続を考えるということである．

まず，Mellin-Barnes 積分の公式を与える．

Lemma 1.1

s, λ を複素変数とし, $\Re s > 0$, $|\arg \lambda| < \pi$ で $\lambda \neq 0$ とする．このとき

$$\Gamma(s)(1+\lambda)^{-s} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \Gamma(s+z)\Gamma(-z)\lambda^z dz, \tag{1.4}$$

が成り立つ.

ただし，$-\Re s < c < 0$ で積分路は垂直直線 $\Re z = c$ とする.

証明は [10](Section14.51, p.289, Corollary) を参照.

ここでは (1.1) で定義された 1 つ複素係数を持つ多重 Dirichlet 級数の解析接続を与える.
まず，(1.1) の広義一様絶対収束領域を考える.

Proposition 1.2

i を 1 つ固定し，領域 $A_{r,i}$ と $B_{r,i}$ を次のようにおく.

$$A_{r,i} = \{(s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{C}^r \mid \Re(s_{r-k+1} + \cdots + s_r) > k + \epsilon (r - i + 1 \leq k \leq r)\}$$
$$B_{r,i} = \{(s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{C}^r \mid \Re(s_{r-k+1} + \cdots + s_r) > k \; (1 \leq k \leq r - i)\}.$$

このとき，級数 *(1.1)* は領域 $A_r \cap B_r$ で広義一様絶対収束する.

これは [6] の Proposition 1.1 より明らかである．ここで，$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする.

Theorem 1.3

(1) 級数 *(1.1)* は $s_1, \dots, s_r$ の関数として, 全 $\mathbb{C}^r$ 空間に有理型で解析接続される.

(2) 関数 $L_{r,i}$ は次の等式の 1 つにより定義される $\mathbb{C}^r$ 空間の部分空間にのみ存在する *possible singularities* を除いて正則である.

$$\begin{aligned} s_r &= 1, \\ s_r + s_{r-1} &= 2, 1, -2n \quad (n \in \mathbb{N}_0), \\ s_r + s_{r-1} + s_{r-2} &= 3 - n \quad (n \in \mathbb{N}_0), \\ &\cdots \\ s_r + \cdots + s_r &= r - n \quad (n \in \mathbb{N}_0). \end{aligned}$$

この証明は Section 2 で与える．

Theorem 1.4
もし，$L_i(s)$ $(1 \leq i \leq r)$ が整関数ならば，このとき

$$L_{r,r}((s_1, \ldots, s_r); a)$$

もまた整関数である．

この定理は [9] の Theorem 2 のアナロジーである．Theorem 1.4 の証明は Theorem 1.3 と同様にできるのでここでは省く．

Theorem 1.4 の条件のもとで，$L_{r,r}$ は次のような多重 Dirichlet L 関数の特別な場合と見なせる．

$$\sum \cdots \sum_{1 \leq m_1 < \cdots < m_r < \infty} \chi_1(m_1) m_1^{-s_1} \chi_2(m_2) m_2^{-s_2} \cdots \chi_r(m_r) m_r^{-s_r}, \tag{1.5}$$

ただし，χ_k $(k \neq r)$ は mod 1 の Dirichlet 指標で χ_r は non-principal とする．

多重 Dirichlet L 関数 (1.5) は Goncharov [3]，秋山，石川 [2] や 石川 [4, 5] により研究されている．

2 Proof of Theorem 1.3

この章では Theorem 1.3 の Mellin-Barnes の積分公式を用いた証明を与える．これは，[6] の Theorem 1.2 の別証明になっている．

この証明はどの $1 \leq i \leq r$ から証明するかが重要である．まず，$i = 1$ のときを複素変数の個数 r に関する数学的帰納法で示し，それを用いて $i = r$ のときを示し，$i = r$ と同様な方法で $i = r-1, r-2, \ldots 2$ のときを示していく．以下，$s_i = \sigma_i + it_i$ とおく $(1 \leq i \leq r)$．

まず，$i = 1$ として Theorem 1.3 を示す．この証明は $r = 2$ のときは $L(s_1 + s_2 + 2n)$ は仮定より $s_2 + s_1 = 1 - 2n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ のときに 1 位の極となり，それはリーマンゼータ関数の自明な零点とで打ち消しあい possible singularities にならず $r \geq 2$ でそこは影響しないことにのみ注意すれば (1.3) の多重和の Mellin-Barnes 積分を用いる解析接続の方法と同じよう

に証明できる ([7]，[8] を参照)．よって，$i=1$ のときの証明は読者に任せる．

次に，$i=r$ とし r に関する帰納法で Theorem 1.3 を示す．

まず，$\sigma_1>1$, $\sigma_2>1+\epsilon$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}L_{2,2}((s_1,s_2);a)&=\sum_{m_2=1}^{\infty}a(m_2)m_2^{-s_2}\sum_{m_1=1}^{m_2-1}m_1^{-s_1}\\&=\sum_{m_2=1}^{\infty}a(m_2)m_2^{-s_2}\sum_{m_1=1}^{\infty}m_1^{-s_1}-\sum_{m_2=1}^{\infty}a(m_2)m_2^{-s_2-s_1}\\&\quad-\sum_{m_1=1}^{\infty}m_1^{-s_1}\sum_{m_2=1}^{m_1-1}a(m_2)m_2^{-s_2}\\&=L(s_2)\zeta(s_1)-L(s_1+s_2)-L_{2,1}((s_1,s_2);a),\end{aligned}\tag{2.1}$$

と変形する (絶対収束する領域で考えているので和の交換は可能である)．ここで (2.1) の第一項目はリーマンゼータ関数と $L(s)$ の積で第二項目は $L(s)$ となる．よって，問題は第三項目である．しかし，これは $i=1$ のときの級数である．よって，先ほどの結果と合わせることにより，$L_{2,2}((s_1,s_2);a)$ は全 $\mathbb{C}^2$ 空間に有理型として解析接続できる．また，$i=1$ の結果より possible singularities は

$$\begin{aligned}s_1&=1, s_2=1,\\s_2+s_1&=2,1,-2n\quad(n\in\mathbb{N}_0).\end{aligned}$$

しかし，$s_1=1$ のときは (2.1) の第一項目の極と第三項目で現れる極で打ち消しあい，$s_1=1$ のときは極にはなり得ない．よって，possible singularities は

$$\begin{aligned}s_2&=1,\\s_2+s_1&=2,1,-2n\quad(n\in\mathbb{N}_0).\end{aligned}$$

よって，$i=r$ のときは Theorem 1.3 は成り立つ．

次に $L_{r-1,r-1}$ までは Theorem 1.3 が成り立つとして，$L_{r,r}$ のときに Theorem 1.3 が成り立つことを示す．まず，$\sigma_i>1\quad(1\le i\le r-1)$, $\sigma_r>1+\epsilon$

とする．このとき，

$$L_{r,r}((s_1,\ldots,s_r);a)=\sum_{m_r=1}^{\infty}\sum_{m_{r-1}=1}^{m_r-1}\cdots\sum_{m_1=1}^{m_2-1}a(m_r)m_1^{-s_1}m_2^{-s_2}\ldots m_r^{-s_r}$$
$$=\sum_{m_r=1}^{\infty}\sum_{m_{r-1}=1}^{m_r-1}\cdots\sum_{m_2=1}^{m_3-1}\sum_{m_1=1}^{\infty}a(m_r)m_1^{-s_1}m_2^{-s_2}\ldots m_r^{-s_r}$$
$$-\sum_{m_r=1}^{\infty}\sum_{m_{r-1}=1}^{m_r-1}\cdots\sum_{m_2=1}^{m_3-1}\sum_{m_1=m_2+1}^{\infty}a(m_r)m_1^{-s_1}m_2^{-s_2}\ldots m_r^{-s_r}$$
$$-\sum_{m_r=1}^{\infty}\sum_{m_{r-1}=1}^{m_r-1}\cdots\sum_{m_2=1}^{m_3-1}a(m_r)m_2^{-s_1-s_2}\ldots m_r^{-s_r}$$
$$=L_{r-1,r-1}((s_2,\ldots,s_r);a)\zeta(s_1)-L_{r-1,r-1}((s_1+s_2,s_3,\ldots,s_r);a)$$
$$-\sum_{m_r=1}^{\infty}\sum_{m_{r-1}=1}^{m_r-1}\cdots\sum_{m_2=1}^{m_3-1}\sum_{m_1=1}^{\infty}a(m_r)m_r^{-s_r}\ldots m_2^{-s_2-s_1}(1+m_1/m_2)^{-s_1} \tag{2.2}$$

と変形する．ここで (2.2) の第一項目は $L_{r-1,r-1}((s_2,\ldots,s_r);a)$ とリーマンゼータ関数との積で第二項目は $L_{r-1,r-1}((s_1+s_2,\ldots,s_r);a)$ となる．よって問題は第三項目である．ここで，$s=s_1$，$\lambda=m_1/m_2$ として Mellin-Barnes 積分を用いると

$$\sum_{m_r=1}^{\infty}\sum_{m_{r-1}=1}^{m_r-1}\cdots\sum_{m_2=1}^{m_3-1}\sum_{m_1=1}^{\infty}a(m_r)m_r^{-s_r}\ldots m_2^{-s_2-s_1}(1+m_1/m_2)^{-s_1}$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{\Gamma(s_1+z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s_1)}L_{r-1,r-1}((s_1+s_2+z,\ldots,s_r);a)\zeta(-z)dz.$$

ただし，

$$\max\{-\sigma_1,-\epsilon-1\}<c<-1.$$

とする．

今，積分路を $\Re z=N-\eta$ (N は正の整数，η 小さい正の数) にシフト

する．そして，極の留数を計算すると，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{\Gamma(s_1+z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s_1)}L_{r-1,r}((s_1+s_2+z,\ldots,s_r);a)\zeta(-z)dz\\
=&\frac{1}{s_1-1}L_{r-1,r-1}((s_1+s_2-1,s_3,\ldots,s_r);a)\\
&+\sum_{l=0}^{N-1}\binom{-s_1}{l}L_{r-1,r-1}((s_1+s_2+l,s_3,\ldots,s_r);a)\zeta(-l)\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{(N-\eta)}\frac{\Gamma(s_1+z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s_1)}L_{r-1,r-1}((s_1+s_2+z,\ldots,s_r);a)\zeta(-z)dz
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

を得る．(2.3) の最後の積分は N が任意だから全 $\mathbb{C}^r$ 空間に解析接続される．よって，(2.2) と (2.3) により $L_{r,r}$ は次の等式の１つにより定義される $\mathbb{C}^r$ 空間の部分空間にのみ存在する possible singularities を除いて正則である．

$$
\begin{aligned}
s_r=1,\ s_1&=1,\\
s_r+s_{r-1}&=2,1,-2n \quad (n\in\mathbb{N}_0),\\
s_r+s_{r-1}+s_{r-2}&=3-n \quad (n\in\mathbb{N}_0),\\
&\cdots\\
s_r+\cdots+s_1&=r-1-n \quad (n\in\mathbb{N}_0).
\end{aligned}
$$

しかし，$s_1=1$ のときは (2.2) の第一項目の極と (2.3) の第一項目の極で打ち消しあい，$s_1=1$ のときは極にはなり得ない．よって，possible singularities は

$$
\begin{aligned}
s_r&=1,\\
s_r+s_{r-1}&=2,1,-2n \quad (n\in\mathbb{N}_0),\\
s_r+s_{r-1}+s_{r-2}&=3-n \quad (n\in\mathbb{N}_0),\\
&\cdots\\
s_r+\cdots+s_1&=r-1-n \quad (n\in\mathbb{N}_0).
\end{aligned}
$$

よって，$i=r$ のときは Theorem 1.3 が成り立つ．後は $i=r-1,r-2,\ldots 2$ のときに Theorem 1.3 を示せばよいが，これは $i=r$ のときと同様にできるので読者に任せる．

参考文献

[1] S. Akiyama, S. Egami and Y. Tanigawa, Analytic continuation of multiple zeta functions and their values at non-positive integers, Acta Arith, 98 (2001), 107-116.

[2] S. Akiyama and H. Ishikawa, On analytic continuation of multiple L-functions and related zeta-functions, In: Analytic number theory (Beijing/Kyoto, 1999), 1-16, Dev. Math., 6, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002

[3] A. B. Goncharov, Multiple polylogarithms, cyclotomy and modular complexes. Math. Res. Letters, 5 (1998), 497-516.

[4] H. Ishikawa, On analytic properties of multiple L-functions, In: Analytic extenshion formulas and their applications (Fukuoka, 1999/Kyoto, 2000), 105-122, Int. Soc. Anal. Appl. Comput., 9, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001

[5] H. Ishikawa, A multiple character sum and a multiple L-function, Arch. Math. 79 (2002), 439-448.

[6] R. Masri, Multiple Dedekind zeta functions and evaluations of extend multiple zeta values, J. Number Theory, 115 (2005), 295-309.

[7] K. Matsumoto, Asymptotic expansions of double zeta-functions of Barnes, of Shintani, and Eisenstein series, Nagoya Math. J., 172 (2003), 59-102.

[8] K. Matsumoto, The analytic continuation and the asymptotic behaviour of certain multiple zeta-functions I, J. Number Theory, 101 (2003), 223-243.

[9] K. Matsumoto and Y. Tanigawa, The analytic continuation and the order estimate of multiple Dirichlet series, J. Théor. Nombres Bordeaux 15 (2003), 267-274.

[10] E. T. Whittaker and G. N. Watson, A Course of Modern Analysis, Cambridge Univ. Press, 1927.

[11] D. Zagier, Values of zeta functions and their applications, In: First European Congr. Math. Vol. II, (eds. A. Joseph *et al.*), Progr. Math., 120, Birkhäuser, 1994, pp. 497-512.

[12] J. Zhao, Analytic continuation of multiple zeta functions, Proc. Amer. Math. Soc., 128 (2000), 1275-1283.

Takuya Okamoto
Graduate School of Mathematics
Nagoya University
Chikusa-ku, Nagoya 464-8602
Japan
Mail:m07011y@math.nagoya-u.ac.jp